ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN PIERRE RAYMOND

Théorèmes de régularité locale pour des systèmes elliptiques dégénérés et des problèmes non différentiables

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 9, nº 3 (1988), p. 381-412

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1988_5_9_3_381_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol. IX, n°3, 1988

Théorèmes de régularité locale pour des systèmes elliptiques dégénérés et des problèmes non différentiables

JEAN PIERRE RAYMOND[1]

RÉSUMÉ. — On s'intéresse à la régularité locale des solutions de problèmes du type :

$$\mathcal{P} - \inf\left\{\int_\Omega \left[\frac{1}{p}|\nabla u|^p + f(x,u(x))\right] dx \mid u \in W_o^{1,p}(\Omega,\mathbf{R}^m) + \Phi\right\},$$

avec $1 < p \leq 2$ ou $p > 2$.

On améliore les résultats de régularité dans les espaces de Sobolev de G.N.JAKOVLEV. J.SIMON et F. de THELIN. Dans le dernier paragraphe, on obtient des résultats de régularité pour des problèmes dans lesquels l'intégrande n'est plus une fonction différentiable de ∇u.

ABSTRACT. — We give local regularity results for the following problem :

$$\mathcal{P} - \inf\left\{\int_\Omega \left[\frac{1}{p}|\nabla u|^p + f(x,u(x))\right] dx \mid u \in W_o^{1,p}(\Omega,\mathbf{R}^m) + \Phi\right\},$$

with $1 < p \leq 2$ or $p > 2$.

We improve G.N.JAKOVLEV, J.SIMON and F. de THELIN's regularity results in Sobolev spaces. In the last part, we obtain some regularity results for problems in which the integrand is no more a differentiable function of ∇u.

1. Introduction

On s'intéresse à la régularité des solutions des problèmes :

$$\mathcal{P}_A - \inf\left\{\int_\Omega [g(\nabla u(x)) + f(x,u(x))]\, dx \mid u - \Phi \in W_o^{1,p}(\Omega,\mathbf{R}^m)\right\}$$

$$\mathcal{P}_B - \inf\left\{\int_\Omega [g^*(\nabla u(x)) + f(x,u(x))]\, dx \mid u - \Phi \in W_o^{1,p'}(\Omega,\mathbf{R}^m)\right\},$$

[1] Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paul Sabatier 118, route de Narbonne 31062 Toulouse Cédex

où $p' = \frac{p}{p-1}$, $1 < p \leq 2$, $\Phi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbf{R}^m)$ dans $\mathcal{P}_A$, $\Phi \in W^{1,p'}(\Omega, \mathbf{R}^m)$ dans $\mathcal{P}_B$, Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$. Pour faciliter la lecture, on posera dans les paragraphes 2 à 6 :

$$g(V) = \frac{1}{p}\,|V|^p \text{ et } g^*(V) = \frac{1}{p'}\,|V|^{p'}.$$

Au paragraphe 7, on généralisera les résultats obtenus à des fonctions g et g^* plus générales (non nécessairement fonctions de la norme).

Lorsque $f(x, \cdot)$ est convexe, u est solution de $\mathcal{P}_A$ (resp. de $\mathcal{P}_B$) si et seulement si u vérifie le système d'E.D.P. :

$$\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{q-2}\nabla u\right) = f_u(x,u), \text{ avec } q = p \text{ (resp } q = p').$$

Les exemples suivants, dont certains sont étudiés dans la littérature, rentrent dans le cadre de notre étude :

(I) $f(x,u) = h(x)u$, $f_u(x,u) = h(x)$, $h \in L^{p'}$ pour $\mathcal{P}_A$ et $h \in W^{1,p}$ pour $\mathcal{P}_B$.

(II) $f(x,u) = \frac{1}{q}\,|u|^q + h(x)u$, $f_u(x,u) = |u|^{q-2}u + h(x)$, $q = p$ et $h \in L^{p'}$ pour $\mathcal{P}_A$, $q = p'$ et $h \in W^{1,p}$ pour $\mathcal{P}_B$.

(III) pour $\mathcal{P}_B$, $f(x,u) = h(x)e^{|u|^2}$, $f_u(x,u) = 2u\; h(x)e^{|u|^2}$ avec $h(x) \geq 0$ et $h \in W^{1,p}$.

Si $f(x, \cdot)$ n'est pas convexe, les solutions de $\mathcal{P}_A$ ou $\mathcal{P}_B$ vérifient le système d'équations d'Euler du problème considéré, mais les solutions de ce système ne sont pas nécessairement solutions du problème de minimum.

Les résultats de régularité sont obtenus ici pour les systèmes d'équations. A titre d'exemple dans le cas non convexe, on peut considérer les systèmes d'E.D.P. suivants :

(IV) $\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{q-2}\nabla u\right) = \lambda |u|^{q-2}u$ avec $\lambda < 0$ et $q = p$ ou $q = p'$.

(V) $\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p'-2}\nabla u\right) = h(x)e^{-|u|^2}u$ avec $h(x) \geq 0$ et $h \in W^{1,p}$.

La régularité des solutions pour des problèmes de ce type a été étudiée pour des problèmes scalaires ($m = 1$) dans les espaces de Sobolev et dans les espaces de Besov dans [8], [10], [12], [13], [17]. Elle a également été étudiée du point de vue de la continuité höldérienne dans [3], [5], [14], [15], [16]. Nous améliorons ici certains des résultats donnés dans [8], [10], [12], [13], [17].

On obtient les résultats suivants, aussi bien pour des problèmes scalaires ($m = 1$) que vectoriels ($m > 1$) :

- Les solutions de $\mathcal{P}_A$ appartiennent à $W^{2,np/(n-2+p)}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{R}^m)$ si $n > 2$ ou $p = 2$ et à $W^{2,r}_{\text{loc}}$ pour tout $r < 2$ si $n = 2 > p$ (théorème 5.1).
- Les solutions adjointes de $\mathcal{P}_B$ appartiennent à $W^{1,np/(n-2+p)}_{\text{loc}}$ $(\Omega, \mathbf{R}^{mn})$ si $n > 2$ ou $p = 2$ et à $W^{1,r}_{\text{loc}}$ pour tout $r < +\infty$ si $n = 2 > p$ (théorème 6.3).
- Les solutions de $\mathcal{P}_B$ appartiennent à $W^{1,np'/(n-2)}_{\text{loc}} \cap L^\infty(\Omega, \mathbf{R}^m)$ si $n > 2$ et à $W^{1,r}_{\text{loc}} \cap L^\infty$ pour tout $r < +\infty$ si $n = 2$ (théorème 6.3, proposition 2.3).

La notion de solution adjointe est définie en 6.1 et est une extension de la notion de "solution du problème dual" dans le cas où $f(x, \cdot)$ n'est pas convexe.

On comparera, en Annexe, certains des résultats que nous obtenons à ceux donnés dans [8], [10], [12], [13], [17].

Certaines techniques de démonstrations sont, à notre connaissance, nouvelles :

- utilisation systèmatique de l'inégalité de Hölder avec exposant négatif (cf. lemme 3.2) pour traiter les dégénérescences.
- mise en oeuvre de la méthode de Nirenberg sur l'équation adjointe pour étudier la régularité des solutions de $\mathcal{P}_B$.

Des résultats de régularité concernant $\mathcal{P}_B$ sont également donnés dans [9] pour le cas scalaire, mais les techniques d'estimation de la norme des solutions dans $W^{1,\infty}$ ne sont pas en général transposables au cas vectoriel. (Remarquons toutefois que, dès que les solutions d'un problème du type $\mathcal{P}_B$ seront lipschitziennes, les résultats de régularité de [9] sont applicables. Les problèmes étudiés dans [15] et [16] rentrent dans ce cadre-là).

Signalons enfin, que tout au long de la rédaction, on a eu le souci de mettre en évidence les analogies découlant de la dualité entre g et g^* dans l'étude de $\mathcal{P}_A$ et $\mathcal{P}_B$.

Dans le dernier paragraphe, on étudie des problèmes pour lesquels la fonction g n'est pas partout différentiable. Des problèmes de ce type ont été étudiés dans le cas scalaire dans [4]. On suppose qu'aux points où elle est régulière, g vérifie une condition d'ellipticité du type de celle rencontrée pour le problème $\mathcal{P}_A$. On démontre, comme dans le cas différentiable, que les solutions du problème appartiennent à $W^{2,np/(n-2+p)}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{R}^m)$. Intuitivement, tout se passe comme si, aux points de "non-différentiabilité" de g, le coefficient d'ellipticité était infini. Analytiquement, ce phénomène correspond, dans l'application de la méthode de Nirenberg, à l'apparition de sauts dont on montre qu'ils sont tous positifs. On a déjà rencontré ce phénomène dans l'étude de l'équation adjointe d'un problème présentant de fortes dégénérescences (cf. [9]).

Rappel. — L'espace $W^{1,r}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbf{R}^\ell)$ désigne $[W^{1,r}_{\mathrm{loc}}(\Omega)]^\ell$. On adopte le même type de notation pour d'autres espaces fonctionnels.

2. Notations - Hypothèses - Estimations

Notations . — (a) Si X et Y désignent deux vecteurs de $\mathbf{R}^\ell$, on note $X.Y$ le produit scalaire de X et Y et $|X|$ la norme euclidienne de X. Si M désigne une matrice carrée d'ordre ℓ symétrique, $M.X.Y$ désigne le produit scalaire de $M.X$ par Y et $|M|^2$ désigne la norme euclidienne de M dans $\mathbf{R}^{\ell^2}$.

(b) $\nabla g(V)$ (resp $\nabla g^*(V)$) désigne le gradient de g (resp g^*) en V et $\nabla^2 g(V)$ (resp $\nabla^2 g^*(V)$) désigne le hessien de g(resp g^*) en V. $\nabla^2 g(V)$ est ici considéré en tant que matrice carrée symétrique d'ordre $m\ n$.

(c) $f_u(x,u)$ désigne le gradient de f par rapport à u, c'est un vecteur de $\mathbf{R}^m$, $f_{ux}(x,u)$ et $f_{uu}(x,u)$ désignent les matrices des dérivées partielles secondes, $|f_u(x,u)|$, $|f_{ux}(x,u)|$ et $|f_{uu}(x,u)|$ désignent les normes euclidiennes des vecteurs ou matrices considérés.

(d) Si q est une application de $\mathbf{R}^{nm}$ dans $\mathbf{R}$, $\operatorname{div} q$ désigne l'application de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$(\operatorname{div} q)_j = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} q_i^j, \text{ avec } 1 \leq j \leq m$$

et

$$q = (q_i^j)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$$

(e) $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ désigne la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Si B est une partie de $\mathbf{R}^n$, on pose $\tau_h^i\ B = \{x + he_i | x \in \Omega\}$.

Pour toute fonction V de Ω dans $\mathbf{R}^\ell$ et pour tout x de $\Omega \cap \tau^i_{-h}\Omega$, on pose :

$$\delta_h^i V(x) = \frac{1}{h}\left[V(x + he_i) - V(x)\right].$$

$B(y,R)$ désigne la boule de centre y et de rayon R.

