RAYMOND BARRA

Fermeture de l'espace des divergences et séparation de l'espace des feuilles

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 8, nº 2 (1986-1987), p. 121-130

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1986-1987_5_8_2_121_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol.VIII, n°2, 1986–1987

Fermeture de l'espace des divergences et séparation de l'espace des feuilles

RAYMOND BARRA[1]

RÉSUMÉ. — Soient X une variété différentielle, munie d'un feuilletage *simple*, et $\mathcal{D}(X)$ l'espace des formes C^∞ impaires, à support compact dans X et de degré maximum. Soient $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie de champs de vecteurs sur X, définissant le feuilletage donné sur X, et div $\mathcal{L}$ l'espace des $\mathcal{L}$-divergences tordues sur X, c'est-à-dire le sous-espace de $\mathcal{D}(X)$ engendré par les $L.w$ où $L.w$ est la dérivée de Lie de w suivant L, $(L \in \mathcal{L},\ w \in \mathcal{D}(X))$. On étudie ici le lien entre la fermeture de div $\mathcal{L}$ et la séparation de l'espace des feuilles.

ABSTRACT. — Closure of divergences and separation of the spaces of leaves. Let be X a differential manifold equipped with a *simple* foliation, and $\mathcal{D}(X)$ the space of odd C^∞ with compact support in X, of maximum degree. Let $\mathcal{L}$ a Lie algebra of vector fields on X, defining the given foliation on X, and div $\mathcal{L}$ the space of twisted $\mathcal{L}$-divergences on X, i.e. the subespace of $\mathcal{D}(X)$ generated by the $L.w$, where Lw means the Lie derivations along $L(L \in \mathcal{L},\ w \in \mathcal{D}(X))$. We study the Link between closure property of $\operatorname{div}(\mathcal{L}, X)$ and separation of space of leaves.

1. Introduction

1.1. — Soit X une variété différentielle connexe de dimension n, métrisable et séparable. Tout champ de vecteurs L sur X peut être considéré comme un opérateur différentiel sur X, et à ce titre, opère de manière naturelle dans divers espaces de fonctions (ou distributions) définies sur X, par exemple dans l'espace $\mathcal{D}(X)$ des fonctions C^∞ à support compact sur X; l'étude de l'opérateur $L : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(X)$ amène à la question : l'image de L est-elle fermée dans $\mathcal{D}(X)$? (voir par exemple les travaux récents de R. FELIX [F1], [F2]). On se propose ici d'étudier cette question dans un cadre

[1] Université de Poitiers - 40, avenue du Recteur Pineau 86022 Poitiers

à la fois plus général, on se permettra en effet de considérer une algèbre de Lie de champs de vecteurs $\mathcal{L}$ au lieu d'un seul, et plus restrictif puisqu'on supposera que $\mathcal{L}$ définit un feuilletage simple sur X.

1.2. — De façon précise, on supposera donnée une fois pour toutes une variété différentielle $\mathcal{F}$ de dimension m, avec $o < m < n$, *éventuellement non séparée* et une submersion $\pi : X \to \mathcal{F}$ de X sur $\mathcal{F}$; quitte à modifier $\mathcal{F}$, on pourra toujours supposer (et on le fera ici) que les *fibres* de π sont *connexes*, de sorte que ces fibres sont les feuilles d'un feuilletage *simple* sur X ([Hae] p.372), la variété des feuilles étant $\mathcal{F}$. A cette donnée, on va associer des algèbres de Lie de champs de vecteurs sur X, qui definissent le feuilletage $\mathcal{F}$ suivant la définition :

DÉFINITION 1.3.— *On dira d'une algèbre de Lie $\mathcal{L}$ de champs de vecteurs sur X qu'elle définit le feuilletage $\mathcal{F}$ si, pour tout point x de X, l'espace $\mathcal{L}(x)$ des vecteurs $L(x)$, valeurs en x des champs L appartenant à $\mathcal{L}$, est exactement le noyau de l'application tangente à π au point x (ou l'espce tangent à la feuille passant par x).*

On notera que le feuilletage $\mathcal{F}$ peut être défini par plusieurs algèbres de Lie $\mathcal{L}$ distinctes (voir plus bas, 1.6. et 1.7.). En tout cas, si $\mathcal{L}$ définit $\mathcal{F}$, les feuilles de $\mathcal{F}$ ne sont autres que les variétés intégrales maximales de $\mathcal{L}$, et il nous arrivera de dire que ce sont les feuilles (ou les orbites) de $\mathcal{L}$ dans X.

