

DOMINIQUE SCHILTZ

**Un domaine d'holomorphic de la solution d'un
problème de Cauchy homogène**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 9, n^o 3
(1988), p. 269-294

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1988_5_9_3_269_0

© Université Paul Sabatier, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annaales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Un domaine d'holomorphie de la solution d'un problème de Cauchy homogène

DOMINIQUE SCHILTZ⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — On considère le problème de Cauchy homogène pour un opérateur différentiel linéaire à coefficients holomorphes. On suppose que les données de Cauchy sont holomorphes dans un ouvert strictement pseudoconvexe au voisinage d'un point, dans lequel la multiplicité des hypersurfaces caractéristiques issues de la frontière de cet ouvert est constante. On montre alors que la solution du problème se décompose en somme de fonctions holomorphes chacune dans un domaine délimité par l'une de ces hypersurfaces.

ABSTRACT. — We consider the homogeneous Cauchy problem for a linear differential operator with holomorphic coefficients. We assume that the Cauchy data are holomorphic in an open set, strictly pseudoconvex in a neighborhood of a point, where the multiplicities of the characteristic hypersurfaces issuing from the boundary are constant. We then show that the solution of the problem can be written as a sum of functions, each of them being holomorphic in a domain delimited by one of these hypersurfaces.

1 - Introduction

L'objet du présent travail est de décrire la structure analytique de la solution d'un problème de Cauchy à données holomorphes, au voisinage du bord d'un domaine d'holomorphie commun à ces données de Cauchy.

On désigne par $x = (x^0, x')$ un point de $X = \mathbb{C}^{n+1}$. On note pour tout $j \in \{0, 1, \dots, n\}$: $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$ et

$$\partial_x = (\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_n) \quad \partial_{x'} = (\partial_1, \dots, \partial_n);$$

on emploie les notations habituelles $\partial_x^\alpha, \partial_{x'}^{\alpha'}$ pour des multi-indices $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $\alpha' \in \mathbb{N}^n$.

⁽¹⁾ U.F.R. de Mathématiques, Université Lille I, 59655 Villeneuve d'Ascq Cédex

Soit ω un domaine de $S = \{x \in \mathbf{C}^{n+1}; x^0 = 0\}$. Soit W un domaine de \mathbf{C}^{n+1} contenant $\bar{\omega}$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(x, \partial_x)u(x) = 0 \\ \partial_0^k u(0, x') = w_k(x'), k = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (1.1)$$

où $a(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$ est un opérateur différentiel linéaire d'ordre m à coefficients holomorphes dans W , $a_\alpha(x) \equiv 1$ pour $\alpha = (m, 0, \dots, 0)$, et w_0, w_1, \dots, w_{m-1} sont des fonctions holomorphes dans ω .

Il résulte du théorème de Cauchy-Kowalewski appliqué en chaque point de ω qu'il existe des domaines Ω de X contenant ω dans chacun desquels il existe une unique solution holomorphe au problème (1.1). Nous décrirons ici l'allure de l'un de ces ouverts au voisinage d'un point y de $\partial\omega$. Nous nous placerons pour cela sous les hypothèses suivantes :

- $\partial\omega$ est de classe C^2 et ω est strictement pseudoconvexe en y ;
- le point y n'est pas un point critique de $\partial\omega$ pour l'opérateur $a(x, \partial_x)$: cette hypothèse signifie que les bicaractéristiques issues de la direction complexe orthogonale à $\partial\omega$ en y sont de multiplicité constante. On notera μ leur nombre.

Dans la section 2, nous énonçons des résultats de décomposition d'une fonction holomorphe dans ω en somme d'une fonction holomorphe sur un voisinage de $y \in \partial\omega$ et d'une intégrale du type de celle intervenant dans la formule de Cauchy-Fantappiè. Cette intégrale dépendra d'un paramètre ϵ quand f n'est pas continue sur $\bar{\omega}$ près de y .

Ensuite nous étudions les sous-variétés réelles caractéristiques pour un opérateur différentiel holomorphe. C'est l'objet de la section 3.

Dans les sections suivantes, nous établissons le théorème de décomposition que voici :

THÉORÈME 1.1. — *Soit y un point non critique de $\partial\omega$. Supposons ω strictement pseudoconvexe en y . Il existe alors une boule D_0 de centre y dans X possédant les propriétés suivantes :*

a) *Chaque hypersurface caractéristique K^j issue de $\partial\omega$ partage D_0 en deux domaines : soit D_j celui qui contient $D_0 \cap \omega$;*

b) *Il existe des fonctions u_j , $j = 0, 1, \dots, \mu$, holomorphes sur D_j , telles que la fonction $u = \sum_{j=0}^{\mu} u_j$ soit une solution du problème de Cauchy (1.1);*

Un domaine d'holomorphic de la solution d'un problème de Cauchy homogène

cette solution est holomorphic uniforme sur $D = \bigcap_{j=0}^{\mu} D_j$.

Les conseils de Monsieur le Professeur Jean Leray m'ont été précieux; je l'en remercie bien sincèrement.

2 - Localisation de la formule de Cauchy-Fantappiè

Sous ses diverses formes (cf. LERAY [10] [12], HENKIN [6], HENKIN-LEITERER [7], KRANTZ [9]), la formule de Cauchy-Fantappiè permet d'exprimer une fonction holomorphic de plusieurs variables complexes par une intégrale sur un cycle. Nous avons à limiter cette intégrale à une partie de ce cycle, voisine d'un poit de la frontière d'un domaine d'holomorphic de cette fonction.

Soit ω un domaine de \mathbf{C}^n ($n \geq 2$). Soit $y \in \partial\omega$. Supposons $\partial\omega$ de classe C^2 au voisinage de y , et ω strictement convexe en y (cf. HENKIN-LEITERER [7] p. 67). Soit σ un voisinage ouvert de y dans $\partial\omega$. Soit $\zeta : \sigma \rightarrow \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ une application de classe C^1 telle que, pour tout $z \in \sigma$, l'unique hyperplan complexe de \mathbf{C}^n tangent à $\partial\omega$ en z admette l'équation

$$\langle \zeta(z), z - x \rangle = 0;$$

si $\zeta^*(z)$ est l'image de $\zeta(z)$ dans l'espace projectif complexe associé à \mathbf{C}^n , on désigne par Σ l'image de σ par l'application $z \mapsto (\zeta^*(z), z)$.

On définit deux formes différentielles $\theta(z)$ et $\psi(\zeta)$ par :

$$\begin{aligned} \theta(z) &= dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n; \\ \psi(\zeta) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \zeta_j d\zeta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\zeta_j} \wedge \dots \wedge d\zeta_n \end{aligned}$$

où le terme surmonté d'un $\widehat{}$ est omis dans le produit extérieur.

On a alors le

THÉORÈME 2.1. — *On conserve les notations précédentes. Soit f une fonction définie et continue sur $\omega \cup \sigma$, à valeurs complexes, holomorphic sur ω . La fonction \widehat{f} définie par*

$$\widehat{f}(z) = f(z) - \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma} f(z) \frac{\psi(\zeta) \wedge \theta(z)}{\langle \zeta, z - x \rangle^n}$$

est holomorphe sur un voisinage de y dans \mathbf{C}^n ; ce voisinage, qui dépend de ω et σ , est indépendant de f .

Ce théorème établi dans [13] est à rapprocher d'un résultat de KRANTZ ([9], théorème 5.3.6) dans lequel la décomposition de f utilise une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement ouvert de $\partial\omega$.

Pour traiter le cas d'une fonction f non continue sur $\bar{\omega}$ près de y , on utilise la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. — Soit ω un ouvert de \mathbf{R}^N ($N \geq 2$). Soit $y \in \partial\omega$. Soit W un voisinage de y dans \mathbf{R}^N . Supposons $\partial\omega$ de classe C^2 dans W et ω strictement convexe en y . Dans l'espace des hyperplans de \mathbf{R}^N , soit Λ un voisinage de l'hyperplan $p(y)$ tangent à $\partial\omega$ en y .