(f) si V est une fonction de Ω dans $\mathbf{R}^\ell$, $\|V\|_\alpha$ désigne la norme de V dans $L^\alpha(\Omega, \mathbf{R}^\ell)$ et $\|V\|_{1,\alpha}$ la norme de V dans $W^{1,\alpha}(\Omega, \mathbf{R}^\ell)$.

Hypothèses. — Les hypothèses notées (2. .A) sont relatives à $\mathcal{P}_A$, celles qui sont notées (2. .B) sont relatives à $\mathcal{P}_B$, les autres sont communes à $\mathcal{P}_A$ et $\mathcal{P}_B$.

(2.1.A) Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ et vérifie la propriété du cône (cf [Def. 4.3, p. 66, 1], $\Phi \in W^{1,p}$.

(2.1.B) Ω vérifie l'hypothèse (2.1.A), $\Phi \in W^{1,p'}$ et $\sup\limits_{\partial\Omega} |\Phi| < +\infty$ au sens de $W^{1,p'}$.

(2.2) $f \in C^2(\Omega \times \mathbf{R}^m, \mathbf{R})$ et $f(\cdot, u(\cdot)) \in L^1(\Omega)$ si $u \in L^\infty$.

(2.3.A) $\forall x \in \Omega$, $\forall u \in \mathbf{R}^m$, $f(x,u) \geq -a_1|u|^p - K(x)|u|^\alpha - M(x)$, avec $M \in L^1(\Omega)$,

$$\alpha < p, \quad K \in L^\beta(\Omega), \quad \frac{1}{\beta} = 1 - \frac{\alpha}{p} + \frac{\alpha}{n}, \quad a_1 < C(p, \Omega, \mathbf{R}^m)^{-p} p^{-1},$$

où $C(p, \Omega, \mathbf{R}^m)$ est la constante de l'inégalité de Poincaré dans $W_o^{1,p}(\Omega, \mathbf{R}^m)$.

(2.3.B) énoncé obtenu par substitution de p par p' dans (2.3.A).

(2.4.A) $\forall x \in \Omega$, $\forall u \in \mathbf{R}^m$, $|f_u(x,u)| \leq a_2|u|^{n(p-1)/(n-p)} + N(x)$, avec $N \in L^{p'}(\Omega)$.

(2.4.B) Il existe c_o tel que, pour tout u vérifiant $\inf\{|u_i| \;|1 \leq i \leq m\} \geq c_o$, pour tout j de $\{1, \ldots, m\}$, on ait :

$$-a_2|u|^{p'-2}u_j^2 \leq f_{u_j}(x,u).u_j, \text{ où } a_2 \in \mathbf{R}_+^*.$$

(2.5.B) Pour toute constante c positive, on a :

$$\sup_{u \in \mathbf{R}, |u| \leq c} |f_u(\cdot, u)| \in L^p(\Omega)$$
$$\sup_{u \in \mathbf{R}, |u| \leq c} |f_{uu}(\cdot, u)| \in L^{p/(2-p)}(\Omega)$$
$$\sup_{u \in \mathbf{R}, |u| \leq c} |f_{ux}(\cdot, u)| \in L^p(\Omega)$$

Existence - Estimations à priori

PROPOSITION 2.1. — *Si les hypothèses (2.1) à (2.3.A) (resp 2.3.B) sont vérifiées, il existe une constante c_1 ne dépendant que des données du problème $\mathcal{P}_A$ (resp $\mathcal{P}_B$) telle que, toute fonction u vérifiant $I(u) \leq I(\Phi)$ (où I est la fonctionnelle du problème considéré) satisfasse :*

$$\|u\|_{1,p} \leq c_1 \quad (\text{resp } \|u\|_{1,p'} \leq c_1).$$

Preuve. — Elle est donnée par G. STAMPACCHIA dans [11], th. 6.1. C'est dans cette preuve qu'intervient l'estimation faite sur la constante a_1 en (2.3).

PROPOSITION 2.2. — *Si les hypothèses (2.1) à (2.3.A) (resp 2.3.B) sont vérifiées, $\mathcal{P}_A$ (resp $\mathcal{P}_B$) admet des solutions.*

Preuve pour $\mathcal{P}_A$. — La proposition 2.1 garantit l'existence d'une suite minimisante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers $\overline{u}$ dans $W^{1,p}$. On peut, de plus, supposer que cette suite converge presque partout vers $\overline{u}$ dans Ω. Avec le lemme de Fatou et l'estimation (2.3.A), on montre que l'on a :

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f(x, u_n(x))dx \geq \int_\Omega f(x, u(x))dx. \tag{2.6}$$

La fonctionnelle $u \to \int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla u(x)|^p dx$ étant faiblement s.c.i. dans $W^{1,p}$, le résultat d'existence se déduit facilement de (2.6). La preuve est analogue pour $\mathcal{P}_B$.

PROPOSITION 2.3. — *Si les hypothèses (2.1) à (2.5.B) sont vérifiées, il existe une constante c_2 ne dépendant que des données de $\mathcal{P}_B$ telle que toute solution u de $\mathcal{P}_B$ satisfasse l'estimation :*

$$\|u\|_\infty \leq c_2.$$

Remarque. — Il ne nous a pas été possible d'établir dans le cas vectoriel ($m > 1$) une proposition de ce type pour $\mathcal{P}_A$. Rappelons que dans le cas scalaire ($m = 1$) la preuve d'une estimation à priori dans L^∞ des solutions de $\mathcal{P}_A$ et de $\mathcal{P}_B$ est donnée dans [11] théorème 6.2, c'est d'ailleurs cette preuve que l'on adapte au cas vectoriel pour $\mathcal{P}_B$.

Enonçons tout d'abord deux lemmes que l'on utilisera dans cette preuve.

LEMME 2.4. — *(Lemme 2.1 [11] ou Lemme 4.1 [18]). Soit ϕ une fonction positive ou nulle, définie pour $t > k_o$, non croissante et telle que :*

$$\forall h,\ \forall k,\ h > k > k_o \Rightarrow \phi(h) \leq \frac{c}{(h-k)^\alpha}[\phi(k)^\beta],$$

où c, α et β sont des constantes positives.

(i) Si $\beta > 1$, on a $\phi(k_o + d) = 0$ avec

$$d^\alpha = c[\phi(k_o)]^{\beta-1}2^{\alpha\beta/(\beta-1)},$$

(ii) Si $\beta = 1$, on a :

$$\phi(h) \leq e \times \exp[-\zeta(h-k_o)]\phi(k_o) \textit{ avec } \zeta = (ec)^{-1/\alpha}.$$

(iii) Si $\beta < 1$ et $k_o > 0$, on a :

$$\phi(h) \leq 2^{\nu/(1-\beta)} \left[c^{1/(1-\beta)} + (2k_o)^\nu \phi(k_o)\right] h^{-\nu} \textit{ avec } \nu = \frac{\alpha}{1-\beta}.$$

LEMME 2.5. — *Soit u une fonction mesurable définie sur Ω et soit $A(h) = \{x \in \Omega | u(x) \geq h\}$.*

(i) Si pour tout $h \geq h_o > 0$, on a :

$$Mes\ A(h) \leq \frac{c}{h^\gamma} \textit{ avec } c > 0 \textit{ et } \gamma > 1,$$

alors $u \in L^{\gamma-\epsilon}(A(h_o))$ pour tout ϵ vérifiant $0 < \epsilon < \gamma - 1$.

(ii) Si pour tout $h \geq h_o > 0$, on a :

$$Mes\ A(h) \leq c_1 \exp\left[-c_2(h-h_o)\right] \textit{ avec } c_1 > 0, c_2 > 0,$$

alors $u \in L^\gamma$ pour tout $\gamma \geq 1$.

Preuve du lemme 2.5.i . — On pose $B(k) = \{x \in \Omega | u^{\gamma-\epsilon}(x) \geq k\}$, on a :

$$\text{Mes } B(k) \leq \frac{c}{k^{\gamma/(\gamma-\epsilon)}}.$$

On en déduit :

$$\int_{A(h_o)} \left(u^{\gamma-\epsilon} - h_o^{1/(\gamma-\epsilon)}\right) dx = \int_{B\left(h_o^{1/(\gamma-\epsilon)}\right)} \left(u^{\gamma-\epsilon} - h_o^{1/(\gamma-\epsilon)}\right) dx$$
$$= \int_{h_o^{1/(\gamma-\epsilon)}}^{+\infty} \text{Mes } B(t) dt < +\infty.$$

Preuve du lemme 2.5.ii . — On pose $B(k) = \{x \in \Omega | u^\gamma(x) \geq k\}$, on a :

$$\text{Mes } B(k) \leq c_1 \exp\left[-c_2(k^{1/\gamma} - h_o)\right].$$

On en déduit :

$$\int_{A(h_o)} (u^\gamma - h_o^{1/\gamma}) dx = \int_{B(h_o^{1/\gamma})} (u^\gamma - h_o^{1/\gamma}) dx$$
$$= \int_{h_o^{1/\gamma}}^{+\infty} \text{Mes } B(t) dt < +\infty.$$

Preuve de la proposition 2.3 .— La proposition est immédiate si $p' > n$ (cf [11]). On suppose donc maintenant que l'on a $p' \leq n$. On démontre qu'il existe $k > 0$ pour lequel on a :

$$\text{Mes } \{x \in \Omega | u_i(x) > k\} = 0 \text{ avec } 1 \leq i \leq m.$$

L'existence de $k > 0$ vérifiant Mes $\{x \in \Omega | u_i(x) < -k\} = 0$ se démontre de manière analogue.

