

ALAIN THOMAS

Discrépance en dimension un

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 10,
n° 3 (1989), p. 369-399

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1989_5_10_3_369_0

© Université Paul Sabatier, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Discrépance en dimension un

ALAIN THOMAS⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Dans cet article, je généralise le résultat de H. Faure, sur les suites de Van der Corput généralisées (en dimension un); je vérifie, sur un exemple, que cela permet d'obtenir des discrécances inférieures.

ABSTRACT. — I generalize a paper of H. Faure, about Van der Corput generalized sequences (in dimension one); I modify his example, in order to diminish the discrepancy.

Introduction

La discrécance ([1]) d'une suite finie

$$u = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}),$$

à valeurs dans $[0, 1]$, est

$$D(u) = \sup_{0 \leq a < b \leq 1} (\text{card}\{n/a \leq u_n < b\} - N(b - a)).$$

Pour une suite infinie

$$u \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$$

on s'intéressera à la discrécance définie par

$$D(u) = \overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} (\text{Log } N)^{-1} D(u_0, \dots, u_{N-1}).$$

Schmidt [2] a démontré en 1972, que $D(u)$ n'est jamais nul. La meilleure minoration a été obtenue en 1982 par Bejjan [3] :

$$D(u) > 0,12 \quad \text{pour tout } u \in [0, 1]^{\mathbb{N}}.$$

⁽¹⁾ UFR MIM, Université de Provence, 3 place Victor Hugo, 13331 Marseille cedex 3

La suite définie par Van der Corput [4] en 1935, a pour discrédance

$$D(u) = \frac{1}{3\text{Log}2} \simeq 0,48 \quad ([5], [6])$$

La suite des parties fractionnaires de $n\alpha$, a une discrédance finie, dans le cas où α est irrationnel à quotients partiels bornés [7], [1]. Cette discrédance est minimale pour $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, et vaut alors

$$\left(5\text{Log}\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{-1} \simeq 0,416. \quad (\text{Ramshaw}, [8])$$

En 1981, Faure [9] a défini, par généralisation de la suite de Van der Corput, des suites

$$S_r^\alpha, \text{ associées à une base entière } r, \\ \text{et à une permutation } \alpha \text{ de } \{0, 1, \dots, r-1\}.$$

Il a obtenu, dans le cas $r = 12$, l'encadrement

$$\frac{4828}{5181 \text{ Log}12} \leq D(S_{12}^\sigma) < 0,38$$

pour une certaine permutation σ_0 (ce qui représentait la plus faible discrédance connue). Récemment (début 1989), il a calculé une discrédance légèrement inférieure à celle-ci, avec $r = 36$.

Borel (J.P.) [10] a défini en 1982, un ensemble de suites, contenant les suites de Faure et celles de Ramshaw. Ces suites, qu'il appelle auto-reproduites, sont associées à une famille finie ou dénombrable d'intervalles de $[0, 1]$. Il donne une condition suffisante pour qu'une telle suite soit de discrédance finie, et une méthode de majoration de la discrédance.

Dans cet article, je définis un ensemble \mathcal{U}_r de suites, associées aux développements en base r . Cet ensemble contient les suites S_r^σ de Faure, et sa méthode de calcul de la discrédance se généralise à \mathcal{U}_r (chapitre III proposition 1). Au chapitre IV, je vérifie qu'il existe une suite u appartenant à \mathcal{U}_{12} , de discrédance inférieure à celle de $S_{12}^{\sigma_0}$; je calcule (proposition 2) une majoration de $D(u)$, et la valeur exacte de $D(S_{12}^{\sigma_0})$.

$$\text{En posant} \quad v_n = 12u_{12n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

On obtient une suite auto-reproduite (associée à une famille dénombrable d'intervalles), et de discrétance au plus égale à celle de u .

II Définitions et notations

L'entier $r \in \mathbf{N}^*$ étant fixé, on définit un ensemble \mathcal{U}_r , de suites à valeurs dans $[0, 1]$.

DÉFINITION .— u appartient à \mathcal{U}_r si, quels que soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \mathbf{N}$ tels que $k < r^n$, l'image réciproque par u de l'intervalle $[kr^{-n}, (k+1)r^{-n}[$ est une progression arithmétique de raison r^n .

On pose

$$\begin{aligned} I &= \{0, 1, \dots, r-1\} \\ \bar{I} &= I \cup \{r\} \\ I^* &= \bigcup_{k=0}^{+\infty} I^k \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$ on note $[x]$ sa partie entière, et $frx = x - [x]$.

Pour toute suite s appartenant à

$$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \quad \text{ou à } \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathbf{R}^k$$

On notera s_i son $(i+1)^{\text{ème}}$ terme

(en posant $s_i = 0$ si la suite n'a pas plus de i termes).

On pose $\pi_i s = (s_0, s_1, \dots, s_{i-1})$ pour tout $i \in \mathbf{N}^*$,
 $\pi_0 s = \phi$

Propriété caractéristique : u appartient à \mathcal{U}_r si et seulement si il existe une application $\sigma : I^* \rightarrow I$ telle que

(i) pour tout $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1})$ appartenant à I^* , l'application $x \rightarrow \sigma(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}, x)$ soit une permutation de I ; et $\sigma(\pi_i \varepsilon)$ soit différent de $r-1$ pour une infinité de valeurs de i ;

(ii) pour tout $N \in \mathbf{N}$, de développement $\sum_0^{+\infty} \varepsilon_i r_i$,

on a $u_N = \sum_0^{+\infty} \sigma(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_i) r^{-i-1}$.

Démonstration. — Soit $u \in \mathcal{U}_r$; on pose

$$\sigma(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) = [r^{n+1} u_N] - r[r^n u_N]$$

(pour tout $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) \in I^*$ et $N = \sum_0^n \varepsilon_i r_i$)

$$\sigma(\phi) = 0.$$

Cette application est à valeurs dans I .

Soient $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}, x)$ et $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}, y)$ deux éléments de I^* ;

On pose $H = \sum_0^{n-1} \varepsilon_i r_i + x r^n$ et $K = \sum_0^{n-1} \varepsilon_i r_i + y r^n$,
 $h = [r^n u_H]$ et $k = [r^{n+1} u_K]$.

u_H appartient à $[hr^{-n}, (h+1)r^{-n}]$ [donc, d'après la définition de \mathcal{U}_r , u_K y appartient aussi; par conséquent $[r^n u_H] = [r^n u_K]$; donc,

si on suppose $\sigma(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}, x) = \sigma(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}, y)$,

on a aussi $[r^{n+1} u_H] = [r^{n+1} u_K]$,

ce qui prouve que u_H appartient à $[kr^{-n-1}, (k+1)r^{-n-1}]$.

D'après la définition de \mathcal{U}_r , $H \equiv K$ modulo r^{n+1} ,

d'où $x \equiv y$ modulo r

et $x = y$.

Ceci prouve la première partie de la condition (i).

Pour vérifier (i) et (ii), il reste donc à démontrer que, pour tout entier N de développement

$$N = \sum_0^{+\infty} \varepsilon_i r^i \quad ,$$

le développement de u_N est égal à $\sum_0^{+\infty} \sigma(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_i) r^{-i-1}$.

Or l'entier $N' = \sum_{j=0}^i \varepsilon_j r^j$ est égal à N modulo r^{i+1} ,

d'où $[r^{i+1}u_{N'}] = [r^{i+1}u_N]$ et $[r^i u_{N'}] = [r^i u_N]$;

$\sigma(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_i)$ est donc égal à $[r^{i+1}u_N] - r[r^i u_N]$,

c'est-à-dire au $(i+1)^{\text{ème}}$ terme du développement de u_N .

Réciproquement soient u vérifiant les conditions (i) et (ii), et un intervalle $[kr^{-n}, (k+1)r^{-n}]$;

un entier N , de développement $\sum_0^{+\infty} \varepsilon_i r^i$, appartient à l'image réciproque par u de cet intervalle si et seulement si

$$kr^{-n} = \sum_0^{n-1} \sigma(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_i) r^{-i-1}.$$

Mais d'après la condition (i), il existe $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$ uniques vérifiant cette égalité;

l'image réciproque est donc une progression arithmétique de raison r^n .

La suite $u \in \mathcal{U}_r$ et l'application σ étant fixées, on utilisera les notations suivantes :

• Quel que soit $k \in \mathbf{N}$, on associe à toute suite $\alpha \in I^k$, la suite unique $\tilde{\alpha} \in I^k$ qui vérifie

$$\forall i < k \quad \alpha_i = \sigma(\tilde{\alpha}_0, \dots, \tilde{\alpha}_i).$$

On remarque que si deux suites, α et β , vérifient $\beta = \pi_i \alpha$, elles vérifient aussi $\tilde{\beta} = \pi_i \tilde{\alpha}$.

• On définit une application $\psi : I^* \times \bar{I} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ en posant :

$$(\text{pour } (\alpha, \gamma, x) \in I^* \times \bar{I} \times \mathbf{R} \text{ et } k = [rfrx])$$

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \gamma, x) &= \text{card} \{i < k / \sigma(\tilde{\alpha}, i) < \gamma\} - \gamma frx \quad \text{si } \sigma(\tilde{\alpha}, k) \geq \gamma \\ &= -\text{card} \{i < k / \sigma(\tilde{\alpha}, i) \geq \gamma\} + (r - \gamma) frx \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

LEMME . — Soient $n \in \mathbf{N}^*$, h, k et γ appartenant à \mathbf{N} , et $\alpha \in I^{n-1}$ tels que $h < r^{n-1}$, $k < r$ et $\gamma \leq r$,

$$\text{soit } a = \sum_0^{n-2} \alpha_i r^{-i-1}.$$

Si $\sigma(\tilde{\alpha}, k) \geq \gamma$ on a

$$\text{card} \{j < h + kr^{n-1}/a \leq u_j < a + \gamma r^{-n}\} = \text{card} \{i < k/\sigma(\tilde{\alpha}, i) < \gamma\};$$

sinon

$$\text{card} \{j < h + kr^{n-1}/a + \gamma r^{-n} \leq u_j < a + r^{-n+1}\} = \text{card} \{i < k/\sigma(\tilde{\alpha}, i) \geq \gamma\};$$

Démonstration. — Les entiers $j < r^n$ qui vérifient

$$a \leq u_j < a + \gamma r^{-n}$$

sont, d'après la propriété caractéristique, les entiers

$$j = \sum_0^{n-2} \tilde{\alpha}_\nu r^\nu + ir^{n-1} \quad , \quad \text{avec } i \in I \text{ tel que } \alpha(\tilde{\alpha}, i) < \gamma.$$

Si on suppose $\sigma(\tilde{\alpha}, k) \geq \gamma$, la condition ci-dessus implique $i \neq k$; on peut donc dire que la condition

$$(j < h + kr^{n-1} \quad \text{et} \quad a \leq u_j < a + \gamma r^{-n})$$

est équivalente à

$$(j = \sum_0^{n-2} \tilde{\alpha}_\nu r^\nu + ir^{n-1} \quad , \quad 0 \leq i < k \quad \text{et} \quad \sigma(\tilde{\alpha}, i) < \gamma)$$

d'où le résultat.

Vérification semblable dans le cas $\sigma(\tilde{\alpha}, k) < \gamma$.