Il existe alors une famille continue décroissante $(\Delta_\epsilon)_{0 \leq \epsilon \leq 1}$ de domaines de \mathbf{R}^N ayant les propriétés suivantes :

$$\bar{\Delta}_\epsilon \subset \omega \text{ si } 0 < \epsilon \leq 1; \Delta_o \subset \omega \cap W; \quad (2.1)$$

$\Delta_o = \omega$ au voisinage de y ;

$$(\forall \epsilon \in [0, 1]) : \partial\Delta_\epsilon \text{ est de classe } C^2; \quad (2.2)$$

Δ_ϵ est strictement convexe;

$$\sigma_* = \bigcap_{0 \leq \epsilon \leq 1} \partial\Delta_\epsilon \quad (2.3)$$

est une hypersurface fermée de classe C^2 , dont le bord $\partial\sigma_*$ est de classe C^2 ;

$$\bigcup_{0 \leq \epsilon \leq 1} \partial\Delta_\epsilon = \bar{\Delta}_o \setminus \Delta_1; \left(\bigcup_{0 \leq \epsilon \leq 1} \partial\Delta_\epsilon \right) \setminus \sigma_* = (\bar{\Delta}_o \setminus \Delta_1) \setminus \partial\sigma_*; \quad (2.4)$$

$$\text{si } x \in (\bar{\Delta}_o \setminus \Delta_1) \setminus \partial\sigma_*, \quad (2.5)$$

alors x appartient à une hypersurface $\partial\Delta_\epsilon$ unique;

L'application

$$p : \bar{\Delta}_o \setminus \Delta_1 \ni x \mapsto p(x) \in \Lambda \quad (2.6)$$

définie par la condition : $p(x)$ est tangent à $\partial\Delta_\epsilon$ en x quand $x \in \partial\Delta_\epsilon$, est continue sur $\bar{\Delta}_o \setminus \Delta_1$ et de classe C^1 dans $(\bar{\Delta}_o \setminus \Delta_1) \setminus \partial\sigma_*$.

Un domaine d'holomorphic de la solution d'un problème de Cauchy homogène

Cette proposition est démontrée dans [13].

Revenons à un ouvert $\omega \in \mathbf{C}^n$ dont la frontière est de classe C^2 . Soit y un point de $\partial\omega$ en lequel ω est strictement convexe. Soit $(\Delta_\epsilon)_{0 \leq \epsilon \leq 1}$ une famille de domaines de \mathbf{C}^n ayant les propriétés décrites dans la proposition 2.1. Pour tout $\epsilon \in [0, 1]$, il existe une application $\zeta_\epsilon : \partial\Delta_\epsilon \rightarrow \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$, de classe C^1 , telle que pour tout $x \in \partial\Delta_\epsilon$, l'unique hyperplan complexe de \mathbf{C}^n tangent à $\partial\Delta_\epsilon$ en x admette l'équation $\langle \zeta_\epsilon(z), x - z \rangle = 0$; on notera $\zeta_\epsilon^*(z)$ l'image de $\zeta_\epsilon(z)$ dans l'espace projectif associé à \mathbf{C}^n .

Pour tout $\epsilon \in [0, 1]$, on note

$$\sigma_\epsilon = \partial\Delta_\epsilon \cap (\overline{\Delta_0 \setminus \Delta_1}) :$$

vu la proposition 2.1, σ_ϵ est une hypersurface de classe C^2 , de bord $\partial\sigma_\epsilon$. On désignera par Γ_ϵ l'image de $\partial\Delta_\epsilon$ par l'application

$$z \longmapsto (\zeta_\epsilon^*(z), z)$$

et Σ_ϵ (resp Σ_*) la restriction de cette application à σ_ϵ (resp σ_*) : vu ce qui précède, Σ_* est indépendant de ϵ .

Soit f une fonction holomorphe dans ω .

PROPOSITION 2.2. — *Conservons les hypothèses et les notations précédentes. Pour tout $\epsilon \in]0, 1]$, on définit f_ϵ par*

$$(\forall x \in \Delta_\epsilon) : f_\epsilon(x) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma_\epsilon} f(z) \frac{\psi(\zeta) \wedge \theta(z)}{\langle \zeta, z - x \rangle^n}.$$

La fonction f_ϵ est holomorphe dans Δ_ϵ ; en outre :

$$\text{si } 0 < \epsilon < \epsilon' \text{ alors } f_{\epsilon'} = f_\epsilon \text{ sur } \Delta_{\epsilon'}.$$

En effet, il résulte de la formule de Cauchy-Fantappiè sur Δ_ϵ que l'on peut écrire :

$$(\forall x \in \Delta_\epsilon) : f_\epsilon(x) = f(x) - \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma_*} f(z) \frac{\psi(\zeta) \wedge \theta(z)}{\langle \zeta, z - x \rangle^n},$$

expression indépendante de ϵ .

Il résulte de la proposition 2.2 qu'il existe une unique fonction f_0 , à valeurs complexes, définie et holomorphe sur Δ_0 , telle que :

$$(\forall \epsilon > 0) : f_0 = f_\epsilon \text{ sur } \Delta_\epsilon.$$

THÉOREME 2.2. — *Conservons les hypothèses et les notations précédentes. Alors la fonction \hat{f} définie par $\hat{f}(x) = f(x) - f_o(x)$ est holomorphe sur un voisinage de y dans \mathbb{C}^n ; ce voisinage qui dépend de ω et σ_* , est indépendant de f .*

Preuve. — Vu ce qui précède, on a

$$(\forall x \in \Delta_o) : \hat{f}(x) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma_*} f(z) \frac{\psi(\zeta) \wedge \theta(z)}{\langle \zeta, z-x \rangle^n} :$$

donc \hat{f} est holomorphe hors de la réunion des hyperplans affines réels tangents à σ_* ; comme y appartient à σ_o et Δ_o est strictement convexe, y n'appartient pas à cette réunion qui est évidemment fermée, d'où le théorème.

3 - Hypersurfaces caractéristiques

Nous énonçons ici brièvement les définitions et résultats utilisés dans la suite; un exposé plus complet est présenté dans [13].

Soit X une variété analytique complexe de dimension $n+1$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Soit TX le fibré vectoriel tangent à X . Pour tout $x \in X$ et toute forme linéaire réelle ℓ sur $T_x X$, il existe un unique élément ξ du dual complexe $T_x^* X$ de $T_x X$ tel que

$$\forall v \in T_x X : \ell(v) = \operatorname{Re} \langle \xi, v \rangle ;$$

l'application $\ell \mapsto \xi$ est un isomorphisme du dual de $T_x X$ relativement à \mathbb{R} sur le dual de $T_x X$ relativement à \mathbb{C} , et nous identifierons désormais ces deux espaces au moyen de cet isomorphisme.

Soit V une sous-variété de classe C^1 de X muni de sa structure de variété différentiable réelle de dimension $2n+2$; pour tout $x \in V$, soit $N_x^* V$ l'orthogonal dans $T_x^* X$ de $T_x V$, considéré comme sous-espace vectoriel réel de $T_x X$, pour la dualité

$$\langle \xi, v \rangle \mapsto \operatorname{Re} \langle \xi, v \rangle .$$

L'ensemble

$$N^* V = \bigcup_{x \in V} \{x\} \times N_x^* V$$

Un domaine d'holomorphic de la solution d'un problème de Cauchy homogène

est appelé *fibré conormal réel* de V dans X ; si V est une sous-variété analytique complexe de X , N^*V coïncide avec le fibré conormal complexe de V dans X .

Soit G une hypersurface analytique complexe de T^*X telle que toute équation analytique irréductible $h(x, \xi) = 0$ de G dans un ouvert \mathcal{U} de T^*X soit un polynôme homogène de degré μ relativement à ξ : on peut alors choisir $\mathcal{U} = T^*U$, où U est un ouvert de X .

Une sous-variété réelle V de classe C^1 de X sera dite *caractéristique* si son fibré conormal dans X est contenu dans G .