Pour k suffisamment grand, on pose :

$$\{u_i\}^k(x) = \min\{k, u_i(x)\}, \ \{u\}^{k,i} = (u_i, \dots, \{u_i\}^k, u_{i+1}, \dots, u_m),$$

$$A_i(k) = \{x \in \Omega | u_i(x) > k\} \text{ avec } 1 \leq i \leq m.$$

Si u est solution de $\mathcal{P}_B$, on a $I(u) \leq I\big(\{u\}^{k,i}\big)$, soit encore :

$$\begin{aligned} &\int_{A_i(k)} \frac{1}{p'} \left\{ |\nabla u(x)|^{p'} - |\nabla \{u\}^{k,i}(x)|^{p'} \right\} dx \\ &\leq \int_{A_i(k)} \{f(x, u_1, \dots, k, u_{i+1}, \dots, u_m) - f(x,u)\}\, dx. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Compte tenu de l'inégalité :

$$\left(|\nabla u_i|^2 + \sum_{j \neq i} |\nabla u_j|^2 \right)^{p'/2} - \left(\sum_{j \neq i} |\nabla u_j|^2 \right)^{p'/2} \geq |\nabla u_i|^{p'}, \tag{2.8}$$

de (2.7) on déduit :

$$\int_{A_i(k)} \frac{1}{p'} |\nabla u_i|^{p'} dx \leq \int_{A_i(k)} dx \int_{u_i(x)}^{k} f_{u_i}(x, u_1, \dots, t, u_{i+1}, \dots, u_m) dt.$$

L'hypothèse (2.4.B) permet alors d'écrire :

$$\int_{A_i(k)} |\nabla u_i|^{p'} dx \leq p' a_2 \int_{A_i(k)} (u_i(x) - k) |u(x)|^{p'-1} dx. \tag{2.9}$$

Pour tout $k \geq \sup_{\partial\Omega} |\Phi|$, la fonction $\max(u_i(\cdot) - k, 0)$ appartient à $W_o^{1,p'}(\Omega)$. Soit $r \geq p'^*$ avec $p'^* = np'/(n - p')$. Si $u \in L^r$, avec l'inégalité de Hölder appliquée au membre de droite de (2.9) et l'inégalité de Sobolev appliquée au membre de gauche, pour tout $k \geq \sup_{\partial\Omega} |\Phi|$, on a :

$$\left\{ \int_{A_i(k)} |u_i - k|^{p'^*} \right\}^{p'/p'^*}$$
$$\leq p' a_2 c \|u\|_r^{p'-1} \left\{ \int_{A_i(k)} |u_i - k|^{p'^*} \right\}^{1/p'^*} [\text{Mes } A_i(k)]^{1-1/p'^* - (p'-1)/r},$$

où $c = c(n, m, p')$ désigne la constante de l'inégalité de Sobolev, elle ne dépend que de n, m et p'.

On a encore :

$$\int_{A_i(k)} |u_i - k|^{p'^*} dx \leq c(r) \left[\text{Mes } A_i(k)\right]^{\lambda(r) p'^*} \tag{2.10}$$

avec

$$\lambda(r) = \left[1 - 1/p'^* - (p'-1)/r\right] / (p'-1)$$

et

$$c(r) = \{p' a_2 c(n, m, p')\}^{p'^*/(p'-1)} \|u\|_r^{p'^*}.$$

Si $h > k$, on a $A_i(h) \subset A_i(k)$ et avec (2.10) on obtient :

$$\text{Mes } A_i(h) \leq \frac{c(r)}{(h-k)^{p'^*}} \left[\text{Mes } A_i(k)\right]^{\lambda(r) p'^*}. \tag{2.11}$$

En posant $r = r_o = p'^*$ dans (2.11), avec les lemmes 2.4 et (2.5), on démontre :

$u_i \in L^\infty$ si $\lambda(p'^*) > 1/p'^*$,

$u_i \in L^{r_1}$ pour tout $r_1 > 1$ si $\lambda(p'^*) = 1/p'^*$,

$u_i \in L^{r_1}$ pour tout $r_1 < \left[\frac{1}{p'^*} - \lambda(p'^*)\right]^{-1}$ si $\lambda(p'^*) < 1/p'^*$.

Le résultat précédent étant vrai pour tout i, il est également vrai pour la fonction vectorielle u.

La preuve est donc établie si $\lambda(p'^*) > 1/p'^*$.

Si $\lambda(p'^*) = 1/p'^*$, en posant $r = r_1$ dans (2.11), où r_1 est choisi supérieur à p'^*, on a $\lambda(r_1) > 1/p'^*$ et du lemme 2.4.i, on déduit :

$$u_i \in L^\infty.$$

On a donc : $u \in L^\infty$.

Examinons le cas où $\lambda(p'^*) < 1/p'^*$. En posant $r = r_1$ dans 2.11, avec :

$$r_1 = \left[\frac{1}{p'^*} - \lambda(r_o) + \epsilon(r_o)\right]^{-1} \quad \text{et} \quad \epsilon(r) = \frac{1}{r}\left(\frac{p'^* - 1}{p' - 1} - 1\right),$$

des lemmes 2.4 et 2.5, on déduit :

$$u \in L^{r_2} \quad \text{pour} \quad r_2 = \left[\frac{1}{p'^*} - \lambda(r_1) + \epsilon(r_1)\right]^{-1}.$$

On itère le processus tant que l'on a :

$$\lambda(r_i) \leq \frac{1}{p'^*}.$$

De l'égalité :

$$\frac{1}{r_{i+1}} = \frac{1}{p'^*} - \lambda(r_i) + \epsilon(r_i),$$

on déduit :

$$\frac{1}{p'^*} - \frac{1}{r_{i+1}} = \left(\frac{1}{p'^*} - \frac{1}{r_i}\right)\left(\frac{p'^* - 1}{p' - 1}\right).$$

Etant donné que l'on a :

$$\frac{p'^* - 1}{p' - 1} > 1 \quad \text{et} \quad \lambda(r) > \frac{1}{p'^*} \text{ si } r > \frac{n(p' - 1)}{p'},$$

il existe i_o vérifiant :

$$\lambda(r_{i_o - 1}) \leq 1/p'^* \text{ et } \lambda(r_{i_o}) > 1/p'^*.$$

Le lemme 2.4.i permet alors de conclure.

Pour $p' = n$, il suffit de combiner l'inégalité :

$$\|\nabla u\|_{p'-\epsilon} \leq \|\nabla u\|_{p'} [\text{Mes } \Omega]^{1/(p'-\epsilon) - 1/p'}$$

et le raisonnement précédent dans lequel on aura remplacé p' par $p' - \epsilon$, avec $\epsilon > 0$ suffisamment petit.

Remarque. — L'inégalité (2.8) n'est pas vérifiée si l'on remplace p' par p, car on a $p' > 2$ et $p < 2$. C'est la raison pour laquelle la preuve précédente n'est pas valable pour $\mathcal{P}_A$. On peut cependant remplacer (2.8) par :

$$\begin{aligned}\left(|\nabla u_i|^2 + \sum_{j\neq i} |\nabla u_j|^2\right)^{p/2} &- \left(\sum_{j\neq i} |\nabla u_j|^2\right)^{p/2} \\ \geq \frac{1}{2}\left(|\nabla u_i|^2 + \sum_{j\neq i} |\nabla u_j|^2\right)^{(p-2)/2} &|\nabla u_i|^2.\end{aligned}$$

Par des techniques identiques à celles développées entre (4.9) et (4.10) (utilisation de l'inégalité de Hölder avec exposant négatif), on peut trouver une estimation analogue à (2.9), l'exposant de Mes $A_i(k)$ sera alors :

$$\{(1 - 1/p^* - (p-1)/r)p^*/(p-1)\} \times p/2,$$

(le facteur $p/2$ apparaît quand on utilise l'inégalité de Hölder avec exposant négatif). Dans la preuve précédente, on remarque que le processus itératif permet de conclure car on a :

$$\left(1 - \frac{1}{p'^*}\right)\left(\frac{p'^*}{p-1}\right) > 1.$$

Compte tenu du facteur $p/2$ et de ce que p' est remplacé par p, ce processus itératif permettra encore d'obtenir une estimation de la norme L^∞ des solutions de $\mathcal{P}_A$ lorsque p et p^* vérifieront l'inégalité suivante :

$$\left(1 - \frac{1}{p^*}\right)\left(\frac{p^*}{p-1}\right)\frac{p}{2} > 1.$$

(Une hypothèse du type 2.4.B dans laquelle p' serait remplacé par p est également nécessaire).

3. Lemmes préliminaires

On démontre dans ce paragraphe certains résultats utiles pour la suite.

LEMME 3.1. — *Soient $a > 0$ et A un ensemble mesurable de $\mathbf{R}^\ell$, avec $\ell \in \mathbf{N}^*$. Si f et $|f|^{-a}$ appartiennent à $L^1(A)$ et si $\|f\|_{L^1(A)} \neq 0$, alors on a :*

$$[Mes\ (A)]^{a+1}\left[\int_A |f|dx\right]^{-a} \leq \int_A |f|^{-a}dx$$

Preuve. — De l'inégalité de Hölder, on déduit :

$$\int_A |f|^{a/(a+1)}.|f|^{-a/(a+1)}dx$$
$$\leq \left\{\int_A |f|^{\frac{a}{a+1}\times\frac{a+1}{a}}dx\right\}^{\frac{a}{a+1}}.\left\{\int_A |f|^{-\frac{a(a+1)}{a+1}}dx\right\}^{\frac{1}{a+1}},$$

soit encore :

$$\text{Mes } A \leq \left\{\int_A |f|dx\right\}^{\frac{a}{a+1}}.\left\{\int_A |f|^{-a}dx\right\}^{\frac{1}{a+1}}.$$

Le lemme s'en déduit immédiatement.

LEMME 3.2. — *Soient $0 < k < 1$, $k' = k/(k-1) < 0$ et Ω' un ensemble mesurable de $\mathbf{R}^n$. Si f appartient à $L^k(\Omega')$ et si $\int_{\Omega'} |g(x)|^{k'}dx < +\infty$, on a :*

$$\left\{\int_{\Omega'} |f(x)|^k\ dx\right\}^{1/k} \leq \left\{\int_{\Omega'} |f(x)g(x)|dx\right\}\left\{\int_{\Omega'} |g(x)|^{k'}dx\right\}^{-1/k'}.$$

Remarque. — Ce lemme est une forme faible du théorème 2.6 de [1]. La preuve est ici identique, seule la division finale par $\left\{\int_{\Omega'} |g(x)|^{k'}dx\right\}^{-1/k'}$, n'est pas effectuée, c'est la raison pour laquelle l'hypothèse "$0 < \int_\Omega |g(x)|^{k'} dx$" n'est pas nécessaire.

LEMME 3.3. — *On a :*

$$\forall V \in \mathbf{R}^{nm}\backslash\{0_{nm}\},\ \forall X \in \mathbf{R}^{nm},$$
$$\nabla^2 g(V).X.X \geq (p-1)|V|^{p-2}|X|^2.$$

Preuve. — On a :

$$\nabla^2 g(V).X.X = |V|^{p-2}X.X + (p-2)|V|^{p-4}(V.X)(V.X).$$

Etant donné que l'on a :

$$(V.X)^2 \leq |V|^2|X|^2 \text{ et } p \leq 2,$$

on obtient :

$$\nabla^2 g(V).X.X \geq (p-1)|V|^{p-2}X.X \qquad \square$$

LEMME 3.4. — *Si V appartient à $L^{\alpha}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{R}^{nm})$, avec $1 < \alpha$, on a : pour tout Ω' vérifiant $\Omega' \cup \tau^{i}_{-h}\Omega' \subset\subset \Omega$,*

$$\int_{\Omega'} \int_{o}^{1} |(1-t)V(x) + t\ V(x+he_i)|^{\alpha} dt, dx \leq \|V\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(\Omega' \cup \tau^{i}_{-h}\Omega')}.$$

Preuve. — Par convexité de l'application $V \to |V|^{\alpha}$, puis par intégration, on a :

$$\int_{o}^{1} |(1-t)V(x) + tV(x+he_i)|^{\alpha} dt \leq \frac{1}{2} \left[|V(x+he_i)|^{\alpha} + |V(x)|^{\alpha} \right].$$

Le lemme s'en déduit immédiatement. □

DÉFINITION 3.5. — *Pour tout V de $L^{\alpha}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{R}^{nm})$, avec $p \leq \alpha$, on pose :*

$$a(x,h) = \int_{o}^{1} |(1-t)V(x) + tV(x+he_i)|^{p-2} dt.$$

Remarque. — La notation $a(V,x,h)$ eut été plus correcte. On a cependant préféré alléger les notations, le lecteur pourra se rendre compte qu'il n'y a pas de confusion possible dans la suite. On utilisera la notation $a(x,h)$ au paragraphe 4 pour $V = \nabla u$, où u est une solution de $\mathcal{P}_A$ et cette même notation au paragraphe 6 pour $V = q$, où q est une solution adjointe de $\mathcal{P}_B$ (cf définition 6.1).