1.4. — Soit donc $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie de champs de vecteurs sur X. On désignera par $\mathcal{D}(X)$ (resp. $\underline{\mathcal{D}}(X)$) l'espace des fonctions (resp. des n-formes tordues) C^∞ et à support compact dans X et par $\mathrm{div}(\mathcal{L}, X)$ (resp. $\underline{\mathrm{div}}(\mathcal{L}, X)$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(X)$ (resp. $\underline{\mathcal{D}}(X)$) engendré par les éléments de la forme Lf (resp. $\theta(L)\omega$), où L décrit $\mathcal{L}$ et f décrit $\mathcal{D}(X)$ (resp. ω décrit $\underline{\mathcal{D}}(X)$ et $\theta(L)\omega$ est la dérivée de Lie de ω par rapport à L). On notera que les orthogonaux respectifs de $\mathrm{div}(\mathcal{L}, X)$ et $\underline{\mathrm{div}}(\mathcal{L}, X)$ dans $\mathcal{D}'(X)$ et $\underline{\mathcal{D}}'(X)$ sont par définition les espaces de distributions ou fonctions généralisées $\mathcal{L}$-invariantes sur X. On est maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de ce travail.

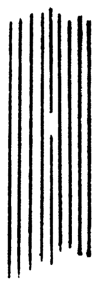
THÉORÈME 1.5.— *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage simple sur X. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) l'espace topologique $\mathcal{F}$ n'est pas séparé;

ii) quelle que soit l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ de champs de vecteurs sur X, définissant $\mathcal{F}$, l'espace $\underline{\mathrm{div}}(\mathcal{L}, X)$ des divergences tordues n'est pas fermé dans $\underline{\mathcal{D}}(X)$;

iii) il existe une algèbre de Lie $\mathcal{L}$ de champs de vecteurs sur X, définissant $\mathcal{F}$, telle que $\underline{\mathrm{div}}(\mathcal{L}, X)$ ne soit pas fermé dans $\underline{\mathcal{D}}(X)$.

Exemple 1.6. — Soit $X = \mathbf{R}^2 - \{0\}$, dont le point courant est noté (x, y). On considère le champ de vecteurs $L_o = \frac{\partial}{\partial y}$ sur X, et l'algèbre de Lie (de dimension 1) $\mathcal{L} = \mathbf{R}L_o$. Les courbes intégrales maximales de L_o, qui sont les droites verticales $\{x\} \times \mathbf{R}$, avec $x \neq 0$ et les deux demi-droites $F_+ = \{0\} \times]0, +\infty[$ et $F_- = \{0\} \times]-\infty, 0[$, définissent un feuilletage $\mathcal{F}$ de X qui est simple mais non séparé.



L'espace des divergences usuelles, c'est-à-dire l'image de $L_o \; : \; \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(X)$ n'est pas fermé dans $\mathcal{D}(X)$. Pour le voir on peut opérer ainsi : soit f une fonction de $\mathcal{D}(\mathbf{R}$ plate en zéro, strictement positive en tout autre point de $]-1, +1[$ et nulle en dehors de cet intervalle; soit g une fonction de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ strictement positive sur $]1, 2[$ et nulle en dehors. Considérons les fonctions $h, \overline{h}$, et k respectivement définies par $h(x, y) = f(x)g(y)$, $\overline{h}(x, y) = h(x, -y)$ et $k = h - \overline{h}$.

La fonction f étant plate en zéro, il existe une suite régularisante (u_n) dans $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, telle que;

- pour tout n, il existe un intervalle ouvert de centre zéro sur lequel $u_n = 1$;

- la suite $(u_n f)$ converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\mathbf{R})$. ([Ma]).

