ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

STÉPHANE MAINGOT

Sur l'extension des fonctions C R

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 7, nº 3-4 (1985), p. 251-289
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1985_5_7_3-4_251_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol VII, 1985, P 251 à 289

SUR L'EXTENSION DES FONCTIONS C R

Stéphane Maingot *(1)*

(1) Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay Mathématiques Bt 425 - 91405 Orsay Cédex.

Résumé : Dans cette thèse, on considère M, une sous-variété C R de C^N, passant par 0 et on donne des conditions suffisantes, liées à la forme de Levi en 0, pour que toute fonction C R sur ω, un voisinage ouvert de 0 dans M, soit la restriction à ω d'une fonction holomorphe au voisinage de 0 dans C^N.

La méthode utilisée consiste en la construction de disques analytiques dont le bord est sur M et qui contiennent un voisinage de 0 dans C^N, d'abord dans un cas modèle puis dans le cas général par approximations.

Summary : In this thesis, we consider M, a C R submanifold of $\mathbb{C}^N$, which passes through 0, and, we give sufficient conditions, related to the Levi form at the origin, so that each C R function on ω, an open neighborhood of 0 in M, is the restriction to ω of a holomorphic function defined on an open neighborhood of 0 in $\mathbb{C}^N$.

The method used is to construct analytic discs whose boundaries lie on M and which contain a neighborhood of 0 in $\mathbb{C}^N$, first in a model case, then in the general case by approximations.

1. - INTRODUCTION

M étant une sous-variété CR, C^∞, de $\mathbb{C}^N$ et p un point de M, on cherche à quelles conditions M est localement CR prolongeable au voisinage de p.

On rappelle qu'une fonction CR sur un ouvert de M est une fonction qui, sur cet ouvert, s'annule sur les champs de vecteurs anti-holomorphes tangents à M.

M est localement CR prolongeable au voisinage de p, si pour tout voisinage ouvert ω de p dans M, il existe un voisinage ouvert Ω de p dans $\mathbb{C}^N$ tel que, pour toute fonction f continue CR sur ω il existe une unique fonction F holomorphe sur Ω avec $F = f$ sur $\omega \cap \Omega$.

Les conditions cherchées sont liées à la forme de Lévi au point p, L_p.

Dans le cas d'une hypersurface réelle S de $\mathbb{C}^N$, Hans Lewy a montré, le premier, que si L_o n'était pas identiquement nulle, alors toute fonction f CR suffisamment régulière sur un voisinage ω de o dans S, s'étendait à une fonction F holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^N$, reposant sur un côté de S, c'est-à-dire que $\omega \cap \bar{\Omega}$ est un voisinage de o dans S et $F = f$ sur $\omega \cap \bar{\Omega}$ (pour le cas $N = 2$ voir [8], pour $n > 2$ voir [7] et [10]).

De plus, si l'image de L_o est tout $\mathbb{R}$ alors S est localement CR prolongeable au voisinage de o (extension des deux côtés de S).

Ce théorème de Hans Lewy a été généralisé à des sous-variétés CR, C^∞, de $\mathbb{C}^N$, M, de codimension plus grande, ainsi le théorème 1.2 dans [5] : si l'enveloppe convexe de l'image de L_o est tout $N_o(M)$ ($N_o(M)$ est l'orthogonal, dans $\mathbb{R}^{2N}$, de l'espace tangent réel à M en o), alors M est localement CR prolongeable au voisinage de o.

Considérons maintenant le cas où L_o est nulle. On sait déjà que si L_p est identiquement nulle pour tout p de M alors il n'y a pas d'extension CR locale possible [11]. Néanmoins on peut montrer que, sous certaines conditions, M est localement CR prolongeable au voisinage de o. Pour préciser, supposons que M est donnée au voisinage de 0 par $\rho(z,w) = o$ où : $(z,w) = (z_1,\dots,z_n,w_1,\dots,w_d)$ sont les coodonnées dans $\mathbb{C}^N$

$$w = u + iv$$
$$\rho : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}^d \quad C^\infty$$

et $\rho(z,w) = v - h(z,u)$ avec $h(o) = o$ et $dh(o) = o$.

Si la forme de Lévi en o, s'annule c'est-à-dire ici $\dfrac{\partial^2\rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(o) = o$ pour j et k dans $\{1,\dots,n\}$ et si l'espace engendré par $\left\{ \operatorname{Re} \sum_{j,k,\ell=1}^{n} \dfrac{\partial^3\rho}{\partial z_j \partial z_k \partial \bar{z}_\ell}(o)\, z_j z_k \bar{z}_\ell \,,\ z \in \mathbb{C}^n \right\}$ est tout $\mathbb{R}^d$ alors M est localement CR prolongeable au voisinage de o. Ce théorème a été démontré par Al Boggess (théorème 1.1 dans [4]).

La seconde hypothèse entraîne que les $\dfrac{\partial^3 \rho}{\partial z_j \partial z_k \partial \bar{z}_\ell}$ (o) sont non tous nuls. Ici on va justement s'intéresser au cas où non seulement $\dfrac{\partial^3 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}$ (o) = 0 mais aussi $\dfrac{\partial^{|\Theta|+|\gamma|}\rho}{\partial z^{\Theta}{}_{\mu} \bar{z}^{\gamma}}$ (o) = o pour tous les multiindices Θ, γ tels que $|\Theta| + |\gamma| \leqslant p-1$ (où p est un entier impair).

Dans ce cadre, en s'inspirant des méthodes, liées à la construction de disques analytiques, qu'utilise Al Boggess, on montrera un théorème d'extension CR (le théorème 2.2).

On peut voir aussi les travaux de Baouendi et Trèves sur les distributions CR, qui n'utilisent pas la méthode des disques analytiques [2].

Je tiens à remercier Monsieur Derridj, qui m'a aidé dans l'élaboration de ce travail, ainsi que les membres de l'équipe d'Analyse Complexe d'Orsay.

2. - DEFINITIONS, RAPPELS ET ENONCE DU THEOREME PRINCIPAL

Soit M une sous-variété CR, C^∞, de $\mathbb{C}^N$, de codimension d, passant par o, alors il existe un système de coordonnées dans $\mathbb{C}^N$, $(z,w) = (z_1,\dots,z_n,w_1,\dots,w_d)$ avec $w = u+iv$ tel que au voisinage de o, M soit donnée par $\rho(z,w) = o$ où :

$$\rho : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}^d \qquad C^\infty$$

$$(z,w) \to (\rho_1(z,w),\dots,\rho_d(z,w))$$

$$\rho_j(z,w) = v_j - h_j(z,u) \quad \text{et} \quad h_j(o) = o \quad dh_j(o) = o \qquad \forall j \in \{1,\dots,d\}$$

De plus, il existe $L_1,\dots,L_n$ n champs de vecteurs holomorphes tangents à M ; $T_1,\dots,T_d$ d champs réels tangents à M tels que : $(L_1,\dots,L_n,\bar{L}_1,\dots,\bar{L}_n,T_1,\dots,T_d)$ soit une base du complexifié de l'espace tangent à M, $\mathbb{C}TM$.

Notations 2.1. Posons $L_{n+s} = \bar{L}_s$ et $\partial z_{n+s} = \partial \bar{z}_s$ pour s dans $\{1,\dots,n\}$. Pour $I = (i_1,\dots,i_k) \in \{1,\dots,2n\}^k$ on pose

$$|I| = k$$

$$L_I = [L_{i_1},\dots[L_{i_{k-1}},L_{i_k}]\dots] \quad \text{où} \quad [L_j,L_r] = L_jL_r - L_rL_j$$

et $\dfrac{\partial^k h_j}{\partial z_I} = \dfrac{\partial^k h_j}{\partial z_{i_1}\dots\partial z_{i_k}}$ néanmoins pour $\Theta : (\Theta_1,\dots,\Theta_n) \in \mathbb{N}^n$ et $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n) \in \mathbb{N}^n$ $\dfrac{\partial^{|\Theta|+|\gamma|}\rho_j}{\partial z^\Theta \partial \bar{z}^\gamma}$

désignera, comme habituellement :

$$\frac{\partial^{|\Theta|+|\gamma|}\rho_j}{\partial z_1^{\Theta_1}\ldots z_n^{\Theta_n}\bar{z}_1^{\gamma_1}\ldots\bar{z}_n^{\gamma_n}}$$

avec $|\Theta| = \sum_{i=1}^{n} \Theta_i$ $|\gamma| = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$.

Enfin L désigne $(L_1,\ldots,L_n)$, $\bar{L}$ désigne $(\bar{L}_1,\ldots,\bar{L}_n)$ et $\{L,\bar{L}\}$ l'espace engendré L et $\bar{L}$.

Nous pouvons maintenant énoncer les deux hypothèses (H_1) et (H_2) dont nous avons besoin :

Il existe p un entier impair tel que

(H_1) si $|I| \leqslant p-1$ alors $L_I(o) \in \{L(o),\bar{L}(o)\}$

(H_2) Il existe $I_1,\ldots,I_d$ tels que $|I_1| = \ldots = |I_d| = p$ avec $L_{I_i} = \sum_{j=1}^{d} \gamma_{ij}\, T_j$ modulo $\{L,\bar{L}\}$ où $(\gamma_{ij})_{(i,j)\in\{1,\ldots,d\}^2}$ est inversible en o.

Le théorème principal que l'on veut démontrer est le suivant :

THEOREME 2.2. *Soit* M *une sous-variété* CR, C^∞, *de* $\mathbb{C}^N$ *de codimension* d, *passant par* o. *Si* M *vérifie les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *alors* M *est localement* CR *prolongeable au voisinage de* o.

Remarque 2.3. En corollaire de ce théorème on obtient un théorème analogue en remplaçant o par un point z quelconque, il suffit d'envoyer z en o par un biholomorphisme local.

Remarque 2.4. Le couple d'hypothèses (H_1,H_2) ne dépend pas de la base de CTM choisie.

La méthode utilisée ici pour démontrer le théorème 2.2 est la méthode de construction de familles de disques analytiques due à Bishop [3] , on va donc énoncer quelques résultats classiques sur les disques analytiques.

DEFINITIONS 2.5. Soit Λ un ensemble de paramètres dans $\mathbb{R}^{2N}$, $D = \{\zeta \in \mathbb{C} \ ; |\zeta| < 1\}$, $\partial D = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$.

Si $\varphi : \bar{D} \to \mathbb{C}^m$ est continue sur $\bar{D}$ et holomorphe dans D on dit que φ est un disque analytique, dans ce cas $\varphi_{|\partial D}$ est appelé le bord du disque.

Si $\varphi : \Lambda \times \bar{D} \to \mathbb{C}^m$ est continue sur $\Lambda \times \bar{D}$ et si pour tout t dans Λ ; $\varphi(t,.)$ est un disque analytique alors φ est appelée famille de disques analytiques et $\varphi_{|\Lambda \times \partial D}$ est appelée le bord de la famille.

On confondra souvent le disque analytique et son image dans $\mathbb{C}^m$, ainsi on dira qu'une famille de disques analytiques $\varphi : \Lambda \times \bar{D} \to \mathbb{C}^m$ a son bord sur ω si $\varphi(\Lambda \times \partial D) \subset \omega$ et contient Ω si $\varphi(\Lambda \times \bar{D}) \supset \Omega$.

THEOREME 2.6. *(Voir les théorèmes 2.1 et 2.2 dans [4]). Si pour tout voisinage ω de* o *dans* M, *il existe une famille de disques analytiques dont le bord est sur ω, et, qui contient un voisinage ouvert de* o *dans $\mathbb{C}^N$ alors* M *est localement* CR *prolongeable au voisinage de* o.

Pour démontrer le théorème 2.2 il suffit donc de démontrer le théorème suivant.

THEOREME 2.7. *Soit* M *une sous-variété* CR, C^∞, *de $\mathbb{C}^N$ passant par* o *et vérifiant* (H_1) *et* (H_2), *alors pour tout voisinage ω de* o *dans* M *on peut construire une famille de disques analytiques dont le bord est sur ω et qui contient un voisinage de* o *dans $\mathbb{C}^N$.*

La démonstration de ce théorème se fera en trois temps

- on construira d'abord explicitement une famille de disques analytiques à bord sur une variété modèle $\widetilde{M}$ associée à M, et qui contient un voisinage de o dans $\mathbb{C}^N$.

