ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

HASSAN OUKILI

Sur la convergence forte des moyennes des opérateurs affines positifs

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 11, nº 1 (1990), p. 101-114

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1990_5_11_1_101_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XI, n° 1, 1990

Sur la convergence forte des moyennes des opérateurs affines positifs

HASSAN OUKILI(*)

RÉSUMÉ. — Soient $(T_i\,;\ 1 \leq i \leq k)$ k opérateurs affines positifs sur un Banach de Riesz Réflexif B, tels que :

$$\forall\, i\,;\ 1 \leq i \leq k\,,\quad \sup_n \|A(n, T_i)\| < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_n \|A(n, T_i)(0)\| < +\infty$$

où $A(n, T) : \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} T^m\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Alors,

a) pour tout $f \in B$, $\displaystyle \frac{1}{n_1 \ldots n_k} \sum_{m_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{m_k=0}^{n_k-1} T_1^{m_1} \circ \cdots \circ T_k^{m_k} f$ converge fortement vers un point fixe de B, quand $n_1, \ldots, n_k \to +\infty$ (indépendamment).

b) l'ensemble $\mathrm{Fix}(T_1) + (I - T_1)B$ est dense dans B.

On montre de même la version continue de ce résultat.

ABSTRACT. — Let $(T_i\,;\ 1 \leq i \leq k)$ k positive affine operators in Reflexif Banach Lattice B, such that :

$$\forall\, i\,;\ 1 \leq i \leq k\,,\quad \sup_n \|A(n, T_i)\| < +\infty \quad \text{and} \quad \sup_n \|A(n, T_i)(0)\| < +\infty$$

where $A(n, T) : \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} T^m\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Then,

a) for all $f \in B$, $\displaystyle \frac{1}{n_1 \ldots n_k} \sum_{m_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{m_k=0}^{n_k-1} T_1^{m_1} \circ \cdots \circ T_k^{m_k} f$ converges strongly to a fixed point in B, when $n_1, \ldots, n_k \to +\infty$ (independently).

b) the set $\mathrm{Fix}(T_1) + (I - T_1)B$ is dense in B.

We prove the continuous parameter of this result.

(*) Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Fes, B.P. 1796, Atlas Fes Maroc

I. Introduction

Soit B un Banach de Riesz (Banach réticulé tel que $|x| \leq |y|$ entraîne $\|x\| \leq \|y\|$); B^+ désigne son cône positif et T un opérateur affine sur B (i.e. $T = S + a$, S est un opérateur linéaire et a un élément fixé de B). Tous les opérateurs affines seront supposés continus, dans ce cas, on a :

$$\|T\| = \|S\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|Sf\| .$$

L'opérateur T est dit positif (resp. à moyennes bornées) si $TB^+ \subset B^+$ (resp. $\sup_n \|A(n,T)\| < +\infty$),

avec : $$A(n,T) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} T^m , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^* .$$

On montre, que tout opérateur linéaire positif est continu (voir Schaefer [7]).

Une famille $\Gamma = (T(t)\,,\ t \geq 0)$ d'opérateurs affines définis sur B, est un semi-groupe si :

$$T(t+s) = T(t) \circ T(s) \quad \forall\, t\,,\, s \geq 0 .$$

Le semi-groupe Γ est fortement continu (resp. fortement mesurable), si : pour tout f élément de B, l'application :

$$t \rightarrow T(t)f \text{ est continue (resp. mesurable)};$$

on peut, dans ce cas, définir l'opérateur affine, noté $A(\alpha, \Gamma)$ par :

$$A(\alpha,\Gamma)f = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha T(t)f \,\mathrm{d}t , \quad \forall\, \alpha > 0 , \forall\, f \in B .$$

Le semi-groupe Γ est à moyennes bornées, si :

$$\sup_{\alpha > 0} \|A(\alpha,\Gamma)\| < +\infty .$$

Nous montrons, dans ce travail que, si $(T_i,\ 1 \leq i \leq k)$ sont k opérateurs affines positifs, à moyennes bornées sur B Banach de Riesz Réflexif et tels que :

$$\sup_n \|A(n,T_i)(0)\| < +\infty , \quad \forall\, i\,,\ 1 \leq i \leq k ;$$

alors, pour tout $f \in B$,

$$\frac{1}{n_1 \dots n_k} \sum_{m_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{m_k=0}^{n_k-1} T_1^{m_k} \circ \dots \circ T_k^{m_k} f$$

converge fortement vers un point fixe de B quand $n_1, \dots, n_k$ tendent vers $+\infty$. le même résultat sera démontré pour k semi-groupes fortement mesurables d'opérateurs affines positifs.