Soit $v(x) = 0$ est une équation locale de V , ceci équivaut à :

$$h(x, \nabla v(x)) = 0, \text{ où } \nabla v(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(x)}{\partial(\operatorname{Re} x^j)} - i \frac{\partial v(x)}{\partial(\operatorname{Im} x^j)} \right)_{1 \leq j \leq n}$$

dans un système de coordonnées locales de X .

Soit S une hypersurface analytique complexe de X : on suppose que S n'est nulle part caractéristique, autrement dit que

$$N^*S \cap G = \emptyset.$$

Soit W une hypersurface réelle de classe C^2 de S muni de sa structure de variété analytique réelle ($\dim_{\mathbf{R}} W = 2n - 1$). Un point $x \in W$ est dit *critique* s'il existe $\xi \in N_x^*W$ tel que $(x, \xi) \in G$ et $\partial_{\xi} h(x, \xi)$ soit tangent à S en x .

Considérons un point non critique x de W . Choisissons des coordonnées locales au voisinage U de x dans lesquelles S admet l'équation : $x^o = 0$. Soit $w(x') = 0$ une équation de $W \cap U$ ($x' = (x^1, \dots, x^n)$). Alors on a

$$T^*U \cap N^*W = \{(0, x', \xi_o, k \nabla w(x')) ; x' \in W \cap U, \xi_o \in \mathbf{C}, k \in \mathbf{R}\}.$$

Comme S n'est pas caractéristique, on a

$$\forall x = (0, x') \in U \cap S : h(0, x', 1, 0) \neq 0$$

de sorte que le polynôme $h(0, x', \xi_o, \xi')$ est de degré μ par rapport à la variable ξ_o . De plus, comme $x = (0, x')$ n'est pas un point critique, si $\xi_o \in \mathbf{C}$ est racine de l'équation

$$h(0, x', \xi_o, \nabla w(x')) = 0$$

alors on a

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0} h(0, x', \xi_0, \nabla w(x')) \neq 0.$$

Il en résulte que l'équation (3.1) en ξ_0 admet μ racines deux à deux distinctes, qui sont de plus des fonctions \mathbf{R} -linéaires de k . Donc $N_x^*W \cap G$ est constitué de la réunion de μ droites réelles de $T_x X$ de même origine, et deux à deux distinctes. Ceci établit le caractère de multiplicité constante d'un point non critique de W .

On en déduit le théorème suivant :

THÉOREME 3.1. — Soit $X = \mathbf{C}^{n+1}$. Soit S l'hyperplan complexe de X d'équation $x^0 = 0$. Soit $h(x, \xi)$ un polynôme homogène de degré μ en $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$, à coefficients holomorphes dans un ouvert U de X rencontrant S . Soit T une hypersurface réelle de classe C^2 de S . Soit T' le complémentaire dans T de l'ensemble de ses points critiques. Au voisinage de T' , la caractéristique V contenant T' est unique.

T' est une singularité de V ; au voisinage de chaque point de T' , V se décompose en μ hypersurfaces régulières K^j , $j = 1, \dots, \mu$. En chaque point de T' , les μ hyperplans tangents à ces μ composantes de V sont deux à deux distincts.

4 - Le problème de Cauchy à données méromorphes résolu par Hamada

Notation 4.1. — Soit $a(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$ un opérateur différentiel holomorphe dans $X = \mathbf{C}^{n+1}$, défini au voisinage de $y = (0, y')$. Soient $g(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ le symbole principal de l'opérateur $a(x, \partial_x)$ et $h(x, \xi)$ le produit des facteurs irréductibles distincts de $g(x, \xi)$ dans l'anneau $\mathcal{H}[\xi]$ des polynômes à $n + 1$ indéterminées sur l'anneau des fonctions holomorphes dans un voisinage de y . Soit μ le degré de h relativement à ξ .

Notation 4.2. — Soient S l'hyperplan de X d'équation $x^0 = 0$ et S^* son dual. Soit $\eta' \in S^*$ tel que y ne soit pas un point critique de l'hyperplan réel de S d'équation $Re \langle \eta', x' - y' \rangle = 0$ pour h (voir section 3). Alors les racines $\eta_0^{(1)}, \dots, \eta_0^{(\mu)}$ de l'équation en η_0

$$h(y, \eta_0, \eta') = 0$$

sont deux à deux distinctes.

Un domaine d'holomorphie de la solution d'un problème de Cauchy homogène

Il existe une boule ouverte W de X de centre y sur laquelle $a(x, \partial_x)$ est holomorphe, et un voisinage ouvert demi-conique strictement convexe Γ de η' dans S^* , ne dépendant que de $a(x, \partial_x)$, tels que les propriétés suivantes sont vérifiées.

A) Il existe μ fonctions $\lambda^j(x, \xi')$, $j = 1, \dots, \mu$, holomorphes et deux à deux distinctes sur $W \times \Gamma$, telles que l'on ait

$$(\forall (x, \xi_0, \xi') \in W \times \mathbb{C} \times \Gamma) : h(x, \xi) = \prod_{j=1}^{\mu} (\xi_0 - \lambda^j(x, \xi')); \quad (4.1)$$

$$(\forall j \in \{1, \dots, \mu\}) : \lambda^j(0, \eta') = \eta_o^{(j)}; \quad (4.2)$$

de plus ces fonctions sont positivement homogènes de degré 1 relativement à ξ' .

Cette propriété est une simple conséquence du théorème des fonctions implicites dans le cas holomorphe.

Notons $W' = W \cap S$: alors pour tout $z' \in W'$ et tout $\zeta' \in \Gamma$, $z = (0, z')$ n'est pas un point critique de l'hyperplan réel de S d'équation $Re < \zeta', x' - z' > = 0$ pour h . Notons pour tous les $j \in \{1, \dots, \mu\}$ et $(z', \zeta') \in W' \times \Gamma$:

$$\zeta^j(z', \zeta') = (\lambda^j(0, z', \zeta'), \zeta').$$

B) Le problème de Cauchy holomorphe du premier ordre

$$\partial_o \chi_j[x] = \lambda^j(x, \partial_x, \chi_j[x]); \chi_j[0, x'] = < \zeta', x' - z' > \quad (4.3)$$

possède pour tout $(z', \xi') \in W' \times \Gamma$ une unique solution $\chi_j[\cdot]$ holomorphe dans W ; sa valeur, notée $\chi_j(x, z', \xi')$, est holomorphe sur $W \times W' \times \Gamma$ et positivement homogène de degré 1 relativement à ζ' .

C'est un cas particulier du théorème de Cauchy; l'homogénéité de χ_j relativement à ζ' provient de ce que, pour tout $t > 0$, la fonction $\frac{1}{t} \chi_j(x, z', t\zeta')$ est aussi solution du problème (4.3).

Notons pour tout $(z', \zeta') \in W' \times \Gamma$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(z', \zeta') &= \{x' \in S; < \zeta', x' - z' > = 0\}; \\ \mathcal{K}_j(z', \zeta') &= \{x \in W; \chi_j(x, z', \zeta') = 0\}, j = 1, \dots, \mu. \end{aligned}$$

Evidemment $\mathcal{P}(z', \zeta')$ est l'hyperplan complexe de S passant par z' et normal à ζ' , et $\mathcal{K}_1(z', \zeta'), \dots, \mathcal{K}_\mu(z', \zeta')$ sont les μ hypersurfaces caractéristiques complexes de W issues de $\mathcal{P}(z', \zeta')$. L'hypersurface $\mathcal{K}_j(z', \zeta')$ est engendrée par les projections sur X des bicaractéristiques issues des points $(0, x', \zeta^j(0, x', \zeta'))$ quand x' décrit $\mathcal{P}(z', \zeta')$.