- on construira ensuite une famille de disques analytiques à bord sur M, en résolvant l'équation fonctionnelle de Bishop.

- on conclura en comparant les deux familles.

On va donc faire quelques rappels sur l'équation fonctionnelle de Bishop.

DEFINITION 2.8. *Soit* $f : \partial D \to \mathbb{R}^d$, C^∞, *alors il existe* $\widetilde{f} = (\widetilde{f}_1,\dots,\widetilde{f}_d) : \bar{D} \to \mathbb{R}^d$ *harmonique dans* D, *continue dans* $\bar{D}$ *telle que* $\widetilde{f} = f$ *sur* ∂D. *On définit* $g = Tf : \partial D \to \mathbb{R}^d$ *comme étant l'unique fonction valeur au bord de* $\widetilde{g} = (\widetilde{g}_1,\dots,\widetilde{g}_d)$ *où* $\widetilde{g}_i$ *est la conjuguée harmonique de* $\widetilde{f}_i$ *vérifiant* $\widetilde{g}_i(o) = o$.

Alors $-Tf + \sqrt{-1}\, f : \partial D \to \mathbb{C}^d$ est la valeur au bord d'un unique disque analytique $G : \bar{D} \to \mathbb{C}^d$ vérifiant $\operatorname{Re} G(o) = o$.

T est la transformée de Hilbert sur le disque et s'étend en un opérateur borné de $L^2(\partial D)$ dans $L^2(\partial D)$.

Remarque 2.9. M étant un voisinage de o par $v = h(z,u)$, supposons que l'on sache résoudre l'équation fonctionnelle de Bishop à savoir : pour $Z : \bar{D} \to \mathbb{C}^n$ un disque analytique, et, u une constante dans $\mathbb{R}^d$, il existe $U : \partial D \to \mathbb{R}^d$ telle que :

$$T(h(Z(\zeta),U(\zeta))) = u - U(\zeta) \qquad \forall\, \zeta \in \partial D$$

Alors $U + \sqrt{-1}\,h(Z,U) : \partial D \to \mathbb{C}^d$ est valeur au bord d'un disque analytique $G : \bar{D} \to \mathbb{C}^d$ avec $\operatorname{Re} G(o) = u$ et $A = (Z,G) : \bar{D} \to \mathbb{C}^N$ est un disque analytique dont le bord est sur M car

$$\operatorname{Im} G(\zeta) = h(Z(\zeta),U(\zeta)) = h(Z(\zeta), \operatorname{Re} G(\zeta))$$

pour tout ζ de ∂D.

La résolution de l'équation de Bishop permet donc la construction de disques analytiques A à bord dans M. Pour cette résolution on va utiliser les résultats obtenus par Hill et Taiaini [6] .

DEFINITION 2.10. Soit K un compact de $\mathbb{C}$, β un réel dans [0,1] on définit :

$$C_n^\beta(K) = \left\{ Z : K \to \mathbb{C}^n \; ; \; |Z|_\beta = \sup_{\zeta \in K} |Z(\zeta)| + \sup_{\zeta,\zeta' \in K} \frac{|Z(\zeta) - Z(\zeta')|}{|\zeta - \zeta'|^\beta} < \infty \right\}$$

$$\mathscr{D}_n^\beta = \left\{ Z : \bar{D} \to \mathbb{C}^n \; ; \; Z \in C_n^\beta(\bar{D}) \text{ et } Z \text{ holomorphe sur } D \right\}$$

$$\mathscr{P} = \mathscr{D}_n^\beta \times \mathbb{R}^d, \ \mathscr{P} \text{ est un espace de Banach}$$

avec la norme définie par $|(Z,u)|_{\mathscr{P}} = |Z|_\beta + |u|$ avec (Z,u) dans $\mathscr{P}$.

THEOREME 2.11. *(Théorème 5.1 b) dans* [6] *). Soit β dans*]0,1[*fixé,* B *un voisinage de* o *dans* $\mathscr{P}$*, il existe* $U : B \to C_d^\beta(\partial D)$*, continuement différentiable telle que :* $\forall\ (Z,u) \in B$, $U(Z,u)$ *est l'unique solution de l'équation de Bishop*

$$T(h(Z(\zeta),U(Z,u)(\zeta))) = u - U(Z,u)(\zeta)$$

pour tout ζ dans ∂D.

Remarque 2.12. Fixons $\beta \in\ ]0,1[$ pour toute la suite. $U(0,o) = 0$ d'après l'unicité de la solution. Or $|U(Z,u) - U(0,o) - U'(0,o)\,.\,(Z,u)|_\beta = 0(\,|(Z,u)|_{\mathscr{P}})$. Donc quitte à restreindre B on a :

$$|U(Z,u)|_\beta < c(\,|Z|_\beta + |u|\,) \tag{2.13}$$

pour tout (Z,u) dans B, c étant une constante positive.

3. - PROPOSITIONS PRELIMINAIRES

LEMME 3.1. M *étant donnée comme précédemment, par* $\rho(z,w) = o$ *avec* $\rho(z,w) = v-h(z,u)$, n C^∞, $h(o) = o$ *et* $dh(o) = o$, *si* $\dfrac{\partial^{|\alpha|}\rho}{\partial z^\alpha}(o) = o$ *pour tout* α *dans* $\mathbb{N}^n$ *tel que* $|\alpha| \leqslant k$ *alors il existe un changement de variable holomorphe* ϕ *qui envoie* o *en* o, *tel que dans les nouvelles variables* $(\hat z,\hat w)$, M *soit donnée par* $\hat\rho(\hat z,\hat w)=\hat v-\hat h(\hat z,\hat w)=0$ *ou* $\hat h$ *est* C^∞, $\hat h(o) = o$, $d\hat h(o) = o$ *et* $\dfrac{\partial^{|\alpha|}\hat\rho}{\partial \hat z^\alpha}(o) = o$ *pour tout* α *dans* $\mathbb{N}^n$ *tel que* $|\alpha| \leqslant k+1$.

Démonstration. Faisons un développement à l'ordre k+1 de h, on obtient alors

$$h(z,u) = \sum_{|\Theta|+|\gamma|\leqslant k+1} a_{\Theta\gamma}\, z^\Theta\, z^\gamma + R(z,u)$$

où

$$R(z,u) = \sum_{\substack{|\alpha|=1\\ |\Theta|+|\gamma|=1}} f_{\alpha,\Theta,\gamma}(z,u) u^\alpha z^\Theta z^\gamma + \sum_{|\alpha|=2} g_\alpha(z,u)\, u^\alpha$$

$$+ \sum_{|\Theta|+|\gamma|=k+2} \ell_{\Theta,\gamma}(z,u)\, z^\Theta\, \bar z^\gamma \quad \text{où } f_{\alpha,\Theta,\gamma}, g_\alpha \text{ et } \ell_{\Theta,\gamma} \text{ sont } C^\infty$$

$$h(z,u) = \sum_{\substack{|\Theta|+|\gamma|\leqslant k+1\\ |\Theta|\neq o \quad |\gamma|\neq o}} q_{\Theta\gamma}\, z^\Theta\, \bar z^\gamma + \operatorname{Re} Q(z) + R(z,u)$$

où Q est un polynôme, homogène de degré k+1, holomorphe (homogène car $\dfrac{\partial^{|\alpha|} h}{\partial z^\alpha}(o) = o$ pour tout α tel que $|\alpha| \leqslant k$) faisons le changement de variables, holomorphe, suivant $\phi(z,w) = (\hat z,\hat w)$ où :

$$\hat z = z$$

$$\hat w = w - iQ(z)$$

et posons $\hat\rho(\hat z,\hat w) = \rho \circ \phi^{-1}(\hat z,\hat w) = \rho(z,w)$ on a $\hat v = v - \operatorname{Re} Q(z)$ et $u = \hat u - \operatorname{Im} Q(\hat z)$ donc

$$\hat\rho(\hat z,\hat w) = \hat v - \sum_{\substack{|\Theta|+\gamma|\leqslant k+1\\ |\Theta|\neq o \quad |\gamma|\neq o}} a_{\Theta\gamma}\, \hat z^\Theta\, \bar{\hat z}^\gamma - \hat R(\hat z,\hat u)$$

où

$$\hat R(\hat z,\hat u) = R(z,u)$$

$$= \sum_{\substack{|\Theta|=1\\ |\Theta|+|\gamma|=1}} f_{\alpha,\Theta,\gamma}(\hat z,\hat u)\, (\hat u - \operatorname{Im} Q(\hat z))^\alpha\, \hat z^\Theta\, \bar{\hat z}^\gamma$$

$$+ \sum_{|\alpha|=2} \hat{g}_\alpha(\hat{z},\hat{u})(\hat{u} - \operatorname{Im} Q(\hat{z}))^\alpha$$

$$+ \sum_{|\Theta|+|\gamma|=k+2} \hat{\ell}_{\Theta,\gamma}(\hat{z},u)\, \hat{z}^\Theta \bar{\hat{z}}^\gamma$$

$\hat{f}_{\alpha,\Theta,\gamma} = f_{\alpha,\Theta,\gamma} \circ \phi^{-1}$, $\hat{g}_\alpha = g_\alpha \circ \phi^{-1}$, $\hat{\ell}_{\Theta\gamma} = \ell_{\Theta\gamma} \circ \phi^{-1}$ sont C^∞.

Q étant un polynôme homogène de degré k+1 on a immédiatement $\dfrac{\partial^{|\alpha|}\hat{\rho}}{\partial z^\alpha}(o) = o$ pour tout α tel que $|\alpha| \leqslant k+1$.

Remarque 3.2. On pourra donc considérer que M est donnée au voisinage de o par $\rho(z,w) = o$ avec

$$\frac{\partial^{|\alpha|}\rho}{\partial z^\alpha}(o) = 0 \quad \forall\, \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leqslant p$$

$$\rho(z,w) = v - h(z,u)$$

$$h(o) = o \quad dh(o) = o \quad h \ C^\infty$$

il suffit pour cela d'appliquer p−1 fois le lemme 3.1.

LEMME 3.3. *Sous l'hypothèse* (H_1) *on a* $\dfrac{\partial^{|\Theta|+|\gamma|}\rho}{\partial z^\Theta\, \partial \bar{z}^\gamma}(0) = 0$ *pour tous les multiplets* Θ, γ *vérifiant* $|\Theta| + |\gamma| \leqslant p-1$.

Pour démontrer ce lemme on a besoin de plusieurs propositions intermédiaires. Quelques remarques sur les champs de vecteurs tangents à M sont aussi nécessaires.

On prendra $L_j = \dfrac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{\ell=1}^{d} \beta_{j\ell} \dfrac{\partial}{\partial w_\ell}$ pour j dans $\{1,\dots,n\}$, $\beta_{j\ell}$ étant une fonction C^∞ au voisinage de o.

L_j doit être tangent à M au voisinage de o on a donc :

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial z_j} + \sum_{\ell=1}^{d} \beta_{j\ell} \frac{\partial\rho_i}{\partial w_\ell} = o \text{ au voisinage de o pour i dans } \{1,\dots,d\}. \tag{3.4}$$

De plus on peut trouver d champs $N_1,\dots,N_d$ tels que

$$N_j = \sum_{\ell=1}^{d} b_{j\ell} \frac{\partial}{\partial w_\ell} \quad \text{pour j dans } \{1,\dots,d\}\text{, et,}$$

$\langle N_j, \partial\rho_i \rangle = \delta_{j,i}$ au voisinage de o, où

$$(j,i) \in \{1,\dots,d\}^2 . \ \partial\rho_i = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial\rho_i}{\partial z_\ell} dz_\ell + \sum_{\ell=1}^{d} \frac{\partial\rho_i}{\partial w_\ell} dw_\ell$$

et $\delta_{j,i}$ désigne le symbole de Kronecker.

On pose alors $T_j = \sqrt{-1}\,(N_j - \overline{N}_j)$ pour j dans $\{1,\dots,d\}$. T_j ainsi obtenu est bien un champ réel tangent à M au voisinage de 0.

Alors $(L_1,\dots,L_n,\overline{L}_1,\dots,\overline{L}_n,T_1,\dots,T_d)$ forment une base de CTM, qui est celle fixée pour toute la suite.