II. Théorèmes tauberiens

Notation 2.1. — Soit k un entier strictement positif.

Pour $u = (u_1, \dots, u_k)$ et $v = (v_1, \dots, v_k)$ deux éléments de $\mathbf{R}_+^k$, on note :

$$|u| = \prod_{i=1}^{k} u_i \quad ; \quad u \cdot v = \prod_{i=1}^{k} u_i v_i \,,$$

$v \leq u$ (resp. $v < u$) signifie que $v_i \leq u_i$ (resp. $v_i < u_i$) $\forall\, i,\ 1 \leq i \leq k$; $1 = (1, \dots, 1)$; $(u+1)^v = \prod_{i=1}^{k} (u_i + 1)^{v_i}$; $u \to \infty$ (resp. $u \to 0$) signifie que $u_i \to +\infty$ (resp. $u_i \to 0$) $\forall\, i,\ 1 \leq i \leq k$.

La technique utilisée dans la démonstration du théorème 2.2 ci-dessous, est inspirée de Karamatae (voir, Titchmarsh [8]).

THÉORÈME 2.2. — *Soit $(a(u)\ u \in \mathbf{N}^k)$ une famille d'éléments positifs d'un Banach de Riesz B (resp. famille bornée d'éléments d'un Banach B quelconque) telle que :*

1) la série $\sum_{v \in \mathbf{N}^k} e^{-\lambda \cdot v} a(v)$ *existe pour tout* $\lambda \in \mathbf{R}_+^k$ *strictement positif.*

2) $\lim_{\lambda \to \infty} \text{forte}\, |\lambda| \sum_{v} e^{-\lambda \cdot v} a(v)$ *existe.*

Alors : $\lim_{u \to \infty} \text{forte}\, \frac{1}{|u|} \sum_{v < u} a(v)$ *existe.*

Démonstration. — On suppose, pour simplifier les calculs que $k = 2$. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[\,0\,,\,1\,]$ par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq {}^1/_e \\ \dfrac{1}{x} & \text{sinon,} \end{cases}$$

posons pour u_i entier strictement positif, $\lambda_i = \dfrac{1}{u_i}$; alors :

$$\frac{1}{|u|}\sum_{v<u} a(v) = |\lambda| \sum_{v=(v_1,v_2)} \prod_{i=1}^{2} g\left(e^{-\lambda_i v_i}\right) e^{-\lambda_i v_i} a(v)\,.$$

Par hypothèse, soit :

$$\text{(1)} \qquad b = \lim_{\lambda \to 0} |\lambda| \sum_{v} e^{-\lambda \cdot v} a(v)\,.$$

Nous allons montrer que :

$$\text{(2)} \qquad \lim_{\lambda \to 0} |\lambda| \sum_{v=(v_1,v_2)} \prod_{i=1}^{2} g\left(e^{-\lambda_i v_i}\right) e^{-\lambda_i v_i} a(v) = b \left[\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\,.$$

D'après (1) :

$$\lim_{\lambda \to 0} |\lambda| \sum_{v=(v_1,v_2)} \left[\left(e^{-\lambda_1 v_1}\right)^n e^{-\lambda_1 v_1}\right] \left[\left(e^{-\lambda_2 v_2}\right)^m e^{-\lambda_2 v_2}\right] a(v) =$$
$$= \frac{b}{(n+1)(m+1)}$$

pour tous n et m entiers naturels; l'égalité (2) est donc vérifiée, lorsque g est remplacée par un polynôme.

Soit $\epsilon > 0$, il existe alors, une fonction h, continue sur l'intervalle $[\,0\,,\,1\,]$, telle que :

$$g \leq h \quad \text{et} \quad \int_0^1 (h(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \leq \frac{\epsilon}{3}$$

(prendre par exemple, h une fonction affine sur l'intervalle $[\,e^{-1} - \delta\,,\,e^{-1}\,]$ et égale à g ailleurs, $\delta > 0$ convenable).

Il existe donc un polynôme R, tel que $|h(x) - R(x)| \leq {}^{\epsilon}/_{3}$, $\forall\, x \in [\,0\,,\,1\,]$; le polynôme $Q = R + {}^{\epsilon}/_{3}$ vérifie donc :

$$g \leq Q \quad \text{et} \quad \int_0^1 (Q(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \leq \epsilon\,.$$

Le même procédé, donne un polynôme P tel que :

$$P \leq g \quad \text{et} \quad \int_0^1 (g(x) - P(x))\,\mathrm{d}x \leq \epsilon\,.$$

Cas où B est un Banach de Riesz et $a(u) \geq 0$.