LEMME 3.6. — *Si V appartient à $L^{\alpha}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{R}^{nm})$, avec $p \leq \alpha$, alors on a : Pour tout Ω' vérifiant $\Omega' \cup \tau^{i}_{-h}\Omega' \subset\subset \Omega$,*

$$\int_{\Omega'} a(x,h)^{\alpha/(p-2)} dx \leq \|V\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(\Omega' \cup \tau^{i}_{-h}\Omega')}$$

et $a(.,h)^{-1}$ appartient à $L^{\alpha/(2-p)}(\Omega')$.

Preuve. — On pose $\widetilde{V}(x,h,t) = |(1-t)V(x) + tV(x+he_i)|$. En appliquant le lemme 3.1 avec $A = [0,1]$ et $a = \alpha/(2-p)$, puis le lemme 3.4, on obtient :

$$\int_{\Omega'} a(x,h)^{\alpha/(p-2)} dx = \int_{\Omega'} \left\{ \int_{o}^{1} \widetilde{V}(x,h,t)^{p-2} dt \right\}^{\alpha/(p-2)} dx$$

$$\leq \int_{\Omega'} \int_{o}^{1} \widetilde{V}(x,h,t)^{\alpha} dt\ dx \leq \|V\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(\Omega' \cup \tau^{i}_{-h}\Omega')} \quad □$$

Nous utiliserons fréquemment le lemme suivant dont on peut trouver une preuve dans [7] (lemme 7.23).

LEMME 3.7. — *Si u appartient à $W^{1,p}(\Omega)$, alors $\delta_h^i u$ appartient à $L^p(\Omega')$ pour tout Ω' vérifiant $\Omega' \subset\subset \Omega$ et $h < dist\ (\Omega', \partial\Omega)$, et on a :*

$$\|\delta_h^i u\|_{L^p(\Omega')} \leq \|\partial_{x_i} u\|_{L^p(\Omega)}.$$

4. Théorème de "régularité recursive" pour les solutions de $\mathcal{P}_A$

On démontre dans ce paragraphe le

THÉORÈME 4.1. — *Si u est une solution de $\mathcal{P}_A$ et si u appartient à $W^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{R}^m)$, avec $p \leq \alpha \leq np/(n-2)$, alors u appartient à $W^{2,\gamma(\alpha)}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{R}^m)$ avec $\gamma(\alpha) = 2\alpha/(\alpha + 2 - p)$. (On pose $np/(n-2) = +\infty$ si $n = 2$). De plus, on a : $p \leq \gamma(\alpha) \leq np/(n-2+p)$.*

Commentaires . — Le théorème 4.1 et le théorème d'injection de Sobolev permettent d'obtenir successivement :

$$u \in W^{2,p}_{\text{loc}},\ u \in W^{1,p^*}_{\text{loc}},\ u \in W^{2,\gamma(p^*)}_{\text{loc}} \ldots$$

C'est ce qui nous amène à parler de "régularité récursive". On mettra ce programme en oeuvre au paragraphe suivant.

Idées directrices de la démonstration . — La preuve du théorème 4.1 repose sur la méthode des translations de Nirenberg. Certains des arguments utilisés sont classiques, d'autres sont nouveaux (par exemple le choix particulier des fonctions test, l'utilisation de l'inégalité de Hölder d'exposant négatif). Aussi nous a-t-il paru nécessaire d'écrire cette preuve en entier. De façon à en faciliter la lecture, nous l'avons décomposée en quatre étapes dont nous donnons maintenant un résumé en opérant formellement comme si l'opérateur δ_h^i était l'opérateur de dérivation partielle $\frac{\partial}{\partial x_i}$. On notera δ pour δ_h^i et $-\delta$ pour δ_{-h}^i.

1ère étape : On définit des fonctions tests η telles que $|\nabla\eta \cdot \eta^{-1/\gamma(\alpha)}|$ soit uniformément majoré.

On considére l'équation d'Euler de $\mathcal{P}_A$:

$$\int_\Omega \nabla g(\nabla u) \nabla\zeta\, dx = -\int_\Omega f_u(x, u)\zeta\, dx,$$

dans laquelle on remplace ζ par $-\delta(\delta u\eta)$ et $\nabla\zeta$ par $-\delta(\delta\nabla u\eta)-\delta(\delta u\nabla\eta)$. En "intégrant par parties", on obtient :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \delta\nabla g(\nabla u)(\delta\nabla u)\eta\,dx\\&\quad=\int_\Omega\{f_u(x,u)\delta(\delta u\eta)-\nabla g(\nabla u)\,\delta(\delta u\cdot\nabla\eta)\}\,dx.\end{aligned}$$

2ème étape : Remarquons que $\nabla g(\nabla u(\cdot))$ n'est pas différentiable en x si $\nabla u(x)=0$. Cependant, tout se passe comme si le premier membre de l'équation était :

$$\int_{\widehat{\Omega}}\nabla^2 g(\nabla u)\,\delta\nabla u\,\delta\nabla u\,\eta\,dx,$$

avec

$$\widehat{\Omega}=\left\{x\in\Omega\cap\tau^i_{-h}\Omega|\delta\nabla u(x)\neq 0_{nm}\right\}.$$

En réalité $\nabla^2 g(\nabla u(x))$ sera remplacé par :

$$\int_0^1\nabla^2 g\left((1-t)\nabla u(x)+t\nabla u(x+he_i)\right)dt.$$

On minore alors le premier membre de l'équation par :

$$\int_{\widehat{\Omega}}(p-1)|\nabla u|^{p-2}|\delta\nabla u|^2\eta dx.$$

La majoration du second membre est classique.

3ème étape : La majoration de $|\nabla\eta\cdot\eta^{-1/\gamma(\alpha)}|$ nous permettra d'obtenir une estimation de la forme suivante :

$$\begin{aligned}&\int_{\widehat{\Omega}}|\nabla u|^{p-2}\eta^{(1-2/\gamma)}|\delta\nabla u\ \eta^{1/\gamma}|^2dx\\&\qquad\le C_5\left(\|\delta\nabla u\ \eta^{1/\gamma}\|_p+1\right)=C_5\cdot C_6,\end{aligned}$$

où $\gamma=\gamma(\alpha)$ et C_5 est indépendante de u et de α.

4ème étape : Avec l'inégalité de Hölder d'exposant négatif, on obtient :

$$\left\{\int_\Omega|\delta\nabla u\ \eta^{1/\gamma}|^\gamma dx\right\}^{2/\gamma}\le\|\nabla u\eta\|_\alpha^{2-p}\,C_5\cdot C_6.$$

La fin est alors classique.

Preuve du théorème 4.1 .—

1ère étape : Définition des fonctions test. Soient r et R vérifiant $0 < r < R$. On note η une fonction de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+$ vérifiant :

$$\begin{aligned}
&\eta(\rho) = 0 \ \text{ si } \ \rho > R,\\
&0 \leq \eta(\rho) \leq 1 \ \text{ si } \ r \leq \rho \leq R,\\
&\eta(\rho) = 1 \ \text{ si } \ \rho < r,\\
&\eta' \cdot \eta^{-1/\gamma(\alpha)} \text{ est uniformément borné.}
\end{aligned}$$

Une telle fonction η existe toujours, il suffit de prendre η de la forme

$$\eta(\rho) = C(R-\rho)^{\gamma'}, \text{ avec } \gamma' = \gamma(\alpha)/(\gamma(\alpha)-1),$$

dans un voisinage à gauche de R.

Les solutions u de $\mathcal{P}_A$ vérifient l'équation :

$$\begin{aligned}
&\forall \zeta \in W_o^{1,p}(\Omega, \mathbf{R}^m),\\
&\int_\Omega \nabla g(\nabla u(x)) \nabla \zeta(x) dx = -\int_\Omega f_u(x, u(x))\zeta(x) dx.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Soient $y \in \tau_h^i\Omega \cap \tau_{-h}^i\Omega$, $R \in \mathbf{R}_+$ et $r \in \mathbf{R}_+$ vérfiant :

$$r < R, \ B(y, R) \subset \tau_h^i\Omega \cap \tau_{-h}^i\Omega.$$

La fonction $\delta_{-h}^i \left(\delta_h^i u(\cdot)\eta(|\cdot - y|)\right)$ appartient à $W_o^{1,p}$. En remplaçant ζ dans (4.1) par $\delta_{-h}^i \left(\delta_h^i u(\cdot)\eta(|\cdot - y|)\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla g\left(\nabla u(x)\right) \delta_{-h}^i \left(\delta_h^i \nabla u(x) \eta(|x-y|)\right) dx\\
&= -\int_\Omega \Big\{ f_u(x, u(x)) \ \delta_{-h}^i \left(\delta_h^i u(x)\eta(|x-y|)\right)\\
&\qquad + \nabla g(\nabla u(x)) \ \delta_{-h}^i \left(\delta_h^i u(x)\eta'(|x-y|)\right) \frac{x-y}{|x-y|} \Big\} dx
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Par transposition de δ_{-h}^i, le premier membre de l'équation s'écrit :

$$-\int_\Omega \delta_h^i \nabla g(\nabla u(x)) \ \delta_h^i \nabla u(x) \ \eta(|x-y|) dx. \tag{4.3}$$

En effet, de façon générale on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^n} \phi(x)\delta^i_{-h}\psi(x)dx \\
&\quad = \int_{\mathbf{R}^n} \phi(x)\psi(x-he_i)(-h)^{-1}dx - \int_{\mathbf{R}^n} \phi(x)\psi(x)(-h)^{-1}dx \\
&\quad = \int_{\mathbf{R}^n} \phi(X+he_i)(X)(-h)^{-1}dX - \int_{\mathbf{R}^n} \phi(X)\psi(X)(-h)^{-1}dX \\
&\quad = \int_{\mathbf{R}^n} -\delta^i_h\phi(X)\psi(X)dX.
\end{aligned}$$