DÉFINITION de l'écart .— *pour toute suite finie* $v = (v_0, \dots, v_{k-1})$ *à valeur dans* $[0, 1]$, *et pour* $a \in [0, 1]$, *on pose*

$$E(v, a) = \text{card} \{i < k/v_i < a\} - ka.$$

De la discrédance : $D(v)$ est la borne supérieure de

$$E(v, b) - E(v, a) \quad (\text{pour } a \text{ et } b \text{ dans } [0, 1]).$$

Pour une suite infinie v *à valeurs dans* $[0, 1]$,

$$D(v) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} (\text{Log } k)^{-1} D(v_0, \dots, v_{k-1})$$

III. Calcul de l'écart

PROPOSITION 1. — Soient $n \in \mathbf{N}^*$

$n \in \mathbf{N}$ tel que $N < r^n$

$\sum_0^{n-1} \varepsilon_i r^i$ le développement de N

$\alpha \in I^{n-1} \times \bar{I}$

$\alpha' \in \bar{I}^n$ telle que, pour $1 \leq i \leq n$

$\alpha'_{i-1} = \alpha_{i-1}$ si $i = n$ ou si $\sigma(\pi_i \tilde{\alpha}, \varepsilon_i) \geq \alpha'_i$

$\alpha'_{i-1} = \alpha_{i-1} + 1$ sinon.

Alors, en posant $a = \sum_0^{n-1} \alpha_i r^{-i-1}$, on a

$$E(\pi_N u, a) = \sum_0^{n-1} \psi(\pi_i \alpha, \alpha'_i, N r^{-i-1})$$

Démonstration. — On vérifie d'abord la proposition dans le cas $n = 1$

Dans ce cas $\sum_0^{n-1} \psi(\pi_i \alpha, \alpha'_i, N r^{-i-1}) = \psi(\phi, ar, N r^{-1})$ est égal

à $\text{card}\{i < N/\sigma(i) < ar\} - ar N r^{-1}$ si $\sigma(N) \geq ar$,

à $-\text{card}\{i < N/\sigma(i) \geq ar\} + (r - ar) N r^{-1}$ sinon,

donc à $E(\pi_N u, a)$, puisque $u_i = \sigma(i) r^{-1} \quad \forall i < r$.

Dans le cas n quelconque, on utilise pour la récurrence l'entier

$$M = \sum_0^{n-2} \varepsilon_i r^i \text{ et les réels } a' = \sum_0^{n-2} \alpha_i r^{-i-1}$$

$$b = \sum_0^{n-3} \alpha_i r^{-i-1} + \alpha'_{n-2} r^{-n+1}$$

et on écrit

$$E(\pi_N u, a) - E(\pi_M u, b) = E(\pi_N u, a) - E(\pi_N u, b) + E(\pi_N u, b) - E(\pi_M u, b)$$

$$E(\pi_N u, a) - E(\pi_N u, b) = \text{card}\{j < N/u_j < a\} - \text{card}\{j < N/u_j < b\} - N(a - b).$$

On applique le lemme, compte tenu que

$$N = M + \varepsilon_{n-1} r^{n-1}$$

$$a = a' + \alpha_{n-1} r^{-n}$$

$$b = a' \text{ si } \sigma(\pi_{n-1} \tilde{\alpha}, \varepsilon_{n-1}) \geq \alpha_{n-1}$$

$$a' + r^{-n+1} \text{ sinon ;}$$

$E(\pi_N u, a) - E(\pi_N u, b)$ est alors égal à

$$\text{card}\{i < \varepsilon_{n-1} / \sigma(\pi_{n-1} \tilde{\alpha}, i) < \alpha_{n-1}\} - N \alpha_{n-1} r^{-n}$$

$$\text{si } \sigma(\pi_{n-1} \tilde{\alpha}, \varepsilon_{n-1}) \geq \alpha_{n-1}$$

$$- \text{card}\{i < \varepsilon_{n-1} / \sigma(\pi_{n-1} \tilde{\alpha}, i) \geq \alpha_{n-1}\} + N(r - \alpha_{n-1}) r^{-n} \text{ sinon,}$$

donc dans les deux cas à $\psi(\pi_{n-1} \alpha, \alpha_{n-1}, N r^{-n})$.

D'autre part $E(\pi_N u, b) - E(\pi_M u, b) = \text{card}\{i \in \mathbf{N}/M \leq i < N \text{ et}$

$$u_i < b\} - (N - M)b$$

(avec $N - M$ multiple de r^{n-1} et $b r^{n-1}$ entier) est nul d'après la définition de U_r ;

$$\text{donc } E(\pi_N u, a) = E(\pi_M u, b) + \psi(\pi_{n-1} \alpha, \alpha_{n-1}, N r^{-n}).$$

Si on suppose la proposition 1 vérifiée au rang $n-1$, on peut l'appliquer à l'entier M et à la suite $\beta = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-3}, \alpha'_{n-2})$ ($\Rightarrow \beta'_i = \alpha'_i \forall i \leq n-2$)

$$\text{d'où } E(\pi_M u, b) = \sum_0^{n-2} \psi(\pi_i \alpha, \alpha'_i, M r^{-i-1});$$

elle est alors vérifiée au rang n , compte tenu que $M r^{-i-1} \equiv N r^{-i-1}$ modulo 1, pour tout $i \leq n-2$. ■

IV. Exemple de calcul de discrédance

Dans ce chapitre r est égal à 12.

τ désigne la composée des permutations circulaires (1 7 6 9 8) et (2 3 10 4 5)

τ^* la composée de (0 3 10 4 5 2) et (1 7 6 9 11 8)

\mathcal{E} l'ensemble des suites $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in I^*$ telles que

$$n \geq 6 \text{ et } (\alpha_{n-6}, \alpha_{n-5}, \dots, \alpha_{n-1}) = (0, 11, 4, 0, 11, 4)$$

$$\text{ou } (1, 3, 8, 1, 3, 8)$$

$$\text{ou } (11, 0, 7, 11, 0, 7)$$

$$\text{ou } (10, 8, 3, 10, 8, 3)$$

On définit par récurrence une application $\sigma : I^* \rightarrow I$ en posant : $\sigma(\emptyset) = 0$

$$\sigma(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) = \tau^* \varepsilon_n \text{ si } (\sigma(\pi_1 \varepsilon), \dots, \sigma(\pi_n \varepsilon)) \text{ appartient à } \mathcal{E},$$

$$\tau \varepsilon_n \text{ sinon}$$

La suite u est définie par

$$u\left(\sum_0^{+\infty} \varepsilon_j r^j\right) = \sum_0^{+\infty} \sigma(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_i) r^{-i-1} \quad (\forall \varepsilon \in I^*).$$

PROPOSITION 2. — $D(u) \leq \frac{1}{\text{Log } 12} \left(\frac{4828}{5181} - 2 \cdot 10^{-5} \right).$

D'autre part, la suite v (étudiée en [9]), qui à tout entier N de développement

$$N = \sum_0^{n-1} \varepsilon_i r^i, \text{ associée}$$

$$v_N = \sum_0^{n-1} \tau(\varepsilon_i) r^{-i-1},$$

vérifie $D(v) = \frac{4828}{5181 \text{ Log } 12}$

Les lemmes qui suivent serviront à démontrer cette proposition.

La fonction ψ ayant été définie au chapitre II, on pose aussi

$$\psi^+(x) = \sup_{\gamma \in \bar{I}} \psi(\emptyset, \gamma, x)$$

$$\psi^-(x) = \inf_{\gamma \in \bar{I}} \psi(\emptyset, \gamma, x)$$

f_4 fonction paire de période 1, définie par

$$f_4(x) = 4(r^{-1} - x) \text{ si } x \in [0, r^{-1}[$$

$$0 \quad \text{si } x \in \left[r^{-1}, \frac{1}{2} \right[$$

$$\varphi(\alpha, \gamma, x) = \psi(\alpha, \gamma, x) - \psi^-(x) + f_4(x)$$

$$\varphi(x) = \sup_{\gamma \in \bar{I}} \varphi(\emptyset, \gamma, x) \quad (= (\psi^+ - \psi^- + f_4)(x)).$$

Valeurs de la fonction $r\varphi(\alpha, \gamma, xr^{-1})$ (dans le cas $\alpha \notin \mathcal{E}$) aux points $x = 0, 1, 1 + \frac{5}{7}, 2$, etc (fonction périodique de période 12) (les nombres entre parenthèses représentent la dérivée de cette fonction).

x	0	1	$1 + \frac{5}{7}$	2	$2 + \frac{2}{5}$	3	$3 + \frac{3}{7}$	4	$4 + \frac{4}{5}$	5	$5 + \frac{1}{7}$	6	$6 + \frac{6}{7}$	7	$7 + \frac{1}{5}$	8	$8 + \frac{4}{7}$	9	$9 + \frac{3}{5}$	10	$10 + \frac{2}{7}$	11	12
$\text{cas } \gamma = 0$	4	0	0	2	0	0	0	4	$\frac{12}{5}$	3	$\frac{12}{7}$	0	$+\frac{12}{7}$	3	$\frac{12}{5}$	4	0	0	0	2	0	0	4
		(-4)	(0)	(7)	(-5)	(0)	(0)	(7)	(-2)	(3)	(-9)	(-2)	(2)	(9)	(-3)	(2)	(-7)	(0)	(0)	(5)	(-7)	(0)	(4)
$\text{cas } \gamma = 1$	4	11	$\frac{72}{7}$	12	$\frac{48}{5}$	9	$\frac{60}{7}$	12	$\frac{48}{5}$	10	$\frac{60}{7}$	6	$+\frac{48}{7}$	8	$\frac{36}{5}$	8	$\frac{24}{7}$	3	$\frac{12}{5}$	4	$\frac{12}{7}$	1	4
		(7)	(-1)	(6)	(-6)	(-1)	(-1)	(6)	(-3)	(2)	(-10)	(-3)	(1)	(8)	(-4)	(1)	(-8)	(-1)	(-1)	(4)	(-8)	(-1)	(3)
$\text{cas } \gamma = 2$	4	10	$\frac{60}{7}$	10	$\frac{36}{5}$	6	$\frac{36}{7}$	8	$\frac{24}{5}$	5	$\frac{24}{7}$	0	0	1	0	0	$\frac{12}{7}$	6	$\frac{24}{5}$	6	$\frac{24}{7}$	2	4
		(6)	(-2)	(5)	(-7)	(-2)	(-2)	(5)	(-4)	(1)	(-11)	(-4)	(0)	(7)	(-5)	(0)	(3)	(10)	(-2)	(3)	(-9)	(-2)	(2)
$\text{cas } \gamma = 3$	4	9	$\frac{48}{7}$	8	$\frac{24}{5}$	3	$\frac{12}{7}$	4	0	0	0	6	$\frac{36}{7}$	6	$\frac{24}{5}$	4	$\frac{36}{7}$	9	$\frac{36}{5}$	8	$\frac{36}{7}$	3	4
		(5)	(-3)	(4)	(-8)	(-3)	(-3)	(4)	(-5)	(0)	(7)	(-1)	(6)	(-6)	(-1)	(2)	(9)	(-3)	(2)	(-10)	(-3)	(1)	(1)
$\text{cas } \gamma = 4$	4	8	$\frac{36}{7}$	6	$\frac{36}{5}$	12	$\frac{72}{7}$	12	$\frac{36}{5}$	7	$\frac{48}{7}$	12	$+\frac{72}{7}$	11	$\frac{48}{5}$	8	$\frac{60}{7}$	12	$\frac{48}{5}$	10	$\frac{48}{7}$	4	4
		(4)	(-4)	(3)	(3)	(8)	(-4)	(3)	(-6)	(-1)	(-1)	(6)	(-2)	(5)	(-7)	(-2)	(1)	(8)	(-4)	(1)	(-11)	(-4)	(0)
$\text{cas } \gamma = 5$	4	7	$\frac{24}{7}$	4	$\frac{24}{5}$	9	$\frac{48}{7}$	8	$\frac{12}{5}$	2	$\frac{12}{7}$	6	$+\frac{24}{7}$	4	$\frac{12}{5}$	0	0	3	0	0	0	5	4
		(3)	(-5)	(2)	(2)	(7)	(-5)	(2)	(-7)	(-2)	(-2)	(5)	(-3)	(4)	(-8)	(-3)	(0)	(7)	(-5)	(0)	(7)	(-1)	(-1)
$\text{cas } \gamma = 6$	4	6	$\frac{12}{7}$	2	$\frac{12}{5}$	6	$\frac{24}{7}$	4	$\frac{36}{5}$	9	$\frac{60}{7}$	12	$\frac{60}{7}$	9	$\frac{36}{5}$	4	$\frac{24}{7}$	6	$\frac{12}{5}$	2	$\frac{12}{7}$	6	4
		(2)	(-6)	(1)	(1)	(6)	(-6)	(1)	(4)	(9)	(-3)	(4)	(-4)	(3)	(-9)	(-4)	(-1)	(6)	(-6)	(-1)	(-1)	(6)	(-2)