Soient :

$$X_\lambda = |\lambda| \sum_{v=(v_1,v_2)} \prod_{i=1}^{2} P\left(e^{-\lambda_i v_i}\right) e^{-\lambda_i v_i} a(v) - b\left[\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$$

$$Y_\lambda = |\lambda| \sum_{v=(v_1,v_2)} \prod_{i=1}^{2} g\left(e^{-\lambda_i v_i}\right) e^{-\lambda_i v_i} a(v) - b$$

et $$Z_\lambda = |\lambda| \sum_{v=(v_1,v_2)} \prod_{i=1}^{2} Q\left(e^{-\lambda_i v_i}\right) e^{-\lambda_i v_i} a(v) - b\left[\int_0^1 Q(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 .$$

Alors $X_\lambda \leq Y_\lambda \leq Z_\lambda$, $\forall\ \lambda > 0$.
Du fait que d'une part $\overline{\lim_{\lambda\to 0}}\ \|X_\lambda\| = \overline{\lim_{\lambda\to 0}}\ \|Z_\lambda\| = 0$,
et que d'autre part $\|Y_\lambda\| \leq \|X_\lambda\| + \|Z_\lambda\|$ (car B est de Riesz),
nous en déduisons $\overline{\lim_{\lambda\to 0}}\ \|Y_\lambda\| = 0$.

Cas où la famille $(a(u),\ u \in \mathbb{N}^2)$ est bornée dans un Banach B.

Soit $M = \sup\{\|a(u)\|,\ u \in \mathbb{N}^2\}$. Pour $\epsilon > 0$, soient h et R comme précédemment ; il est facile de voir que :

$$|h(x)h(y) - R(x)R(y)| \leq K'\frac{\epsilon}{3}, \quad \forall\ x, y \in [0, 1]$$

où $K' = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} (h) + \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |R(x)|$.

Posons :

$$I = \left\| |\lambda| \sum_v \left[\prod_{i=1}^{2} h\left(e^{-\lambda_i v_i}\right) e^{-\lambda_i v_i} - \prod_{i=1}^{2} R\left(e^{-\lambda_i v_i}\right) e^{-\lambda_i v_i}\right] a(v) \right\|$$

et $$J = \left\| |\lambda| \sum_v \left[\prod_{i=1}^{2} g\left(e^{-\lambda_i v_i}\right) e^{-\lambda_i v_i} - \prod_{i=1}^{2} h\left(e^{-\lambda_i v_i}\right) e^{-\lambda_i v_i}\right] a(v) \right\| ;$$

alors, d'une part $I \leq MK'\,(\epsilon/3)$ et l'on déduit que h vérifie l'égalité (2) ;

d'autre part :

$$J = M|\lambda| \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} h(e^{-\lambda_1 x}) \left[h(e^{-\lambda_2 z}) - g(e^{-\lambda_2 z})\right] e^{-(\lambda_1 x+\lambda_2 z)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$
$$+ M|\lambda| \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} g(e^{-\lambda_2 z}) \left[h(e^{-\lambda_1 x}) - g(e^{-\lambda_1 x})\right] e^{-(\lambda_1 x+\lambda_2 z)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$
$$\leq M\lambda_2 \int_{1/\lambda_2}^{+\infty} \left[h(e^{-\lambda_2 x}) - g(e^{-\lambda_2 x})\right] e^{-\lambda_2 x} \,\mathrm{d}x +$$
$$+ M\lambda_1 \int_{1/\lambda_1}^{+\infty} \left[h(e^{-\lambda_1 x}) - g(e^{-\lambda_1 x})\right] e^{-\lambda_1 x} \,\mathrm{d}x \,;$$

avec le changement de variables $Z = e^{-\lambda_i x}$, on trouve :

$$J \leq 2M \int_0^{e^{-1}} h(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{3} M\epsilon,$$

ce qui achève la démonstration du théorème □

THÉORÈME 2.3.— *Soit* $(a(u)\ u \in \mathbf{N}^k)$ *une famille d'un espace de Banach* B*, telle que :*

$$\sup_{u\in\mathbf{N}^k} \frac{1}{|u|} \left\| \sum_{v<u} a(v) \right\| \leq M \quad (M > 0)\,;$$

alors :

(3) $$A_\lambda = |\lambda| \sum_{v\in\mathbf{N}^k} \frac{1}{(\lambda+1)^{v+1}}\, a(v) \quad \textit{existe}$$

et $\|A_\lambda\| \leq M\,,\ \forall\, \lambda \in \mathbf{R}^k\,,\ \lambda > 0\,.$

Démonstration.— La démonstration se fait par récurrence sur la dimension k.