2ème étape : Calcul de $\delta^i_h\nabla g(\nabla u(x))$. On pose

$$\widehat{\Omega} = \left\{x \in \Omega \cap \tau^i_{-h}\Omega | \delta^i_h \nabla u(x) \neq 0_{nm}\right\} \text{ et}$$
$$\psi(x,t) = \nabla g\left((1-t)\nabla u(x) + t\nabla u(x+he_i)\right).$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \Omega\backslash\widehat{\Omega},\ \delta^i_h\nabla g(\nabla u(x)) = 0_{nm}, \\
&\forall x \in \widehat{\Omega},\ \delta^i_h\nabla g(\nabla u(x)) = h^{-1}[\psi(x,1)-\psi(x,0)].
\end{aligned} \tag{4.4}$$

De plus, pour tout x de $\widehat{\Omega}$ et tout $t \in [0,1]$ vérifiant

$$|(1-t)\nabla u(x) + t\nabla u(x+he_i)| \neq 0,$$

$\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\,(x,\cdot)$ est continue en t et on a :

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}\,(x,t) = \nabla^2 g\left((1-t)\nabla u(x) + t\nabla u(x+he_i)\right)\ h\ \delta^i_h\nabla u(x).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \widehat{\Omega},\ \delta^i_h\nabla g(\nabla u(x)) \\
&\quad = \int_0^1 \nabla^2 g\left((1-t)\nabla u(x) + t\nabla u(x+he_i)\right) dt\ \delta^i_h\nabla u(x).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

De (4.2), (4.3) et (4.5), on déduit :

$$\begin{aligned}
&\int_{\widehat{\Omega}}\int_0^1 \nabla^2 g\left((1-t)\nabla u(x) + t\nabla u(x+he_i)\right) dt\cdot \\
&\quad \delta^i_h\nabla u(x)\delta^i_h\nabla u(x)\eta(|x-y|)dx \\
&\quad = \int_\Omega f_u(x,u(x))\delta^i_{-h}\left(\delta^i_h u(x)\eta(|x-y|)\right)dx \\
&\quad + \int_\Omega \nabla g(\nabla u(x))\delta^i_{-h}\left(\delta^i_h u(x)\eta'(|x-y|)\frac{x-y}{|x-y|}\right)dx.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

On minore le premier membre de l'égalité à l'aide du lemme 3.3, on majore le second membre de (4.6) avec l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_{\widehat{\Omega}}(p-1)a(x,h)|\nabla\delta_h^i u(x)|^2\eta(|x-y|)dx \\
&\qquad\le \|\nabla g(\nabla u)\|_{p'}\left\|\delta_{-h}^i\left(\delta_h^i u(\cdot)\cdot\eta'(|\cdot-y|)\frac{(\cdot-y)}{|\cdot-y|}\right)\right\|_p \\
&\qquad+\|f_u(\cdot,u(\cdot))\|_{p'}\ \|\delta_{-h}^i(\delta_h^i u\eta)\|_p\ ,
\end{aligned}$$

avec

$$a(x,h)=\int_0^1|(1-t)\nabla u(x)+t\nabla u(x+he_i)|^{p-2}\,dt.$$

Avec le lemme 3.7, suivi d'un calcul classique, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{\widehat{\Omega}}(p-1)a(x,h)|\nabla\delta_h^i u|^2\eta dx \\
&\le\|\nabla g(\nabla u)\|_{p'}\left\{\|\nabla(\delta_h^i u)\eta'\|_p+\|\delta_h^i u\eta''\|_p+\|\delta_h^i u\eta'\|_p\ a_4\right\} \\
&+\|f_u(\cdot,u(\cdot))\|_{p'}\left\{\|\nabla(\delta_h^i u)\eta\|_p+\|\delta_h^i u\eta''\|_p\right\},
\end{aligned}\tag{4.7}$$

où a_4 est un majorant de $\left|\nabla\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)\right|$ sur $B(y,R)\backslash B(y,r)$.

3ème étape : Compte tenu des hypothèses faites sur η, on a :

$$\begin{aligned}
&|\nabla\delta_h^i u\eta'|^p\le|\nabla\delta_h^i u\eta^{1/\gamma}|^p\times a_5, \\
&|\nabla\delta_h^i u\eta|^p\le|\nabla\delta_h^i u\cdot\eta^{1/\gamma}|^p,
\end{aligned}\tag{4.8}$$

où a_5 est un majorant de $|\eta'\cdot\eta^{-1/\gamma}|^p$.

Avec (4.7), (4.8) et le lemme 3.7, on obtient :

$$\int_{\widehat{\Omega}}a(x,h)\eta^{(1-2/\gamma)}|\nabla\delta_h^i u\eta^{1/\gamma}|^2dx\le c_3\|\nabla\delta_h^i u\eta^{1/\gamma}\|_p+c_4,\tag{4.9}$$

où

$$c_3=\left\{\|\nabla g(\nabla u)\|_{p'}\ a_5+\|f_u(\cdot,u(\cdot))\|_{p'}\right\}(p-1)^{-1}$$

et

$$\begin{aligned}
c_4&=(p-1)^{-1}\|\nabla g(\nabla u)\|_{p'}\|\nabla u\|_p\left\{\|\eta''\|_\infty+\|\eta'\|_\infty\ a_4\right\} \\
&+(p-1)^{-1}\|f_u(\cdot,u(\cdot))\|_{p'}\|\nabla u\|_p\ \|\eta''\|_\infty.
\end{aligned}$$

De l'hypothèse (2.4.A) et de la proposition 2.1, on déduit une majoration de c_3 et c_4 par une constante c_5 indépendante de u, de α et de h.

4ème étape : Des lemmes 3.2 et 3.6, on déduit maintenant :

$$\left\{\int_\Omega |\nabla\delta_h^i u\eta^{1/\gamma}|^\gamma dx\right\}^{2/\gamma} \leq c_5\|\nabla u\eta\|_{L^\alpha(\widetilde{B})}^{2-p}\left(\|\nabla\delta_h^i u\eta^{1/\gamma}\|_p + 1\right),$$

avec $\widetilde{B} = B(y,R)\cup\tau_{-h}^i B(y,R)$.

Par des majorations classiques, on obtient finalement :

$$\left\{\int_\Omega |\nabla\delta_h^i u\eta^{1/\gamma}|^\gamma dx\right\}^{2/\gamma} \leq 2c_5^2\|\nabla u\eta\|_{L^\alpha(\widetilde{B})}^{2(2-p)} + 1. \tag{4.10}$$

Le lemme 7.24 de [7] nous donne donc :

$$u \in W_{\mathrm{loc}}^{2,\gamma(\alpha)}(\Omega,\mathbf{R}^m).$$

L'inégalité $p \leq \gamma(\alpha) \leq np/(n-2+p)$ s'obtient par un simple calcul. □

Si $n > 2 > p$, (4.10) permet d'obtenir une estimation de $\|\nabla^2 u\|_{L^\gamma(B(y,r))}$ que nous utiliserons au paragraphe 5. En passant à la limite quand h tend vers 0 dans (4.10) et par sommation sur l'indice i, on obtient :

$$\left\{\int_\Omega |\nabla^2 u\eta^{1/\gamma}|^\gamma dx\right\}^{2/\gamma} \leq c_6\left(\|\nabla u\eta\|_{L^\alpha(B(y,R))}^{2(2-p)} + 1\right),$$

où c_6 ne dépend que de c_5, n et m.

De l'inégalité de Sobolev, on déduit l'existence de c_7 tel que l'on ait :

$$\left\{\int_\Omega |\nabla^2 u\eta^{1/\gamma}|^\gamma dx\right\}^{2/\gamma} \leq c_7\left(\|\nabla^2 u\gamma\|_{L^\tau(B(y,R))}^{2(2-p)} + 1\right), \text{ avec } \tau = \frac{\alpha n}{\alpha+n}.$$

De $\alpha \leq \frac{np}{n-2}$, on déduit $\tau \leq \gamma$. Si $n > 2 > p$, on a $\tau \leq \gamma \leq \frac{np}{n-2+p} < 2$, on peut alors choisir c_7 indépendante de γ. De plus, on a :

$$\left\{\int_\Omega |\nabla^2 u\eta^{1/\gamma}|^\gamma dx\right\}^{2/\gamma} \leq c_7\left(\|\nabla^2 u\eta^{1/\gamma}\|_{L^\gamma(B(y,R))}^{2(2-p)} + 1\right).$$

Etant donné que l'on a $2 > 2(2-p)$, il existe une constante c_8, indépendante de γ telle que l'on ait :

$$\|\nabla^2 u\|_{L^\gamma(B(y,r))} \leq c_8. \tag{4.11}$$

5. Régularité des solutions de $\mathcal{P}_A$

On démontre dans ce paragraphe le

THÉORÈME 5.1. — *Les solutions de $\mathcal{P}_A$ appartiennent à $W^{2,np/(n-2+p)}_{\rm loc}$ $(\Omega, \mathbf{R}^m)$ si $n > 2$ ou $p = 2$ et à $W^{2,r}_{\rm loc}(\Omega, \mathbf{R}^m)$ pour tout $r < 2$ si $p < n = 2$.*

Etablissons auparavant les deux lemmes suivants.

LEMME 5.2. — *Si u est une solution de $\mathcal{P}_A$ et si u appartient à $W^{1,\alpha}_{\rm loc}$ alors u appartient à $W^{1,\beta}_{\rm loc}$ avec $\beta = \frac{2n\alpha}{n(\alpha-p+2)-2\alpha}$.*

Preuve. — Le lemme 5.2 est une conséquence directe du théorème 4.1 et du théorème d'injection de Sobolev. □

LEMME 5.3. — *La suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbf{N}}$ définie par $\alpha_o = p$ et $\alpha_{k+1} = \frac{2\alpha_k n}{n(\alpha_k-p+2)-2\alpha_k}$ converge vers $\frac{np}{n-2}$ si $n > 2$ et vers $+\infty$ si $n = 2$.*

Preuve. — Si n est différent de 2, on démontre par récurrence sur k que l'on a :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \alpha_k < np/(n-2).$$

On en déduit que la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est croissante et qu'elle converge vers $np/(n-2)$.

Pour $n = 2$, on démontre directement que l'on a : $\lim\limits_{k\to+\infty} \alpha_k = +\infty$.

Preuve du théorème 5.1 . — Démontrons, par récurrence sur k, que l'on a :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ u \in W^{1,\alpha_k}_{\rm loc} \text{ et } u \in W^{2,\gamma(\alpha_k)}_{\rm loc}. \tag{5.1}$$

Pour $k = 0$, la propriété (5.1) découle du théorème 4.1 et de l'appartenance de u à $W^{1,p}$.