Les u_n étant considérées comme les fonctions sur $\mathbf{R}^2$, indépendantes de y, la suite $((1 - u_n)k)$ converge vers k dans $\mathcal{D}(X)$, et pour tout n, $(1 - u_n)k$ a son support dans l'ouvert U constitué des couples (x, y) avec $x \neq 0$. En outre, pour tout n, on a, vue la définition de k (fonction impaire de y) :

$$\int_{\mathbf{R}} ((1 - u_n)k)dy = (1 - u_n)(x) \int_{\mathbf{R}} k(x, y)dy = 0.$$

Il en résulte que $\big((1 - u_n)k\big)$ est dans $\mathrm{div}(\mathcal{L}, U)$ donc dans $\mathrm{div}(\mathcal{L}, X)$, car il est connu qu'une fonction v de $\mathcal{D}(U)$ qui vérifie $\int_{\mathbf{R}} v(x, y)dy = 0$, s'écrit $v(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y}(x, y)$ avec w dans $\mathcal{D}(U)$.

Mais $\underline{k}$ elle-même n'est pas dans $\mathrm{div}(\mathcal{L}, X)$; en effet si tel est le cas, on peut écrire $k(x, y) = \frac{\partial \ell}{\partial y}(x, y)$ avec ℓ dans $\mathcal{D}(X)$; le support de ℓ étant un compact de X, il existe a tel que $o < a < 1$ et $\ell(x, y) = o$ pour $\max(|x|, |y|) \leq a$. Dès lors :

$$\int_a^{+\infty} k(a, y)dy = \int_a^{+\infty} \frac{\partial \ell}{\partial y}(a, y)dy = 0$$

Mais on a aussi :

$$\int_a^{+\infty} k(a,y)dy = \int_a^{+\infty} h(a,y)dy = \int_1^2 f(a)g(y)dy$$

et cette dernière intégrale est strictement positive. Ainsi $\mathrm{div}(\mathcal{L},X)$ n'est pas fermé. Par ailleurs, la donnée de la forme différentielle usuelle $dx\Lambda dy$, et de l'orientation canonique de X, définit une forme volume $\mathcal{L}$-invariante ς sur X, de telle sorte que l'application $\phi \to \phi\varsigma$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}(X)$ sur $\underline{\mathcal{D}}(X)$ qui induit un isomorphisme de $\mathrm{div}(\mathcal{L},X)$ sur $\underline{\mathrm{div}}(\mathcal{L},X)$. L'espace des divergences tordues $\underline{\mathrm{div}}(\mathcal{L},X)$ n'est donc pas fermé dans $\underline{\mathcal{D}}(X)$.

Exemple 1.7. — Sur la même variété X que ci-dessus, considérons l'algèbre de Lie $\mathcal{L}'$ (de dimension 2) engendrée par les deux champs de vecteurs :

$$L_1 = y\frac{\partial}{\partial y};\ L_2 = x\frac{\partial}{\partial y}$$

Soient ϕ dans $\mathcal{D}(X)$ et (comme plus haut) ς la forme tordue définie sur X par la donnée de la forme usuelle $dx\Lambda dy$ et de l'orientation canonique de X; alors $\omega = \phi\varsigma$ est un élément de $\underline{\mathcal{D}}(X)$ et il est facile de vérifier que ω est une $\mathcal{L}'$-divergence si et seulement si ϕ est une $\mathcal{L}$-divergence; il en résulte, grâce à l'exemple précédent, que $\underline{\mathrm{div}}(\mathcal{L}',X)$ n'est pas fermé dans $\underline{\mathcal{D}}(X)$. Par contre $\mathrm{div}(\mathcal{L}',X)$ est fermé dans $\mathcal{D}(X)$. On démontre en effet, de façon élémentaire, que les deux feuilles inséparables F_+ et F_- portent respectivement des mesures $\mathcal{L}'$-invariantes non nulles μ_+ et μ_-, que l'espace des distributions $\mathcal{L}'$-invariantes sur X est engendré par μ_+ et μ_- (il est donc de dimension 2) et que $\mathrm{div}(\mathcal{L}',X)$ est exactement l'ensemble des ϕ dans $\mathcal{D}(X)$ telles que $<\phi,\mu_+>=<\phi,\mu_->=0$ (il est donc fermé dans $\mathcal{D}(X)$) (voir [Ba], Ch.IV, 6.4, p.38).