C) Pour tout $(z', \zeta') \in W' \times \Gamma$ et tout $k \in \{0, \dots, m-1\}$, le problème de Cauchy à données méromorphes

$$\begin{aligned} a(x, \partial_x) v[x] &= 0; \partial_o^k v[0, x'] = \frac{1}{\langle \zeta', x' - z' \rangle^n}; \\ \partial_o^\ell v[0, x'] &= 0, \quad 0 \leq \ell \leq m-1, \ell \neq k \end{aligned} \quad (4.4)$$

possède une unique solution $v[.]$ holomorphe sur le revêtement universel de $W \setminus \bigcup_{j=1}^\mu \mathcal{K}_j(z', \zeta')$; sa valeur sera notée $v(x, z', \zeta')$; la fonction $(x, z', \zeta') \mapsto v(x, z', \zeta')$ est holomorphe sur le revêtement universel de l'ensemble

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, z', \zeta') \in W \times W' \times \Gamma; x \notin \bigcup_{i=1}^\mu \mathcal{K}_i(z', \zeta') \right\},$$

et est positivement homogène de degré $-n$ relativement à ζ' .

Le problème (4.4) a été résolu par HAMADA [2] [3] [4], qui donne de sa solution $v[.]$ la forme suivante :

$$v[x] = v(x, z', \zeta') = v_o(x, z', \zeta') + \sum_{j=1}^\mu v_j(x, z', \zeta'); \quad (4.5)$$

la fonction $(x, z', \zeta') \mapsto v_o(x, z', \zeta')$ est holomorphe sur $W \times W' \times \Gamma$ et positivement homogène de degré $-n$ relativement à ζ' ; pour tout $j \in \{1, \dots, \mu\}$, la fonction $(x, z', \zeta') \mapsto v_j(x, z', \zeta')$ est holomorphe sur le revêtement universel de l'ensemble

$$\mathcal{A}_j = \left\{ (x, z', \zeta') \in W \times W' \times \Gamma; x \notin \mathcal{K}_j(z', \zeta') \right\},$$

et est positivement homogène de degré $-n$ relativement à ζ' ; cette fonction peut se mettre sous la forme suivante donnée par HAMADA [3] [4] :

$$v_j(x, z', \zeta') = G_{j,o}(x, z', \zeta') \log \frac{\chi_j(x, z', \zeta')}{\langle \zeta', c' \rangle} + \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{G_{j,\nu}(x, z', \zeta')}{[\chi_j(x, z', \zeta')]^\nu} \quad (4.6)$$

où les fonctions $(x, z', \zeta') \mapsto G_{j,\nu}(x, z', \zeta')$ sont holomorphes sur $W \times W' \times \Gamma$ et positivement homogènes de degré $\nu - n$ relativement à ζ' pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ici on désigne par c' un vecteur de S , choisi de façon que

$$(\forall \zeta' \in \Gamma) : \operatorname{Re} \langle \zeta', c' \rangle > 0. \quad (4.7)$$

Un domaine d'holomorphic de la solution d'un problème de Cauchy homogène

La réunion de ces vecteurs c' constitue donc un demi-cône convexe ouvert de S . D'autre part, la série $\sum_{\nu=1}^{+\infty}$ est absolument et uniformément convergente sur tout compact contenu dans le revêtement universel de \mathcal{A}_j .

La proposition suivante montre que dans (4.6) on peut remplacer $G_j(x, z', \zeta') \log \frac{\chi_j(x, z', \zeta')}{\langle \zeta', c' \rangle}$ par $G_j(x, z', \zeta') \log \chi_j(x, z', \zeta')$: on obtient ainsi l'énoncé donné par Y.HAMADA.

PROPOSITION 4.1. — On a

$$\sum_{j=1}^{\mu} G_{j,o} = 0 \text{ sur } W \times W' \times \Gamma. \quad (4.8)$$

Preuve. — La fonction

$$x \mapsto v(x, z', \zeta')$$

appartient à un germe de X holomorphe sur $W' \setminus \mathcal{P}(z', \zeta')$.

Vu (4.5) et (4.6), il en est de même de la fonction

$$x \mapsto \sum_{j=1}^{\mu} G_{j,o}(x, z', \zeta') \log \frac{\chi_j(x, z', \zeta')}{\langle \zeta', c' \rangle}.$$

Or : d'une part, chaque fonction

$$x \mapsto G_{j,o}(x, z', \zeta')$$

appartient à un germe de X holomorphe sur W' ; d'autre part, chaque fonction

$$x \mapsto \log \frac{\chi_j(x, z', \zeta')}{\langle \zeta', c' \rangle}$$

appartient à un germe de X , localement holomorphe sur $W' \setminus \mathcal{P}(z', \zeta')$, qui croît de $2i\pi$ quand x' décrit dans $W' \setminus \mathcal{P}(z', \zeta')$ un lacet ayant avec $\mathcal{P}(z', \zeta')$ le coefficient d'enlacement 1.

Donc la fonction

$$x \mapsto \sum_{j=1}^{\mu} G_{j,o}(x, z', \zeta')$$

appartient au germe de X , holomorphe sur W' , qui est identiquement nul. D'où (4.8).

5 - Choix d'une détermination uniforme de la solution du problème de Cauchy

Soient $X = \mathbb{C}^{n+1}$ et S l'hyperplan de X d'équation $x^o = 0$. On désigne par Δ un domaine borné de S dont la frontière $\partial\Delta$ est de classe C^2 . On suppose Δ strictement convexe au sens usuel (cf. VALENTINE [14], p.94). Soient $y = (0, y') \in \partial\Delta$, et $\eta' \in S^*$ tel que

$$\operatorname{Re} \langle \eta', x' - y' \rangle > 0 \text{ pour tout } x' \in \Delta$$

η' est donc un vecteur de $T_{y'}^*(\partial\Delta)$ défini au produit près par un réel strictement positif.

Employons la notation 4.1. — Supposons que y n'est pas un point critique de $\partial\Delta$ pour h (voir section 3). Alors les racines $\eta_o^{(1)}, \dots, \eta_o^{(\mu)}$ de l'équation en η_o

$$h(y, \eta_o, \eta') = 0$$

sont deux à deux distinctes.

Il existe W et Γ tels que les propriétés A, B, C décrites dans la section 4 sont vérifiées.

Notons σ un voisinage fermé de y dans $\partial\Delta$ contenu dans $W' = W \cap S$.

Soit $\zeta' : \sigma \rightarrow S^* \setminus \{0\}$ une application de classe C^1 telle que pour tout $z = (0, z') \in \sigma$ on a

$$\operatorname{Re} \langle \zeta'(z'), x' - z' \rangle > 0 \text{ pour tout } x = (0, x') \in \Delta;$$

donc $\zeta'(z')$ est un vecteur de $T_{z'}^*(\partial\Delta)$; la fonction ζ' est définie au produit près par une fonction de classe C^1 sur σ , à valeurs strictement positives.

Choisissons alors σ assez petit pour que l'application ζ' envoie σ dans Γ .

Avec les notations de la section 5, nous poserons pour tout $z' \in \sigma$:

$$\begin{aligned} \zeta^j(z') &= (\lambda^j(0, z', \zeta'(z')), \zeta'(z')); \\ \chi_j(x, z') &= \chi_j(x, z', \zeta'(z')). \end{aligned}$$

Notation 5.1. — Nous noterons K_j la j -ème hypersurface caractéristique réelle issue de σ : d'après le théorème 3.1, elle est engendrée par les

Un domaine d'holomorphic de la solution d'un problème de Cauchy homogène

bicaractéristiques complexes issues des $(0, z', \zeta^j(z'))$ quand $z = (0, z')$ décrit σ .

Nous choisirons dans X une boule ouverte V de centre y et de rayon assez petit pour que tout $j \in \{1, \dots, \mu\}$, l'hypersurface K_j la divise en deux domaines; nous noterons D_j celui des deux domaines qui contient $\Delta \cap V$.