DEFINITION 3.5. *On définit* $C_i^{(j,k)}$ *pour* $i \in \{1,\dots,d\}$ *et* $(j,k) \in \{1,\dots,2n\}^2$ *de la façon suivante*

$$[L_j,L_k] = \sum_{i=1}^{d} C_i^{(j,k)} T_i \ \textit{modulo}\ \{L,\overline{L}\}.$$

On définit C_i^I *pour* $i \in \{1,\dots,d\}$ *et* $I = (i_1,\dots,i_k) \in \{1,\dots,2n\}^k$ *en posant*

$$C_i^I = L_{i_1},\dots,L_{i_{k-2}}\,(C_i^{(i_{k-1},i_k)}).$$

On peut remarquer que si $(j,r) \in \{1,\dots,n\}^2$ ou $\{n+1,\dots,2n\}^2$ alors $[L_j,L_r] \in \{L,\overline{L}\}$ et $C_i^{(j,r)} \equiv 0$.

PROPOSITION 3.6. *Soit* $k \geqslant 2$

Si $|J| = k$ *alors*

$$L_J = \sum_{i=1}^{d} C_i^J T_i + \sum_{i=1}^{d} \sum_{|J'|\leqslant k-1} C_i^{J'} M_i^{J,J'} + \sum_{|J'|\leqslant k-1} \Theta_{J,J'} L_{J'}$$

où $M_i^{J,J'}$ *est un opérateur différentiel du 1er ordre* $\Theta_{J,J'}$ *est une fonction* C^∞ *au voisinage de* o.

Démonstration. Si $J = (j,r)$ alors $L_J = [L_j,L_r] = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(j,r)} L_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^{(j,r)} \overline{L}_i + \sum_{i=1}^{d} C_i^{(j,r)} T_i$ donc $L_J = \sum_{i=1}^{d} C_i^J T_i + \sum_{|J'|=1} \Theta_{J,J'} L_{J'}$, la proposition est donc vérifiée pour $k = 2$.

Supposons maintenant que la proposition soit vérifiée pour tout $k \leqslant k_o$. Soit I tel que $|I| = k_o + 1$, alors $I = (j,J)$ avec $|J| = k_o$ donc :

$$L_I = [L_j,L_J] = \left[L_j\,,\ \sum_{i=1}^{d} C_i^J T_i + \sum_{i=1}^{d} \sum_{|J'|\leqslant k_o-1} C_i^{J'} M_i^{J,J'} + \sum_{|J'|\leqslant k_o-1} \Theta_{J,J'} L_{J'}\right]$$

$$= \left[L_j\,,\ \sum_{i=1}^{d} C_i^J T_i\right] + \left[L_j\,,\ \sum_{i=1}^{d} \sum_{|J'|\leqslant k_o-1} C_i^{J'} M_i^{J,J'}\right] + \left[L_j\,,\ \sum_{|J'|\leqslant k_o-1} \Theta_{JJ'} L_{J'}\right]$$

$$= P + Q + R$$

$$P = \sum_{i=1}^{d} L_j(C_i^J) T_i + \sum_{i=1}^{d} C_i^J\,[L_j,T_i] = \sum_{i=1}^{d} C_i^I T_i + \sum_{i=1}^{d} C_i^J\,[L_j,T_i]$$

$$Q=\sum_{i=1}^{d}\ \sum_{|J'|\leqslant k_o-1} C_i^{J'}\,[L_j,M_i^{J,J'}]+\sum_{i=1}^{d}\ \sum_{|J'|\leqslant k_o-1} L_j(C_i^{J'})M_i^{J,J'}$$

or $L_j(C_i^{J'})=C_i^{I'}$ où $I'=(j,J')$ et $|I'|\leqslant k_o$ donc $Q=\sum_{i=1}^{d}\ \sum_{|I'|\leqslant k_o} C_i^{I'}\,\widetilde{M}_i^{I,I'}$ où $\widetilde{M}^{I,I'}$ est un opérateur différentiel du 1er ordre.

$$R=\sum_{|J'|\leqslant k_o-1}\Theta_{J,J'}\,[L_j,L_{J'}]+\sum_{|J'|\leqslant k_o-1} L_j(\Theta_{J,J'})\,L_{J'}$$

$$=\sum_{|I'|\leqslant k_o}\Theta_{I,I'}\,L_{I'}$$

où $\Theta_{I,I'}$ est une fonction C^∞ au voisinage de o. Finalement

$$L_I\ =P+Q+R$$

$$=\sum_{i=1}^{d} C_i^I\,T_i+\sum_{i=1}^{d}\ \sum_{|I'|\leqslant k_o} C_i^{I'}\,M_i^{I,I'}+\sum_{|I'|\leqslant k_o}\Theta_{II'}\,L_{I'}$$

la proposition est donc vraie pour $k\leqslant k_o+1$.

COROLLAIRE 3.7. *Sous l'hypothèse* (H_1) *on a*

$C_i^J(o)=o$ *pour tout* J *tel que* $2\leqslant |J|\leqslant p-1$ *et pour tout* i *dans* $\{1,\ldots,d\}$

$L_J(o)=\sum C_i^J(o)\,T_i(o)$ *modulo* $\{L(o),\bar{L}(o)\}$ *pour tout* J *tel que* $|J|=P$.

La démonstration est évidente d'après la proposition 3.6. Dans la suite, β désigne la matrice $(\beta_{j\ell})_{(j,\ell)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,d\}}$.

PROPOSITION 3.8. *Soit* $r\geqslant 0$

Si $\dfrac{\partial^{|\gamma|+|\Theta|}\rho}{\partial z^\gamma\partial\bar{z}^\Theta}(o)=o$ *dès que* $|\gamma|+|\Theta|\leqslant r+2$ *et si* $\dfrac{\partial^{|\gamma|+|\Theta|}\beta}{\partial z^\gamma\partial\bar{z}^\Theta}(o)=o$ *dès que* $|\gamma|+|\Theta|\leqslant r$ $\dfrac{\partial^{|\gamma|+|\Theta|}\beta}{\partial z^\gamma\partial\bar{z}^\Theta}(o)=o$ *dès que* $|\gamma|+|\Theta|\leqslant r+1$.

Démonstration. Soit Θ et γ deux n-uplets tels que $|\gamma|+|\Theta|=r+1$. Fixons (j,i) dans $\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,d\}$ d'après (3.4) on a $\dfrac{\partial\rho_i}{\partial z_j}+\sum_{\ell=1}^{d}\beta_{j\ell}\dfrac{\partial\rho_i}{\partial w_\ell}$

donc

$$\frac{\partial^{r+1}\left(\frac{\partial \rho_i}{\partial z_j} + \sum_{\ell=1}^{d} \beta_{j\ell} \frac{\partial \rho_i}{\partial w_\ell}\right)}{\partial z^\gamma \partial \bar{z}^\Theta}(o) = o$$

Soit

$$\frac{\partial^{r+2}\rho_i}{\partial z_j \partial z^\gamma \partial \bar{z}^\Theta}(o) + \sum_{\ell=1}^{d} \frac{\partial^{r+1}\left(\beta_{j\rho}\frac{\partial \rho_i}{\partial w_\ell}\right)}{\partial z^\gamma \partial \bar{z}^\Theta}(o) = o$$

or par hypothèse $\dfrac{\partial^{r+2}\rho_i}{\partial z_j \partial z^\gamma \partial z^\Theta}(o) = o$ et

$$B_\ell = \frac{\partial^{r+1}\left(\beta_{j\ell}\frac{\partial \rho_i}{\partial w_\ell}\right)}{\partial z^\gamma \partial \bar{z}^\Theta}(o) = \frac{\partial^{r+1}\beta_{j\ell}}{\partial z^\gamma \partial \bar{z}^\Theta}(o)\,\frac{\partial \rho_i}{\partial w_\ell}(o)$$

mais h(o) = o et dh(o) = o entraîne que $\dfrac{\partial \rho_i}{\partial \omega_\ell}(o) = o$ si $i \neq \ell$ et $\dfrac{\partial \rho_i}{\partial \omega_i}(o) = -\dfrac{\sqrt{-1}}{2}$ donc $B_\ell = o$ pour

$$\ell \neq i \quad \text{et} \quad B_i = \frac{-\sqrt{-1}}{2}\,\frac{\partial^{r+1}\beta_{ji}}{\partial z^\gamma \partial \bar{z}^\Theta}(o)$$

or $\sum_{\ell=1}^{d} B_\ell = o$ donc $\dfrac{\partial^{r+1}\beta_{ji}}{\partial z^\gamma \partial \bar{z}^\Theta}(o) = o$ pour (j,i) fixés dans $\{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,d\}$ donc : $\dfrac{\partial^{r+1}\beta}{\partial z^\gamma \partial \bar{z}^\Theta}(o) = o$ on a alors immédiatement le

COROLLAIRE 3.9. *Sous les mêmes hypothèses, on obtient* $L_{i_1} \cdot \ldots \cdot L_{i_h}(\beta)(o)$ *pour* $(i_1,\dots,i_h) \in \{1,\dots,2^n\}^h$ *et* $h \leqslant r+1$.

Remarque 3.10. Soit $(j,k) \in \{1,\dots,n\}^2$ on a

$$[L_j,\bar{L}_k] = [L_j,L_{n+k}] = \sum_{i=1}^{d} C_i^{(j,n+k)}\, T_i \text{ modulo } \{L,\bar{L}\}$$

donc $C^{(j,n+k)} = (C_1^{(j,n+k)},\dots,C_d^{(j,n+k)})$ est la forme de Lévi appliquée à (L_j,L_k). Etant donné le choix de $(T_1,\dots,T_d)$, un calcul standard nous donne

$$C_i^{(j,n+k)} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\partial^2\rho_i}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} + \sum_{s=1}^{d} \frac{\partial^2\rho_i}{\partial z_j \partial \bar{w}_s}\bar{\beta}_{k,s} + \sum_{\ell=1}^{d} \frac{\partial^2\rho_i}{\partial w_\ell \partial \bar{z}_k}\beta_{j,\ell} + \sum_{\ell,s=1}^{d} \frac{\partial^2\rho_i}{\partial w_\ell \partial \bar{w}_s}\beta_{j\rho}\bar{\beta}_k\right),$$

or d'après (3.4) $\dfrac{\partial \rho_i}{\partial z_j}(o) + \sum_{\ell=1}^{d} \beta_{j\ell}(o)\dfrac{\partial \rho_i}{\partial w_\ell}(o) = o$ pour $i \in \{1,\dots,d\}$ et j dans $\{1,\dots,n\}$, mais

$\frac{\partial \rho_i}{\partial z_j}(o) = o$ et $\frac{\partial \rho_i}{\partial w_\ell}(o) = \frac{-\sqrt{-1}}{2}\,\delta_{i,\ell}$ donc $\beta_{ji}(o) = o$ pour $i \in \{1,\dots,d\}$ et $j \in \{1,\dots,n\}$.

De plus sous l'hypothèse (H_1) on a immédiatement $C_i^{(j,n+k)}(o) = o$. Donc $\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial z_j \partial \bar z_k}(o) = o$ pour $(i,j,k) \in \{1,\dots,d\} \times \{1,\dots,n\}^2$ or d'après la remarque 3.2 $\frac{\partial^{|\alpha|}\rho}{\partial z^\alpha}(o) = o$ dès que $|\alpha| \leqslant p$ finalement : $\frac{\partial^{|\alpha|+|\Theta|}\rho}{\partial z^\gamma \partial \bar z^\Theta}(o) = o$ dès que $|\alpha| + |\Theta| \leqslant 2$ (3.11).

PROPOSITION 3.12. $r \geqslant 0$

Si $\frac{\partial^{|\gamma|+|\Theta|}\rho}{\partial z^\gamma \partial \bar z^\Theta}(o) = o$ *pour* γ, Θ *tels que* $|\gamma| + |\Theta| \leqslant r+2$ *et si*

$\frac{\partial^{|\gamma|+|\Theta|}\beta}{\partial z^\gamma \partial \bar z^\Theta}(o) = o$ *pour* γ, Θ *tels que* $|\gamma| + |\Theta| \leqslant r$ *alors*

$$C_i^I(o) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{\partial^{r+3}\rho_i}{\partial z_I}(o) \textit{ pour } I = (i_1,\dots,i_{r+1},j,n+k)$$

$(i_1,\dots,i_{r+1}) \in \{1,\dots,2n\}^{r+1}$, $j, k \in \{1,\dots,n\}$.