Discrépance en dimension un

Valeurs de la fonction $r\varphi(\alpha, \gamma, xr^{-1})$,

pour $\alpha \in \mathcal{E}$, aux points où elle diffère de la précédente.

x	0	1	$1 + \frac{5}{7}$	2	$2 + \frac{2}{5}$	3
cas $\gamma = 1$	4	-1	$-\frac{12}{7}$	0	$\frac{12}{5}$	9
	(-5)	(-1)	(6)	(6)	(11)	
cas $\gamma = 2$	4	-2	$-\frac{24}{7}$	-2	0	6
	(-6)	(-2)	(5)	(5)	(10)	
cas $\gamma = 3$	4	-3	$-\frac{36}{7}$	-4	$-\frac{12}{5}$	3
	(-7)	(-3)	(4)	(4)	(9)	

Cas $\gamma \in \{7, 8, \dots, 12\}$:

le calcul de $\varphi(\alpha, \gamma, x)$ donne la même valeur que pour $\varphi(\alpha, r - \gamma, 1 - x)$

Autre notation : soient $n \in \mathbf{N}^*$

$$N \in \mathbf{N} \text{ tel que } N < r^n$$

$$\alpha \in I^{n-1} \times \bar{I}$$

il leur correspond deux suites, ε et α' , telles que $n, N, \varepsilon, \alpha, \alpha'$ vérifient les conditions de la proposition 1 ;

on notera $X_i(\alpha, N)$, ou X_i , l'expression

$$X_i(\alpha, N) = \varphi(\pi_i \alpha, \alpha'_i, Nr^{-i-1}).$$

LEMME 0.1. — Soient $n \in \mathbf{N}^*$

$$N \in \mathbf{N} \text{ tel que } N < r^n$$

$$\alpha \in I^{n-1} \times \bar{I}.$$

(i) Dans le cas où N n'est pas multiple de r ,

en posant $M = r^n - N$

$$\beta_{n-1} = r - \alpha_{n-1}$$

$$\beta_i = r - 1 - \alpha_i \quad (\text{pour } 0 \leq i \leq n-2)$$

on a $X_i(\beta, M) = X_i(\alpha, N) \quad (0 \leq i \leq n-1)$

(ii) Soit m le plus grand entier tel que $Nr^{-m} \in \mathbf{N}$,

$$N' = Nr^{-m}$$

$$a = \sum_0^{n-1} \alpha_i r^{-i-1} \text{ et } c = \sum_0^{n-m-1} \alpha_{m+i} r^{-i-1};$$

alors $|E(\pi_N, u, c) - E(\pi_{Nu}, a)|$ est borné indépendamment de n, N et α .

Démonstration.— (i) soient $\varepsilon, \alpha', \eta, \beta^+$ tels que $(n, N, \varepsilon, \alpha, \alpha')$, et $(n, M, \eta, \beta, \beta')$, vérifient les conditions de la proposition 1;

$$X_i(\beta, M) = \varphi(\pi_i \beta, \beta'_i, Mr^{-i-1});$$

comme $Mr^{-i-1} \equiv -Nr^{-i-1}$ modulo 1,

et $(\pi_i \beta \in \mathcal{E})$ équivaut à $(\pi_i \alpha \in \mathcal{E})$ (pour $0 \leq i \leq n-1$), on a donc $X_i(\beta, M) = \varphi(\pi_i \alpha, r - \beta'_i, Nr^{-i-1})$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que $r - \beta'_i$ est égal à α'_i ; en remarquant que $\eta_i = 11 - \varepsilon_i$ (pour $1 \leq i \leq n-1$),

$$\begin{aligned} \sigma(\pi_i \tilde{\beta}, \eta_i) + \sigma(\pi_i \tilde{\alpha}, \varepsilon_i) &= \tau^*(11 - \varepsilon_i) + \tau^*(\varepsilon_i) \quad (\text{si } \pi_i \alpha \in \mathcal{E}) \\ &= \tau(11 - \varepsilon_i) + \tau(\varepsilon_i) \quad (\text{sinon}) \end{aligned}$$

est égal à 11 dans les deux cas, on en déduit par récurrence, en partant de $i = n$, l'égalité $r - \beta'_{i-1} = \alpha'_{i-1}$ (pour $1 \leq i \leq n$).

(ii) En notant γ la suite $(\alpha_m, \dots, \alpha_{n-1})$, il existe deux suites μ et γ' telles que $(n-m, N', \mu, \gamma, \gamma')$ vérifie les conditions de la proposition 1.

On a $\mu_i = \varepsilon_{m+i}$ et, pour $i \geq 6$, $(\pi_i \gamma \in \mathcal{E})$ équivaut à $(\pi_{m+i} \alpha \in \mathcal{E})$;

$$\text{d'où } \sigma(\pi_i \tilde{\gamma}, \mu_i) = \sigma(\pi_{m+i} \tilde{\alpha}, \varepsilon_{m+i}) \quad (6 \leq i \leq n-m-1);$$

ce qui permet de vérifier par récurrence

$$\gamma'_i = \alpha'_{m+i} \quad (5 \leq i \leq n-m-1);$$

d'où $\psi(\pi_i \gamma, \gamma'_i, N' r^{-i-1}) = \psi(\pi_{m+i} \alpha, \alpha'_{m+i}, Nr^{-m-i-1})$ ($6 \leq i \leq n-m-1$).

Compte tenu que $\psi(\pi_j \alpha, \alpha'_j, Nr^{-j-1})$ est nul pour $j < m$, on obtient, en utilisant la proposition 1,

$$|E(\pi_N, u, c) - E(\pi_{Nu}, a)| \leq 12S, \text{ où } S \text{ est le maximum de la fonction } |\psi|. \quad \blacksquare$$

1) Minoration de $E(\pi_{Nu}, a)$.

LEMME 1.1. — Soient $n \in \mathbf{N}^*$

$N \in \mathbf{N}$ tel que $n < r^n$ et $Nr^{-1} \notin \mathbf{Z}$

$a \in [0, 1]$ tel que $ar^n \in \mathbf{N}$.

Alors $E(\pi_N u, a) \geq \sum_0^{n-1} (\psi^- - f_4)(Nr^{-i-1})$.

Démonstration.— il existe $\alpha \in I^{n-1} \times \bar{I}$ tel que $a = \sum_0^{n-1} \alpha_i r^{-i-1}$;
l'inégalité à démontrer équivaut à

$$\sum_0^{n-1} X_i(\alpha, N) \geq 0.$$

Après avoir remarqué que $X_i \geq 0$ si $\pi_i \alpha \notin \mathcal{E}$, on va chercher à minorer $S(i) = X_{i-2} + X_{i+1} + X_i$, dans le cas où $\pi_i \alpha$, ou $\pi_{i+3} \alpha$, appartient à \mathcal{E} .

Soit $\sum_0^{n-1} \varepsilon_i r^i$ le développement de N ; on notera, dans cette démonstration,

$$\begin{aligned} t_i &= fr(Nr^{-i-1}) \\ &= \varepsilon_i r^{-1} + \varepsilon_{i-1} r^{-2} + \dots + \varepsilon_0 r^{-i-1}. \end{aligned}$$

On remarque que, pour tout i tel que $\pi_i \alpha$ appartienne à \mathcal{E} , $\pi_j \alpha$ n'y appartient pas pour $j = i - 1, i - 2, i - 4$ ou $i - 5$.

1 Cas $\pi_i \alpha \in \mathcal{E}$ et $\pi_{i+3} \alpha \in \mathcal{E}$:

on va vérifier $S(i) \geq 0$;

$$S(i) = \varphi(\emptyset, \alpha'_{i-2}, t_{i-2}) + \varphi(\emptyset, \alpha'_{i-1}, t_{i-1}) + \varphi(\pi_i \alpha, \alpha'_i, t_i) \text{ avec } \pi_i \alpha \in \mathcal{E}.$$

– Cas $(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_i) = (11, 4, 0)$:

$$\alpha'_i \text{ vaut } 0 \text{ ou } 1 \text{ donc } r\varphi(\pi_i \alpha, \alpha'_i, t_i) \geq -\frac{12}{7}.$$

Si α'_{i-1} vaut 4,

$$r\varphi(\emptyset, 4, t_{i-1}) \geq 4 \Rightarrow S(i) > 0.$$

Si $\alpha'_{i-1} = 5$, alors d'après la définition de la suite α' , $\tau^* \varepsilon_i < \alpha'_i$

$$\Rightarrow \alpha'_i = 1 \text{ et } \varepsilon_i = 2;$$

mais alors $\varphi(\pi_i \alpha, \alpha'_i, t_i) \geq 0$ et $S(i) \geq 0$.

– Cas $(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_i) = (3, 8, 1)$:

$$\alpha'_i = 1 \text{ ou } 2 \text{ d'où } r\varphi(\pi_i \alpha, \alpha'_i, t_i) \geq -\frac{24}{7};$$

d'où le résultat si $\alpha'_{i-2} = 4$, ou si $\alpha'_{i-1} = 8$;

si ce n'est pas le cas, $\alpha'_{i-2} = 3$ et $\alpha'_{i-1} = 9$;

$$\begin{aligned} \alpha'_{i-2} = \alpha_{1-2} &\Rightarrow \tau \varepsilon_{i-1} \geq \alpha'_{i-1} \\ &\varepsilon_{i-1} = 3, 6 \text{ ou } 11; \\ r\varphi(\emptyset, 9, t_{i-1}) &\geq 4 \text{ si } \varepsilon_{i-1} \text{ vaut } 3 \text{ ou } 11 \\ &\geq \frac{5}{2} \text{ si } \varepsilon_{i-1} = 6 \text{ et } \varepsilon_{i-2} < 6; \end{aligned}$$

dans le cas $\varepsilon_{i-2} \geq 6$, on utilise $r\varphi(\emptyset, 3, t_{i-2}) \geq 3$;

$$\begin{aligned} \text{d'autre part } \alpha'_{i-1} = \alpha_{i-1} + 1 &\Rightarrow \tau^* \varepsilon_i < \alpha'_i \\ &\varepsilon_i = 2 \text{ ou } 8 \\ &r\varphi(\pi_i \alpha, \alpha'_i, t_i) \geq -2, \end{aligned}$$

donc $S(i) > 0$

- Cas $(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_i) = (0, 7, 11)$ ou $(8, 3, 10)$:

on se ramène aux deux cas précédents par le lemme 0.1 (i).