Si $k = 1$; posons $s(n) = \sum_{m=0}^{n} x(m)$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, alors la série définie par :

$$B_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{x(m)}{(\lambda+1)^{m+1}} = \lambda \sum_{m=0}^{n-1} \frac{m+1}{(\lambda+1)^{m+2}}\, \frac{s(m)}{m+1} + \frac{n+1}{(\lambda+1)^{n+1}}\, \frac{s(n)}{n+1}$$

est normalement convergente et l'on a de plus :

$$\left\| \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(n)}{(\lambda+1)^{n+1}} \right\| \leq \frac{\lambda}{\lambda+1}\, M\,.$$

Supposons que la propriété soit vraie pour $k-1$; soit $(a(u)\ u \in \mathbf{N}^k)$ comme dans l'énoncé du théorème; alors, pour chaque entier naturel n, la famille $(a(n,w)\ w \in \mathbf{N}^{k-1})$ est à moyennes bornées, plus précisément :

$$\sup_{v \in \mathbf{N}^{k-1}} \frac{1}{|v|} \left\| \sum_{w<v} a(n,w) \right\| \le (2n+1)M ,$$

donc :

$$B(n,\alpha) = |\alpha| \sum_{v \in \mathbf{N}^{k-1}} \frac{a(n,v)}{(\alpha+1)^{v+1}} \quad \text{existe et} \quad \|B(n,\alpha)\| \le (2n+1)M ,$$

pour tout $\alpha \in \mathbf{R}^{k-1}$, $\alpha > 0$ et tout $n \in \mathbf{N}$.

Nous allons montrer qu'en fait :

$$\text{(4)} \qquad \sup_n \frac{1}{n} \left\| \sum_{m=0}^{n-1} B(m,\alpha) \right\| \le M , \quad \forall\, \alpha \in \mathbf{R}^{k-1} ,\ \alpha > 0 .$$

En effet, posons $Z(n,v) = \sum_{m=0}^{n-1} a(m,v)$, $\forall\, v \in \mathbf{N}^{k-1}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$; d'une part, nous avons :

$$\sum_{m=0}^{n-1} B(m,\alpha) = |\alpha| \sum_v \frac{Z(n,v)}{(\alpha+1)^{v+1}} ;$$

d'autre part :

$$\left\| \sum_{w<v} Z(n,w) \right\| = \left\| \sum_{(m,w)<(n,v)} a(m,w) \right\| \le n|v|M , \quad \forall\, v \in \mathbf{N}^{k-1} ,$$

il suffit donc d'appliquer l'hypothèse de récurrence pour avoir (4)

Nous venons donc de montrer que la suite $(B(n,\alpha),\ n \ge 0)$ est telle que :

$$\sup_n \frac{1}{n} \left\| \sum_{m=0}^{n-1} B(m,\alpha) \right\| \le M , \quad \forall\, \alpha \in \mathbf{R}^{k-1} ,\ \alpha > 0 ;$$

ce qui permet de conclure, d'après le 1[er]cas : $k=1$, que :

$$C(\gamma,\alpha) = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(n,\alpha)}{(\gamma+1)^{n+1}} \quad \text{existe et} \quad \|C(\gamma,\alpha)\| \le M ,$$

pour tout réel $\gamma > 0$ et tout $\alpha \in \mathbf{R}^{k-1}$, $\alpha > 0$. Ce qu'il fallait démontrer □

Remarques 2.4

a) En posant dans (3) $\lambda_n = e^{\alpha_n}$, $\forall\, n$, $1 \leq n \leq k$, nous obtenons :

$$A_\lambda = \left(\prod_{n=1}^{k}(e^{\alpha_n} - 1)\right)\sum_v e^{-(\alpha_1+\cdots+a_k)}e^{\alpha\cdot v}a(v) =$$

$$= \prod_{n=1}^{k}\left(\frac{1 - e^{-\alpha_n}}{\alpha_n}\right)|\alpha|\sum_v e^{-\alpha\cdot v}a(v)\,, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) > 0\,,$$

donc $\lim\limits_{\lambda\to 0} A_\lambda = \lim\limits_{\alpha\to 0}|\alpha|\sum\limits_v e^{-\alpha\cdot v}a(v)$ dès que l'une d'entre elles existe.