Nous allons montrer que la fonction $x \mapsto v_j(x, z', \zeta^j(z'))$ est uniforme dans D_j , donc que la fonction $x \mapsto v(x, z', \zeta^j(z'))$ est uniforme dans

$$D = \bigcap_{j=1}^{\mu} D_j.$$

Notons pour tout $(z', \zeta') \in W \times \Gamma$:

$$P(z', \zeta') = \{x' \in S; \operatorname{Re} \langle \zeta', x' - z' \rangle = 0\}.$$

Nous poserons pour tout $z' \in \sigma$:

$$P(z') = P(z', \zeta^j(z')).$$

Soit $r > 0$ un nombre assez petit pour que les propriétés suivantes soient vraies pour tout $z' \in \sigma$:

(5.1) Les projections sur X des parties où $|x^0| < r$ des bicaractéristiques issues des (x, ξ_j) , où $x = (0, x') \in P(z') \cap W'$ et $\xi_j = (\lambda^j(0, x', \zeta^j(z')), \zeta^j(z'))$, sont des arcs analytiques complexes sans singularités, engendrant une *hypersurface réelle* $K_j(z')$ de V ;

(5.2) Comme paramètre de $x \in K_j(z')$ nous emploierons sa coordonnée x_0 et, non pas l'ensemble de ses autres coordonnées, mais le point x' de $P(z') \cap W'$ dont est issue la bicaractéristique (engendrant $K_j(z')$) contenant x . Alors sur $K_j(z')$, le jacobien de l'application $(x_0, x') \mapsto x$ et de son inverse sont bornés en module par une constante indépendante de $z' \in \sigma$.

Notons :

$$E' = \bigcup_{z' \in \sigma} P(z');$$

E' est une partie de S contenant σ , et disjointe de Δ puisque Δ est strictement convexe; tout point de $P(z')$ autre que z' est intérieur à E' dans S ; le point z' appartient au bord de E' ; donc :

LEMME 5.1. — a) $E' \setminus \sigma$ est ouvert dans S ;

b) $\{E', \Delta\}$ est une partition contenant $V' = V \cap S$ si le rayon de V est choisi suffisamment petit; plus précisément,

$$E' \cap \Delta = \emptyset; V' \subset E' \cup \Delta.$$

Notons :

$$E_j = \bigcup_{z' \in \sigma} K_j(z');$$

évidemment E_j est une partie de V dont l'intersection avec S est égale à $E' \cap V$; évidemment E_j contient K_j .

LEMME 5.2. — a) $E_j \setminus K_j$ est ouvert dans X ;

b) $\{E_j, D_j\}$ est une partition contenant V si le rayon de V est choisi suffisamment petit : plus précisément,

$$E_j \cap D_j = \emptyset; V \subset E_j \cup D_j.$$

La démonstration de ce lemme est donnée dans [13] : elle revient à “transporter” le résultat du lemme 5.1 le long des bicaractéristiques issues des $K^j(z')$.

La signification intuitive de ce lemme est la suivante : les hypersurfaces caractéristiques $K_j(z')$ de X , issues des hyperplans réels $P(z')$ de S , enveloppent, quand z' décrit σ , l'hypersurface caractéristique K_j de X , issue de l'hypersurface σ de S enveloppée par les $P(z')$.

LEMME 5.3. — a) Un point x de V appartient à $K_j(z')$ si et seulement si

$$\operatorname{Re} \chi_j(x, z') = 0.$$

b) Un point x de V appartient à D_j si et seulement si

$$(\forall z' \in \sigma) : \operatorname{Re} \chi_j(x, z') > 0.$$

Preuve. — Rappelons que $\chi_j(x, z') = \chi_j(x, z', \zeta'(z'))$, où $\zeta'(z')$ est tel que pour tout $x = (0, x') \in \Delta$ on a

$$\operatorname{Re} \langle \zeta'(z'), x' - z' \rangle > 0.$$

Un domaine d'holomorphie de la solution d'un problème de Cauchy homogène

La fonction $x \mapsto \chi_j(x, z')$ est constante le long des projections des bi-caractéristiques issues des points $(0, x', \xi_j)$, où $x' \in P(z')$; donc $x = F(x^o, x', z')$ est sur l'une de ces projections si et seulement si

$$Re \chi_j(x, z') = Re \langle \zeta'(z'), x' - z' \rangle = 0$$

ceci prouve la partie a) du Lemme 5.3.

Si V est choisi assez petit, on déduit alors du Lemme 5.2 que x appartient à $D_j \cap V$ si et seulement si

$$(\forall z' \in \sigma) : Re \chi_j(x, z') \neq 0;$$

de plus D_j est connexe et contient Δ sur lequel, vu la définition de $\zeta'(z')$,

$$(\forall z' \in \sigma) : Re \chi_j(x, z') = Re \langle \zeta'(z'), x' - z' \rangle > 0;$$

d'où (5.7) vu la continuité de la fonction χ_j . Si x appartient à V , (5.7) équivaut donc à $x \in D_j$. Ceci achève la démonstration de la partie b) du Lemme 5.3.

Choix de déterminations uniformes des fonctions v_j et v , qu'a définies le C) de la section 4. Soient $j \in \{1, \dots, \mu\}$, $x \in D_j$, $z' \in \sigma$. D'après le Lemme 5.3 :

$$Re \chi_j(x, z') = Re \chi_j(x, z', \zeta'(z')) > 0;$$

par définition de $c' \in S$:

$$Re \langle \zeta'(z'), c' \rangle > 0.$$

Donc : le nombre complexe

$$\frac{\chi_j(x, z', \zeta'(z'))}{\langle \zeta'(z'), c' \rangle}$$

n'est pas un nombre réel négatif ou nul.

Dans toute la suite on désigne par $\log Z$ une détermination du logarithme complexe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

La fonction

$$x \mapsto \log \frac{\chi_j(x, z', \zeta'(z'))}{\langle \zeta'(z'), c' \rangle}$$

est, pour tout $z' \in \sigma$, uniforme et holomorphe dans D_j : il en est donc de même de la fonction

$$x \mapsto v_j(x, z', \zeta'(z')).$$

Donc la fonction

$$x \mapsto v(x, z', \zeta'(z'))$$

est, pour tout $z' \in \sigma$, uniforme et holomorphe dans $D = \bigcap_{j=1}^{\mu} D_j$.

Notons :

$$\Sigma = \{(z', \zeta'(z')) ; z' \in \sigma\};$$

on déduit de ce qui précède le lemme suivant :

LEMME 5.4. — *Pour tout $j \in \{1, \dots, \mu\}$, la fonction*

$$(x, z', \zeta') \mapsto v_j(x, z', \zeta')$$

est holomorphe sur un voisinage de $D_j \times \Sigma$; donc la fonction

$$(x, z', \zeta') \mapsto v(x, z', \zeta')$$

est holomorphe sur $D \times \Sigma$, où $D = \bigcap_{j=1}^{\mu} D_j$.

6 - Cas où la donnée de Cauchy est continue sur ω près de y

Nous reprenons les notations et les hypothèses de l'introduction (section 1). En raison du principe de superposition, nous nous limitons à une seule donnée de Cauchy non nulle, soit w_k : dans ce qui suit, nous noterons w au lieu de w_k . Nous supposons ceci :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe un voisinage } \sigma \text{ de } y \text{ dans } \partial\omega \text{ tel que} \\ \text{la fonction } w \text{ est continue sur } \omega \cup \sigma. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

D'après le corollaire 1.5.25 de [7], on peut se ramener par une transformation biholomorphe au cas où ω est strictement convexe en y : en effet, l'hypothèse (6.1) est conservée par une transformation biholomorphe sur un voisinage de y dans S . KOHN, NIRENBERG [8] ont remarqué que seule la pseudoconvexité *stricte* assurait l'existence d'une telle transformation; voir aussi [7], problème 20 p.64.

Reprenons également les hypothèses et les notations de la section 2, où nous noterons :

$$z', x', \zeta' \text{ au lieu de } z, x, \zeta.$$

Un domaine d'holomorphie de la solution d'un problème de Cauchy homogène

Rappelons que Σ désigne l'ensemble des $(\zeta'^*(z'), z')$ quand z' décrit σ .