2 Cas $\pi_i \alpha \notin \mathcal{E}$ et $\pi_{i+3} \alpha \in \mathcal{E}$: $(S(i) = \sum_{j=i-2}^i \varphi(\emptyset, \alpha'_j, t_j))$ d'après la

remarque du début.

- Cas $(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_i) = (11, 4, 0)$;

si $\alpha'_{i-1} = 4$, on a $rS(i) \geq 4$;

si $\alpha'_{i-1} = 5$, alors $\tau \varepsilon_i < \alpha'_i$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \alpha'_i = 1 \text{ et } \varepsilon_i = 0 \\ &r\varphi(\emptyset, \alpha'_i, t_i) \geq 4 \\ &rS(i) \geq 4. \end{aligned}$$

- Cas $(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_i) = (3, 8, 1)$:

on minore $r\varphi(\emptyset, \alpha'_{i-2}, t_{i-2}) + r\varphi(\emptyset, \alpha'_{i-1}, t_{i-1})$ de la même façon qu'en 1; comme $\varphi(\emptyset, \alpha'_i, t_i) \geq 0$, on en déduit $rS(i) \geq \frac{5}{2}$.

- Cas $(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_i) = (0, 7, 11)$ ou $(8, 3, 10)$:

on applique le lemme 0.1 (i).

3 Si on suppose seulement $\pi_i \alpha \in \mathcal{E}$ (et $i \leq n-1$), l'expression de $S(i)$ est la même qu'en 1, mais α'_i est quelconque dans \bar{I} .

- Cas $(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}) = (11, 4)$:

on va vérifier $rS(i) \geq -4$;

on a en effet $r\varphi(\pi_i \alpha, \alpha'_i, t_i) \geq -4$, sauf dans les cas $(\alpha'_i = 3 \text{ et } \varepsilon_i = 1)$ ou $(\alpha'_i = 9 \text{ et } \varepsilon_i = 10)$;

or dans le premier cas $\tau^*(\varepsilon_i) \geq \alpha'_i$

$$\Rightarrow \alpha'_{i-1} = 4, \quad \text{d'où } rS(i) > -4;$$

dans le second, on minore $rS(i)$ par $r\varphi(\emptyset, 5, t_{i-1}) + r\varphi(\pi_i\alpha, 9, 10r^{-1} + t_{i-1}r^{-1})$;

le second terme étant au moins égal à -4 si $rt_{i-1} \geq 8$, et le premier à $\frac{12}{7}$ si $rt_{i-1} \leq 7 + \frac{1}{5}$, on a bien $rS(i) \geq -4$ dans ce cas;

$$\text{si } rt_{i-1} \in \left[7 + \frac{1}{5}, 8\right], rS(i) \geq \begin{matrix} 3(8 - rt_{i-1}) - 3(2 - t_{i-1}) \\ \geq -4 \end{matrix}$$

- Cas $(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}) = (3, 8)$:

on vérifie la majoration $rS(i) \geq -\frac{5}{2}$, en minorant $r\varphi(\emptyset, \alpha'_{i-2}, t_{i-2}) + r\varphi(\emptyset, \alpha'_{i-1}, t_{i-1})$ de la même manière qu'en 1,

c'est-à-dire par 4, ou par $\frac{5}{2}$ dans le cas $\varepsilon_{i-1} = 6$;

d'où la minoration de $rS(i)$, compte tenu que, si $\varepsilon_{i-1} = 6$, $r\varphi(\pi_i\alpha, \alpha'_i, t_i) = r\varphi(\pi_i\alpha, \alpha'_i, \varepsilon_i r^{-1} + 6r^{-2} + t_{i-2}r^{-2})$ est minoré par $-\frac{19}{4}$, quels que soient α'_i, ε_i et t_{i-2} .

- Cas $(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}) = (0, 7)$ ou $(8, 3)$: en appliquant le lemme 0.1 (i). ■

Minoration de $\sum_0^{n-1} X_i$:

soit $J = \{i \leq n - 3 / \pi_i\alpha \notin \mathcal{E} \text{ et } \pi_{i+3}\alpha \in \mathcal{E}\}$;

à tout $i \in J$ on peut associer $h_i \in \mathbf{N}$, maximal, tel que $i + 3h_i \leq n - 1$ et

$$(\alpha_{i-3}, \alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}) = (\alpha_{i-3+3j}, \alpha_{i-2+3j}, \alpha_{i-1+3j}) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, h_i\}.$$

Etant donné $i \in J$, d'après les minorations faites en 2 et 3 on a $S(i) + S(i + 3h_i) \geq 0$;

avec 1 on en déduit $S(i) + S(i + 3) + \dots + S(i + 3h_i) \geq 0$;

mais d'après la remarque faite au début de la démonstration, les intervalles $K(i) = \{i - 2, i - 1, \dots, i + 3h_i\}$ sont disjoints deux à deux pour $i \in J$.

Soit $i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ tel que $\pi_i\alpha \notin \mathcal{E}$, il existe $h \in \mathbf{N}^*$, minimal, tel que $\pi_{i-3h}\alpha \notin \mathcal{E}$;

on a alors $i - 3h \in J$ et $i \in K(i - 3h)$; par conséquent, en notant H le complémentaire de $\bigcup_{i \in J} K(i)$ dans $\{0, 1, \dots, n - 1\}$,

tout $i \in H$ vérifie $\pi_i \alpha \notin \mathcal{E}$ donc $X_i \geq 0$;

$$\sum_0^{n-1} X_i = \sum_{i \in H} X_i + \sum_{i \in J} (S(i) + S(i+3) + \dots + S(i+3h_i)) \geq 0.$$

2) Développements et notations associées à la fonction φ .

Valeurs et dérivées de la fonction $r\varphi(xr^{-1})$ (périodique) :

x	0	1	$1 + \frac{5}{7}$	2	$2 + \frac{2}{5}$	3	$3 + \frac{3}{7}$	4	$4 + \frac{4}{5}$	5	$5 + \frac{1}{7}$	6
$r\varphi(xr^{-1})$	4	11	$\frac{72}{7}$	12	$\frac{48}{5}$	12	$\frac{72}{7}$	12	$\frac{48}{5}$	11	$\frac{72}{7}$	12
	(7)	(-1)	(6)	(-6)	(4)	(-4)	(3)	(-3)	(7)	(-5)	(2)	

x	$6 + \frac{6}{7}$	7	$7 + \frac{1}{5}$	8	$8 + \frac{4}{7}$	9	$9 + \frac{3}{5}$	10	$10 + \frac{2}{7}$	11	12
$r\varphi(xr^{-1})$	$\frac{72}{7}$	11	$\frac{48}{5}$	12	$\frac{72}{7}$	12	$\frac{48}{5}$	12	$\frac{72}{7}$	11	4
	(-2)	(5)	(-7)	(3)	(-3)	(4)	(-4)	(6)	(-6)	(1)	(-7)

LEMME 2.1. — Soient $N \in \mathbf{Z}$, non multiple de r ,
 n l'entier minimal tel que $|Nr^{-n}| < 1$.

Il existe deux suites $\varepsilon \in \mathbf{Z}^n$ et $t \in \mathbf{R}^n$ telles que

$$N = \sum_0^{n-1} \varepsilon_i r^i$$

$$t_i = \sum_0^i \varepsilon_j r^{j-i-1}$$

φ linéaire affine sur $[\varepsilon_i r^{-1}, t_i]$ ou $[t_i, \varepsilon_i r^{-1}]$ } (pour $0 \leq i \leq n-1$)
 $1 \leq |\varepsilon_i| \leq 11$

Démonstration. — on définit ces suites par récurrence en posant :

$$\begin{aligned}
 t_{n-1} &= Nr^{-n} && \text{et, pour } 0 \leq i \leq n-1 \\
 \varepsilon_i &= [rt_i] && \text{si } \varphi \text{ admet un minimum local en } t_i \\
 &&& \text{ou un maximum local} \\
 &&& \text{ou si } \varphi'(t_i) < 0 \\
 &= [rt_i] + 1 && \text{si } \varphi'(t_i) > 0
 \end{aligned}$$

$$t_{i-1} = rt_i - \varepsilon_i$$

On vérifie par récurrence (en partant de $i = n - 1$) :

$$|t_i| < 1 \quad \text{et } t_i r^{i+1} \in \mathbf{Z} \text{ (pour } -1 \leq i \leq n-1); \quad |\varepsilon_i| \leq 11 \text{ (} 0 \leq i \leq n-1);$$

en particulier $|t_{-1}| < 1$ et $t_{-1} \in \mathbf{Z}$ donc $t_{-1} = 0$.

Par récurrence, $t_i r^i \notin \mathbf{Z}$ (pour $0 \leq i \leq n - 1$) donc $t_i \neq 0$ et, d'après les variations de $\varphi, \varepsilon_i \neq 0$.

La quatrième condition est donc vérifiée; les deux premières sont évidentes et la troisième se déduit du tableau de φ . ■

Notations : Soient I' l'ensemble des $k \in \mathbf{Z}$ tels que $1 \leq |k| \leq 11$

$$I'^* = \bigcup_0^{+\infty} I'^h$$

$\mu(x, k)$ la dérivée à droite de φ en kr^{-1} (pour $k \in I', x \in R^+$) ou sa dérivée à gauche si x réel négatif

$$\begin{aligned}
 \lambda(x, k) &= -\mu(x, k) \text{ si } x \geq 0 \\
 &= \mu(x, k) \text{ si } x < 0.
 \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1})$ appartenant à I'^* , on pose

$$S(\varepsilon) = \frac{\varepsilon_{n-1}}{|\varepsilon_{n-1}|} \sum_0^{n-1} \varepsilon_i r^{i-n-1}$$

$$S(\emptyset) = 0$$

LEMME 2.2. — Dans les conditions du lemme 2.1,

$$\sum_0^{n-1} \varphi(Nr^{-i-1}) = \sum_0^{n-1} \varphi(\varepsilon_i r^{-1}) - \sum_1^{n-1} \lambda(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) S(\pi_i \varepsilon).$$

Démonstration. — pour $1 \leq i \leq n - 1$, on a $t_i = \varepsilon_i r^{-1} + t_{i-1} r^{-1}$ et, par linéarité, $\varphi(Nr^{-i-1}) = \varphi(t_i) = \varphi(\varepsilon_i r^{-1}) + \mu(t_{i-1}, \varepsilon_i) t_{i-1} r^{-1}$;

$t_{i-1} r^{-1} = \frac{\varepsilon_{i-1}}{|\varepsilon_{i-1}|} S(\pi_i \varepsilon)$; d'autre part, $t_{i-1} r^{-1} = \varepsilon_{i-1} r^{-2} + t_{i-2} r^{-2}$ a même signe que ε_{i-1} car $|\varepsilon_{i-1}| \geq 1$ et $|t_{i-2}| < 1$;

d'où $\mu(t_{i-1}, \varepsilon_i)t_{i-1}r^{-1} = -\lambda(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i)S(\pi_i\varepsilon)$. ■

Autres notations : Pour $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in I'^*$, soient $\tilde{\varphi}(\varepsilon) = \sum_0^{n-1} \varphi(\varepsilon_i r^{-1}) - \sum_1^{n-1} \lambda(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i)S(\pi_i\varepsilon)$ et $K(\varepsilon)$ l'ensemble des $i \leq n$ tels que $(\varepsilon_{i-8}, \dots, \varepsilon_{i-1})$ ou $(-\varepsilon_{i-8}, \dots, -\varepsilon_{i-1})$ soit égal à $(4, 1, -2, 4, 1, -2, 4, 1)$ ou $(6, 1, -3, 6, 1, -3, 6, 1)$;
 $\chi(\varepsilon) = \text{card } K(\varepsilon)$ et $\delta(\varepsilon) = \tilde{\varphi}\varepsilon - 6 \cdot 10^{-5} \chi_\varepsilon - \left(\frac{4828}{5181} - 2 \cdot 10^{-5} \right) n$.