b) Soit $(a_n,\, n \geq 1)$ la suite définie par : $a_n = n(-1)^n$, sa somme partielle $S_n = \sum_{m=0}^{n} a_m$ est telle que $S_{2n} = n$, $S_{2n+2} = -n - 1$, donc :

$$\sup_n\left|\frac{S_n}{n}\right| < 1 \quad \text{et} \quad \frac{S_n}{n} \quad \text{diverge,}$$

pourtant :

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{(\lambda+1)^{n+1}} = 0\,.$$

COROLLAIRE 2.5.— *Soient $(T_i,\ 1 \leq i \leq k)$ k opérateurs affines, à moyennes bornées sur un Banach Réflexif B et tels que :*

$$\text{(5)} \qquad \sup_{n\in\mathbf{N}}\|A(n, T_i)(0)\| < +\infty\,, \quad \forall\, i,\ 1 \leq i \leq k\,.$$

Alors, pour tout f élément de B, $V(\lambda_i, T_i\ ;\ 1 \leq i \leq k)\, f$ converge fortement vers un point fixe de B, quand $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tendent vers 0; avec :

$$V(\lambda_i, T_i\ ;\ 1 \leq i \leq k) = |\lambda|\sum_{v\in\mathbf{N}^k}\frac{T^{v_1}\circ\cdots\circ T^{v_k}}{(\lambda+1)^{v+1}}\,.$$

Démonstration.— Pour $k = 1$, soit $T = T_1$; d'après la formule (5) et le théorème 2.3, nous avons :

$$\sup_{\lambda>0}\|V(\lambda, T)f\| < +\infty \quad \forall\, f \in B\,,$$

ce qui entraîne : $\sup\limits_{\lambda>0}\|V(\lambda, T)\| < +\infty$;

un calcul simple nous montre que :

$$\lim_{\lambda\to 0} \|TV(\lambda,T)f - V(\lambda,T)f\| = \lim_{\lambda\to 0} \|V(\lambda,T)f - V(\lambda,T)f\| = 0\,.$$

Comme la famille $(V(\lambda,T)f,\ \lambda > 0)$ est bornée dans le Banach réflexif B, il en existe donc une suite $(V(\lambda_n,T)f,\ n \geq 0)$ qui converge faiblement et par conséquent (d'après le théorème de Dotson [3]), $V(\lambda,T)f$ converge fortement vers un point fixe de B quand λ tend vers 0.

Les cas $k = 2$, ne présente aucune restriction, découle de l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\|V(\lambda_1,T_1)\circ V(\lambda_2,T_2)f - f_1\| \leq{}& \|V(\lambda_1,T_1)\circ V(\lambda_2,T_2)f - V(\lambda_1,T_1)f_2\|\\ &+ \|V(\lambda_1,T_1)f_2 - f_1\|\,,\\ &\forall\ f, f_1, f_2 \in B \text{ et } \forall\ \lambda_1\,,\ \lambda_2 > 0\,.\end{aligned}$$

Exemple 2.6.— Si $T = S + a$, $(a \neq 0)$, et S opérateur linéaire sur B tel que :

$$\|S\| < 1 \quad \text{alors} \quad \sup_n \|A(n,T)(0)\| < +\infty\,.$$

Grâce à l'opérateur de A. Brunel [1], H. Heinich [6] a donné une autre démonstration au résultat **1)** du corollaire 2.7 ci-dessous, dans le cas d'un seul opérateur linéaire positif.

COROLLAIRE 2.7.— *Soient $(T_i,\ 1 \leq i \leq k)$ k opérateurs affines à moyennes bornées sur un Banach réflexif B; pour tout f élément de B, $A(n_i,T_i : 1 \leq i \leq k)\ f$ converge fortement vers un point fixe de B, quand $n_1,\ldots,n_k$ tendent vers $+\infty$ indépendamment, dans l'un des cas suivants :*

1) chaque $(T_i\,,\ 1 \leq i \leq k)$ est positif et B est un Banach de Riesz,

2) chaque $(T_i\,,\ 1 \leq i \leq k)$ est à puissances bornées.