1.8. — La distinction entre les divergences usuelles et les divergences tordues est donc nécessaire en général et la séparation ou non séparation de l'espace des feuilles $\mathcal{F}$ se "voit" sur l'espace des divergences tordues et non pas sur celui des divergences usuelles. Toutefois, il y a une situation (dont l'exemple 1.6 est une illustration) où cette distinction est inutile. Supposons en effet qu'il existe sur X une *forme volume tordue $\mathcal{L}$-invariante* ς; alors l'application $\phi \to \phi\varsigma$ induit un isomorphisme de $\mathrm{div}(\mathcal{L},X)$ sur $\underline{\mathrm{div}}(\mathcal{L},X)$, et fournit par transposition un isomorphisme de l'espace des fonctions généralisées $\mathcal{L}$-invariantes sur celui des distributions $\mathcal{L}$-invariantes. Une transcription du théorème 1.5. donne donc :

COROLLAIRE 1.9. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage simple sur X. Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie de champs de vecteurs sur X, définissant $\mathcal{F}$, et admettant une* *forme volume tordue $\mathcal{L}$-invariante. Alors* $\operatorname{div}(\mathcal{L}, X)$ *est fermé dans* $\mathcal{D}(X)$ *si et seulement si* $\mathcal{F}$ *est séparé.*

Dans le paragraphe 2, on indiquera ce qui se passe dans le cas où $\mathcal{F}$ est séparée (les démonstrations détaillées se trouvent dans [Ba] Ch.III). Dans le paragraphe 3, on présentera l'essentiel de la démonstration du théorème. On notera que dans [Ba], figurait déjà le corollaire 1.9. ci-dessus (sous une hypothèse supplémentaire portant sur $\mathcal{F}$). On voit qu'il apparaît ici comme une simple conséquence du théorème 1.5., bien plus général et plus net. Signalons toutefois que la démonstration proposée ici est largement inspirée de celle donnée dans [Ba], (Chapitre IV, 5.11) au moins dans sa première partie, où on construit une forme ω qui est limite de divergences tordues; elle s'en écarte ensuite pour démontrer que cette forme ω *n'est pas* une divergence.

2. Cas d'un feuilletage simple séparé

2.1. — Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage simple sur X et soit $\pi : X \to \mathcal{F}$ la submersion canonique de X sur $\mathcal{F}$. Supposons dorénavant que $\mathcal{F}$ soit *séparée*. On dispose alors de l'application *image directe* des formes tordues $\underline{\pi} : \underline{\mathcal{D}}(X) \to \underline{\mathcal{D}}(\mathcal{F})$, qui est définie de la manière suivante :

$$< \underline{\pi}(\omega), \psi >= \int_X (\psi \circ \pi)\omega \quad (\omega \in \mathcal{D}(X), \psi \in C^\infty(\mathcal{F}))$$

On sait que $\underline{\pi}$ est linéaire, continue et surjective ([Sch], Ch.IX, §5). On a alors ([Ba],Ch.III,p.21) :

PROPOSITION 2.2.— *Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie de champs de vecteurs, définissant $\mathcal{F}$. Alors l'espace des divergences tordues* $\underline{\operatorname{div}}(\mathcal{L}; X)$ *est exactement le noyau de l'application image directe $\underline{\pi}$ (en particulier, il est fermé dans $\underline{\mathcal{D}}(X)$).*

2.3. — Considérons deux formes volumes tordues ς et η respectivement sur X et $\mathcal{F}$; les identifications qui en résultent, de $\mathcal{D}(X)$ avec $\underline{\mathcal{D}}(X)$ et de $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ avec $\underline{\mathcal{D}}(\mathcal{F})$, permettent de définir une application notée $M_{\varsigma,\eta}$, ou plus simplement M, de $\mathcal{D}(X)$ sur $\mathcal{D}(\mathcal{F})$; par définition :

$$\underline{\pi}(\phi\varsigma) = M(\phi)\eta \qquad \phi \in \mathcal{D}(X)).$$

2.4. — Supposons en particulier qu'il existe sur X une forme volume impaire $\mathcal{L}$-invariante, et prenons pour ς ci-dessus une telle forme. Dans ces conditions le noyau de l'application $M : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(\mathcal{F})$, qu'on appellera *application moyenne* (sur les feuilles), est exactement l'espace $\operatorname{div}(\mathcal{L}, X)$ des divergences usuelles. En particulier, $\operatorname{div}(\mathcal{L}, X)$ est fermé dans $\mathcal{D}(X)$. De plus, pour tout y dans $\mathcal{F}$, la forme linéaire $\phi \to M\phi(y)$ "est" en fait une mesure Lebesquienne $\mathcal{L}$-invariante sur la feuille $F_y = \pi^{-1}(y)$. Le choix de ς $\mathcal{L}$-invariante et de η fixe donc sur chaque feuille F_y une mesure invariante ξ_y.