Si la propriété (5.1) est vraie pour k_o, le lemme 5.2 et le théorème 4.1 nous permettent de dire qu'elle est vraie pour $k_o + 1$. (5.1) est donc démontré. Compte tenu du lemme 5.3 et de (4.11), si $n > 2 > p$, on a :

$$\|\nabla^2 u\|_{L^{\gamma(\overline{\alpha})}(B(y,r))} = \lim_{k\to+\infty} \|\nabla^2 u\|_{L^{\gamma(\alpha_k)}(B(y,r))} \le c_8,$$
$$\text{avec } \gamma(\overline{\alpha}) = \frac{np}{n-2+p}.$$

Si $p < n = 2$, le résultat de régularité découle des lemmes 5.2 et 5.3 et si $p = 2$ il découle du théorème 4.1. □

6. Régularité des solutions adjointes de $\mathcal{P}_B$

Introduisons tout d'abord la notion de solution adjointe de $\mathcal{P}_B$.

Soit u est une solution de $\mathcal{P}_B$. u vérifie l'équation d'Euler de $\mathcal{P}_B$, cette équation peut s'écrire sous la forme suivante.

Il existe une fonction q de $L^p(\Omega, \mathbf{R}^{nm})$ vérifiant :

pour presque tout x de Ω, $\nabla g^*(\nabla u(x)) = x(x)$ et

$$\operatorname{div} q(x) = f_u(x, u(x)) \text{ dans } [\mathcal{D}'(\Omega)]^m.$$

DÉFINITION 6.1.— *On dit qu'une fonction q de $L^p(\Omega, \mathbf{R}^{nm})$ est une solution adjointe de $\mathcal{P}_B$ s'il existe une fonction u de $W_o^{1,p'}(\Omega, \mathbf{R}^m) + \Phi$ telle que l'on ait :*

$$q(x) = \nabla g^*\big(\nabla u(x)\big) \text{ pour presque tout } x \text{ de } \Omega, \tag{6.1.i}$$

$$\operatorname{div} q(x) = f_u\big(x, u(x)\big) \text{ dans } [\mathcal{D}'(\Omega)]^m. \tag{6.1.ii}$$

On dira alors que q est associée à u.

On a la

PROPOSITION 6.1.— *Si une fonction q de $L^p(\Omega, \mathbf{R}^{nm})$ est une solution adjointe de $\mathcal{P}_B$ associée à u alors, pour toute fonction ζ de $L^p(\Omega, \mathbf{R}^{nm})$ satisfaisant*

$$\operatorname{div} \zeta \in L^p(\Omega, \mathbf{R}^m), \tag{6.2}$$

$$\textit{pour } \ 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m, \ \textit{et dist } (\partial\Omega, \ \textit{supp } \zeta_i^j) > 0,$$

on a :

$$-\int_\Omega \operatorname{div} \zeta(x) u(x) dx = \int_\Omega \nabla g\big(q(x)\big)\zeta(x) dx. \tag{6.3}$$

Preuve.— Par polarité, de (6.1), on déduit :

$$\nabla u(x) = \nabla g\big(q(x)\big). \tag{6.4}$$

De (6.2), on déduit :

$$\int_\Omega \nabla u(x)\zeta(x)dx = -\int_\Omega \operatorname{div}\zeta(x)u(x)dx. \tag{6.5}$$

La proposition découle de (6.4) et (6.5).

Le système (6.1.ii), (6.3) est appelée équation adjointe de $\mathcal{P}_B$.

Comme dans [9], on met en oeuvre la méthode de Nirenberg sur l'équation ajointe de $\mathcal{P}_B$. Mais ici, les techniques développées au paragraphe 4 nous permettront de pallier l'absence d'estimation de la norme dans L^∞ du gradient des solutions de $\mathcal{P}_B$.

THÉORÈME 6.2.— *Si q est une solution adjointe de $\mathcal{P}_B$ et si q appartient à $L^\alpha_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{R}^{nm})$, avec $p \le \alpha \le np/(n-2)$, alors q appartient à $W^{1,\gamma(\alpha)}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{R}^{nm})$ avec $\gamma(\alpha) = 2\alpha/(\alpha+2-p)$. (On pose $np/(n-2) = +\infty$ si $n = 2$).*

THÉORÈME 6.3.— *Les solutions adjointes de $\mathcal{P}_B$ appartiennent à $W^{1,np/(n-2+p)}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{R}^{nm})$ si $n > 2$ ou $p = 2$ et à $W^{1,r}_{\text{loc}}$ pour tout $r < 2$ si $p < 2 = n$. Les solutions de $\mathcal{P}_B$ appartiennent à $W^{1,np'/(n-2)}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{R}^m)$ si $n > 2$ et à $W^{1,r}_{\text{loc}}$ pour tout $r < +\infty$ si $n = 2$.*

Preuve du théorème 6.2.— Soient q une solution adjointe de $\mathcal{P}_B$ et u une solution de $\mathcal{P}_B$ vérifiant (6.5). Pour $|h|$ suffisamment petit, on peut remplacer ζ par $\delta^i_{-h}\zeta$ dans (6.5) et, par transposition de δ^i_{-h}, on obtient :

$$-\int_\Omega \operatorname{div}\zeta(x)\ \delta^i_h u(x)\ dx = \int_\Omega \delta^i_h \nabla g\big(q(x)\big)\ \zeta(x)\ dx. \tag{6.6}$$

On pose :

$$\Psi(x,t) = \nabla g\big((1-t)q(x) + tq(x+he_i)\big)$$

et

$$\widehat{\Omega} = \left\{x \in \Omega \cap \tau^i_{-h}\Omega \,|\, \delta^i_h q(x) \ne 0_{nm}\right\}.$$

Comme au paragraphe 4, on a :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \widehat{\Omega}, \delta^i_h \nabla g\big(q(x)\big) = \int_0^1 \nabla^2 g\big((1-t)q(x) + tq(x+he_i)\big)\ dt.\delta^i_h q(x),\\
&\forall x \in \Omega/\widehat{\Omega},\ \delta^i_h \nabla g\big(q(x)\big) = 0_{nm}.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

En choisissant, comme au paragraphe 4, y, r, R et η de façon convenable, on peut remplacer ζ par $\delta_h^i\, q(\cdot)\eta(|\cdot - y|)$ dans (6.6). Compte tenu de (6.7) et du lemme 3.3, on obtient :

$$\begin{aligned}&\int_{\widehat{\Omega}}(p-1)a(x,h)|\delta_h^i q(x)|^2\eta(|x-y|)dx\\ &\quad\leq -\int_{\Omega}\operatorname{div}\left(\delta_h^i q(x)\eta(|x-y|)\right)\delta_h^i u(x)dx,\end{aligned} \tag{6.8}$$

avec

$$a(x,h)=\int_0^1 |(1-t)q(x)+tq(x+he_i)|^{p-2}\,dt.$$

On a de plus :

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}\left(\delta_h^i q(x)\eta(|x-y|)\right)\\ &\quad=\delta_h^i \operatorname{div} q(x)\eta(|x-y|)+\delta_h^i q(x)\eta'(|x-y|)\frac{\sum_{\ell=1}^m (x-y)_\ell}{|x-y|}\\ &\quad=\delta_h^i f_u\left(x,u(x)\right)\eta(|x-y|)+\delta_h^i q(x)\eta'(|x-y|)\frac{\sum_\ell (x-y)_\ell}{|x-y|}.\end{aligned} \tag{6.9}$$

Avec (6.8), (6.9), les inégalités (4.8) dans lesquelles ∇u est remplacé par q, le lemme 3.7 et l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned}&\int_{\widehat{\Omega}}(p-1)a(x,h)\eta(|x-y|)^{(1-2/\gamma)}|\delta_h^i q(x)\eta(|x-y|)^{1/\gamma}|^2dx\\ &\quad\leq \|\delta_h^i f_u(x,u)\|_p\|\nabla u\|_{p'}+\|\delta_h^i q\eta^{1/\gamma}(|\cdot - y|)\|_p a_5,\end{aligned}$$

où a_5 est un majorant de $|\eta'.\eta^{-1/\gamma}|^p \times \left|\dfrac{\sum_\ell (x-y)_\ell}{|x-y|}\right|$.

Du lemme 3.7, du théorème des accroissements finis et de l'hypothèse (2.5.B), on déduit :

$$\|\delta_h^i f_u(x,u)\|_p \leq c_3 + c_4\|\nabla u\|_{p'}, \tag{6.10}$$

avec

$$c_3=\left\|\sup_{|u|\leq c_2}|f_{ux}(\cdot,u)|\right\|_p \qquad \text{et} \qquad c_4=\left\|\sup_{|u|\leq c_2}|f_{uu}(\cdot,u)|\right\|_{p/(2-p)}$$

La fin de la démonstration est alors identique à celle du théorème 4.1. □

Preuve du théorème 6.3 . — Identique à celle du théorème 5.1 pour établir la régularité des solutions adjointes de $\mathcal{P}_B$.

Si $n \neq 2$, on a :

$$q \in W^{1,np/(n-2+p)}_{\mathrm{loc}} \text{ et } |\nabla u| = |q|^{p-1}.$$

Avec le théorème d'injection de Sobolev, puis par polarité, on obtient :

$$q \in L^{np/(n-2)}_{\mathrm{loc}} \text{ et } \nabla u \in L^{np/(n-2)(p-1)}_{\mathrm{loc}}.$$

Si $n = 2$, on a alors $q \in L^r_{\mathrm{loc}}$ pour tout $1 < r < +\infty$. On en déduit :

$$\nabla u \in L^r_{\mathrm{loc}} \text{ pour tout } 1 < r < +\infty \quad \square$$

7. Extensions possibles dans le cas différentiable

C'est dans le but d'alléger la rédaction que l'on a posé :

$$g(V) = p^{-1}|V|^p, \; g^*(V) = p'^{-1}|V|^{p'}. \tag{7.1}$$

Il est clair que l'estimation essentielle qui nous a permis d'obtenir les résultats de régularité des théorèmes 5.1 et 6.3 est celle du lemme 3.3 :

$$\nabla^2 g(V).X.X \geq (p-1)|V|^{p-2}|X|^2 \text{ pour tout } X \text{ et tout } V \neq 0_{nm}.$$

On peut remplacer (7.1) par les hypothèses suivantes :

$$g \in C^2(\mathbf{R}^{nm}\backslash\{0_{nm}\}) \cap C^1(\mathbf{R}^{nm}), \; g \text{ est strictement convexe.} \tag{7.2}$$

Il existe des constantes c_i, $1 \leq i \leq 4$, positives et des constantes b_i, $1 \leq i \leq 3$, positives ou nulles, telles que l'on ait :

$$\begin{aligned}
&\forall V \in \mathbf{R}^{nm}, c_1|V|^p - b_1 \leq g(V) \leq c_2|V|^p + b_2,\\
&\qquad |\nabla g(V)| \leq c_3|V|^{p-1} + b_3,\\
&\forall V \in \mathbf{R}^{nm}\backslash\{0_{nm}\}, \; \forall X \in \mathbf{R}^{nm},\\
&\qquad \nabla^2 g(V).X.X \geq c_4|V|^{p-2}|X|^2
\end{aligned}$$

Dans (2.3), la constante a_1 vérifie l'inégalité :

$$a_1 < C(p, \Omega, \mathbf{R}^m)^{-p} \times c_1 \tag{7.4}$$

Les hypothèses (7.2) à (7.4) n'étant pas suffisantes pour établir le résultat de la proposition 2.3, si p' est inférieur ou égal à n, on remplace les hypothèses (2.4.B) et (2.5.B) par :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \Omega,\ \forall u \in \mathbf{R}^m, \\
&|f_u(x,u)| + |f_{ux}(x,u)| \leq a_4|u|^r + M(x), \\
&|f_{uu}(x,u)| \leq a_4|u|^{r(2-p)} + N(x), \\
&\text{avec } a_4 > 0,\ M \in L^p(\Omega),\ N \in L^{p/(2-p)}(\Omega), \\
&r = n(p'-1)/(n-p') \text{ si } p' < n, \\
&r \text{ quelconque dans } [1,+\infty[\text{ si } p' = n.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Si $p' > n$, la proposition 2.3 est nécessairement vérifiée et on supposera dans ce cas que (7.5) est identique à (2.5.B).