Dans les deux cas, l'ensemble $\operatorname{Fix} T_1 + (I - T_1)B$ *est dense dans B.*

Démonstration.— Notons $T = T_1$, alors $T = S + a$ où S est un opérateur linéaire et a élément fixé de B.

2) est évident. Le corollaire 2.5 et le théorème 2.2 montrent que pour tout $f \in B^+$, $A(n_i\,, T_i\,,\ 1 \leq i \leq k)\ f$ converge fortement, quand $n_1,\ldots,n_k$ tendent vers $+\infty$. Les relations : $T^n f = S^n f + T^{n-1}a$, $T^n(-f) = -T^n f + 2T^{n-1}a$ et $T^n(f+g) = T^n f + T^n g - T^{n-1}a$, $\forall\ f,\ g \in B$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, nous donnent, d'une part, la convergence de $A(n,T)f$, pour

tout $f \in B$, donc 1) s'en déduit facilement; d'autre part : $\operatorname{Fix} T = \operatorname{Fix} S + b$ et $(I-T)B = (I-S)B$, avec $b = \lim_{n\to\infty} A(n,T)a$, ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}&\text{l'adhérence de } \operatorname{Fix} T + (I-T)B \text{ est égale à}\\ &\text{l'adhérence de } \operatorname{Fix} S \oplus (I-S)B + b - a = B\,.\end{aligned}$$

Pour S, opérateur linéaire vérifiant le théorème ergodique en moyenne, nous avons toujours : $\operatorname{Fix} S \oplus \overline{(I-S)B} = B$ (voir Y. Yosida [9]).

Le corollaire 2.7 est une généralisation d'un travail fait par R. Emilion [5].

Remarques 2.8

a) L'exemple suivant est dû à I. Assani :

sur $\mathbf{R}^2$, soit T l'opérateur non positif, défini par :

$$T\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 2n(-1)^{n+1} \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

T est donc à moyennes bornées et pourtant, $(T^n x)/_n$ ne converge pas.

b) Tout opérateur linéaire positif, à moyennes bornées sur un espace normé de dimension finie est à puissances bornées
(i.e. $\sup_n \|T^n\| < +\infty$) voir Schaefer [7].

c) Y. Derriennic et M Lin [2], ont construit sur $\ell^1(\mathbf{N})$, un opérateur linéaire positif T, tel que $\sup_n \|A(n,T)\|_1 \leq 3$ et $\sup_n \|T^n\|_1 = +\infty$.

III. Cas continu

La démonstration du théorème 3.1 ci-dessous est identique à celle du théorème 2.1. Dans la suite, on notera $(]0\,,\,+\infty\,[)^k$ par $G(k)$.

THÉORÈME 3.1. — *Soit f une fonction mesurable positive (resp. bornée) de $G(k)$, dans un Banach de Riesz B (resp. Banach B quelconque), telle que :*

1) $\displaystyle\int_{G(k)} e^{-\lambda\cdot v} f(v)\,dv$ *existe, pour tout $\lambda \in G(k)$.*

2) $\displaystyle\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ (\text{resp. } \lambda\to\infty)}} |\lambda| \int_{G(k)} e^{-\lambda\cdot v} f(v)\,dv$ *existe dans B.*

Alors : $\lim\limits_{\substack{u\to\infty \\ (\text{resp. } u\to 0)}} \dfrac{1}{|u|}\displaystyle\int_0^{u_1}\cdots\int_0^{u_k} f(v)\,\mathrm{d}v$ *existe et égale à la limite de la condition 2).*

THÉORÈME 3.2. — *Soit f une fonction continue de $G(k)$ dans un Banach B, à moyennes bornées i.e :*

$$\sup_{u>0}\frac{1}{|u|}\left\|\int_0^{u_1}\cdots\int_0^{u_k} f(v)\,\mathrm{d}v\right\| \leq M \tag{6}$$

où M est un réel > 0. Alors :

$$V(\lambda, f) = |\lambda|\int_{G(k)} e^{-\lambda\cdot v} f(v)\,\mathrm{d}v \quad \textit{existe et} \quad \|V(\lambda, f)\| \leq M\,,$$

pour tout $\lambda \in G(k)$.