Démonstration.

$$C_i^I(o) = L_{i_1}\dots L_{i_{r+1}}(C_i^{(j,n+k)})$$

$$= L_{i_1}\dots L_{i_{r+1}}\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\Big(\frac{\partial^2\rho_i}{\partial z_j\partial \bar z_k} + \sum_{s=1}^{d}\frac{\partial^2\rho_i}{\partial z_j \partial \bar w_s}\bar\beta_{ks} + \sum_{\ell=1}^{d}\frac{\partial^2\rho_i}{\partial w_\ell \partial \bar z_k}\beta_{j\ell} + \sum_{\ell,s=1}^{d}\frac{\partial^2\rho_i}{\partial w_\ell \partial \bar w_s}\beta_{j\ell}\bar\beta_{ks}\Big)\right)(o)$$

or
$$L_{i_1}\dots L_{i_{r+1}}\Big(\frac{\partial^2\rho_i}{\partial z_j\partial \bar w_s}\bar\beta_{k,s}\Big)(o) = \sum_{h \leqslant r+1}\lambda_{j_1\dots j_h}(o)\,L_{j_1}\dots L_{j_h}(\bar\beta_{k,s})(o) = o$$

d'après le corollaire 3.9.

De même
$$L_{i_1}\dots L_{i_{r+1}}\Big(\frac{\partial^2\rho_i}{\partial w_s\partial z_k}\beta_{j\ell}\Big)(o) = L_{i_1}\dots L_{i_{r+1}}\Big(\frac{\partial^2\rho_i}{\partial w_\ell\partial \bar w_s}\beta_{j\ell}\bar\beta_{ks}\Big)(o) = o$$

donc
$$C_i^I(o) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,L_{i_1}\dots L_{i_{r+1}}\Big(\frac{\partial^2\rho_i}{\partial z_j\partial \bar z_k}\Big)(o)$$

mais

$$L_{i_s} = \frac{\partial}{\partial z_{i_s}} + \sum_{\ell=1}^{d} \beta_{i_s,\ell} \frac{\partial}{\partial w_\ell}.$$

donc

$$L_{i_1} \dots L_{i_{r+1}} \left(\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right)(o) = \frac{\partial^{r+3} \rho_i}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_{r+1}} \partial z_j \bar{z}_k}(o)$$

$$+ \sum_{h \leqslant r} \sum_{\ell,j} \phi_h^{j,\ell}(o) \frac{\partial^h \beta_{j\ell}}{\partial z^\gamma \partial \bar{z}^\Theta}(o) = \frac{\partial^{r+3} \rho_i}{\partial z_I}(o)$$

donc

$$C_i^I(o) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial^{r+3} \rho_i}{\partial z_I}(o).$$

COROLLAIRE 3.13. $0 \leqslant r \leqslant p-4$.

Si $\dfrac{\partial^{|\gamma|+|\Theta|} \rho}{\partial z^\gamma \partial \bar{z}^\Theta}(o) = o$ *pour* γ, Θ *tels que* $|\gamma| + |\Theta| \leqslant r+2$

et si $\dfrac{\partial^{|\gamma|+|\Theta|} \rho}{\partial z^\gamma \partial \bar{z}^\Theta}(o) = o$ *pour* γ, Θ *tels que* $|\alpha| + |\Theta| \leqslant r$

alors $\dfrac{\partial^{|\gamma|+|\Theta|} \beta}{\partial z^\gamma \partial \bar{z}^\Theta}(o) = o$ *pour* γ, Θ *tels que* $|\gamma| + |\Theta| \leqslant r+3$

Démonstration. Soit $I = (i_1,\dots,i_{r+1},j,n+k)$ avec $o \leqslant r \leqslant p-4$ $(i_1,\dots,i_{r+1}) \in \{1,\dots,2n\}^{r+1}$, et, $(j,k) \in \{1,\dots,n\}^2$, on a alors $3 \leqslant |I| \leqslant p-1$ et donc $C_i^I(o) = o$ d'après le corollaire 3.7.

La proposition 3.12 nous permet de conclure que $\dfrac{\partial^{r+3} \rho_i}{\partial z_I}(o) = o$ pour tout $I = (i_1,\dots,i_{r+1},j,n+k)$ où $o \leqslant r \leqslant p-4$ donc d'après la remarque 3.2

$$\frac{\partial^{|\gamma|+|\Theta|} \rho}{\partial z^\gamma \partial \bar{z}^\Theta}(o) = o \text{ pour tout } \gamma \text{ et tout } \Theta \text{ tels que } |\gamma| + |\Theta| \leqslant r+3.$$

La démonstration du lemme 3.3 est alors évidente en effet $\dfrac{\partial^{|\gamma|+|\Theta|} \rho}{\partial z^\gamma \partial \bar{z}^\Theta}(o) = o$ pour γ, Θ tels que $|\gamma| + |\Theta| \leqslant 2$ voir 3.11. En appliquant successivent la proposition 3.8 et le corollaire 3.13 on obtient $\dfrac{\partial^{|\gamma|+|\Theta|} \rho}{\partial z^\gamma \partial \bar{z}^\Theta}(o) = o$ pour γ, Θ tels que $|\gamma| + |\Theta| \leqslant p-1$.

LEMME 3.14. *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *on a : il existe* $I_1,\dots,I_d$ *de longueur* p *tels que la matrice* $\left(\dfrac{\partial^p \rho_i}{\partial z_{I_j}}\right)_{(i,j) \in \{1,\dots,d\}^2}$ *soit inversible en* o

Démonstration. En appliquant successivement la proposition 3.8 et le corollaire 3.13 jusqu'à l'étape $r = p-4$ on a obtenu $\frac{\partial^{|\Theta|+|\gamma|}\rho}{\partial z^{\Theta}\partial\bar{z}^{\gamma}}(o) = o$ pour $|\Theta| + |\gamma| \leqslant p-1$ et $\frac{\partial^{|\Theta|+|\gamma|}\beta}{\partial z^{\Theta}\partial\bar{z}^{\gamma}}(o) = o$ pour $|\Theta| + |\gamma| \leqslant p-3$. Appliquons la proposition 3.12 on obtient :

$$C_i^I(o) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{\partial^p\rho_i}{\partial z_I} \text{ pour tout } I \text{ tel que } I = (i_1,\dots,i_{p-2},j,n+k)$$

où $(i_1,\dots,i_{p-2}) \in \{1,\dots,2n\}^{p-2}$ et $(j,k) \in \{1,\dots,n\}^2$.

D'après l'hypothèse (H_2), il existe $I_1,\dots,I_d$ de longueurs p tels que :

$$L_{I_h} = \sum_{i=1}^{d} \gamma_{hi}\,T_i \text{ modulo } \{L,\bar{L}\} \quad \text{pour } h \in \{1,\dots,d\}$$

et $(\gamma_{hi})_{(h,i)\in\{1,\dots,d\}^2}$ est inversible on a.

Si l'on avait $I_h = (i_1,\dots,i_p)$ avec $(i_{p-1},i_p) \in \{1,\dots,n\}^2 \cup \{n+1,\dots,2n\}^2$ alors on aurait $L_{(i_{p-1},i_p)} \in \{L,\bar{L}\}$ et donc $L_{I_h} = \sum_{|I_{h,s}| \leqslant p-1} \Theta_{h,s} L_{I_{h,s}}$ mais d'après (H_1) on aurait alors $L_{I_{h,s}}(o) \in \{L(o),I(o)\}$ soit $L_{I_h}(o) \in \{L(o),\bar{L}(o)\}$ c'est-à-dire $\gamma_{hi}(o) = o$ pour $i \in \{1,\dots,d\}$ ce qui est impossible. Donc on peut supposer que $I_h = (i_1,\dots,i_{p-2},j,n+h)$ avec $(i_1,\dots,i_{p-2}) \in \{1,\dots,2n\}^{p-2}$, $(j,k) \in \{1,\dots,n\}$.

Alors on a d'après le corollaire 3.7 :

$$\gamma_{hi}(o) = C_i^{I_h}(o) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{\partial^p\rho_i}{\partial z_{I_h}}(o)$$

et donc $\left(\frac{\partial^p\rho_i}{\partial z_{I_h}}\right)_{(i,h)\in\{1,\dots,d\}^2}$ est inversible en o.

LEMME 3.15. *Sous l'hypothèse* (H_1) *on a*

$$h(z,u) = 2\sum_{k=1}^{p'} \operatorname{Re} q^k(z,\dots,z) + R(z,u)$$

où $p' = \frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$

$$q^k(z^1,\dots,z^p) = \sum_{(j_1,\dots,j_p)\in\{1,\dots,n\}^p} a^k_{(j_1,\dots,j_p)} z^1_{j_1} \dots z^k_{j_k}\,\bar{z}^{k+1}_{j_{k+1}} \dots \bar{z}^p_{j_p}$$

avec

$$z^j = (z^j_1,\dots,z^j_n)$$

(3.15.1)
$$a^k_{(j_1,\dots,j_p)} = (a^k_{(j_1,\dots,j_p),1} ; \dots ; a^k_{(j_1,\dots,j_p),d}) \in \mathbb{C}^d$$
$$a^k_{(j_{\sigma(1)},\dots,j_{\sigma(k)},j_{\tau(k+1)},\dots,j_{\tau(p)})} = a^k_{(j_1,\dots,j_p)}$$

pour toute permutation σ de $1,\dots,k$ et toute permutation τ de $\{k+1,\dots,p\}$.

(3.15.2)
$$R(z,u) = \sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ |\Theta|+|\gamma|=1}} f_{\alpha,\Theta,\gamma}(z,u)\, u^\alpha z^\Theta \bar z^\gamma + \sum_{|\alpha|=2} g_\alpha(z,u)\, u^\alpha + \sum_{|\gamma|+|\Theta|=p+1} \ell_{\Theta,\gamma}(z,u)\, z^\Theta \bar z^\gamma$$

avec $\ell_{\alpha,\Theta,\gamma}$, g_α, $\ell_{\Theta,\gamma}$ C^∞ au voisinage de o.

Démonstration. Un développement de Taylor de h à l'ordre p donne :

$$h(z,u) = \sum_{|\Theta|+|\gamma|\leqslant p} \frac{\partial^{|\Theta|+|\gamma|}h}{\partial z^\Theta \partial \bar z^\gamma}(o)\,\frac{z^\Theta \bar z^\gamma}{\Theta!\gamma!} + \sum_{|\alpha|+|\Theta|+|\gamma|\leqslant p} \frac{\partial^{|\alpha|+|\Theta|+|\gamma|}h}{\partial u^\alpha \partial z^\Theta\partial \bar z^\gamma}(o)\,\frac{u^\alpha z^\Theta \bar z^\gamma}{\alpha!\Theta!\gamma!}$$
$$+ \tilde R(z,u) \quad \text{où} \quad \tilde R(z,u) = \sum_{|\Theta|+|\gamma|\geqslant p+1} \ell_{\Theta,\gamma}(z,u)\, z^\Theta \bar z^\gamma$$

or $\nabla h(o) = o$ donc dans la deuxième somme $|\alpha| \geqslant 1$ de plus d'après le Lemme 3.3. $\dfrac{\partial^{|\Theta|+|\gamma|}\rho}{\partial z^\Theta \partial \bar z^\gamma}(o) = o$ pour $|\Theta|+|\gamma|\leqslant p-1$ donc $h(z,u) = \displaystyle\sum_{|\Theta|+|\gamma|=p} \frac{\partial^{|\Theta|+|\gamma|}h}{\partial z^\Theta \partial \bar z^\gamma}(o)\,\frac{z^\Theta \bar z^\gamma}{\Theta!\gamma!} + R(z,u)$

où R(z,u) vérifie (3.15.2), on peut donc écrire :

$$h(z,u) = \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{(j_1,\dots,j_p)\in\{1,\dots,n\}^p} a^k_{(j_1,\dots,j_p)}\, z_{j_1} \dots z_{j_k} \bar z_{j_{k+1}} \dots \bar z_{j_p} + R(z,u)$$

où $a^k_{(j_1,\dots,j_p)}$ vérifie (3.15.1)

($k \neq 0$ et $k \neq p$ car $\dfrac{\partial^{|\alpha|}h}{\partial z^\alpha}(o) = o$ pour $|\alpha| \leqslant p$).