3. Le cas où $\mathcal{F}$ n'est pas séparé

3.1. — Supposons que la variété $\mathcal{F}$ ne soit pas séparée. On appellera ouvert régulier de X tout ouvert U de X qui est saturé ($U = \pi^{-1}(\pi(U))$ et dont l'image $\pi(U)$ dans $\mathcal{F}$ est un sous-espace séparé de $\mathcal{F}$. Alors X est réunion de ses ouverts réguliers *maximaux*, et chaque ouvert régulier maximal est dense dans X. On utilisera les résultats obtenus dans le cas "séparé", car pour tout ouvert régulier U, on dispose (les notations étant évidentes), de $\pi_U : U \to \pi(U)$, et de l'application image directe des formes $\underline{\pi}_U : \underline{\mathcal{D}}(U) \to \mathcal{D}(\pi(U))$, de sorte que les résultats énoncés dans 2 ci-dessus restent valables.

3.2. — On appellera *ouvert distingué* de X tout ouvert U de X sur lequel peut-être défini un difféomorphisme $\phi : U \to I^m \times I^{n-m}$ (où I est un intervalle non vide de $\mathbf{R}$), ce difféomorphisme ayant les deux propriétés suivantes :

i) Les "plaques" $\phi^{-1}(I^m \times y)$, y parcourant I^{n-m}, sont les feuilles du feuilletage de U induit par $\mathcal{F}$.

ii) $F \cap U$ est connexe, pour toute feuille F du feuilletage $\mathcal{F}$.

On notera que l'hypothèse faite, suivant laquelle le feuilletage $\mathcal{F}$ est simple (ou de façon équivalente : $\mathcal{F}$ est une variété différentielle et $\pi : X \to \mathcal{F}$ est une submersion) s'exprime encore en disant que tout point de X admet un voisinage ouvert distingué dans X.

3.3. — Soit U un ouvert distingué de X. Le saturé de U, $(Sat(U))$, est un ouvert régulier W de X; on peut donc considérer l'application image des formes $\underline{\pi}_W : \underline{\mathcal{D}}(W) \to \underline{\mathcal{D}}(\pi(U))$; on désignera par $\underline{\pi}_U$ la restriction de $\underline{\pi}_W$ à $\underline{\mathcal{D}}(U)$. Cette application $\underline{\pi}_U$ peut être écrite en coordonnées locales : si (x, y) est le système de coordonnées locales sur U, associé à un difféomorphisme Φ ayant les propriétés indiquées dans 3.2, on aura :

$$\underline{\pi}(\phi(x,y)dx \wedge dy) = \left(\int \phi(x,y)dx\right)dy$$

Pour des raisons de commodité, on va choisir et fixer une fois pour toutes une forme volume tordue ς sur X; sur les deux ouverts $Sat(U)$ et $\pi(U)$ se trouvent donc la forme restriction de ς et dy respectivement; d'où une application moyenne M associée (voir 2.3) au choix de ces deux formes; précisément si $\varsigma = f(x,y)dx \wedge dy$ dans U et si ϕ appartient à $\mathcal{D}(U)$, on aura :

$$M\phi(y) = \int \phi(x,y)\ f(x,y)dx$$

3.4. — Soit U et $\Phi\ :\ U \to I^m \times I^{n-m}$ comme ci-dessus. On appellera sous-cube de U tout sous-ensemble de U qui est de la forme $\Phi^{-1}(J^n \times J^{n-m})$ où J est un sous-intervalle ouvert de I tel que $\overline{J} \subset I$. On peut maintenant énoncer le lemme fondamental, qu'on a appelé le lemme de glissement parce qu'il fait "glisser" des formes impaires d'un ouvert V à un autre ouvert U.