D'après le théorème 2.1, la fonction

$$\widehat{w}(x') = w(x') - \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma} w(z') \frac{\psi(\zeta') \wedge \theta(z')}{\langle \zeta', z' - x' \rangle^n}$$

est holomorphe sur un voisinage W'_1 de y dans S ; ce voisinage, qui dépend de ω et σ , est indépendant de w .

D'après le lemme 9.1 de LERAY [11], il existe un voisinage V_1 de y dans X , ne dépendant que de W'_1 et de l'opérateur $a(x, \partial_x)$, tel que la solution \widehat{u} du problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(x, \partial_x) \widehat{u}(x) = 0; & \partial_o^k \widehat{u}(0, x') = \widehat{w}(x'); \\ \partial_o^\ell \widehat{u}(0, x') = 0, & \ell = 0, \dots, m-1, \ell \neq k \end{cases}$$

est holomorphe dans V_1 .

D'après la propriété C de la section 4, si $\sigma \subset \partial\omega$ est choisi suffisamment petit, la solution \widetilde{u} du problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(x, \partial_x) \widetilde{u}(x) = 0; \\ \partial_o^\ell \widetilde{u}(0, x') = 0, & \ell = 0, \dots, m-1, \ell \neq k; \\ \partial_o^k \widetilde{u}(0, x') = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma} w(z') \frac{\psi(\zeta') \wedge \theta(z')}{\langle \zeta', z' - x' \rangle^n} \end{cases}$$

est donnée par la formule

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(x) &= \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma} w(z') v(x, z', \zeta') \psi(\zeta') \wedge \theta(z') \\ &= \sum_{j=0}^{\mu} u_j(x), \end{aligned}$$

où u_o est holomorphe sur un voisinage de y dans X , et pour tout $j \in \{1, \dots, \mu\}$ on a

$$u_j(x) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma} w(z') v_j(x, z', \zeta') \psi(\zeta') \wedge \theta(z').$$

D'après la section 5, si $\zeta' : \sigma \mapsto S^* \setminus \{0\}$ est une application de classe C^1 telle que pour tout $z' \in \sigma$ on a

$$(\forall x' \in \Delta) : \langle \zeta', x' - z' \rangle > 0$$

alors la fonction $x \mapsto v_j(x, z', \zeta')$ est holomorphe uniforme dans D_j ; donc la fonction $x \mapsto u_j(x)$ est holomorphe uniforme dans D_j . Ceci achève la démonstration du théorème 1.1 dans le cas où w est continue sur \bar{w} près de y .

7 - Continuité de la famille des caractéristiques

On reprend les hypothèses et les notations de la section 6. On suppose cette fois que Δ est strictement convexe en tout point de sa frontière au sens de [7] p.67.

Soit $(\Delta_\epsilon)_{0 \leq \epsilon \leq 1}$ une famille décroissante de domaines de S , ayant les propriétés énoncées dans la proposition 2.1 avec le voisinage W défini dans la section 4, et le voisinage Λ défini comme suit : l'hyperplan $p(x, \xi)$ d'équation

$$Re < \xi, x - z > = 0$$

appartient à Λ si et seulement si le couple (x, ξ) appartient à $W \times \Gamma$, où Γ est défini dans la section 4.

Notons :

$$\sigma_* = \bigcap_{0 \leq \epsilon \leq 1} \partial \Delta_\epsilon;$$

$$(\forall \epsilon \in [0, 1]) : \sigma_\epsilon = \overline{\partial \Delta_\epsilon \setminus \sigma_*} :$$

σ_* et σ_ϵ sont des hypersurfaces fermées de classe C^2 de S , de même bord $\partial \sigma_*$.

D'après la propriété (2.6), il existe une application continue $\zeta' : \overline{\Delta_0 \setminus \Delta_1} \rightarrow \Gamma$, lipschitzienne sur $\overline{\Delta_0 \setminus \Delta_1} \setminus \partial \sigma_*$ et sur chaque σ_ϵ , possédant la propriété suivante : pour tout $\epsilon \in [0, 1]$ on a

$$(\forall z' \in \partial \Delta_\epsilon, \forall x = (0, x') \in \Delta_\epsilon) : Re < \zeta'(z'), x' - z' > > 0.$$

Donc si z' appartient à $\partial \Delta_\epsilon$, alors $\zeta'(z')$ est un vecteur de $T_{z'}^*(\partial \Delta_\epsilon)$; la fonction ζ' est définie au produit près par une fonction continue sur $\overline{\Delta_0 \setminus \Delta_1}$ à valeurs strictement positives; elle peut être choisie de classe C^1 sur $(\overline{\Delta_0 \setminus \Delta_1}) \setminus \partial \sigma_*$.

En employant les notations de la section 4, nous poserons pour tout $z' \in \overline{\Delta_0 \setminus \Delta_1}$:

$$\zeta^j(z') = (\lambda^j(0, z', \zeta'(z')), \zeta'(z'));$$

$$\chi_j(x, z') = \chi_j(x, z', \zeta'(z')).$$

Un domaine d'holomorphie de la solution d'un problème de Cauchy homogène

Notation 7.1. — Nous noterons K_j^ξ la j -ème hypersurface caractéristique issue de σ_ϵ : d'après le théorème 3.1, elle est engendrée par les caractéristiques réelles issues des $(0, z', \zeta^j(z'))$ quand z' décrit σ_ϵ .

Nous choisirons $\epsilon_0 > 0$ assez petit et une boule ouverte V dans X de centre y et de rayon assez petit pour que pour tout $j \in \{1, \dots, \mu\}$ et tout $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ l'hypersurface K_j^ϵ la divise en deux domaines; nous noterons D_j^ϵ celui qui contient $\Delta_\epsilon \cap V$.

En remplaçant ensuite $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ par ϵ , nous nous ramenons à $\epsilon_0 = 1$.

Comme dans la section 5, notons pour tout $(z', \zeta') \in W \times \Gamma$:

$$P(z', \zeta') = \{z' \in S; \operatorname{Re} \langle \zeta', x' - z' \rangle = 0\};$$

ici c'est pour tout $z' \in \overline{\Delta_0 \setminus \Delta_1}$ que nous définissons

$$P(z') = P(z', \zeta'(z')).$$

Soit $r > 0$ un nombre assez petit pour que les propriétés (5.1) et (5.2) soient vraies pour tout $z' \in \overline{\Delta_0 \setminus \Delta_1}$. L'existence d'un tel nombre r est assurée par le fait que le compact $\overline{\Delta_0 \setminus \Delta_1}$ est contenu dans l'ouvert W , tandis que son image par la fonction continue ζ' est un compact contenu dans l'ouvert Γ .

Pour tout $\epsilon \in]0, 1]$, notons :

$$E'_\epsilon = \bigcup_{z' \in \overline{\Delta_0 \setminus \Delta_\epsilon}} P(z');$$

soit d'autre part

$$E'_0 = \bigcup_{z' \in \sigma_0} P(z').$$

Pour tout $\epsilon \in [0, 1]$, E'_ϵ est une partie fermée de S disjointe de Δ_ϵ puisque Δ_ϵ est strictement convexe; évidemment E'_ϵ contient σ_ϵ ; tout point de $P(z')$, sauf z' lorsqu'il appartient à σ_ϵ , est intérieur à E'_ϵ dans S ; tout point $z' \in \sigma_\epsilon$ appartient au bord de E'_ϵ ; donc pour tout $\epsilon \in [0, 1]$, $E'_\epsilon \setminus \sigma_\epsilon$ est un ouvert de S . En outre la famille $(E'_\epsilon)_{0 \leq \epsilon \leq 1}$ est strictement croissante; donc :

LEMME 7.1. — a) $E'_\epsilon \setminus \sigma_\epsilon$ est ouvert;

b) $\{E', \Delta_\epsilon\}$ est une partition contenant V' : autrement dit,

$$E' \cap \Delta_\epsilon = \emptyset; V' \subset E'_\epsilon \cup \Delta_\epsilon.$$

Rappelons que pour tout $z' \in \overline{\Delta_0 \setminus \Delta_1}$, les propriétés (5.1) et (5.2) permettent de définir une hypersurface réelle $K_j(z')$ de V , qui est la j -ème hypersurface caractéristique issue de $P(z')$.