De plus les coefficients de $z_{j_1} \dots z_{j_k} \bar z_{j_{k+1}} \dots \bar z_{j_p}$ et $\bar z_{j_1} \dots \bar z_{j_k} z_{j_{k+1}} \dots z_{j_p}$ sont conjugués donc

$$h(z,u) = 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{p'} \sum_{(j_1\dots j_p)\in\{1,\dots,n\}^p} a^k_{(j_1,\dots,j_p)}\, z_{j_1} \dots z_{j_k} \bar z_{j_{k+1}} \dots \bar z_{j_p}$$
$$+ \mathrm{Re}(z,u) = 2 \sum_{k=1}^{p'} \mathrm{Re}\, q^k(z,z,\dots,z) + R(z,u).$$

Enfin la construction des disques analytiques dans le cas modèle nécessite quelques lemmes techniques que nous allons aborder maintenant.

DEFINITION 3.16. *Soit* $r \in \mathbb{N}$ *on pose* $A(r) = \left\{(\alpha_1,\dots,\alpha_q) \in \mathbb{Z}^q \,/\, q \in \mathbb{N}^* \text{ et } 0 < \sum_{i=1}^{q} |\alpha_i| \leqslant r\right\}$.

LEMME 3.17. *Soit* $p \in \mathbb{N}$, p *impair et* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $1 \leqslant k \leqslant p'$ *ou* $p' = \frac{p-1}{2}$ *alors il existe un ensemble* $E_1 = \{n_1,\dots,n_p\}$ *de* p *entiers positifs distincts, tel que :*

(1) $n_1 + \dots + n_k = n_{k+1} + \dots + n_p$

(2)

$$\left.\begin{array}{l} j_1 + \dots + j_\ell = j_{\ell+1} + \dots + j_p \\ j_1,\dots,j_p \in E_1 \\ 1 \leqslant \ell \leqslant p' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \ell = k \\ \text{et} \\ \{j_1,\dots,j_k\} = \{n_1,\dots,n_k\} \\ \{j_{k+1},\dots,j_p\} = \{n_{k+1},\dots,n_p\} \end{array}\right.$$

Démonstration. On veut définir des entiers positifs $n_1,\dots,n_{k-1}$ vérifiant pour $q = k-1$

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i n_i \neq 0 \quad \text{dès que } (\alpha_1,\dots,\alpha_q) \in A(p^2) \tag{3.17.1}$$

On pose $n_1 = 1$ et l'on construit les suivants par récurrence. Ainsi supposons que l'on ait défini $n_1,\dots,n_r$ vérifiant (3.17.1) pour $q = r$, on pose alors :

$$B_r = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha_r}\right) n_i \,/\, (\alpha_1,\dots,\alpha_r) \in A(p^2) \text{ et } \alpha_r \neq 0 \right\}$$

On a card $B_r < \infty$, on peut donc choisir n_{r+1} dans $\mathbb{N}^* \setminus B_r$ et alors $n_1,\dots,n_{k+1}$, vérifie (3.17.1) pour $q = r+1$.

De la même façon on définit des entiers positifs $n_{k+1},\dots,n_p$ vérifiant pour $q = p$

$$\sum_{i=k+1}^{q} \alpha_i n_i \notin B \text{ dès que } (\alpha_{k+1},\dots,\alpha_p) \in A(p^2) \tag{3.17.2}$$

$$\text{où} \quad B = \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i \,/\, (\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1}) \in A(p^2) \right\} \cup \{0\}.$$

De plus on peut prendre $n_p > n_1 + \dots + n_{k-1}$ et alors en posant $n_k = n_{k+1} + \dots + n_p - n_1 - \dots - n_{k-1}$ on obtient p entiers positifs $n_1,\dots,n_p$ vérifiant le (1) du lemme.

Démontrons la propriété suivante :

Si $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i\, n_i = \sum\limits_{i=k+1}^{p} \alpha_i\, n_i$ avec $\sum\limits_{i=1}^{p} |\alpha_i| \leqslant p$ et $\sum\limits_{i=k+1}^{p} |\alpha_i| \leqslant p$ alors $\alpha_i = \alpha_j$ pour i et j dans $\{1,\ldots,p\}$ (3.17.3).

En effet d'après le choix de n_k on obtient :

$$\sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_i - \alpha_k) n_i = \sum_{i=k+1}^{p} (\alpha_i - \alpha_k) n_i$$

soit

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i' n_i = \sum_{i=l+1}^{p} \alpha_i' n_i \quad \text{avec } \alpha_i' = \alpha_i - \alpha_p$$

mais

$$\sum_{i=1}^{k-1} |\alpha_i'| \leqslant \sum_{i=1}^{k-1} |\alpha_i| + \sum_{i=1}^{k-1} |\alpha_k| \leqslant p + (k-1)p \leqslant p + (p-1)p = p^2$$

et

$$\sum_{i=k+1}^{p} |\alpha_i'| \leqslant \sum_{i=k+1}^{p} |\alpha_i| + \sum_{i=k+1}^{p} |\alpha_p| \leqslant p + (p-k)p \leqslant p^2.$$

Si $\sum\limits_{i=1}^{k=1} |\alpha_i'| > 0$ et $\sum\limits_{i=k+1}^{p} |\alpha_i'| > 0$ alors $(\alpha_i', \ldots, \alpha_{k+1}')$ et $(\alpha_{k+1}', \ldots, \alpha_p')$ sont dans $A(p^2)$, et, $\sum\limits_{i=1}^{k-1} \alpha_i' n_i = \sum\limits_{i=k+1}^{p} \alpha_i' n_i$ est impossible d'après (3.17.2).

Si $\sum\limits_{i=1}^{k-1} |\alpha_i'| > 0$ et $\sum\limits_{i=k+1}^{p} |\alpha_i'| = 0$ alors $\sum\limits_{i=1}^{k-1} \alpha_i' n_i = 0$ et $(\alpha_1', \ldots, \alpha_{k-1}') \in A(p^2)$ ce qui est impossible d'après (3.17.1).

De même $\sum\limits_{i=1}^{k-1} |\alpha_i'| = 0$ et $\sum\limits_{i=k+1}^{p} |\alpha_i'| > 0$ est impossible d'après (3.17.2).

Finalement on a : $\sum\limits_{i=1}^{k-1} |\alpha_i'| = \sum\limits_{i=k+1}^{p} |\alpha_i'| = 0$ c'est-à-dire $\alpha_i = \alpha_j$ pour $(i,j) \in \{1,\ldots,p\}^2$.

Montrons maintenant le (2) du lemme 3.17 : Soit

$$j_1 + \ldots + j_\ell = j_{\ell+1} + \ldots + j_p$$

$$j_1, \ldots, j_p \in E_1$$

$$1 \leqslant \ell \leqslant p'$$

alors $j_1 + \ldots + j_\ell$ est la somme de ℓ entiers n_i, un même n_i pouvant être pris plusieurs fois, donc

$j_1 + \ldots + j_\ell = q_1 n_1 + \ldots + q_p n_p$ où $q_1, \ldots, q_p$ sont p entiers positifs ou nuls tels que $\sum_{i=1}^{p} q_i = \ell$ de même $j_{\ell+1} + \ldots + j_p = h_1 n_1 + \ldots + h_p n_p$ où $h_1, \ldots, h_p$ sont p entiers positifs ou nuls tels que $\sum_{i=\ell+1}^{p} h_i = p-\ell$ on a donc

$$\sum_{i=1}^{p} q_i n_i = \sum_{i=1}^{p} h_i n_i$$

soit

$$\sum_{i=1}^{p} (q_i - h_i) n_i = \sum_{i=k+1}^{p} (h_i - q_i) n_i$$

mais

$$\sum_{i=1}^{k} |q_i - h_i| \leqslant \sum_{i=1}^{k} q_i + \sum_{i=1}^{k} h_i \leqslant \ell + (p-\ell) = p$$

et

$$\sum_{i=k+1}^{p} |h_i - q_i| \leqslant \sum_{i=k+1}^{p} h_i + \sum_{i=k+1}^{p} q_i \leqslant (p-\ell)+\ell = p$$

donc d'après (3.17.3) on a

$$q_i - h_i = a \qquad \text{pour} \quad i \in \{1, \ldots, k\}$$

$$h_i - q_i = a \qquad \text{pour} \quad i \in \{k+1, \ldots, p\}$$

donc

$$\sum_{i=1}^{k} q_i - h_i = \sum_{i=1}^{k} q_i - \sum_{i=1}^{k} h_i = ka$$

et

$$\sum_{i=k+1}^{p} q_i - h_i = \sum_{i=k+1}^{p} q_i - \sum_{i=k+1}^{p} h_i = -(p-k)a$$

donc

$$\sum_{i=1}^{p} q_i - \sum_{i=1}^{p} h_i = (2k-p)a$$

soit

$$\ell - (p-\ell) = (2k-p)a$$

c'est-à-dire

$$a = \frac{2\ell - p}{2k-p}$$

or $\ell \leqslant \frac{p-1}{2}$, $k \leqslant \frac{p-1}{2}$ soit $2\ell - p < o$ et $2k-p < o$ donc $a > o$.

Supposons $\ell \leqslant k$. S'il existe $i \in \{1,...,k\}$ tel que $q_i = o$ alors $h_i = -a$ donc $h_i < o$ ce qui est impossible, donc pour tout i dans $\{1,...,k\}$ on a $q_i \neq o$ mais alors $q_1n_1+...+q_pn_p$ contient au moins une fois $n_1,...,n_k$ mais $\ell \leqslant k$ donc $q_1n_1+...+q_pn_p$ contenant ℓ termes contient au plus k termes, donc contient en fait exactement $n_1,...,n_k$. Soit $\ell = k$ et $\{j_1,...,j_k\} = \{n_1,...,n_k\}$.

De plus $q_i = o$ pour $i \in \{k+1,...,p\}$ donc $h_{k+1} = ... = h_p = a > o$ donc $h_1n_1+...+h_pn_p$ contient au moins p–k termes non nuls à savoir $n_{k+1},...,n_p$ mais $\ell = k$, donc $h_1n_1+...+h_pn_p$ qui ne peut avoir que p–k termes est égal à $n_{k+1}+...+n_p$ c'est-à-dire $\{j_{k+1},...,j_p\} = \{n_{k+1},...,n_p\}$.

Supposons maintenant que $\ell \geqslant k$ c'est à dire $p-\ell \leqslant p-k$ on montre comme précédemment que $h_i \neq o$ pour $i \in \{k+1,...,p\}$ donc de même $\ell = k$ et $\{j_{k+1},...,j_p\} = \{n_{k+1},...,n_p\}$ et $\{j_1,...,j_k\} = \{n_1,...,n_k\}$.

Remarque 3.18. Si $j_1+...+j_{\tilde\ell} = j_{\tilde\ell+1}+...+j_{\tilde p}$ avec $j_1,...,j_{\tilde p}$ dans E_1 et $\tilde p < p$ alors $\tilde p$ est pair. En effet si $\tilde p$ était impair alors de chaque côté de l'égalité on pourrait ajouter n_i, un nombre de fois pour obtenir p termes :

$$\underbrace{n_1+...+n_1+j_1+...+j_{\tilde\ell}}_{\ell \text{ termes}} = \underbrace{n_1+...+n_1+j_{\tilde\ell+1}+...+j_{\tilde p}}_{p-\ell \text{ termes}}$$

si $\ell \leqslant \frac{p-1}{2}$ d'après le lemme 3.17 les $p-\ell$ termes de droite sont à une permutation près $n_{k+1},...,n_p$ c'est-à-dire $n_1 \in \{n_{k+1},...,n_p\}$ ce qui est impossible si $\ell > \frac{p-1}{2}$ alors $p-\ell < \frac{p-1}{2}$ et d'après le lemme 3.17 les ℓ termes de gauche sont à une permutation près $n_{k+1},...,n_p$ ce qui est impossible.