LEMME 3.5.— *Soient V un ouvert régulier de X, U un ouvert distingué de X, et Z un sous-cube de U, relativement compact dans X, tel que $Z \subset \overline{Z} \subset U$. On suppose donnée sur $\pi(V)$ une suite $(\omega_k)_k$ de formes C^∞ impaires à support compact telle que :*

i) Pour chaque k, le support ω_k est inclus dans $\pi(V) \cap \pi(Z)$.

ii) La suite (ω_k) converge dans $\underline{\mathcal{D}}(\pi(V))$.

Alors il existe une suite $(\gamma_k)_k$ d'éléments de $\underline{\mathcal{D}}(X)$ telle que :

a) Pour chaque k, le support de γ_k est inclus dans $U \cap V$.

b) La suite (γ_k) converge dans $\underline{\mathcal{D}}(U)$

c) Pour chaque k, on a $\underline{\pi}_V(\gamma_k) = \omega_k$.

Démonstration.— 1) On prolonge naturellement ω_k en une forme $\widetilde{\omega}_k$ sur $\pi(U)$; la suite $(\widetilde{\omega}_k)$ converge dans $\underline{\mathcal{D}}(\pi(U))$, les supports des $\widetilde{\omega}_k$ étant tous inclus dans $\pi(\overline{Z})$. On fixe un difféomorphisme $\Phi : U \to I^n \times I^{n-m}$ et on note (x,y) le système de coordonnées sur U, qui lui est associé; on écrit, pour chaque k, $\widetilde{\omega}_k = \phi_k(y)dy$, avec ϕ_k dans $\mathcal{D}(\pi(U))$, et on pose $\psi_k = \phi_k \circ \pi$, ce qui définit une suite (ψ_k) de fonctions sur le saturé U' de U.

2) Soit $M\ :\ \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(\pi(U))$ l'application moyenne (voir 3.3). On choisit une fonction ρ dans $\mathcal{D}(U)$ telle que $M\rho(x) = 1$ pour x dans $\pi(\overline{Z})$; alors $\theta_k = \rho\psi_k$ appartient à $\mathcal{D}(U)$ et $M\theta_k = \phi_k$; la suite (θ_k) converge dans $\mathcal{D}(U)$, les supports des θ_k étant tous contenus dans le support de ρ; on pose enfin $\gamma_k = \theta_k\varsigma$, ce qui définit une suite convergente d'éléments de $\underline{\mathcal{D}}(U)$, et il est immédiat que $\underline{\pi}_{U'}\ (\gamma_k) = \widetilde{\omega}_k$.

3) Il reste à voir que le support de γ_k (ou de θ_k) est inclus dans $U \cap V$; pour cela, on remarque que si $\psi_k(x) \neq 0$, nécessairement $\pi(x)$ appartient au support de la forme w_k; donc le support de θ_k est inclus dans l'image réciproque par π du support de ω_k, laquelle image réciproque est incluse dans V par hypothèse. Vu la définition de l'application image directe des formes, il en résulte que $\underline{\pi}_V(\gamma_k) = \omega_k$.

THÉORÈME 3.6.— *Soient $\mathcal{F}$ un feuilletage simple non séparé sur X et $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie de champs de vecteurs sur X qui définit le feuilletage $\mathcal{F}$. Alors $\underline{\mathrm{div}}(\mathcal{L}, X)$ n'est pas fermé dans $\underline{\mathcal{D}}(X)$.*

Démonstration.— 1) Soient F_1 et F_2 deux feuilles qui ne se séparent pas dans $\mathcal{F}$. On choisit deux ouverts réguliers maximaux U_1 et U_2. Notez qu'alors F_2 est dans la frontière de U_1.

a) Soit p_1 (resp. p_2) un point de F_1 (resp. F_2). On fixe d'abord deux voisinages ouverts distingués U et W respectivement de p_1 et p_2, relativement compacts dans X, et dont les adhérences $\overline{U}$ et $\overline{W}$ sont disjointes et contenues respectivement dans U_1 et U_2. On fixe ensuite deux sous-cubes de U et W, notés respectivement Z et Y, tels que $Z \subset \overline{Z} \subset U$ et $Y \subset \overline{Y} \subset W$.