3) Majoration de $E(\pi_{Nu}, a)$.

LEMME 3.1. — Soient $N \in \mathbf{N}$, non multiple de r ,

$\varepsilon' = (\varepsilon'_0, \dots, \varepsilon'_{n-1})$ la suite qui lui est associée
 au lemme 2.1

$a \in [0, 1]$ tel que $ar^n \in \mathbf{N}$.

Alors, $E(\pi_{Nu}, a) \leq \sum_0^{n-1} \psi^+(Nr^{-i-1}) - r^{-2} \chi \varepsilon'$.

Démonstration. — soient $\varepsilon \in I^n$ tel que $N = \sum_0^{n-1} \varepsilon_i r^i$

$\alpha \in I^{n-1} \times \bar{I}$ tel que $a = \sum_0^{n-1} \alpha_i r^{-i-1}$

t la suite définie au lemme 2.1

$Y_i = \varphi(i) - \varphi(\pi_i \alpha, \alpha'_i, t_i)$ ($0 \leq i \leq n-1$) ;

On a $\sum_0^{n-1} \psi^+(Nr^{-i-1}) - E(\pi_{Nu}, a) = \sum_0^{n-1} Y_i$ et $Y_i \geq 0$ pour tout i . ■

Soit $(n_i)_{0 \leq i \leq h-1}$ la suite strictement croissante d'entiers telle que $K(\varepsilon') = \{n_i\}_{0 \leq i \leq h-1}$;

comme $n_{i+1} \geq n_i + 3$ pour tout i on a en posant $K' = \{n_{3i}\}_{0 \leq 3i \leq h-1}$,

$\sum_0^{n-1} Y_i \geq \sum_{i \in K'} \sum_{j=i-9}^{i-1} Y_j$ et $\text{card } K' \geq \frac{h}{3}$;

il suffit donc de minorer $\sum_{j=i-9}^{i-1} Y_j$ par $3r^{-2}$ pour tout $i \in K'$.

1^{er} cas : Si $(\varepsilon'_{i-8}, \dots, \varepsilon'_{i-1}) = (4, 1, -2, 4, 1, -2, 4, 1)$, on a deux développements de t_{i-1} :

$$t_{i-1} = \sum_{j=i-8}^{i-1} \varepsilon'_j r^{j-1} + t_{i-9} r^{-8} \text{ d'après le lemme 2.1, et, comme } t_{i-1} \equiv$$

$$Nr^{-i} \text{ modulo } 1, fr t_{i-1} = \sum_{j=i-8}^{i-1} \varepsilon_j r^{j-1} + fr(t_{i-9})r^{-8};$$

$$\text{d'où } (\varepsilon_{i-7}, \dots, \varepsilon_{i-1}) = (1, 10, 3, 1, 10, 3, 1).$$

$$\text{- Si } (\alpha'_{i-7}, \dots, \alpha'_{i-1}) = (1, 11, 4, 1, 11, 4, 1),$$

$$\text{on en déduit } (\alpha_{i-7}, \dots, \alpha_{i-2}) = (0, 11, 4, 0, 11, 4);$$

$$Y_{i-1} \geq 1 \text{ car } \pi_{i-1} \alpha \in \mathcal{E}$$

$$\alpha'_{i-1} = 1$$

$$fr t_{i-1} \in [r^{-1}, 2r^{-1}].$$

$$\text{- Si } \alpha'_{i-1} \neq 1,$$

$$\text{quelle que soit sa valeur on a } Y_{i-1} \geq r^{-1}.$$

$$\text{- Si } \alpha'_{i-2} \neq 4 :$$

$$t_{i-2} = Nr^{-i+1} \text{ modulo } 1, \text{ donc } fr t_{i-2} \text{ appartient à } [3r^{-1} + 10r^{-2}, 3r^{-1} + 11r^{-2}]; \text{ alors } Y_{i-2} \geq 3r^{-2}.$$

$$\text{- Si } \alpha'_{i-3} \neq 11 :$$

$$fr t_{i-3} \in [10r^{-1}, 11r^{-1}] \Rightarrow Y_{i-3} \geq r^{-1}.$$

$$\text{- De même si } \alpha'_{i-4} \neq 1 \text{ ou } \alpha'_{i-5} \neq 4 \text{ ou } \alpha'_{i-6} \neq 11 \text{ ou } \alpha'_{i-7} \neq 1.$$

$$2^{\text{ième}} \text{ cas : } (\varepsilon'_{i-8}, \dots, \varepsilon'_{i-1}) = (6, 1, -3, 6, 1, -3, 6, 1),$$

$$\text{d'où } (\varepsilon_{i-7}, \dots, \varepsilon_{i-1}) = (1, 9, 5, 1, 9, 5, 1).$$

$$\text{- Si } (\alpha'_{i-7}, \dots, \alpha'_{i-1}) = (1, 4, 8, 1, 4, 8, 1)$$

alors $(\alpha_{i-7}, \dots, \alpha_{i-2}) = (1, 3, 8, 1, 3, 8)$; même minoration qu'au premier cas.

$$\text{- Si } \alpha'_{i-1} \neq 1, \text{ même minoration qu'au premier cas.}$$

$$\text{- Si } \alpha'_{i-2} \neq 8 :$$

$$fr t_{i-2} \in [5r^{-1} + 9r^{-2}, 5r^{-1} + 10r^{-2}] \Rightarrow Y_{i-2} \geq 4r^{-2}.$$

$$\text{- Si } \alpha'_{i-3} \neq 4 :$$

$$fr t_{i-3} \in [9r^{-1} + r^{-2}, 9r^{-1} + 2r^{-2}] \Rightarrow Y_{i-3} \geq 4r^{-2}.$$

$$\text{- De même si } \alpha'_{i-4} \neq 1 \text{ ou } \alpha'_{i-5} \neq 8 \text{ ou } \alpha'_{i-6} \neq 4 \text{ ou } \alpha'_{i-7} \neq 1.$$

3^{ième} cas : Si $(\varepsilon'_{i-8}, \dots, \varepsilon'_{i-1})$ a une valeur opposée à celle des deux premiers cas, on en déduit

$$(\varepsilon_{i-7}, \dots, \varepsilon_{i-1}) = (10, 1, 8, 10, 1, 8, 10) \text{ ou } (10, 2, 6, 10, 2, 6, 10);$$

le développement η (en base r) de $r^n - N$ vérifiant $\eta_j = r - 1 - \varepsilon_j$ pour $1 \leq j \leq n - 1$, on est ramené aux deux premiers cas, compte tenu que l'égalité $Y_i = \varphi(Nr^{-i-1}) - X_i(\alpha, N)$ et celle du lemme 0.1 (i) impliquent $Y_i(\beta, M) = Y_i(\alpha, N)$.

4) Majoration de la discrédance de (u_0, \dots, u_{N-1}) .

LEMME 4.1. — Soient $N \in \mathbb{N}$

m le plus grand entier tel que $Nr^{-m} \in \mathbb{N}$

$N' = Nr^{-m}$

ε la suite associée à N' au lemme 2.1.

Il existe C , indépendant de N tel que

$$D(u_0, \dots, u_{N-1}) \leq \tilde{\varphi}\varepsilon - r^{-2}\chi\varepsilon + C.$$

Démonstration. — pour majorer $E(\pi_N u, y) - E(\pi_N u, x)$ (pour tous x et y dans $[0, 1]$) on pose $a = r^{-n}[xr^n]$ et $b = r^{-n}[yr^n]$ (n entier minimal tel que $N < r^n$); d'après la définition de \mathcal{U}_r , l'ensemble $\{k < N/a \leq u_k < x\}$ a au plus un élément, d'où

$$|E(\pi_N u, x) - E(\pi_N u, a)| \leq 2;$$

on fait de même pour $E(\pi_N u, y)$, et on en déduit

$$E(\pi_N u, y) - E(\pi_N u, x) \leq E(\pi_N u, b) - E(\pi_N, a) + 4.$$

Si N n'est pas multiple de r , les lemmes 3.1, 1.1 et 2.2 permettent d'obtenir la majoration voulue; sinon on s'y ramène en posant $c = fr(ar^m)$, $d = fr(br^m)$, et en utilisant le lemme 0.1 (ii). ■

Notations : Etant donnés $\varepsilon \in I^n$ et $\varepsilon' \in I^m$, on note $\varepsilon\varepsilon'$ la suite $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon'_0, \dots, \varepsilon'_{m-1})$ et on pose $Z(\varepsilon, \varepsilon') = -\frac{\varepsilon_{n-1}}{|\varepsilon_{n-1}|}(\mu(\varepsilon_{n-1}, \varepsilon'_0) + \sum_1^{m-1} \mu(\varepsilon'_{i-1}, \varepsilon'_i)r^{-i})$.

LEMME 4.2. — Dans ces conditions on a

$$(i) \tilde{\varphi}(\varepsilon\varepsilon') = \tilde{\varphi}\varepsilon + \tilde{\varphi}\varepsilon' - S(\varepsilon)Z(\varepsilon, \varepsilon')$$

$$0 \leq \chi(\varepsilon\varepsilon') - \chi\varepsilon - \chi\varepsilon' \leq 3;$$

(ii) étant donnés a et b appartenant à I' et de même signe,

$$\tilde{\varphi}(\varepsilon b\varepsilon') - \tilde{\varphi}(\varepsilon a\varepsilon') = \varphi(br^{-1}) - \varphi(ar^{-1}) + (\lambda(\varepsilon_{n-1}, a) - \lambda(\varepsilon_{n-1}, b))S(\varepsilon) + (|a| - |b|)r^{-2}Z(a, \varepsilon')$$

$$|\chi(\varepsilon b \varepsilon') - \chi(\varepsilon a \varepsilon')| \leq 3$$

Démonstration. —

$$(i) \quad \tilde{\varphi}(\varepsilon \varepsilon') = \tilde{\varphi} \varepsilon + \sum_0^{m-1} \varphi(\varepsilon'_i r^{-i}) - \lambda(\varepsilon_{n-1}, \varepsilon'_0) S(\varepsilon) - \sum_1^{m-1} \lambda(\varepsilon'_{i-1}, \varepsilon'_i) S(\pi_{n+i} \varepsilon \varepsilon'),$$

$$\text{avec } S(\pi_{n+i} \varepsilon \varepsilon') = S(\pi_i \varepsilon') + \frac{\varepsilon'_{i-1} \varepsilon_{n-1}}{|\varepsilon'_{i-1} \varepsilon_{n-1}|} r^{-i} S(\varepsilon), \text{ d'où la première égalité.}$$

D'autre part $\chi(\varepsilon \varepsilon') - \chi \varepsilon - \chi \varepsilon'$ est égal à $\text{card}(K(\varepsilon \varepsilon') \cap \{n+1, \dots, n+7\})$, donc compris entre 0 et 3.