LEMME 3.19. *Soit* p *un entier naturel impair,* d *un entier positif et* k *un entier vérifiant* $k \in \{1,...,p'\}$ *où* $p' = \frac{p-1}{2}$, *alors il existe* $E_d = \bigcup_{r=1}^{d} \{n_{r,1},...,n_{r,p}\}$ *un ensemble de* dp *entiers distincts positifs, tel que*

(1) $\forall r \in \{1,...,d\}\ n_{r,1}+...+n_{r,k} = n_{r,k+1}+...+n_{r,p}$

(2)
$$\left.\begin{array}{l} j_1+...+j_\ell = j_{\ell+1}+...+j_p \\ j_1,...,j_p \in E_d \\ 1 \leqslant \ell \leqslant p' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \ell = k \\ \textit{et il existe } r \textit{ dans } \{1,...,d\} \textit{ avec} \\ \{j_1,...,j_k\} = \{n_{k,1},...,n_{r,k}\} \\ \{j_{k+1},...,j_p\} = \{n_{r,k+1},...,n_{r,p}\} \end{array}\right.$$

Démonstration. Le cas d = 1 est réglé par le lemme 3.17, on va donc faire une démonstration par récurrence.

Supposons que le lemme 3.19 est démontré pour $d = d'$ donc il existe $E_{d'} = \bigcup_{r=1}^{d'} \{n_{r,1},\dots,n_{r,p}\}$ vérifiant (1) et (2) avec d' au lieu de d.

On va alors démontrer que le lemme 3.19 est vrai pour $d = d'+1$. Prenons

$$\alpha \in \mathbb{N}^* \quad \alpha > \sup \left\{ \left|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i n_i\right| \quad n_i \in E_{d'},\ (\alpha_1,\dots,\alpha_p) \in A(p) \right\}.$$

Soit $F = \{n_{d'+1,1},\dots,n_{d'+1,p}\}$ où $n_{d'+1,i} = \alpha n_{1,i}$. On pose alors $E_{d'+1} = E_{d'} \cup F$ et $E_{d'+1}$ vérifie (1) et (2) du lemme 3.19 avec d'+1 au lieu de d en effet : Soit

$$j_1 + \dots + j_\ell = j_{\ell+1} + \dots + j_p$$

$$j_1,\dots,j_p \in E_{d'+1}$$

$$1 \leqslant \ell \leqslant p.$$

1er cas : $j_1,\dots,j_p \in E_{d'}$ alors par hypothèse de récurrence c'est terminé.

2ème cas : $j_1,\dots,j_p \in F$ alors comme F vérifie le (1) et (2) du lemme 3.17 c'est terminé.

3ème cas : il existe $i_o, i_1 \in \{1,\dots,p\}$ tels que $j_{i_o} \in E_{d'}$ et $j_{i_1} \in F$; après un réarrangement d'indices on obtient

$$j_1 + \dots + j_s + j_{s+1} + \dots + j_\ell = j_{\ell+1} + \dots + j_r + j_{r+1} + \dots + j_p$$

où

$$j_1,\dots,j_s \in F\ ;\ j_{s+1},\dots,j_\ell \in E_{d'}\ ;\ j_{\ell+1},\dots,j_r \in F\ ;\ j_{r+1},\dots,j_p \in E_{d'}$$

soit

$$j_1 + \dots + j_s - j_{\ell+1} - \dots - j_r = j_{r+1} + \dots + j_p - j_{s+1} - \dots - j_\ell$$

ou encore

$$\alpha(j'_1 + \dots + j'_s - j'_{\ell+1} - \dots - j'_r) = j_{r+1} + \dots + j_p - j_{s+1} - \dots - j_\ell$$

avec $j'_i,\dots,j'_s\,,\ j'_{\ell+1},\dots,j'_r \in \{n_{1,1}\,;\dots;\,n_{1,p}\}$ et $j_i = \alpha j'_i$ on a donc $\alpha\, |j'_1 + \dots + j'_s - j'_{\ell+1} - \dots - j'_r| = |j_{r+1} + \dots + j_p - j_{s+1} - \dots - j_\ell| < \alpha$ par définition de α. Soit

$$\alpha\, |j'_1 + \dots + j'_s - j'_{\ell+1} - \dots - j'_r| < \alpha \quad \text{or} \quad \alpha \in \mathbb{N}^*$$

donc $j'_1 + \dots + j'_s = j'_{\ell+1} + \dots + j'_r$ ce qui entraîne que $j_{r+1} + \dots + j_p = j_{s+1} + \dots + j_\ell$ or $s + (r-\ell) < p$ car $j_{i_o} \in E_{d'}$ donc $j'_1 + \dots + j'_s = j'_{\ell+1} + \dots + j'_r$ et $j'_1,\dots,j'_s,j'_{\ell+1},\dots,j'_r \in \{n_{1,1}\,;\dots;\,n_{1,p}\}$ implique que $s + (r-\ell)$ est pair d'après la remarque 3.18.

Un raisonnement identique montre que $(p-r)+(\ell-s)$ est pair car $j_{r+1}+\dots+j_p=j_{s+1}+\dots+j_\ell$, $j_{r+1},\dots,j_\ell \in E_d$, et $(p-r)+(\ell-s)<p$ puisque $j_{i_1}\in F$.

Donc $p=s+(r-\ell)+(p-r)+(\ell-s)$ est pair ce qui est impossible par hypothèse. Donc ce troisième cas est vide.

LEMME 3.20. *Soit* p *un entier naturel impair,* d *un entier positif alors pour tout* k *dans* $\{1,\dots,p'\}$ *où* $p'=\frac{p-1}{2}$ *il existe* $E_d^k=\bigcup_{s=1}^{d}\{n_{s,1}^k;\dots,n_{s,p}^k\}$ *tels que*

(1) *les* $n_{s,i}^k$ *sont des entiers positifs distincts*

(2) $n_{s,1}^k+\dots+n_{s,k}^k=n_{s,k+1}^k+\dots+n_{s,p}^k \quad \forall s\in\{1,\dots,d\} \quad \forall k\in\{1,\dots,p'\}$

(3)
$$\left.\begin{array}{l} j_1+\dots+j_\ell=j_{\ell+1}+\dots+j_p \\ j_1,\dots,j_p\in E=\bigcup_{k=1}^{p'}E_d^k \\ 1\leqslant \ell\leqslant p' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} j_1,\dots,j_p\in E_d^\ell \\ \text{et il existe s dans } \{1,\dots,d\} \text{ tel que} \\ \{j_1,\dots,j_\ell\}=\{n_{s,1}^\ell,\dots,n_{s,\ell}^\ell\} \\ \{j_{\ell+1},\dots,j_p\}=\{n_{s,\ell+1}^\ell,\dots,n_{s,p}^\ell\} \end{array}\right.$$

Démonstration. E'_d est déjà construit, voir le lemme 3.19 (k = 1). Supposons que l'on ait construit $E'_d,\dots,E_d^i$ vérifiant :

$$\left.\begin{array}{l} j_1+\dots+j_\ell=j_{\ell+1}+\dots+j_p \\ j_1,\dots,j_p\in\bigcup_{k=1}^{i}E_d^k \\ 1\leqslant\ell\leqslant p' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1\leqslant\ell\leqslant i \\ j_1,\dots,j_\ell\in E_d \text{ et il existe } s\in\{1,\dots,d\} \\ \text{tel que} \\ \{j_1,\dots,j_\ell\}=\{n_{s,1}^\ell,\dots,n_{s,\ell}^\ell\} \\ \{j_{\ell+1},\dots,j_p\}=\{n_{s\ell+1},\dots,n_{s,p}\} \end{array}\right. \tag{3.20.1}$$

On peut construire $\bigcup_{r=1}^{d}\{n_{r,1},\dots,n_{r,p}\}$ vérifiant le lemme 3.19 avec k = i+1.

Prenons $\alpha\in\mathbb{N}^*$ tel que $\alpha>\sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{p}\alpha_j n_j\right|,\ n_j\in\bigcup_{k=1}^{i}E_d^k,\ (\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in A(p)\right\}$.

Posons $E_d^{i+1}=\bigcup_{r=1}^{d}\{n_{r,1}^{i+1},\dots,r_{r,p}^{i+1}\}$ où $n_{r,j}^{i+1}=\alpha n_{r,j}$, en distinguant 3 cas comme au lemme 3.19 on montre alors que $E_d^1,\dots,E_d^{i+1}$ vérifient (3.20.1) avec i+1 au lieu de i.

On peut donc construire $E'_d,\dots,E_d^{p'}$ vérifiant le lemme 3.20.

4. - CONSTRUCTION DES DISQUES ANALYTIQUES DANS LE CAS MODELE

Dans toute la suite, M sera une sous-variété CR de $\mathbb{C}^N$ passant par o, vérifiant les hypothèses (H_1) et (H_2) alors d'après le lemme 3.15, M est donnée au voisinage de o par $v = h(z,u)$ où :

$$h(z,u) = 2\sum_{k=1}^{p'} \operatorname{Re} q^k(z,\ldots,z) + R(z,u).$$

A M on associe $\widetilde{M}$ une variété définie au voisinage de o par $v = \widetilde{h}(z)$ ou

$$\widetilde{h}(z) = 2\sum_{k=1}^{p'} \operatorname{Re} q^k(z,\ldots,z).$$

On va donc construire explicitement une famille de disques analytiques à bord sur $\widetilde{M}$ et démontrer le théorème 2.6 pour $\widetilde{M}$.

Considérons $Z(\alpha) : \overline{D} \to \mathbb{C}^n$ un disque analytique défini par $Z(\alpha)(\zeta) = \sum_{j=o}^{\infty} \alpha_j \zeta^j$, $\alpha_j \in \mathbb{C}^n$ et $\sum_{j=o} |\alpha_j| < \infty$. On cherche $G(\alpha) : \overline{D} \to \mathbb{C}^d$, un disque analytique tel que, $A(\alpha) = (Z(\alpha), G(\alpha))$ soit un disque dont le bord est sur M. Il faut donc :

$$\operatorname{Im} G(\alpha)(\zeta) = \widetilde{h}(Z(\alpha)(\zeta)) \qquad \forall \zeta \in \partial D$$

$$\operatorname{Im} G(\alpha)(\zeta) = 2\sum_{k=1}^{p'} \operatorname{Re} q^k\left(\sum_{j_1=o}^{\infty} \alpha_{j_1}\zeta^{j_1},\ldots,\sum_{j_p=o}^{\infty} \alpha_{j_p}\zeta^{j_p}\right)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{p'} \operatorname{Re} \sum_{j_1,\ldots,j_p \in \mathbb{N}} q^k(\alpha_{j1},\ldots,\alpha_{jp})\zeta^{j1}\ldots\zeta^{jk}\zeta^{-jk+1}\ldots\zeta^{-jp}$$

en effet

$$q^k(z^1,\ldots,z^p) = \sum_{i_1,\ldots,i_p \in \{1,\ldots,n\}} a^k_{i_1\ldots i_p} z^1_{i_1}\ldots z^k_{i_k}\bar{z}^{k+1}_{i_{k+1}}\ldots\bar{z}^p_{i_p},$$

donc

$$q^k(z^1,\ldots,z^j + \widetilde{z}^j,\ldots,z^p) = q^k(z^1,\ldots,z^j,\ldots,z^p) + q^k(z^1,\ldots,\widetilde{z}^j,\ldots,z^p)$$

et

$$q^k(z^1,\ldots,\lambda z^j,\ldots,z^p) = \lambda q^k(z^1,\ldots,z^p) \quad \text{si} \quad j \leqslant k \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$= \bar{\lambda} q^k(z^1,\ldots,z^p) \quad \text{si} \quad j > k \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Mais pour $\zeta \in \partial D$ $\quad \bar{\zeta} = \zeta^{-1}$ c'est-à-dire

$$\operatorname{Im} G(\alpha)(\zeta) = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{p'} \sum_{j_i \in \mathbb{N}} q^k(\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jp})\zeta^{j_1+\dots+j_k-(j_{k+1}+\dots+j_p)}$$

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{p'} \sum_{j_1+\dots+j_k = j_{k+1}+\dots+j_p} q^k(\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jp}) \\ &+ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{p'} \sum_{j_1+\dots+j_k > j_{k+1}+\dots+j_p} q^k(\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jp})\zeta^{j_1+\dots+j_k-(j_{k+1}+\dots+j_p)} \\ &+ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{p'} \sum_{j_1+\dots+j_k < j_{k+1}+\dots+j_p} \overline{q^k(\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jp})}\zeta^{j_{k+1}+\dots+j_p-j_1-\dots-j_k} \end{aligned}$$

(4.1) est la condition nécessaire et suffisante pour que $A(\alpha)$ ait son bord sur $\widetilde{M}$.