Soit E le fermé de W, complémentaire dans W de $W \cap Sat(Z)$. Grâce à [TOU] (p.113, lemme 6.1) on dispose d'une fonction f de classe C^∞ sur W, qui est *plate* sur E et strictement positive sur $W \cap Sat(Z)$. Soit maintenant g dans $\mathcal{D}(W)$, nulle en dehors de $\overline{Y}$ et strictement positive sur Y. La fonction $h = fg$ est plate sur E, strictement positive sur $Y \cap Sat(Z)$ et son support est inclus dans $\overline{Y}$. On notera pour un usage ultérieur que $F_2 \cap \overline{Y}$ est contenu dans le support de h.

b) La fonction h étant plate sur $\overline{Y} \cap E$, qui est un compact de W, on peut ([Ma], page 11) introduire une suite (u_k) de fonctions C^∞ sur W telle que :

- La suite (hu_k) converge vers zéro dans $\mathcal{D}(W)$.
- Pour chaque k, il existe un voisinage ouvert de $\overline{Y} \cap E$ dans W sur lequel u_k vaut 1.

c) La dernière propriété de (u_k) permet de voir que le support de $h - hu_k = h(1 - u_k)$ est contenu dans U_1 (une feuille de la frontière de U_1 qui rencontre le support de $h(1 - u_k)$ rencontre $\overline{Y} \cap E$).

d) Le saturé V de W est un ouvert régulier. Posons : $\omega_k = \underline{\pi}_V(h(1-u_k)\varsigma)$ (où ς est la forme volume fixée sur X), et fixons une forme volume η sur $\pi(V) = \pi(W)$, de sorte que $\omega_k = \psi_k \eta$, avec $\psi_k = M_{\varsigma,\eta}(h(1 - u_k))$. Du fait que le support de h est contenu dans $\overline{Y}$ et que u_k vaut 1 sur un voisinage de $\overline{Y} \cap E$, on en déduit que le support de ψ_k, ou encore celui de ω_k, est contenu dans $\pi(V) \cap \pi(Z)$.

e) La suite (ω_k) converge dans $\underline{D}(\pi(V))$ vers $\underline{\pi}_V(h.\varsigma)$, puisque h est limite de la suite $h(1-u_k)$ dans $\mathcal{D}(W)$. On peut donc appliquer le lemme de glissement (3.5), et disposer d'une suite d'éléments γ_k, convergente dans $\underline{D}(U)$, et telle que :

- Pour chaque k le support de γ_k est contenu dans $U \cap V$.

- $\underline{\pi}_V(\gamma_k) = \omega_k$.

f) On pose $\gamma = \lim \gamma_k$, $(\gamma \in \underline{D}(U))$, $\alpha = h\varsigma$, $\alpha \in \underline{D}(W)$ et le support de α est contenu dans $\overline{Y}$ et enfin $\omega = \alpha - \gamma$. Comme $\alpha = \lim h(1-u_k)\varsigma$, on voit que $\omega = \lim(h(1-u_k)\varsigma - \gamma_k)$, la limite étant prise dans $\underline{D}(X)$. Mais, pour chaque k, le support de $h(1-u_k)$ est contenu dans V, et par suite la forme $h(1-u_k)\varsigma - \gamma_k$ appartient à $\underline{D}(V)$; par ailleurs $\underline{\pi}_V(h(1-u_k)\varsigma - \gamma_k) = 0$ par construction de γ_k ; donc $h(1-u_k)\varsigma - \gamma_k$ appartient à $\underline{\mathrm{div}}(\mathcal{L}; X)$ d' après 2.2 et appartient à l'adhérence de $\underline{div}(\mathcal{L}; X)$ dans $\underline{D}(X)$.