(ii) En appliquant deux fois (i) à $\tilde{\varphi}(\varepsilon a \varepsilon')$,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\varepsilon a \varepsilon') &= \tilde{\varphi} \varepsilon + \tilde{\varphi} a + \tilde{\varphi} \varepsilon' - S(\varepsilon) Z(\varepsilon, a \varepsilon') - S(a) Z(a, \varepsilon') \\ &= \tilde{\varphi} \varepsilon + \varphi(a r^{-1}) + \tilde{\varphi} \varepsilon' - S(\varepsilon) (\lambda(\varepsilon_{n-1}, a) + r^{-1} \frac{a \varepsilon_{n-1}}{|a \varepsilon_{n-1}|} Z(a, \varepsilon')) \\ &\quad - |a| r^{-2} Z(a, \varepsilon'); \end{aligned}$$

de même pour $\tilde{\varphi}(\varepsilon b \varepsilon')$, d'où la deuxième égalité.

La dernière inégalité vient du fait que

$$\chi(\varepsilon b \varepsilon') - \chi(\varepsilon a \varepsilon') = \text{card}(K(\varepsilon b \varepsilon') \cap \{n+1, \dots, n+8\}) - \text{card}(K(\varepsilon a \varepsilon') \cap \{n+1, \dots, n+8\}). \quad \blacksquare$$

Maximum de la fonction δ .

N étant fixé, soit $\mathcal{S}(N)$ l'ensemble des suites $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$ appartenant à I'^* telles que $2 \leq n \leq N$

$$\begin{aligned} (\varepsilon_0, \varepsilon_1) &= (4, 1) \\ |\varepsilon_n| &= 3 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n < 0. \end{aligned}$$

On se donne une suite $s = (s_0, \dots, s_n)$ appartenant à $\mathcal{S}(N)$, telle que $\delta(s)$ soit le maximum de $\delta(\varepsilon)$ pour $\varepsilon \in \mathcal{S}(N)$

On va démontrer par l'absurde que certains mots n'apparaissent pas dans la suite s (en construisant, s'ils apparaissaient, une suite $t \in \mathcal{S}(N)$ telle que $\delta(t) > \delta(s)$).

LEMME 5.1. — Pour tout i , $|s_i| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$
 $s_{i-1} s_i > 0$ si $|s_i| = 1$
 < 0 si $|s_i| \neq 1$.

Démonstration. — Si la première condition n'est pas vérifiée, soit i le plus petit indice tel que $|s_i| \notin \{1, 2, 3, 4, 6\}$;

on applique le lemme 4.2 (ii) avec

$$\varepsilon = (s_0, \dots, s_{i-1})$$

$$\varepsilon' = (s_{i+1}, \dots, s_n)$$

$$a = s_i$$

b de même signe que a , avec $|b| = 4$ ou 6 ,

d'où la minoration

$$\begin{aligned} \delta(\varepsilon b \varepsilon') - \delta(s) &\geq S(\varepsilon) - 18 \cdot 10^{-5} \text{ pour } (|s_i| \in \{8, 9, 10\} \text{ et } |b| = 6) \\ &\quad \text{ou pour } (|s_i| \in \{5, 7\} \text{ et } |b| = 4) \\ r^{-1} - S(\varepsilon) - 18 \cdot 10^{-5} &\text{ pour } (|s_i| = 11 \text{ et } |b| = 6). \end{aligned}$$

$$r^2 S(\varepsilon) = \frac{s_{i-1}}{|s_{i-1}|} (s_{i-1} + s_{i-2} r^{-1} + \dots) \text{ est compris entre } \frac{5}{11} \text{ et } \frac{72}{11}, \text{ puisque}$$

$$1 \leq |s_j| \leq 6 \text{ pour tout } j \leq i-1;$$

d'où $\delta(\varepsilon b \varepsilon') - \delta(s) > 0$.

Ceci prouve par l'absurde $|s_i| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ pour tout i . ■

Soit i tel que $s_{i-1} s_i < 0$ et $|s_i| = 1$;

$$\text{on a donc } \lambda(s_{i-1}, s_i) = 7$$

$$\lambda(-s_{i-1}, s_i) = 1$$

$$|\mu(s_{j-1}, s_j)| \leq 7 \quad \forall j;$$

$$\text{on pose alors } \varepsilon = (s_0, \dots, s_{i-1})$$

$$-\varepsilon = (-s_0, \dots, -s_{i-1})$$

$$\varepsilon' = (s_i, \dots, s_n)$$

et on déduit du lemme 4.2 (i)

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}((- \varepsilon) \varepsilon') - \tilde{\varphi}(\varepsilon \varepsilon') &= S(\varepsilon)(Z(\varepsilon, \varepsilon') - Z(-\varepsilon, \varepsilon')) \\ &\geq \frac{5}{11} r^{-2} (6 - 2 \sum_{j=1}^{n-i} 7r^{-j}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \delta((- \varepsilon) \varepsilon') - \delta(\varepsilon \varepsilon') > 0$; la deuxième condition est donc vérifiée.

Soit i tel que $s_{i-1} s_i > 0$ et $|s_i| \neq 1$;

$\lambda(s_{i-1}, s_i)$ et $\lambda(-s_{i-1}, s_i)$ sont égaux, donc

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}((- \varepsilon) \varepsilon') - \tilde{\varphi}(\varepsilon \varepsilon') &\geq S(\varepsilon) \left(-2 \frac{s_{i-1}}{|s_{i-1}|} r^{-1} \mu(s_i, s_{i+1}) - 2 \sum_{j=2}^{n-i} 7r^{-j} \right) \\ &\geq \frac{5}{11} r^{-2} \left(2r^{-1} - \frac{7}{66} \right), \end{aligned}$$

$\delta((-\varepsilon)\varepsilon') - \delta(\varepsilon\varepsilon') > 0$, d'où la troisième condition.

On notera S l'ensemble des suites finies ε qui vérifient pour tout i $|\varepsilon_i| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i-1}\varepsilon_i &> 0 \text{ si } |\varepsilon_i| = 1 \\ &< 0 \text{ si } |\varepsilon_i| \neq 1 \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon \in S$ et $\varepsilon' \in S$, la suite $\varepsilon\varepsilon'$, ou la suite $(-\varepsilon)\varepsilon'$, appartient à S ; on notera $\varepsilon \cdot \varepsilon'$ celle qui y appartient;

on pose aussi $\varepsilon^0 = \emptyset$ et

$$\varepsilon^n = \varepsilon^{n-1} \cdot \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}^*;$$

Dans le cas où $\varepsilon\varepsilon'$ appartient à S , $Z(\varepsilon, \varepsilon')$ ne dépend que de ε' ; on le notera donc $Z(\varepsilon')$.

On notera aussi $\lambda(k)$ la valeur de $\lambda(h, k)$ ((h, k) appartenant à $Z^2 \cap S$); $\lambda(k)$ vaut $r|k|^{-1}$ si $|k| \neq 1$

$$1 \quad \text{si } |k| = 1.$$

LEMME 5.2. — Soient trois suites finies $\delta, \varepsilon, \delta'$ telles que $\delta\varepsilon\delta' \in S$;

$$\text{alors } \tilde{\varphi}(\delta\varepsilon\delta') - \tilde{\varphi}(\delta \cdot \delta') = \tilde{\varphi}\varepsilon - S\delta Z\varepsilon - (S(\delta\varepsilon) - S\delta)Z\delta'$$

$$|\chi(\delta\varepsilon\delta') - \chi(\delta \cdot \delta') - \chi(\varepsilon)| \text{ est au plus égal à } 6,$$

ou à 9 si ε n'a qu'un terme

Démonstration. — Il suffit

– d'appliquer le lemme 4.2 (i) à $\tilde{\varphi}(\delta \cdot \delta')$:

$$\tilde{\varphi}(\delta \cdot \delta') = \tilde{\varphi}\delta + \tilde{\varphi}\delta' - S\delta Z\delta';$$

puis de l'appliquer deux fois à $\tilde{\varphi}(\delta\varepsilon\delta')$:

$$\tilde{\varphi}(\delta\varepsilon\delta') = \tilde{\varphi}\delta + \tilde{\varphi}\varepsilon + \tilde{\varphi}\delta' - S(\delta\varepsilon)Z\delta' - S\delta Z\varepsilon;$$

– de remarquer que (en notant n et m le nombre de termes des suites δ et ε),

$$\chi(\delta\varepsilon\delta') - \chi(\delta \cdot \delta') - \chi(\varepsilon) \text{ est égal à } \text{card}(K(\delta \in \delta') \cap (\{n+1, \dots, n+7\} \cup \{n+m+1, \dots, n+m+7\})) - \text{card } K(\delta \cdot \delta') \cap \{n+1, \dots, n+7\}. \quad \blacksquare$$

LEMME 5.3. — Soit $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1})$ appartenant à S .

En posant $\varepsilon' = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-2})$ et $\varepsilon'' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$, on a

$$\begin{aligned} \text{(i) } r^2 S\varepsilon &= |\varepsilon_{n-1}| + rS\varepsilon' && \text{si } |\varepsilon_{n-1}| = 1 \\ &|\varepsilon_{n-1}| - rS\varepsilon' && \text{sinon} \\ Z\varepsilon &= \lambda\varepsilon_0 + r^{-1}Z\varepsilon'' && \text{si } |\varepsilon_0| = 1 \\ &\lambda\varepsilon_0 - r^{-1}Z\varepsilon'' && \text{sinon} \end{aligned}$$

$$\text{(ii) } 1 \leq S\varepsilon \leq 6$$

$$1 \leq Z\varepsilon \leq 6$$

Démonstration (i). — $r^2 \sum_0^{n-1} \varepsilon_i r^{i-n-1} = \varepsilon_{n-1} + r \sum_0^{n-2} \varepsilon_i r^{i-n}$;

compte tenu du signe de $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}$, on obtient l'expression de $r^2 S\varepsilon$.