Posons maintenant pour $\zeta \in \overline{D}$:

$$G(\alpha)(\zeta) = u + \sqrt{-1}\,\Big(2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{p'} \sum_{j_1+\dots+j_k = j_{k+1}+\dots+j_p} q^k(\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jp})$$

$$(4.2)\qquad + 2\sqrt{-1}\left(\sum_{k=1}^{p'} \sum_{j_1+\dots+j_k > j_{k+1}+\dots+j_p} q^k(\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jp})\zeta^{j_1+\dots+j_k-(j_{k+1}+\dots+j_p)}\right.$$

$$+ 2\sqrt{-1}\left(\sum_{k=1}^{p'} \sum_{j_1+\dots+j_k < j_{k+1}+\dots+j_p} \overline{q^k(\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jp})}\,\zeta^{j_{k+1}+\dots+j_p-(j_1+\dots+j_k)}\right.$$

(u étant une constante fixée dans $\mathbb{R}^d$).

$G(\alpha)$ ainsi défini est un disque analytique de D dans $\mathbb{C}^d$ qui vérifie (4.1) et donc $A(\alpha)$ a son bord sur $\widetilde{M}$.

On a alors :

$$(4.3)\qquad \operatorname{Im} G(\alpha)(o) = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{p'} \sum_{j_1+\dots+j_k = j_{k+1}+\dots+j_p} q^k(\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_p})$$

On pose $I = \{o\} \cup E$ où E est l'ensemble défini au lemme 3.20. Le disque $Z(\alpha) = \sum_{j=o}^{\infty} \alpha_j \zeta^j$ sera pris tel que $\alpha_j = o$ si $j \notin I$. Le disque $G(\alpha)$ défini au 4.2 vérifiera alors :

$$\operatorname{Im} G(\alpha)(o) = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{p'}\ \sum_{\substack{j_1+\dots+j_k=j_{k+1}+\dots+j_p\\ j_1,\dots,j_p\in E}} q^k(\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jp})$$

$$+2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{p'}\ \sum_{\substack{j_1+\dots+j_k=j_{k+1}+\dots+j_p\\ j_1,\dots,j_p\in I\\ \exists \ell\in\{1,\dots,p\}\ :\ j_\ell=o}} q^k(\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jp})$$

mais

$$\sum_{\substack{j_1+\dots+j_k=j_{k+1}+\dots+j_p\\ j_1,\dots,j_p\in E}} q^k(\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_p}) = \sum_{s=1}^{d} k!(p-k)!q^k(\alpha_{n^k_{s,1}},\dots,\alpha_{n^k_{s,p}})$$

en effet d'après le lemme 3.20 :

$$\left.\begin{array}{l} j_1+\dots+j_k=j_{k+1}+\dots+j_p \\ \\ j_1,\dots,j_k\in E \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{il existe s dans } 1,\dots,d \text{ tel que} \\ \{j_1,\dots,j_k\} = \{n^k_{s,1},\dots,n^k_{s,k}\} \\ \{j_{k+1},\dots,j_p\} = \{n^k_{s,k+1},\dots,n^k_{s,p}\} \end{array}\right.$$

et pour s fixé dans $\{1,\dots,d\}$ il y a k! k-uplets $(j_1,\dots,j_k)$ tels que $\{j_1,\dots,j_k\} = \{n^k_{s,1},\dots,n^k_{s,k}\}$ et $(p-k)!$ $(p-k)$-uplets $(j_{k+1},\dots,j_p)$ tels que $\{j_{k+1},\dots,j_p\} = \{n^k_{s,k+1},\dots,n^k_{s,p}\}$ d'autre part pour de tels multiplets on a d'après (3.15.1)

$$q^k(\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jp}) = q^k(\alpha_{n^k_{s,1}},\dots,\alpha_{n^k_{s,p}}).$$

Donc

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} G(\alpha)(o) = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{p'}\sum_{s=1}^{d} b^k q^k(\alpha_{n^k_{s,1}},\dots,\alpha_{n^k_{s,p}}) \\ (4.4)\qquad & \\ &+2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{p'}\sum_{j_\ell} q^k(\dots,\alpha_o,\dots) \quad \text{où } b^k = k!(p-k)! \end{aligned}$$

Quand $\alpha = (\alpha_j)_{j\in \mathbb{N}}$ va varier dans un ensemble convenablement choisi, il va engendrer $A(\alpha)$ une famille de disques analytiques dont le bord est sur $\widetilde{M}$, avec $A(\alpha) = (Z(\alpha),G(\alpha))$ ou $Z(\alpha)(\zeta) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j\zeta^j$, $\alpha_j = o$ pour $j \notin I$ et $G(\alpha)$ vérifie (4.4).

DEFINITIONS 4.5. *Soit* $\eta = (z,u\ ,t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, *on définit un ensemble de paramètres* Λ *par*

$$\Lambda = \left\{ (\eta,r) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^+ \ ;\ |\eta| < r^{\frac{p}{p-1}} \right\}.$$

On définit aussi $\alpha_j : \Lambda \to \mathbb{C}^n$ *en posant*

$$\alpha_j(\eta,r) = o \text{ pour } j \notin I$$

$$\alpha_o(\eta,r) = z$$

$$\alpha_{n^k_{s,1}}(\eta,r) = \frac{t_s}{r}\,\zeta_s$$

$$\alpha_{n^k_{s,\ell}}(\eta,r) = r^{\frac{1}{p-1}}\,\zeta_s \quad \text{pour } \ell \in \{2,\dots,p\}$$

$$\alpha_j(o,o) = o \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}$$

où $\zeta_1,\dots,\zeta_d$ *sont des éléments fixés de* $\mathbb{C}^n$ *qui seront choisis ultérieurement.*

Comme $(\eta,r) \in \Lambda$ vérifie $|\eta| < r^{\frac{p}{p-1}}$ $\alpha_j : \Lambda \to \mathbb{C}^n$ est continue, et donc

$$A : \Lambda \times \bar{D} \to \mathbb{C}^n$$

$$((\eta,r),\zeta) \mapsto A(\alpha(\eta,r))(\zeta)$$

est une famille de disques analytiques, de plus $A(\Lambda \times \partial D) \subset \widetilde{M}$, A étant continue sur $\Lambda \times \partial D$ et $A(\alpha(o,o))(\zeta) = o$ pour ζ dans D on a : Pour ω voisinage de o dans $\widetilde{M}$, il existe $r_o > o$ tel que $A(\alpha(\eta,r))(\zeta) \in \omega$ pour $(\eta,r) \in \Lambda$, $\zeta \in \partial D$ et $o \leqslant r \leqslant r_o$.

Dans la suite on écrira $A(\alpha(\eta,r)) = A(\eta,r)$, $G(\alpha(\eta,r)) = G(\eta,r)$, $Z(\alpha(\eta,r)) = Z(\eta,r)$...

DEFINITION 4.6.

$$\Omega^r = \left\{ A(\eta,r)(a),\ (\eta,r) \in \Lambda \right\}$$

$$\Lambda^r = \left\{ \eta \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^{2d}\ ;\ (\eta,r) \in \Lambda \right\}$$

$$A^r : \Lambda^r \times \bar{D} \to \mathbb{C}^N$$

$$(\eta,\zeta) \to A(\eta,r)(\zeta).$$

Soit ω *un voisinage de* o *dans* $\widetilde{M}$, *il existe* $r_o > o$ *tel que pour* $o \leqslant r \leqslant r_o$, A^r *soit une famille de disques analytiques dont le bord est sur* ω. *Si l'image de* A^r *contient un voisinage de* o *dans* $\mathbb{C}^N$ *alors d'après le théorème 2.6,* $\widetilde{M}$ *est localement* CR *prolongeable au voisinage de* o.

En fait il suffit de montrer que Ω_r contient un voisinage de o dans $\mathbb{C}^N$.

Soit $A^r_\cdot : \Lambda^r \to \mathbb{C}^N$

$$\eta \mapsto A(\eta,r)(o) = (z,u+i\,\mathrm{Im}\,G(\eta,r)(o))$$

et $G^r_\cdot : \Lambda^r \to \mathbb{C}^n$

$$\eta \mapsto G(\eta,r)(o)$$

Posons enfin $D_\eta A^r$ la matrice jacobienne de $A^r_\cdot$ par rapport à η ; $D_z\,\mathrm{Im}\,G^r_\cdot$ la matrice jacobienne de $\mathrm{Im}\,G^r_\cdot$ par rapport à z ; $D_t\,\mathrm{Im}\,G^r_\cdot$ la matrice jacobienne de $\mathrm{Im}\,G^r_\cdot$ par rapport à t. On a

$$D_\eta A^r_\cdot = \begin{pmatrix} I_{2n} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} & 0 \\ D_z\,\mathrm{Im}\,G^r_\cdot & 0 & D_t\,\mathrm{Im}\,G^r_\cdot \end{pmatrix}$$

donc $|D_\eta A^r_\cdot| = |D_t\,\mathrm{Im}\,G^r_\cdot|$.

Supposons que $|D_t\,\mathrm{Im}\,G^r_\cdot|(o) \neq o$, alors on a $|D_\eta A^r_\cdot|(o) \neq o$ (4.5) or $A^r_\cdot : \Lambda^r \to \mathbb{C}^N$ et Λ^r est un ouvert de $\mathbb{C}^N$ donc le théorème d'inversion locale implique : il existe V voisinage de o dans $\mathbb{C}^N$, $V \subset \Lambda^r$, il existe W voisinage de $A^r_\cdot(o) = o$ dans $\mathbb{C}^N$ tel que $A^r_\cdot$ soit un C' difféomorphisme de V sur W donc $A^r_\cdot(V) = W$ or $V \subset \Lambda^r$ donc

$$W \subset A^r_\cdot(\Lambda^r) = \Omega_r$$

On a alors trouvé un voisinage de o dans $\mathbb{C}^N$ inclus dans Ω_r. Il reste simplement à montrer que $|D_t\,\mathrm{Im}\,G^r_\cdot|(o) \neq o$ et pour cela c'est l'hypothèse (H_2) qui va être mise en oeuvre.

Auparavant quelques notations sont nécessaires.