Démonstration. — Par récurrence sur la dimension k. $k = 1$: pour tout A réel strictement positif, posons :

$$f_A(t) = \int_{1/A}^{t} f(x)\,\mathrm{d}s\ ;$$

une intégration par parties nous donne :

$$\int_{1/A}^{A} e^{-\lambda s} f(s)\,\mathrm{d}s = e^{-\lambda A} f_A(A) + \lambda\int_{1/A}^{A} e^{-\lambda s} f_A(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad \forall\,\lambda > 0\,. \tag{7}$$

D'après (6), nous avons :

$$\left\|e^{-\lambda s} f_A(s)\right\| \leq Mse^{-\lambda s} + \frac{M}{A}e^{-\lambda s}\,, \quad \forall\, A,\ \lambda,\ s > 0\,;$$

ce qui montre (7), que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\lambda s} f(s)\,\mathrm{d}s$ existe, pour tout $\lambda > 0$.

D'autre part :

$$\left\|\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda s} f(s)\,\mathrm{d}s\right\| \leq \lambda M\int_0^\infty se^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s + \varlimsup_{A\to+\infty}\frac{\lambda M}{A}\int_0^\infty e^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s = M\,.$$

Supposons que l'hypothèse de récurrence soit vraie pour $k-1$ et soit f la fonction donnée par l'énoncé du théorème; alors : $\forall\, u_1, \ldots, u_k > 0$,

$$\frac{1}{u_1\ldots u_{k-1}}\left\|\int_0^{u_1}\cdots\int_0^{u_{k-1}}\left[\int_0^{u_k} f(v_1,\ldots,v_{k-1},v_k)\,\mathrm{d}v_k\right]\mathrm{d}v_1\ldots\mathrm{d}v_{k-1}\right\| \leq Mu_k\,.$$

Fixons le réel $u_k > 0$ et soit h la fonction définie sur $G(k-1)$ par :

$$h(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \int_0^{u_k} f(v_1, \ldots, v_{k-1}, x)\,\mathrm{d}x \;;$$

c'est une fonction continue sur $G(k-1)$, donc d'après l'hypothèse de récurrence : $\forall\ \alpha \in G(k-1)$,

$$V(\alpha, h) = \int_{G(k-1)} e^{-\alpha \cdot v} h(v_1, \ldots, v_{k-1})\,\mathrm{d}v \quad \text{existe et} \quad \|V(\alpha, h)\| \leq M u_k \;;$$

ou encore, par le théorème de Fubini :

$$\left\| \int_0^{u_k} \mathrm{d}x \left[\int_{G(k-1)} e^{-\alpha \cdot v} f(v_1, \ldots, v_{k_1, x})\,\mathrm{d}x \right] \right\| \leq M u_k\,,$$
$$\forall\ u_k > 0 \text{ et } \forall\ \alpha \in G(k-1)\;;$$

la conclusion devient donc conséquence du 1^er^ cas : $k = 1$ □

Le lemme 3.3 ci-dessous, nous permet de supposer dans la suite que les semi-groupes sont fortement continus.

LEMME 3.3.— *Soit $\Gamma = (T(t),\ t > 0)$ un semi-groupe, fortement mesurable d'opérateurs affines continus à valeurs dans un espace de Banach B; alors le semi-groupe Γ est fortement continu sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.*

Démonstration.— Si $\forall\ t > 0$, $T(t) = S(t) + a(t)$, avec $S(t)$ opérateur linéaire continu sur B et $a(t) \in B$; alors $(S(t),\ t > 0)$ est un semi-groupe fortement mesurable sur B, donc d'après le lemme *VIII* 1.3 [4], il est fortement continu sur $]0, +\infty[$.

COROLLAIRE 3.4.— *Soient $(T_i(t_i), t_i > 0,\ 1 \leq i \leq k)$ k semi-groupes fortement continus d'opérateurs affines et à moyennes bornées sur un Banach réflexif B et tels que :*

$$\sup_{\alpha > 0} \|A(\alpha, T_i)(0)\| < +\infty\,, \quad \forall\, i,\ 1 \leq i \leq k\,. \tag{8}$$

Alors, pour tout $f \in B$: $V(\lambda, f)$ converge fortement vers un point fixe de B, quand λ tend vers 0; avec :

$$V(\lambda, f) = |\lambda| \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \cdot v} T(v_1) \circ \cdots \circ T(v_k) f\,\mathrm{d}v_1 \ldots \mathrm{d}v_k\,.$$

pour tout $\lambda \in \mathbf{R}_+^k$, $\lambda > 0$.