On obtient celle de $Z\varepsilon$, en utilisant un nombre a de même signe que ε_0 si $|\varepsilon_0| = 1$, de signe contraire, sinon, d'où

$$\begin{aligned} Z\varepsilon &= \frac{a}{|a|} (\mu(a, \varepsilon_0) + \sum_1^{n-1} \mu(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) r^{-i}) \\ &= \lambda(\varepsilon_0) + \frac{a\varepsilon_0}{|a\varepsilon_0|} r^{-1} Z\varepsilon'' \end{aligned}$$

(ii) se démontre par récurrence en utilisant (i), compte tenu que $|\varepsilon_{n-1}|$ et $\lambda(\varepsilon_0)$ appartiennent à $\{1, 2, 3, 4, 6\}$. ■

LEMME 5.4. — *La suite (s_0, \dots, s_{n-1}) peut se décomposer sous la forme : $(s_0, \dots, s_{n-1}) = \sigma^{(0)} \cdot \sigma^{(1)} \dots \sigma^{(k)}$, avec, pour tout i , $\sigma^{(i)}$ ou $-\sigma^{(i)}$ égal à $(3, 1)$ ou $(4, 1)$ ou $(-2, 4, 1)$ ou $(-3, 6, 1)$.*

Démonstration. — soit ν le plus grand entier tel que $(s_0, \dots, s_{\nu-1})$ vérifie cette condition;

en supposant $\nu < n$, on va construire une suite s' telle que $\delta s' > \delta s$.

En posant pour $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 11r^{-1} - y - (r^{-2} - 11r^{-1}y)z && \text{si } x = 1 \\ &= 1 - (rx^{-1}y - (xr^{-2} - 13r^{-1}y)z && \text{sinon,} \end{aligned}$$

et en notant $S = S(s_0, \dots, s_{\nu-1})$

$$Z = Z(s_{\nu+1}, \dots, s_n)$$

$$s' = (s_0, \dots, s_{\nu-1}), (s_{\nu+1}, \dots, s_n),$$

on a (lemme 5.2) $\tilde{\varphi}s - \tilde{\varphi}s' = f(|s_\nu|, S, Z)$.

ν ne peut être égal à 0 ni 1 ni n donc s' appartient à $\mathcal{S}(N)$.

$|s_{\nu-1}| = 1$ et $|s_{\nu-2}| \in \{3, 4, 6\}$ par conséquent (lemme 5.3)

$$r^2 S = 1 + r^{-1}|s_{\nu-2}| - S(s_0, \dots, s_{\nu-3});$$

d'où l'encadrement $\frac{29}{24} \leq r^2 S \leq \frac{3}{2}$. ■

La fonction $z \rightarrow f(|s_\nu|, S, z)$ est alors croissante si $|s_\nu| = 1$ décroissante sinon.

Discrépance en dimension un

1^{er} cas : $|s_\nu| = 1$; alors

$$\begin{aligned} f(1, S, Z) &\leq f(1, S, 6) \\ &\leq f\left(1, \frac{1}{96}, 6\right) \\ &\Rightarrow \delta s - \delta s' < 0. \end{aligned}$$

2^{ième} cas : $|s_\nu| = 2$;

on va vérifier qu'on ne peut avoir

$$|s_{\nu+1}| = 2 \text{ ni } (|s_{\nu+1}|, |s_{\nu+2}|) = (3, 1) \text{ ou } (3, 6);$$

si on était dans un de ces trois cas,

$$Z = \lambda(s_{\nu-1}) - r^{-1}\lambda(s_{\nu+2}) \pm r^{-2}Z(s_{\nu+3}, \dots, s_n)$$

$$\geq 4 - \frac{1}{6} \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} f(2, S, Z) &\leq f\left(2, S, 4 - \frac{1}{6}\right) \\ &\leq f\left(2, \frac{29}{24}r^{-2}, 4 - \frac{1}{6}\right); \end{aligned}$$

$$\delta s - \delta s' < 0$$

3^{ième} cas : $|s_\nu| = 3$;

si $|s_{\nu+1}|$ valait 2 ou 3, on aurait

$$Z \geq 4 - \frac{1}{2} \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} f(3, S, Z) &\leq f\left(3, S, 4 - \frac{1}{2}\right) \\ &\leq f\left(3, \frac{29}{24}r^{-2}, 4 - \frac{1}{2}\right); \end{aligned}$$

$$\delta s - \delta s' < 0$$

4^{ième} cas : $|s_\nu| = 4$;

si $|s_{\nu+1}|$ valait 2, 3 ou 4 alors

$$Z \geq 3 - \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} f(4, S, Z) &\leq f\left(4, S, 3 - \frac{1}{2}\right) \\ &\leq f\left(4, \frac{29}{24}r^{-2}, 3 - \frac{1}{2}\right); \end{aligned}$$

$$\delta s - \delta s' < 0$$

5^{ième} cas On suppose $|s_\nu| = 6$, ou $(|s_\nu|, |s_{\nu+1}|) = (2, 1)$ ou $(2, 6)$ ou $(4, 6)$, et on pose $a = 3 \frac{s_\nu}{|s_\nu|}$.

La suite $s'' = (s_0, \dots, s_{\nu-1}, a, s_{\nu+1}, \dots, s_n)$ appartient à $\mathcal{S}(N)$ et, d'après le lemme 4.2 (ii),

$$\tilde{\varphi}s - \tilde{\varphi}s'' = (4 - 12|s_\nu|^{-1})S + (3 - |s_\nu|)r^{-2}Z;$$

on utilise la minoration $S \geq \frac{29}{24}r^{-2}$, puis on majore S en remarquant que si $|s_{\nu-2}| = 6$, on a

$$\begin{aligned} (|s_{\nu-4}|, |s_{\nu-3}|, |s_{\nu-2}|, |s_{\nu-1}|) &= (1, 3, 6, 1) \text{ et} \\ S &= r^{-2} + 6r^{-3} - 3r^{-4} + r^{-5} + r^{-4}S(s_0, \dots, s_{\nu-5}) \\ &\leq r^{-2} + 6r^{-3} - 3r^{-4} + r^{-5} + 6r^{-6}; \end{aligned}$$

cette majoration reste bien sûr valable si $|s_{\nu-2}| \leq 4$.

De même on déduit du lemme 5.3

$$\begin{aligned} Z &\geq 1 \text{ et} \\ Z &\leq 2 \text{ si } |s_{\nu+1}| = 1 \text{ ou } 6 \\ Z &\geq 2 - 6r^{-1} + r^{-2} \text{ si } |s_{\nu+1}| = 6. \end{aligned}$$

Ces encadrements permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}s - \tilde{\varphi}s'' &< -18 \cdot 10^{-5} \\ \delta s - \delta s'' &< 0. \end{aligned}$$

6^{ième}cas On suppose $\nu \leq n - 2$ et

$$\begin{aligned} (|s_\nu|, |s_{\nu+1}|) &= (3, 6) \text{ avec } |s_{\nu+2}| \neq 1 \\ &\text{ou } (3, 4) \text{ avec } (|s_{\nu+2}| \neq 1 \text{ ou } (|s_{\nu+2}|, |s_{\nu+3}|) = (1, 2)), \\ &\text{ou } (2, 3) \text{ ou } (2, 4) \text{ avec } |s_{\nu+2}| \in \{2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

Dans ces cas, en posant $t = (s_0, \dots, s_\nu) \cdot (s_{\nu+2}, \dots, s_n)$

$$\begin{aligned} S' &= S(s_0, \dots, s_\nu) \\ Z' &= Z(s_{\nu+2}, \dots, s_n), \end{aligned}$$

on a $\tilde{\varphi}s - \tilde{\varphi}t = f(|s_{\nu+1}|, S', Z')$;

$$r^2 S' = |s_\nu| - r^{-1} - S(s_0, \dots, s_{\nu-2})$$

$$\Rightarrow |s_\nu| - \frac{1}{8} \leq r^2 S' \leq |s_\nu| - \frac{1}{12} \text{ (et } |s_\nu| \text{ vaut 2 ou 3).}$$

La fonction $z \rightarrow f(|s_{\nu+1}|, S', z)$ est alors décroissante

$$\begin{aligned} \text{On minore } Z', \text{ si } |s_{\nu+2}| \neq 1, \text{ par } 2 - 6r^{-1}; \\ \text{si } (|s_{\nu+2}|, |s_{\nu+3}|) = (1, 2), \text{ par } 1 + 6r^{-1} - 6r^{-2}; \\ \text{si } |s_{\nu+2}| \in \{2, 3, 4\}, \text{ par } 3 - 6r^{-1}; \end{aligned}$$

d'où $f(|s_{\nu+1}|, S', Z') < -18 \cdot 10^{-5}$ et

$$\delta s - \delta t < 0.$$

7^{ième}cas $\nu \leq n - 3$ et $(|s_\nu|, |s_{\nu+1}|, |s_{\nu+2}|) = (3, 4, 1)$, avec $|s_{\nu+3}| \neq 2$.

Alors, $Z' \leq 1 + 4r^{-1}$.

Soit $b = 6 \frac{s_{\nu+1}}{|s_{\nu+1}|}$; la suite $t' = (s_0, \dots, s_\nu, b, s_{\nu+2}, \dots, s_n)$ appartient à

$S(N)$ et

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}s - \tilde{\varphi}t' &= 2r^{-2}Z' - S' \\ &\leq 2r^{-2}(1 + 4r^{-1}) - r^{-2} \left(3 - \frac{1}{8} \right) \text{ donc} \end{aligned}$$

$$\delta s - \delta t' < 0.$$

8^{ième} cas $(|s_\nu|, |s_{\nu+1}|, |s_{\nu+2}|) = (2, 4, 6) \quad (\Rightarrow \nu \leq n - 3).$

- Si $(|s_{\nu+3}|, |s_{\nu+4}|) = (1, 1), \quad (\nu \leq n - 5)$

on obtient $\delta s - \delta((s_0, \dots, s_{\nu+3}) \cdot (s_{\nu+5}, \dots, s_n)) < 0,$
par le même calcul qu'au 1^{er} cas.