Notons pour tout $\epsilon \in [0, 1]$:

$$E_j^\epsilon = \bigcup_{z' \in \overline{\Delta_0 \setminus \Delta_\epsilon}} K_j(z');$$

soit d'autre part

$$E_j^0 = \bigcup_{z' \in \sigma_0} K_j(z').$$

Evidemment pour tout $\epsilon \in [0, 1]$, E_j^ϵ est une partie de V dont l'intersection avec S est égale à $E'_\epsilon \cap V'$, et E_j^ϵ contient l'hypersurface caractéristique réelle K_j^ϵ issue de σ_ϵ .

LEMME 7.2. — a) $E_j^\epsilon \setminus K_j^\epsilon$ est ouvert dans X ;

b) $\{E_j^\epsilon, D_j^\epsilon\}$ est une partition contenant V : plus précisément,

$$E_j^\epsilon \cap D_j^\epsilon = \emptyset; V \subset E_j^\epsilon \cup D_j^\epsilon.$$

Preuve. — Celle du lemme 5.2, où l'on remplace

$$E', \sigma, E_j, K_j, D_j \text{ par } E'_\epsilon, \sigma_\epsilon, E_j^\epsilon, K_j^\epsilon, D_j^\epsilon.$$

LEMME 7.3. — La famille $(D_j^\epsilon)_{0 \leq \epsilon \leq 1}$ est décroissante, et on a :

$$D_j^0 = \bigcup_{0 < \epsilon \leq 1} D_j^\epsilon.$$

Preuve. — Par définition $D_j^\epsilon \subset V$; vu le lemme 7.2, $\{E_j^\epsilon \cap V, D_j^\epsilon\}$ est donc une partition de V .

Pour prouver le lemme, il suffit donc de prouver ceci :

$(E_j^\epsilon \cap V)_{0 \leq \epsilon \leq 1}$ est croissante ;

$$E_j^0 \cap V = \bigcap_{0 < \epsilon \leq 1} (E_j^\epsilon \cap V).$$

Un domaine d'holomorphic de la solution d'un problème de Cauchy homogène

Or, par définition de E_j^ϵ :

$$(E_j^\epsilon)_{0 \leq \epsilon \leq 1} \text{ est croissante ;}$$

$$E_j^o = \bigcap_{0 < \epsilon \leq 1} E_j^\epsilon.$$

8 - Intégration sur des chaînes homologues

On reprend les hypothèses et les notations de la section 2; on notera :

$$z', x', \zeta' \text{ au lieu de } z, x, \zeta.$$

Pour tout $\epsilon \in [0, 1]$, on pose :

$$\Sigma_\epsilon = \{(z', \zeta'(z')); z' \in \sigma_\epsilon\};$$

Σ_ϵ est une variété; nous l'orientons comme le fait le théorème 1 de [13]; au sens de la topologie algébrique, Σ_ϵ est donc une *chaîne*; son bord, dont le support est la variété

$$\{(z', \zeta'(z')); z' \in \partial\sigma_\star\},$$

est indépendant de ϵ .

Pour tout $\epsilon \in [0, 1]$, soit :

$$\Pi_\epsilon = \bigcup_{0 < \eta \leq \epsilon} \Sigma_\eta = \{(z', \zeta'(z')); z' \in (\Delta_o \setminus \Delta_\epsilon) \cup \partial\sigma_\star\};$$

Σ_ϵ et Π_ϵ sont des parties de $S \times (S^* \setminus \{0\})$, dont les projections respectives sur S sont σ_ϵ et $(\Delta_o \setminus \Delta_\epsilon) \cup \partial\sigma_\star$.

LEMME 8.1. — Si $0 < \eta < \epsilon$ alors Σ_η est homologue à Π_ϵ dans Π_ϵ . Cela signifie que $\Sigma_\eta - \Sigma_\epsilon$ est un cycle homologue à zéro dans Π_ϵ .

La démonstration de ce lemme est évidente.

Soit w une fonction holomorphe sur Δ_o , à valeurs complexes.

LEMME 8.2. — a) La forme différentielle en (x, z', ζ')

$$w(z')v_j(x, z', \zeta')\psi(\zeta') \wedge \theta(z')$$

est, pour tout $j \in \{1, \dots, \mu\}$, définie et holomorphe sur un voisinage ouvert de $D_j^\epsilon \times \Pi_\epsilon$ dans $V \times V' \times (S^* \setminus \{0\})$.

b) Sa restriction à x fixé est fermée sur un voisinage de Π_ϵ dans $V' \times (S^* \setminus \{0\})$.

Preuve. — a) Cette partie du lemme résulte du lemme 5.4.

b) Pour $dx = 0$ et $dz' = 0$ on a :

$$\begin{aligned} dv_j(x, z', \zeta') \wedge \psi(\zeta') &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial \zeta_k} d\zeta_k \wedge \psi(\zeta') \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial \zeta_k} \zeta_k \theta(\zeta') = -n v_j(x, z', \zeta') \theta(\zeta') : \end{aligned}$$

cette dernière égalité résulte de l'identité d'Euler, que l'on peut appliquer à v_j compte tenu de la propriété C de la section 4.

D'autre part,

$$d\psi(\zeta') = n \theta(\zeta') ;$$

donc, pour $dx = 0$,

$$d[v_j(x, z', \zeta') \psi(\zeta')] = 0 ;$$

d'où le b) puisque $d(w(z')\theta(z')) = 0$.

Notation 8.1. — Pour tout $j \in \{1, \dots, \mu\}$ et tout $\eta \in]0, 1]$ on pose

$$u_j^\eta(x) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma_\eta} w(z') v_j(x, z', \zeta') \psi(\zeta') \wedge \theta(z').$$

LEMME 8.3. — a) La fonction u_j^η est définie, holomorphe et uniforme dans D_j^η .

b) Si $0 < \eta \leq \epsilon$ et $x \in D_j^\epsilon$ on a

$$u_j^\eta(x) = u_j^\epsilon(x). \tag{8.1}$$

Preuve. — a) C'est, avec d'autres notations, le résultat obtenu dans la section 8.

b) Les intégrales d'une forme fermée dans un ouvert sur des chaînes homologues dans cet ouvert sont égales : donc (8.1) résulte des lemmes 8.1 et 8.2.

Notation 8.2. — Pour tout $\eta \in]0, 1]$ et tout $x \in D_j^\eta$ on pose :

$$u_j^0(x) = u_j^\eta(x).$$

Un domaine d'holomorphie de la solution d'un problème de Cauchy homogène

PROPOSITION 8.1. — *La fonction u_j^0 est définie, holomorphe et uniforme sur D_j^0 ; pour tout $\eta \in]0, 1]$, sa restriction à D_j^η est u_j^η .*

C'est une conséquence immédiate du lemme 8.3.

9 - Preuve du théorème 1.1

Nous reprenons les hypothèses et les notations de l'introduction, sans condition supplémentaire de continuité sur les données de Cauchy. Par une transformation biholomorphe, nous nous ramenons au cas où ω est strictement convexe en y au sens de [7] p.67.

Nous reprenons également les hypothèses et les notations de la section 2, où nous noterons

$$z', x', \zeta' \text{ au lieu de } z, x, \zeta.$$

Compte tenu du principe de superposition, nous nous limitons au cas où une seule donnée de Cauchy w_k du problème (1.1) est non nulle; nous noterons w au lieu de w_k .