Démonstration. — Nous traitons le cas unidimensionnel : $k = 1$; pour k quelconque ≥ 2, la démonstration est semblable à celle du corollaire 2.5. D'abord, l'hypothèse (8) et le théorème 3.2 entraînent que, pout tout $f \in B$, l'opérateur affine $V(\lambda,\ \cdot)$ où :

$$V(\lambda, f) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \cdot T(t) f \, \mathrm{d}f \ \text{ existe } \forall\, \lambda > 0 \text{ et } \sup_{\alpha>0} \|V(\alpha, f)\| < +\infty\,.$$

Donc, d'après le principe de la borne uniforme et du fait que pour tout $t > 0$, $T(t)$ est affine, nous déduisons :

$$\sup_{\alpha>0} \|V(\alpha,\ \cdot\ )\| \leq M < +\infty\,. \tag{9}$$

Pour terminer, il reste à montrer que, pour tout $s > 0$:

$$\lim_{\lambda\to 0} \|T(s)V(\lambda,\ \cdot\ ) - V(\lambda,\ \cdot\ )\| = 0\,.$$

En effet, soient λ et s deux réels strictement positifs et $f \in B$; puisque $T(s)$ est un opérateur affine continu, nous avons :

$$\begin{aligned}
&T(s)V(\lambda, f) - V(\lambda, f) = \\
&\quad = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(s+t) f \, \mathrm{d}t - \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) f \, \mathrm{d}t \\
&\quad = \lambda e^{\lambda s} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) f \, \mathrm{d}t - \lambda \int_0^{s} e^{-\lambda t} T(t) f \, \mathrm{d}t - \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) f \, \mathrm{d}t \\
&\quad = \lambda \left(e^{\lambda s} - 1\right) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) f \, \mathrm{d}t - \lambda e^{\lambda s} \int_0^{s} e^{-\lambda t} T(t) f \, \mathrm{d}t \\
&\quad = \lambda \left(e^{\lambda s} - 1\right) V(\lambda, f) - \lambda e^{\lambda s} \int_0^{s} e^{-\lambda t} T(t) f \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

ce qui entraîne, d'après (9) et du fait que $\lambda e^{\lambda s} \left\| \int_0^s e^{-\lambda s} T(t)\, \mathrm{d}t \right\|$ tend vers 0 quand $\lambda \to 0$:

$$\lim_{\lambda\to 0} \|T(s)V(\lambda,\ \cdot\ ) - V(\lambda,\ \cdot\ )\| = 0\,;$$

le théorème de Dotson [3] est enfin applicable pour la famille $(V(\lambda, f)\,,\ \lambda > 0)$ qui est bornée dans le Banach réflexif B.

COROLLAIRE 3.5.— *Soient* $(T_i(t_i)\,,\ t_i > 0\ ;\ 1 \leq i \leq k)$ *k semi-groupes fortement continus d'opérateurs affines positifs et à moyennes bornées sur un Banach de Riesz réflexif* B*, tels que :*

$$\sup_{\alpha > 0} \|A(\alpha, T_i)(0)\| < +\infty\ ;$$

alors, pour tout $f \in B$ *:*

$$\frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_k} \int_0^{\alpha_1} \dots \int_0^{\alpha_k} T_1(t_1) \circ \dots \circ T_k(t_k) f \, \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_k$$

converge fortement vers un point fixe de B*, quand* $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ *tendent vers* $+\infty$.

Références

[1] A. BRUNEL .— *Théorème ergodique ponctuel pour un semi-groupe commutatif finement engendré de contractions de* L^1,
Ann. I.H.P. **B-9** (1973) pp. 327-343

[2] Y. DERRIENNIC & M. LIN .— *On invariant measures and ergodic theorems for positive operators,*
J. Funct. Anal. **13** (1973) pp. 252-267

[3] W.G. DOTSON .— *Mean ergodic theorems and iterative solution of linear functional equations,*
J. Math. Anal. Appl. **34** (1971) pp. 141-150

[4] N. DUNFORD & J.T. SCHWARTZ .— *Linear operators I,*
Interscience, New-York (1958)

[5] R. EMILION .— *Mean bounded operators and mean ergodic theorems,*
C.R. Acad. Sc. Paris **296** (1983) série I, pp. 641-643

[6] H. HEINICH .— *Convergence des moyennes d'un opérateur positif,*
C.R. Acad. Sc. Paris **297** (1983) pp. 237-240

[7] H.N. SCHAEFER .— *Banach lattices and positive operators,*
Springer-Verlag (1974)

[8] E.C. TITCHMARSH .— *The theory of functions,*
Clarendon Press, Oxford (1932)

[9] K. YOSIDA .— *Functional Analysis,*
Springer Grundlehren 123, 4th edition (1974)