- Si $(|s_{\nu+3}|, |s_{\nu+4}|) = (1, 6) \quad (\nu \leq n - 5),$ alors

$$\delta s - \delta(s_0, \dots, s_{\nu+3}, 3 \frac{s_{\nu+4}}{|s_{\nu+4}|}, s_{\nu+5}, \dots, s_n) < 0, \text{ par celui du 5^{ième} cas.}$$

- Dans les autres cas, en posant $Z'' = Z(s_{\nu+3}, \dots, s_n)$

$$S'' = S(s_0, \dots, s_{\nu+1})$$

$$t'' = (s_0, \dots, s_{\nu+1}) \cdot (s_{\nu+3}, \dots, s_n),$$

on a $Z'' \geq 1 + 3r^{-1} - 6r^{-2}, \quad 4 - \frac{1}{6} \leq S'' \leq 4$ et $\tilde{\varphi}s - \tilde{\varphi}t'' = f(6, S'', Z'') \Rightarrow$
 $\delta s - \delta t'' < 0$

LEMME 5.5. — Soient $\tau \in S$

$$m_1 = (3, 1)$$

$$m_2 = (4, 1)$$

$$m_3 = (-2, 4, 1)$$

$$m_4 = (-3, 6, 1)$$

$$S = S(m_2) \text{ et } Z = Z(\tau)$$

$$S_i = (1 - r^{-3})^{-1} S(m_i) \text{ et}$$

$$Z_i = (1 - r^{-3})^{-1} Z(m_i) \quad (i = 3 \text{ ou } 4).$$

On a

$$\tilde{\varphi}(m_2 \cdot m_1 \cdot \tau) - \tilde{\varphi}(m_2 \cdot \tau) = 2 - r^{-1} - 3r^{-2} - r^{-2}(1 + 4r^{-1})(4 - r^{-1}) + r^{-2}(r^{-1} + r^{-2} + 4r^{-3})Z,$$

$$\tilde{\varphi}(m_2 \cdot m_2 \cdot \tau) - \tilde{\varphi}(m_2 \cdot \tau) = 2 - r^{-1} - 4r^{-2} - r^{-2}(1 + 4r^{-1})(3 - r^{-1}) + r^{-2}(r^{-2} + 4r^{-3})Z,$$

et, pour $i \in \{3, 4\}$ et $\lambda \in \mathbf{N}^*$,

$$\tilde{\varphi}(m_2 \cdot m_i^\lambda \cdot \tau) - \tilde{\varphi}(m_2 \cdot \tau) = (1 - r^{-3\lambda})(S - S_i)(Z - Z_i) + \frac{4828}{1727}\lambda.$$

Démonstration. — Les deux premières égalités s'obtiennent par le lemme 5.2; la troisième en utilisant d'abord le lemme 5.2 :

$$\tilde{\varphi}(m_2 \cdot m_i^\lambda \cdot \tau) - \tilde{\varphi}(m_2 \cdot \tau) = \tilde{\varphi}(m_i^\lambda) - SZ(m_i^\lambda) - (S(m_i^\lambda) + r^{-3\lambda}S - S)Z;$$

puis par applications successives du lemme 4.2 (i) :

$$\tilde{\varphi}(m_i^\lambda) = \lambda \tilde{\varphi}(m_i) - \sum_{j=1}^{\lambda-1} S(m_i^j) Z(m_i),$$

en remarquant que

$$\begin{aligned} S(m_i^j) &= (1 - r^{-3j}) S_i \\ Z(m_i^j) &= (1 - r^{-3j}) Z_i. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

LEMME 5.6. — Avec les notations du lemme 5.5, on a

$$\begin{aligned} \delta(m_2 \cdot m_1 \cdot \tau) - \delta(m_2 \cdot \tau) &< -0,00026 \\ \delta(m_2 \cdot m_2 \cdot \tau) - \delta(m_2 \cdot \tau) &< -0,0014 \\ \delta(m_2 \cdot m_i^\lambda \cdot \tau) - \delta(m_2 \cdot \tau) &\leq (1 - r^{-3\lambda})(S - S_i)(Z - Z_i) + 12 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Ces inégalités se déduisent du lemme 5.5 avec $Z \leq 6$,

$$\begin{aligned} \chi(m_2 \cdot m_i \cdot \tau) &\geq \chi(m_2 \cdot \tau) \text{ pour } i = 1 \text{ ou } 2, \\ \chi(m_2 \cdot m_i^\lambda \cdot \tau) &\geq \chi(m_2 \cdot \tau) + \lambda - 2 \text{ pour } i = 3 \text{ ou } 4. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

LEMME 5.7. — $s = (4, 1, -3)$

Démonstration. — Si ce n'était pas le cas, il existerait $\tau \in S$ et $\lambda \in \mathbf{N}^*$ tels que $s = m_2 \cdot m_i \cdot \tau$, avec $i = 1$ ou 2

$$\begin{aligned} \text{ou } s = m_2 \cdot m_3^\lambda \cdot \tau, \text{ avec } \tau_0 = -3 \text{ ou } -4 &\quad (\Rightarrow Z(\tau) \leq 4) \\ \text{ou } m_2 \cdot m_4^\lambda \cdot \tau, \text{ avec } \tau_0 = -2 \text{ ou } \tau = (-3) &\quad (\Rightarrow Z(\tau) \geq 4) \\ \text{ou } m_2 \cdot m_4^\lambda \cdot m_i \cdot \tau, i = 1 \text{ ou } 2 &\quad \Rightarrow Z(m_i \cdot \tau) > Z_4 \text{ si } i = 1 \\ &\quad > Z_4 - 1 \text{ si } i = 2). \end{aligned}$$

$m_2 \cdot \tau$ appartient à $\mathcal{S}(N)$.

Dans les trois premiers cas, $\delta s - \delta(m_2 \cdot \tau)$ est négatif d'après le lemme 5.6; dans le quatrième,

$\delta s - \delta(m_2 \cdot \tau) = \delta s - \delta(m_2 \cdot m_i \cdot \tau) + \delta(m_2 \cdot m_i \cdot \tau) - \delta(m_2 \cdot \tau)$ est négatif d'après le même lemme. \blacksquare

6) Démonstration de la proposition 2.

On va d'abord vérifier que la fonction δ est bornée sur I'^* .

A tout $\varepsilon \in I'^*$ on associe la suite

$$\eta(\varepsilon) = (4, 1)\varepsilon \cdot (3)$$

qui appartient à $\bigcup_{N \in \mathbf{N}} \mathcal{S}(N)$ et vérifie donc $\delta(\eta(\varepsilon)) \leq \delta(4, 1, -3)$.

Il découle du lemme 4.2 (i) qu'il existe une constante K telle que $\forall \varepsilon \in I'^*$ $\delta(\eta(\varepsilon)) \geq \delta(\varepsilon) - K$; donc δ est bornée.

Soient $N \in \mathbf{N}$,

m le plus grand entier tel que Nr^{-m} soit entier,

$N' = Nr^{-m}$,

n le plus petit entier tel que $N' < r^n$.

Il résulte du lemme 4.1 que $D(u_0, \dots, u_{N-1}) - \left(\frac{4828}{5181} - 2 \cdot 10^{-5}\right)n$ est majoré par $\delta\varepsilon + C$ donc borné;

comme $r^{n-1} \leq N' \leq N$, on en déduit

$$D(u) \leq (\text{Log}r)^{-1} \left(\frac{4828}{5181} - 2 \cdot 10^{-5} \right).$$

La suite v vérifie la propriété caractéristique de \mathcal{U}_r , avec l'application σ' définie par $\sigma'(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) = \tau\varepsilon_n$; il lui correspond donc une fonction ψ_v définie au chapitre II.

En notant ψ_u la fonction ψ associée à u , on a la relation

$$\psi_v(\alpha, \gamma, x) = \psi_u(\emptyset, \gamma, x) \quad \forall (\alpha, \gamma, x) \in I^* \times \bar{I} \times \mathbf{R}.$$

Soient $N \in \mathbf{N}$, n le plus petit entier tel que $N < r^n$,

a et b appartenant à $[0, 1]$ tels que ar^n et br^n soient entiers,

α et β appartenant à $I^{n-1} \times \bar{I}$, tels que

$$a = \sum_0^{n-1} \alpha_i r^{-i-1} \quad \text{et} \quad b = \sum_0^{n-1} \beta_i r^{-i-1};$$

il résulte de la proposition 1 (appliquée à v), que

$$E(\pi_N v, b) - E(\pi_N v, a) = \sum_0^{n-1} (\varphi_u(\emptyset, \beta'_i, Nr^{-i-1}) - \varphi_u(\emptyset, \alpha'_i, Nr^{-i-1})). \quad (1)$$

- Pour la minoration de la discrétion de v , on se place dans le cas où N

$$\text{vaut } N(k) = (4 + r - 2r^2) \sum_{i=0}^{k-1} r^{3i} \quad (k \in \mathbf{N}^*);$$

l'expression (1) est alors maximale quand α' et β' sont de période 3 avec

$$(\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2) = (7, 12, 5) \text{ et}$$

$$(\beta'_0, \beta'_1, \beta'_2) = (4, 1, 11)$$

(d'où α et β de période 3, $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (6, 11, 5)$ et
 $(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = (4, 0, 11)$).

L'expression (1) vaut alors

$$\sum_0^{3k-1} \varphi_u(N(k)r^{-i-1}).$$

Quand k tend vers $+\infty$,

$(\text{Log } N(k))^{-1} \sum_0^{3k-1} \varphi_u(N(k)r^{-i-1})$ a même limite que

$(3k \text{Log } r)^{-1} \sum_0^{3k-1} \varphi_u(x(k)r^{-i-1})$ avec $x(k) = (4 + r - 2r^2) \sum_{-\infty}^{k-1} r^{3i}$, et

cette limite vaut $\frac{4828}{5181 \text{Log } r}$.

– Pour la majoration, on déduit de (1)

$$E(\pi_{Nv}, b) - E(\pi_{Nv}, a) \leq \sum_0^{n-1} (\varphi_u - f_4)(Nr^{-i-1}).$$

Soient m le plus grand entier tel que $Nr^{-m} \in \mathbb{N}$,

$$N' = Nr^{-m},$$

ε la suite associée à N' par le lemme 2.1;

$\sum_0^{n-1} (\varphi_u - f_4)(Nr^{-i-1})$ est alors égal à $\sum_0^{n-m-1} (\varphi_u - f_4)(N'r^{-i-1})$ et d'après

le lemme 2.2, au plus égal à $\tilde{\varphi}_u \varepsilon$.

Pour x et y quelconques dans $[0, 1]$, on a, en posant $a = r^{-n}[xr^n]$
 $b = r^{-n}[yr^n]$

$E(\pi_{Nv}, y) - E(\pi_{Nv}, x) \leq E(\pi_{Nv}, b) - E(\pi_{Nv}, a) + 4$ (par la même démonstration qu'au lemme 4.1);

on a donc $D(\pi_{Nv}) \leq \tilde{\varphi}_u \varepsilon + 4$.

Or $\tilde{\varphi}_u \varepsilon - 6 \cdot 10^{-5} \chi \varepsilon - \left(\frac{4828}{5181} - 2 \cdot 10^{-5} \right) n$ est majoré par le maximum

de la fonction δ donc, compte tenu que $\chi \varepsilon < \frac{n}{3}$, $D(\pi_{Nv}) - \frac{4828}{5181} n$ est borné indépendamment de N et n .

Références

- [1] KUIPERS (L.), NIEDERREITER (H.). — *Uniform distribution of sequences*, J. Wiley and Sons, 1974.
- [2] SCHMIDT (W.). — Irregularities of distribution, VII, *Acta Arithm.* 21, p. 45-50, 1972.
- [3] BEJIAN (R.). — Minoration de la discrépance d'une suite quelconque sur T , *Acta Arith.* 41, n° 2, p. 185-202, 1982.
- [4] VAN DER CORPUT (J.G.). — Verteilgskfunktionen, I, II, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetens.* 38, p. 813-821, 1058-1066, 1935.
- [5] BEJIAN (R.), FAURE (H.). — Discrépance de la suite de Van Der Corput, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 285 série A, p. 313-316, 1977.
- [6] HABER (S.). — *On a sequence of points of interest for numerical quadrature*, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B70, p. 127-136, 1966.
- [7] GILLET (A.). — *Sur la répartition modulo 1*. Thèse (Marseille) 1968.
- [8] RAMSHAW (L.). — On the discrepancy of the sequence formed by the multiples of an irrational number, *J. of Number Theory* 13, p. 138-175, 1981.
- [9] FAURE (H.). — Discrépance de suites associées à un système de numération, *Bull. Soc. Math. France* 109, n° 2, 1981.
- [10] BOREL (J.P.). — *Suites ayant de bonnes discrèpances*, Publications départ. de math. de l'Université de Limoges, 4, p. 1-21, 1982.

(Manuscrit reçu le 5 septembre 1988)