Pour tout $\epsilon \in]0, 1]$ et tout $x' \in \Delta_\epsilon$, on pose :

$$w_\epsilon(x') = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma_\epsilon} w(z') \frac{\psi(\zeta') \wedge \theta(z')}{\langle \zeta', z' - x' \rangle^n} :$$

d'après la proposition 2.2, la fonction w_ϵ est holomorphe sur Δ_ϵ , et si $0 < \epsilon < \eta$ alors $w_\eta = w_\epsilon$ sur Δ_η ; on peut donc définir une fonction \tilde{w} , à valeurs complexes, par :

$$(\forall \epsilon \in]0, 1]) : \tilde{w} = w_\epsilon \text{ sur } \Delta_\epsilon;$$

cette fonction est définie et holomorphe sur Δ_o .

D'après le théorème 2.2, la fonction

$$\hat{w}(x') = w(x') - \tilde{w}(x')$$

est définie et holomorphe sur un voisinage W_1' de y dans S ; ce voisinage, qui dépend de ω , est indépendant de w .

D'après le lemme 9.1 de LERAY [11], il existe un voisinage V_1 de y dans X , ne dépendant que de W_1' et de l'opérateur $a(x, \partial_x)$, tel que la solution \hat{u} du problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(x, \partial_x) \hat{u}(x) = 0; \partial_o^k \hat{u}(0, x') = \hat{w}(x'); \\ \partial_o^\ell \hat{u}(0, x') = 0, \ell = 0, \dots, m-1, \ell \neq k \end{cases}$$

est holomorphe dans V_1 .

D'après le résultat obtenu dans la section 6, la solution \tilde{u} du problème de Cauchy à données holomorphes dans Δ_ϵ :

$$\begin{cases} a(x, \partial_x)\tilde{u}(x) = 0; \partial_o^k \tilde{u}(0, x') = \tilde{w}(x'); \\ \partial_o^\ell \tilde{u}(0, x') = 0, \ell = 0, \dots, m-1, \ell \neq k \end{cases}$$

est donnée par

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=0}^{\mu} u_j^\epsilon(x),$$

où pour tout $j \in \{0, \dots, \mu\}$ on pose

$$u_j^\epsilon(x) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma_\epsilon} w(x') v_j(x, z, \zeta') \frac{\psi(\zeta') \wedge \theta(z')}{\langle \zeta', z' - x' \rangle^n}.$$

Dans ce qui suit, D_o^ϵ désigne un voisinage de y dans X et, pour tout $j \in \{1, \dots, \mu\}$, D_j^ϵ est le domaine défini par la notation 7.1.

D'après la proposition 8.1, chaque fonction u_j^ϵ est la restriction à D_j^ϵ d'une fonction u_j^o holomorphe et uniforme sur D_j^o ; par conséquent, la solution \tilde{u} du problème de Cauchy (9.1) à données holomorphes dans Δ_o est de la forme

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\mu} u_j^o(x)$$

où pour tout $j \in \{0, \dots, \mu\}$, la fonction u_j^o est holomorphe et uniforme dans D_j^o . Ceci achève la démonstration du théorème 1.1.

10 - Un résultat global à coefficients constants

On commence par rappeler un théorème de J.M.BONY et P.SCHAPIRA. Comme précédemment, on désigne par $a(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre m à coefficients holomorphes dans un ouvert Y de \mathbf{C}^{n+1} , et par $g(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ son symbole principal.

THÉORÈME 10.1. — (BONY, SCHAPIRA [1]). *Soient c et C deux convexes de Y , c étant localement compact, C ouvert, avec $c \subset C$. Considérons les hyperplans réels de X dont la normale est limite de directions caractéristiques*

Un domaine d'holomorphie de la solution d'un problème de Cauchy homogène

en (au moins) un point de C , i.e. appartient à l'adhérence des $\xi \in \mathbf{C}^{n+1}$ tels qu'il existe $x \in C$ tel que $g(x, \xi) = 0$. Supposons que tout hyperplan réel de ce type qui coupe C coupe c . Alors si u est une fonction holomorphe au voisinage de c et si $a(x, \partial_x)u(x)$ est holomorphe dans C , u se prolonge en une fonction holomorphe dans C .

On en déduit le résultat suivant.

THÉORÈME 10.2. — Supposons que le symbole principal $g(\xi)$ de l'opérateur $a(x, \partial_x)$ soit à coefficients constants, et que $a_\alpha \equiv 1$ pour $\alpha = (m, 0, \dots, 0)$. Soit ω un ouvert convexe de $S : x^0 = 0$, de frontière C^1 , contenu dans Y . Soit Ω l'ouvert convexe de \mathbf{C}^{n+1} délimité par les hyperplans réels caractéristiques tangents à $\partial\omega$. Alors la solution u du problème de Cauchy (1.1), à données de Cauchy w_k holomorphes dans ω , est holomorphe dans tout domaine convexe C de \mathbf{C}^{n+1} contenant ω et contenu dans $\Omega \cap Y$ (donc dans Ω si $\Omega \subset Y$).

Preuve. — On applique le théorème 10.1 avec $c = \omega$ et C tel que $\omega \subset C \subset \Omega \cap Y$. L'ensemble des directions normales à $\partial\omega$ dans S décrit tout l'espace projectif réel \mathbf{PS}^* associé au dual réel de S , et ceci exactement deux fois (cf. LERAY [12], n°48) : on en déduit que l'ensemble des hyperplans caractéristiques réels de \mathbf{C}^{n+1} tangents à $\partial\omega$ est fermé, et que tout hyperplan caractéristique réel H de \mathbf{C}^{n+1} est parallèle à exactement deux de ces hyperplans H_1 et H_2 . Si un tel hyperplan H coupe C , il est donc nécessairement compris entre H_1 et H_2 donc coupe $c = \omega$, et le théorème 10.1 s'applique.

Références

- [1] BONY (J.M.), SCHAPIRA (P.). — Prolongement et existence des solutions des systèmes hyperboliques non stricts à coefficients analytiques, *Partial differential (Proc. Symp. Pure Math., Univ. California, Berkeley)*, t. XXIII, 1971.
- [2] HAMADA (Y.). — The singularities of the solution of the Cauchy problem, *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, t. 5,1, 1969, p. 21-40.
- [3] HAMADA (Y.). — On the propagation of singularities of the solution of the Cauchy problem, *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, t. 6,2, 1970, p. 357-384.
- [4] HAMADA (Y.). — Problème analytique de Cauchy à caractéristiques multiples dont les données de Cauchy ont des singularités polaires, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 276, Série A, 1973, p. 1681-1684.
- [5] HAMADA (Y.), LERAY (J.), WAGSCHAL (C.). — Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples; problème de Cauchy ramifié; hyperbolicité partielle, *J. Math. Pures et Appl.*, t. 55, 1976, p. 297-352.

- [6] HENKIN (G.M.). — *Integral representations of functions holomorphic in strictly pseudoconvex domains and some applications (en russe)*, Math. Sb. **78** 1969, p. 611-639; traduction anglaise in Math. USSR - Sb. **7**, 1969, p. 597-616.
- [7] HENKIN (G.M.), LETTERER (J.). — *Theory of functions on complex manifolds*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.
- [8] KOHN (J.J.), NIRENBERG (L.). — A pseudoconvex domain not admitting a holomorphic support function, *Math. Ann.*, t. **201**, 1973, p. 265-268.
- [9] KRANTZ (S.G.). — *Function theory of several complex variables*. — John Wiley, New-York, 1982.
- [10] LERAY (J.). — Fonction de variables complexes : sa représentation comme somme de puissances négatives de fonctions linéaires, *Rend. Acad. Naz. Lincei*, t. **20**, série **8**, 1956, p. 589-590.
- [11] LERAY (J.). — Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy (problème de Cauchy I), *Bull. Soc. Math. France*, t. **85**, 1957, p. 389-429.
- [12] LERAY (J.). — Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (problème de Cauchy III), *Bull. Soc. Math. France*, t. **87**, 1959, p. 81-180.
- [13] SCHILTZ (D.). — *Thèse de doctorat d'Etat*. — Université Paris VI, 1987.
- [14] VALENTINE (F.A.). — *Convex sets*. — Mc Graw Hill, New-York, 1954.

(Manuscrit reçu le 11 septembre 1987)