La majoration de $|f_u(x,u)|$ permet de montrer que les solutions de $\mathcal{P}_B$ vérifient l'équation d'Euler de $\mathcal{P}_B$ et les majorations de $|f_{ux}(x,u)|$ et $|f_{uu}(x,u)|$ permettent d'obtenir l'estimation (6.10).

On a la

PROPOSITION 7.1.— *Si g vérifie (7.2) à (7.4), si g^* désigne la polaire de g, si f vérifie (2.2), (2.3.A), (2.4.A) (respectivement (2.2), (2.3.B), (7.5)) les résultats de régularité du théorème 5.1 (respectivement du théorème 6.3) sont encore vrais.*

L'extension a des problèmes dans lesquels g dépendrait de la variable x semble tout à fait réalisable, il est alors nécessaire de tenir compte, dans les différentes inéquations, des termes en $\partial_{x_i}\nabla g(x,\nabla u)$ (Ces termes apparaissent quand on calcule $\delta_h^i\ \nabla g\big(x,\nabla u(x)\big)$) et de faire des estimations convenables correspondantes.

8. Etude d'un problème non différentiable

On suppose ici que la fonction g du problème $\mathcal{P}_A$ vérifie les hypothèses suivantes :

(8.1) g est strictement convexe, localement lipschitzienne sur $\mathbf{R}^{nm}$ et satisfait l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
\forall V \in \mathbf{R}^{mn}, c_1|V|^p - b_1 \leq g(V) \leq c_2|V|^p + b_2,& \\
\text{avec } c_2 > c_1 > 0, b_2 \geq 0, b_1 \geq 0.&
\end{aligned}$$

(8.2) Il existe un sous-ensemble S de $\mathbf{R}^{nm}$ (réunion de sous-variétés de dimension 1 ou 0) vérifiant les propriétés suivantes :

(i) g est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^{mn}\backslash S$,

(ii) L'intersection de S avec tout segment de $\mathbf{R}^{mn}$ est de cardinal fini.

(iii) $\forall V \in \mathbf{R}^{nm}\backslash S$, $\forall X \in \mathbf{R}^{nm}$,

$$\nabla^2 g(V).X.X \geq a_3 \min\{|V|^{p-2}, 1\}|X|^2, \text{ avec } a_3 > 0.$$

(iv) $\forall V \in \mathbf{R}^{mn}\backslash S$,

$$|\nabla g(V)| \leq c_3|V|^{p-1} + b_3,\ c_3 > 0,\ b_3 \geq 0.$$

Remarques. — Le segment d'extrémités V_1, V_2 est l'ensemble

$$\{tV_1 + (1-t)V_2 | t \in [0,1]\}.$$

Le coefficient d'ellipticité $a_3 \min(|V|^{p-2}, 1)$ autorise une croissance lente à l'infini et permet de traiter tous les cas de dégérescence locale du type $K|V - V_o|^{p-2}$, avec $V_o \in S$, car il est possible de choisir a_3 de sorte que l'on ait :

$$K|V - V_o|^{p-2} > a_3 \min(|V|^{p-2}, 1) \text{ pour tout } V \in \mathbf{R}^{nm}.$$

Deux exemples de fonctions g vérifiant (8.1), (8.2) sont donnés en fin de paragraphe.

On suppose que f vérifie les hypothèses (2.2), (2.4.A) et (2.3.A) avec

$$a_1 < C(p, \Omega, \mathbf{R}^m)^{-p} \times c_1.$$

L'hypothèse (2.1) est évidemment conservée et dans la suite $\mathcal{P}$ désignera le problème correspondant aux hypothèses que nous venons de formuler.

PROPOSITION 8.1. — *$\mathcal{P}$ admet des solutions et, pour toute solution u de $\mathcal{P}$, il existe une fonction q de $L^{p'}(\Omega, \mathbf{R}^{nm})$ telle que l'on ait :*

$$q(x) \in \partial g(\nabla u(x)) \textit{ pour presque tout } x \textit{ de } \Omega,$$
$$\operatorname{div} q(x) = f_u(x, u(x)) \textit{ dans } [\mathcal{D}'(\Omega)]^m.$$

$\partial g(\nabla u(x))$ désigne le sous différentiel de g en $\nabla u(x)$.

Preuve. — Grâce à (2.3.A) modifiée par "$a_1 < C(p,\Omega,\mathbf{R}^m)^{-p} \times c_1$", le résultat de la proposition 2.1 reste vrai et la preuve de l'existence des solutions est alors analogue à celle de la proposition 2.2. Pour obtenir l'écriture des conditions d'optimalité du premier ordre, il suffit d'adapter la preuve du théorème 4.6.1 de [2] à notre problème.

Remarque. — Si $\nabla u(x) \in \mathbf{R}^{nm}\backslash S$ alors on a :

$$\partial g\big(\nabla u(x)\big) = \big\{\nabla g\big(\nabla u(x)\big)\big\} \text{ et } q(x) = \nabla g\big(\nabla u(x)\big)$$

THÉORÈME 8.2. — *Les solutions de $\mathcal{P}$ appartiennent à $W^{2,np/(n-2+p)}_{\mathrm{loc}}$ $(\Omega,\mathbf{R}^m)$ si $n > 2$ ou $p = 2$, et à $W^{2,r}_{\mathrm{loc}}$ pour tout $r < 2$ si $p < 2 = n$.*

Preuve. — Il suffit d'établir un résultat analogue à celui du théorème 4.1. Soient u une solution de $\mathcal{P}$ et q une fonction de $L^{p'}(\Omega,\mathbf{R}^{nm})$ vérifiant :

$$q(x) \in \partial g\big(\nabla u(x)\big) \text{ pour presque tout } x \text{ de } \Omega,$$
$$\operatorname{div} q(x) = f_u\big(x,u(x)\big) \text{ dans } [\mathcal{D}'(\Omega)]^m.$$

On note $g_v\big(\nabla u(x)\big)$ l'élément du sous-différentiel de g $\big($en $\nabla u(x)\big)$ égal à $q(x)$. On a donc :

$$\forall\zeta \in W^{1,p}_o(\Omega,\mathbf{R}^m),\ \int_\Omega g_v\big(\nabla u(x)\big)\nabla\zeta(x)dx = \int_\Omega q(x)\nabla\zeta(x)dx$$
$$= -\int_\Omega \operatorname{div} q(x)\zeta(x)dx = -\int_\Omega f_u\big(x,u(x)\big)\zeta(x)dx.$$

Lorsque, pour $1 \le j \le m$, supp ζ_j et h vérifient :

$$dist(\partial\Omega, supp\ \zeta_j) > |h| > 0,$$

on peut remplacer ζ par $\delta^i_{-h}\zeta$ dans l'équation précédente et par transposition de l'opérateur δ^i_{-h}, on obtient :

$$\int_\Omega \delta^i_h g_v\big(\nabla u(x)\big)\nabla\zeta(x)dx = -\int_\Omega \delta^i_h f_u\big(x,u(x)\big)\zeta(x)dx. \tag{8.3}$$

En choisissant, comme au paragraphe 4, y, r, R et η de façon convenable, on peut remplacer ζ par $\delta^i_h u(\cdot)\eta(|\cdot - y|)$ dans (8.3), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega &\delta^i_h g_v\big(\nabla u(x)\big)\delta^i_h\nabla u(x)\eta(|x-y|)dx\\ &+\int_\Omega \delta^i_h g_v\big(\nabla u(x)\big)\delta^i_h u(x)\eta'(|x-y|)\frac{x-y}{|x-y|}\,dx\\ &= -\int_\Omega \delta^i_h f_u\big(x,u(x)\big)\delta^i_h u(x)\eta(|x-y|)dx.\end{aligned} \tag{8.4}$$

On pose :

$$\widehat{\Omega} = \{x | \delta_h^i \nabla u(x) \neq 0_{nm}\} \text{ et}$$
$$\Psi(x,t) = g_v\big((1-t)\nabla u(x) + t\nabla u(x+he_i)\big).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \widehat{\Omega},\ \delta_h^i g_v(\nabla u(x)) = h^{-1}\left[\Psi(x,1) - \Psi(x,0)\right],\\ &\forall x \in \Omega\backslash\widehat{\Omega},\ \delta_h^i g_v(\nabla u(x))\delta_h^i \nabla u(x)\eta(|x-y|) = 0. \end{aligned} \tag{8.5}$$

L'hypothèse (8.2.ii) permet d'affirmer que, pour $x \in \widehat{\Omega}$, il existe un nombre fini de points $0 \le t_1 < \ldots < t_\ell \le 1$ tels que, pour tout $t \neq t_m$ avec $1 \le m \le \ell$, g soit de classe C^2 au point $\big((1-t)\nabla u(x) + t\nabla u(x+he_i)\big)$. On pose :

$$\begin{aligned} K(t_m,x) &= \lim_{\theta \downarrow t_m} \Psi(x,\theta) - \lim_{\theta \uparrow t_m} \Psi(x,\theta)\\ &\qquad \text{si } 1 \le m \le \ell \text{ et si } t_m \neq 0 \text{ et } t_m \neq 1,\\ K(0,x) &= \lim_{\theta \downarrow t_m} \Psi(x,\theta) - \Psi(x,0) \ \text{ si } \ t_1 = 0,\\ K(1,x) &= \Psi(x,1) - \lim_{\theta \uparrow t_m} \Psi(x,\theta) \ \text{ si } \ t_\ell = 1. \end{aligned}$$

$K(t_m,x)$ représente le saut de $\Psi(x,\cdot)$ en t_m. On pose $t_o = 0$ et $t_{\ell+1} = 1$, on a donc :

$$\begin{aligned} \Psi(x,1) - \Psi(x,0) &= \sum_{m=0}^{\ell} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t)dt + \sum_{m=1}^{\ell} K(t_m,x)\\ &= \sum_{m=0}^{\ell} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \nabla^2 g\big((1-t)\nabla u(x) + t\nabla u(x+he_i)\big)h\delta_h^i \nabla u(x)dt\\ &+ \sum_{m=1}^{\ell} K(t_m,x). \end{aligned} \tag{8.6}$$