g) Il reste à montrer que ω n'est pas une divergence. On raisonne par l'absurde. Si ω est dans $\underline{\mathrm{div}}(\mathcal{L}, X)$ alors ω est évidemment dans $\underline{\mathrm{div}}(\mathcal{L}, C)$, où C est un ouvert qui est réunion finie d'ouverts réguliers maximaux : $U_1, U_2, U_3, \cdots, U_s$. Considérons un voisinage ouvert (non saturé) de F_2 dans U_2 tel que son adhérence dans X soit inclus dans U_2 et qui soit disjoint de U. (Ceci est possible car F_2 et $\overline{U}$ sont deux fermés disjoints, l'un étant dans U, l'autre dans la frontière de U_1). Soit L ce voisinage. Posons : $L' = L \cup W$, et pour tout i de 1 à s, et $i \neq 2$, $U_i' = U_i - \overline{L'}$. Comme $\overline{L'}$ est dans U_2, on peut dire que ω est dans $\underline{\mathrm{div}}(\mathcal{L}, D)$, où D est l'ouvert réunion de $U_1', U_2, U_3', \cdots, U_s'$. On peut donc écrire $\omega = \omega_1' + \omega_2' + \cdots + \omega_s'$, avec pour tout i de 1 à s, $i \neq 2$, $\omega_i' \in \underline{D}'(U_i' \cap \underline{\mathrm{div}}(\mathcal{L}, X)$, et $\overline{\omega}_2' \in \underline{\mathrm{div}}(\mathcal{L}, U_2)$. Vue la définition des U_i', on a : $\omega = \omega_2'$ dans L'. D'autre part on a vu que $\omega = \alpha - \gamma$, et le support de γ est dans U ; donc, puisque U et L' sont disjoints, on a : $\omega = \alpha$ dans L', et par suite : $\alpha = \omega_2'$ dans L'. Considérons le complémentaire de L' dans U_2 et notons K_2 le compact qui est l'intersection du support de ω_2' et de ce complémentaire. Alors $F_2 \cap K_2$ est vide, et comme U_2 est un ouvert régulier et maximal, il existe un ouvert saturé dans U_2 (donc dans X), contenant F_2 et disjoints de K_2. Soit G cet ouvert. Il est immédiat de voir que sur cet ouvert : $\omega_2' = \alpha$. Or pour y dans $\pi(G)$, on a :

$$\underline{\pi}_{U_2}(\alpha)(y) = (M_V h)(y)\eta_V(y),$$

et comme $F_2 \cap \overline{Y}$ est dans le support de h, pour des points y arbitrairement proches de $\pi(F_2)$ on a : $(M_V h)(y) \neq 0$, car $M_V h(y) = \int_{\pi^{-1}(y)} h(x,y)f(x,y)dx$, (3.3), et on a vu en 1) (a), que h est strictement positive sur $\pi^{-1}(y) \cap W$. Mais d'autre part, $\underline{\pi}_{U_2}(\omega_2') = 0$ car ω_2' est dans $\underline{\mathrm{div}}(\mathcal{L}, U_2)$ (2.2). La contradiction ne peut être levée qu'en disat que ω n'est pas dans $\underline{\mathrm{div}}(\mathcal{L}, X)$.

Remarque 3.7.— En utilisant à la fois la proposition 2.2 et le théorème 3.6, on obtient les énoncées suivants, pour une variété X munie d'un feuilletage simple $\mathcal{F}$:

i) L'espace des feuilles $\mathcal{F}$ est séparé si et seulement si, pour, tout algèbre de Lie $\mathcal{L}$ de champs de vecteurs définissant $\mathcal{F}$, l'espace $\underline{\mathrm{div}}(\mathcal{L}, X)$ est fermé dans $\underline{\mathcal{D}}(X)$.

ii) L'espace des feuilles $\mathcal{F}$ est non séparé si et seulement si, pour toute algèbre de Lie $\mathcal{L}$ de champs de vecteurs définissant $\mathcal{F}$, l'espace $\underline{\mathrm{div}}(\mathcal{L}, X)$ n'est pas fermé dans $\underline{\mathcal{D}}(X)$.

Références

[Ba] BARRA (R.).— *Distributions invariantes* Thèse de Doctorat d'Etat. n°401. Université de Poitiers.

[Fe 1] FELIX (R.).— *Solvability of differential equations with linear coefficients of nilpotent type* (à paraître dans Proc. Amer. Math. Soc.).

[Fe 2] FELIX (R.).— *Solvability of differential equations with linear coefficients of real type* (à paraître).

[Hae] HAEFLIGER (A.).— Variétés feuilletée, *Ann. Scuola Norm. Pisa*, t. **16**, 1962, p. 367-379.

[Ma] MALGRANGE (B.).— *Ideals of differentiable functions.*— Oxford University Press, 1966.

[Tou] TOUGERON (J.C.).— *Idéaux de fonctions différentiables* Ergeb. der Math. **71** Springer-Verlag 1972.

(Manuscrit reçu le 18 mars 1986)