Avec (8.4), (8.5), (8.6) et des majorations analogues à celles développées entre (4.6) et (4.7), on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_{\widehat{\Omega}} a_3\ a(x,h)\ |\nabla \delta_h^i u|^2 \eta dx\\ &\quad + \int_{\widehat{\Omega}} h^{-1} \sum_{m=1}^{\ell} K(t_m,x).\nabla \delta_h^i u.\eta\ dx\\ &\quad \le \|g_v(\nabla u)\|_{p'} \left\{\|\nabla(\delta_h^i u)\eta'\|_p + \|\delta_h^i u\eta''\|_p + \|\delta_h^i u\eta'\|_p\ a_4\right\}\\ &\quad + \|f_u(\cdot,u(\cdot))\|_{p'} \left\{\|\nabla(\delta_h^i u)\eta\|_p + \|\delta_h^i u\eta''\|_p\right\}, \end{aligned} \tag{8.7}$$

où a_4 est toujours un majorant de $\left|\nabla\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)\right|$ sur $B(y,R)\backslash B(y,r)$ et

$$a(x,h)=\int_0^1 \min\left\{1,|(1-t)\nabla u(x)+t\nabla u(x+he_i)|^{p-2}\right\}dt.$$

Montrons que l'on a :

$$h^{-1}K(t_m,x)\nabla\delta_h^i u\geq 0. \tag{8.8}$$

Pour celà, on remarque que la fonction

$$t\to g\big((1-t)\nabla u(x)+t\nabla u(x+he_i)\big)$$

est strictement convexe. Sa dérivée sur $\bigcup_{m=0}^{\ell}]t_m,t_{m+1}[$ est égale à

$$\nabla g\big((1-t)\nabla u(x)+t\nabla u(x+he_i)\big)\delta_h^i\nabla u(x)h.$$

La fonction $t\to\nabla g\big((1-t)\nabla u(x)+t\nabla u(x+he_i)\big)\delta_h^i\nabla u(x)h$ est donc strictement croissante. Le nombre $K(t_m,x)\delta_h^i\nabla u(x)h$ qui représente le saut de cette dérivée en t_m est donc positif et (8.8) s'en déduit immédiatement.

Avec la majoration : $\min(1,|V|^{p-2})^{\alpha/(p-2)}\leq(1+|V|)^{\alpha}$ et un calcul analogue à celui de la preuve du lemme 3.6, on obtient :

$$\int_{\Omega'}a(x,h)^{\alpha/(p-2)}dx\leq\big\|1+|V|\big\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(\Omega'\cup\tau^i_{-h}\Omega')}. \tag{8.9}$$

Avec (8.7), (8.8), (8.9) et en poursuivant la preuve comme au paragraphe 4, on démontre le résultat suivant :

Si u est une solution de $\mathcal{P}$ et si u appartient à $W^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}$ avec $p\leq\alpha\leq np/(n-2)$, alors u appartient à $W^{2,\gamma(\alpha)}_{\mathrm{loc}}$.

Le théorème 8.1 se démontre alors comme le théorème 5.1. □

Exemple 1 . — On considère le problème de Mossolov étudié dans [4, p. 85].

$$\inf\left\{\int_{\Omega}\left[\frac{\alpha}{2}|\nabla u|^2+\beta|\nabla u|-f(x)u(x)\right]dx\mid u\in H_0^1(\Omega)\right\},$$

avec $\alpha>0$, $\beta>0$ et $f\in L^2(\Omega)$.

C'est un problème scalaire pour lequel la sous-variété de discontinuité de l'intégrande est réduite à un point. On a $S=\{0_n\}$ et $p=2$. Le théorème 8.1 nous permet d'affirmer que la solution de ce problème appartient à $H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Exemple 2 . — On considère une famille finie $V_o, \ldots, V_\ell$ de points de $\mathbf{R}^{nm}$ et les fonctions g_i, pour $0 \leq i \leq \ell$, définie par :

$$g_i(V) = \alpha_i |V - V_i|^{p_i}, \text{ avec } \alpha_i > 0 \text{ et } 1 \leq p_i < 2.$$

On pose $g = \max\{g_i \mid 0 \leq i \leq \ell\}$. On pourrait démontrer que, dans ce cas, si S est non vide, S est constitué de sous variétés régulières de dimension 1 joignant deux points de l'ensemble $\{V_o, \ldots, V_\ell\}$. Lorsque l'hypothèse 8.2.ii est vérifiée, on pose $p = \max\{p_i \mid 0 \leq i \leq \ell\}$ et le théorème 8.1 est applicable au problème correspondant.

Remerciements . — Je tiens à remercier F. de THELIN et J. SIMON pour les échanges intéressants que j'ai eu avec eux durant l'élaboration de ce travail, leurs remarques et suggestions m'ont permis d'améliorer à bien des égards la rédaction de cet article.

Annexe

Nous comparons ici les résultats de régularité que nous obtenons dans le cas particulier où $f(x, u) = h(x)u$ à ceux donnés dans [8], [10], [12], [13].

Régularité des solutions de $\mathcal{P}_A$. — La fonction f étant ici de la forme $h(x)u$, $\mathcal{P}_A$ est un problème strictement convexe et admet une seule solution. Le lecteur pourra constater que, pour $f(x, u) = h(x)u$, les différentes démonstrations relatives au problème $\mathcal{P}_A$ restent valides si l'on remplace (2.2), (2.3.A) et (2.4.A) par la seule hypothèse : $h \in L^{p'}(\Omega)$. Avec cette hypothèse, J. SIMON obtient dans [10] un résultat de régularité dans un espace de Besov (espace intermédiaire défini par interpolation d'espaces de Sobolev). F. de THELIN améliore dans [12] et [13] le résultat de SIMON et montre que la solution de $\mathcal{P}_A$ appartient à $W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. Avec le théorème 5.1, on montre que la solution de $\mathcal{P}_A$ appartient à $W^{2,np/(n-2+p)}_{\text{loc}}$ si $n > 2$ ou si $p = 2$ et à $W^{1,r}_{\text{loc}}$, avec $p \leq r < 2$, si $n = 2 > p$. On améliore donc le résultat de F. de THELIN.

Régularité des solutions de $\mathcal{P}_B$. — Le problème $\mathcal{P}_B$ est strictement convexe et n'admet qu'une solution. Il n'y a également qu'une solution adjointe qui est ici la solution du problème dual de $\mathcal{P}_B$. On peut, pour $f(x, u) = h(x)u$, remplacer les hypothèses (2.2) (2.3.B), et (2.5.B) par $h \in W^{1,p}(\Omega)$. Avec cette hypothèse, G.N. JAKOVLEV montre dans [8] que la solution adjointe appartient à $W^{1,p}_{\text{loc}}$ (cf aussi F. de THELIN [12] page B.115). Avec le théorème 6.1, on montre que la solution adjointe de $\mathcal{P}_B$ appartient à $W^{1,np/(n-2+p)}_{\text{loc}}$ si $n > 2$ ou si $p = 2$ et à $W^{1,r}_{\text{loc}}$, avec $p \leq r < 2$, si $n = 2 > p$. on améliore donc le résultat de G.N. JAKOVLEV.

Si de plus, on fait l'hypothèse : $\forall x \in \Omega$, $-a_2 < h(x)$, avec $a_2 > 0$, l'hypothèse 2.4.B est vérifiée et la proposition 2.3 nous permet d'affirmer que les solutions de $\mathcal{P}_B$ appartiennent à $L^\infty(\Omega)$.

Ce problème a également été étudié par J. SIMON et F. de THELIN avec l'hypothèse plus faible $h \in L^p(\Omega)$. Dans ce cas, la solution adjointe de $\mathcal{P}_B$ appartient à un espace de Besov intermédiaire entre L^p_{loc} et $W^{1,p}_{\text{loc}}$, l'ordre de dérivation optimal de la solution adjointe est $p/2$, il est strictement plus petit que 1, (cf [12]).

Remarque. — Le lecteur doit prendre garde au fait que pour $\mathcal{P}_B$ les rôles de p et p' sont permutés entre le présent article et les articles de J. SIMON, G.N. JAKOVLEV et F. de THELIN.

Références

[1] ADAMS (R.A.). — *Sobolev spaces.* — Academic Press, 1975.

[2] CLARKE (F.H.). — *Optimization and Non smooth Analysis.* — Wiley interscience, New-York, 1983.

[3] DIBENEDETTO (E.). — $C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations, *Non lin. An. Theory, Methods and Appl.*, t. **7 n°8**, 1983, p. 827-850.

[4] EKELAND (I.) et TEMAM (R.). — *Analyse convexe et problèmes variationnels.* Dunod, 1974.

[5] EVANS (L.C.). — A new proof of local $C^{1,\alpha}$ regularity for solutions of certain degenerate elliptic, *P.D.E. J.D.E.*, t. **45**, 1982, p. 356-373.

[6] GIAQUINTA (M.). — *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems.* — Princeton University Press, 1983.

[7] GILBARG (D.), TRUDINGER (N.S.). — Elliptic partial differential equations of second order, *Springer G.M.W.*, t. **224**, 1977.

[8] JAKOVLEV (G.N.). — Properties of solutions of a class of second order quasilinear elliptic equations in divergence form, *Proc. Steklov Inst. Math.*, t. **131**, 1974, p. 242-252.

[9] RAYMOND (J.P.). — Théorème d'existence pour des problèmes variationnels non convexes, *Proc. R. Soc of Ed, Section A*, t. **107**, 1987, p. 43-64.

[10] SIMON (J.). — Régularité de la solution d'un problème aux limites non linéaires, *Annales Faculté des Sciences Toulouse*, t. **3**, 1981.

[11] STAMPACCHIA (G.). — On some regular multiple integral problems in the calculus of variations, *Com. on Pure Appl. Math.*, t. **XVI**, 1963, p. 383-421.

[12] DE THELIN (F.). — *Régularité de la solution d'un problème de Dirichlet fortement non linéaire.* — Thèse, 1981.

[13] DE THELIN (F.). — Local regularity properties for the solutions of a nonlinear partial differential equation, *Nonlinear Analysis, T.M.A.*, t. **6 n°8**, 1982.

[14] TOLKSDORF (P.). — Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations, *J.D.E.*, t. **51**, 1984, p. 126-150.

[15] TOLKSDORF (P.). — Everywhere-regularity for some quasilinear systems with a lack of ellipticity, *Am. Mat. Pura . Appl.*, t. **134, Vol. 4**, 1983, p. 241-266.

[16] UHLENBECK (K.). — Regularity for a class of nonlinear elliptic systems, *Acta Math.*, t. **138**, 1877, p. 219-240.

[17] SIMON (J.). — *Régularité locale des solutions d'une équation non linéaire.* — Thèse Paris, 1977.

[18] STAMPACCHIA (G.). — Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, *Presses Universitaires de Montréal*, t. **16**, 1966.

(Manuscrit reçu le 4 mars 1987)