Notations 4.7. Posons

$$A^k_n = \{J = (j_1,\dots,j_p) \in \{1,\dots,n\}^p \; ; j_1 \leqslant \dots \leqslant j_k \quad \text{et} \quad j_{k+1} \leqslant \dots \leqslant j_p\}$$

$$q^k = (q^k_1,\dots,q^k_d)$$

$$\alpha^k_J(z) = z_{j_1} \dots z_{j_k} \bar{z}_{j_{k+1}} \dots \bar{z}_{j_p} \quad \text{si} \quad J = (j_1,\dots,j_p)$$

alors

$$q_i^k(z,\dots,z) = \sum_{J \in \{1,\dots,n\}^p} a_{J,i}^k \, \alpha_J^k(z)$$

$$= \sum_{J \in A_n^k} \tilde{a}_{J,i}^k \, \alpha_J^k(z).$$

On définit aussi $V(z) = (V_1(z),\dots,V_d(z))$ par

$$V_i(z) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{p'} \sum_{J \in A_n^k} b^k \tilde{a}_{J,i}^k \, \alpha_J^k(z)$$

$$= \sum_{k=1}^{p'} \sum_{J \in A_n^k} b^k \tilde{a}_{J,i}^k \, \alpha_J^k(z) + b^k \, \overline{\tilde{a}_{J,i}} \, \overline{\alpha_J^k(z)}$$

$$= \sum_{k=1}^{p'} \sum_{J \in A_n^k} \sum_{t=o} b^k \, \tilde{a}_{J,i}^{k,t} \, \alpha_J^{k,t}(z)$$

où

$$\tilde{a}_{J,i}^{k,o} = \tilde{a}_{J,i}^k, \ \tilde{a}_{J,i}^{k,1} = \overline{\tilde{a}_{J,i}^k}, \ \alpha_J^{k,o}(z) = \alpha_J^k(z) \ \text{ et } \ \alpha_J^{k,1}(z) = \overline{\alpha_J^k(z)}.$$

Enfin pour $\zeta_1,\dots,\zeta_d$ dans $\mathbb{C}^n$ on note par abus $V_i^j = V_i(\zeta_j)$ et $V^j = V(\zeta_j)$ on a alors

$$\det(V^1,\dots,V^d) = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{p'} \sum_J \sum_{t=o}^{1} b^k \tilde{a}_{J,1}^{k,t} \alpha_J^{k,t}(\zeta_1) & \dots & \sum_{k=1}^{p'} \sum_J \sum_{t=o}^{1} b^k \tilde{a}_{J,1}^{k,t} \alpha_J^{k,t}(\zeta d) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p'} \sum_J \sum_{t=o}^{1} b^k \tilde{a}_{J,d}^{k,t} \alpha_J^{K,t}(\zeta_1) & \dots & \sum_{k=1}^{p'} \sum_J \sum_{t=o}^{1} b^k \tilde{a}_{J,d}^{k,t} \alpha_J^{k,t}(\zeta d) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k_i \in \{1,\dots,p'\}} \sum_{J_i \in A_n^{k_i}} \sum_{t_i \in \{0,1\}} b^{k_1} \dots b^{k_d} \begin{vmatrix} \tilde{a}_{J_1,1}^{k_1,t_1} \dots \tilde{a}_{J_d,1}^{k_d,t_d} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \tilde{a}_{J_1,d}^{k_1,t_1} \dots \tilde{a}_{J_d,d}^{k_d,t_d} \end{vmatrix} \alpha_{J_1}^{k_1,t_1}(\zeta_1) \dots \alpha_{J_d}^{k_d,t_d}(\zeta d)$$

or $\alpha^{k,o}(z)$ et $\alpha_J^{k,1}(z)$ sont deux monomes en z, z linéairement indépendants car p est impair. Donc

$$(\alpha_{J_1}^{k_1,t_1}(\zeta_1)\ldots\alpha_{J_d}^{k_d,t_d}(\zeta_d))_{\substack{t_1,\ldots,t_d\in\{0,1\}\\ k_1,\ldots,k_d\in\{1,\ldots,p'\}\\ J_1\in A_n^{k_1}\\ \vdots\\ J_d\in A_n^{k_d}}}$$

forment une famille libre de monômes en $\zeta_1,\ldots,\zeta_d, \bar\zeta_1,\ldots,\bar\zeta_d$.

Donc $\det(V^1,\ldots,V^d)$ polynôme en $\zeta_1,\ldots,\zeta_d, \bar\zeta_1,\ldots,\bar\zeta_d$ combinaison linéaire de monômes de la famille ci-dessus, sera identiquement nul si et seulement si les coefficients de tous ses monômes sont nuls c'est-à-dire :

$$\begin{vmatrix} \tilde a^{k_1,t_1}_{J_{1,1}} \ldots \tilde a^{k_d,t_d}_{J_{d,1}} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \tilde a^{k_1,t_1}_{J_{1,d}} \quad \tilde a^{k_d,t_d}_{J_{d,d}} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{l} \forall\, t_1,\ldots,t_d \in \ 0,1 \\ \forall\, k_1,\ldots,k_d \in \ 1,\ldots,p' \\ \forall (J_1,\ldots,J_d) \in A_n^{k_1} \times\ldots\times A_n^{k_d} \end{array}$$

mais pour $i \in \{1,\ldots,d\}$:

$$\rho_i(z,w) = v_i - \sum_{k=1}^{p'} \sum_{J\in A^k} \sum_{t=o}^{1} \tilde a^{k,t}_{J,i}\, \alpha_J^{k,t}(z) - R(z,u)$$

donc pour tout I de $\{1,\ldots,n\}^p$ il existe $k \in \{1,\ldots,p'\}$; $J \in A_n^k$, $t \in \{0,1\}$ tel que

$$\frac{\partial^p \rho_i}{\partial z_I}(o) = C\, \tilde a^{k,t}_{J,i} \quad \text{où } C \text{ est une constante}$$

indépendante de i, ne dépendant que de I.

Or d'après le lemme 3.14, il existe $I_1,\ldots,I_d$ de longueur p tels que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^p\rho_1}{z_{I_1}}(o) & \ldots & \dfrac{\partial^p\rho_1}{z_{I_d}}(o) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^p\rho_d}{z_{I_1}}(o) & & \dfrac{\partial^d\rho_d}{z_{I_d}}(o) \end{vmatrix} \neq 0$$

Donc il existe $k_1,\dots,k_d$ dans $\{1,\dots,p'\}$, $(J_1,\dots,J_d)$ dans $A_n^{k_1} \times \dots \times A_n^{k_d}$, $t_1,\dots,t_d$ dans $\{0,1\}$ tels que

$$\begin{vmatrix} \tilde{a}_{J_1}^{k_1,t_1} & \dots & \tilde{a}_{J_d}^{k_d,t_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{J_1,d}^{k_1,d} & & \tilde{a}_{J_d,d}^{k_d,t_d} \end{vmatrix} \neq (o)$$

Donc $\det(V^1,V^d)$ polynôme en $\zeta_1,\dots,\zeta_d,\overline{\zeta}_1,\dots,\overline{\zeta}_d$ n'est pas identiquement nul et l'on peut choisir $\zeta_1,\dots,\zeta_d$ dans $\mathbb{C}^n$ tels que :

$$\det(V^1,\dots,V^d) \neq 0.$$

Mais d'après (4.4)

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} G_i(\eta,r)(o) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{p'} \sum_{s=1}^{d} b^k q_i^k(\alpha_{n_{s,1}^k}(\eta,r),\dots,\alpha_{n_{s,p}^p}(\eta,r)) \\ &+ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{p'} \sum_{j_\ell} q_i^k(\dots,\alpha_o,\dots) \\ (4.8) \qquad &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{p'} \sum_{s=1}^{d} b^k t_s q_i^k(\zeta_s,\dots,\zeta_r) \\ &+ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{p'} \sum_{j_\ell} q_i^k(\dots,z,\dots) \\ &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{p'} \sum_{s=1}^{d} \sum_{J \in A_n^k} t_s b^k \tilde{a}_{J,i}^k \alpha_J^k(\zeta_s) \end{aligned}$$

+ des termes contenant des z_ℓ ou des $\overline{z}_\ell$ $\ell \in \{1,\dots,d\}$

donc

$$\frac{\partial \operatorname{Im} G_i(\eta,r)(o)}{\partial t_j}(o) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{p'} \sum_{J \in A_n^k} b^k \tilde{a}_{J,i}^k \alpha_J^k(\zeta_j)$$

$$= V_i^j$$

Soit

$$| D_t \operatorname{Im} G_i^r | (o) = \det(V^1,\dots,V^d) \neq 0$$

5. - CONSTRUCTION DES DISQUES ANALYTIQUES DANS LE CAS GENERAL

On a construit des disques analytiques $A(\eta,r) = (Z(\eta,r),G(\eta,r))$ dont le bord est sur $\widetilde{M}$, on va construire, en utilisant la résolution de l'équation de Bishop due à Hill et Taiaini, des disques analytiques $A_1(\eta,r) = (Z(\eta,r)),\ G_1(\eta,r))$ dont le bord est sur M. Enfin on comparera les deux familles A et A_1 pour obtenir le résultat.

5.1. - Premières estimations

Dans la suite C désigne une constante positive qui peut changer d'une ligne à l'autre.

$$\alpha_j(\eta,r) = o,\ z,\ \frac{t_s}{r}\zeta_s \quad \text{ou} \quad r^{\frac{1}{p-1}}\ \zeta_s \quad \text{d'où}$$

$$\underline{|\alpha_j(\eta,r)| \leqslant C(r^{\frac{1}{p-1}} + \frac{|\eta|}{r}) \leqslant C\ r^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{pour } (\eta,r) \in \Lambda.}$$

Pour toute fonction g définie sur ∂D, $|g|_o$ désigne $\sup\limits_{x \in \partial D} |g(x)|$

$$|Z(\eta,r)|_o = \sup_{x \in \partial D} |Z(\eta,r)(x)| \quad \text{or pour } x \in \partial D$$

$$|Z(\eta,r)(x)| \leqslant \sum_{j \in I} |\alpha_j(\eta,r)| \leqslant C\ r^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{car} \quad \text{card } I < \infty$$

donc

$$\underline{|Z(\eta,r)|_o \leqslant C\ r^{\frac{1}{p-1}}} \quad \text{pour} \quad (\eta,r) \in \Lambda$$

$$|Z(\eta,r)|_\beta = \sup_{x \in \overline{D}} |Z(\eta,r)(x)| + \sup_{x,y \in \overline{D}} \frac{|Z(\eta,r)(x) - Z(\eta,r)(y)|}{|x-y|^\beta}$$

où $o < \beta < 1$ (voir la définition 2.10) de même

$$\underline{|Z(\eta,r)|_\beta \leqslant C\ r^{\frac{1}{p-1}}} \quad \text{pour} \quad (\eta,r) \in \Lambda$$

Dans la suite ∂_η désigne une dérivée quelconque du 1er ordre par rapport à η.

$$Z(\eta,r)(\zeta) = \sum_{j \in I} \alpha_j(\eta,r)\zeta^j$$

$$\partial_\eta\ Z(\eta,r)(\zeta) = \sum_{j \in I} (\partial_\eta\ \alpha_j(\eta,r))\ \zeta^j$$

or

$$|\partial_\eta\ \alpha_j(\eta,r)| \leqslant \frac{c}{r} \quad r \text{ petit}$$

donc

$$\underline{|\partial_\eta\ Z(\eta,r)|_o \leqslant \frac{c}{r} \quad r \text{ petit}}$$

5.2. - Construction de $U(\eta,r)$

Voir la définition 2.10 et le théorème 2.11, soit $P : \Lambda \to \mathscr{P}$

$$(\eta,r) \mapsto (Z(\eta,r),u)$$

Soit $\Lambda_o = \{(\eta,r) \in \Lambda \ / \ r \leqslant r_o\}$, la continuité de P implique que pour $r_o > r$ assez petit, $P(\Lambda_o) \subset B$, donc d'après le théorème 2.11 on sait construire $U(P(\eta,r))$ pour $(\eta,r) \in \Lambda_o$.

On notera $U(\eta,r) = U(P(\eta,r))$.

5.3. - Nouvelles estimations

$$|U(\eta,r)|_o \leqslant |U(\eta,r)|_\beta \leqslant C(\,|Z(\eta,r)|_\beta + |u|\,) \qquad \text{(voir (2.13))}$$

$$\underline{|U(\eta,r)|_o \leqslant |U(\eta,r)|_\beta \leqslant C\, r^{\frac{1}{p-1}}} \quad \text{pour } (\eta,r) \in \Lambda_o$$

Dans les estimations on pourra toujours prendre r aussi petit qu'on veut, quitte à restreindre Λ_o. D'après le théorème 2.11 $U(\eta,r)$ vérifie l'équation fonctionnelle de Bishop :

$$T(h(Z(\eta,r)(\zeta),\ U(\eta,r)(\zeta)) = u - U(\eta,r)(\zeta) \qquad \forall\, \zeta \in \partial D$$

donc $|U(\eta,r)|_{L^2} \leqslant |T(h(Z(\eta,r),\, U(\eta,r))|_{L^2} + |u|$ on a noté par abus $L^2 = L^2(\partial D)$.

T étant un opérateur borné de L^2 dans L^2, on obtient

$$|U(\eta,r)|_{L^2} \leqslant |h(Z(\eta,r),\, U(\eta,r))|_{L^2} + |u|$$

mais d'après le lemme 3.15 on a

$$|h(z,u)| \leqslant C(\,|z|^p + |u|^2 + |u|\,|z|\,)$$

Soit

$$|U(\eta,r)|_{L^2} \leqslant C(\,|Z(\eta,r)|_o)^p + C\,|U(\eta,r)|_{L^2}\,(\,|U(\eta,r)|_o + |Z(\eta,r)|_o) + |u|$$

mais $|U(\eta,r)|_o + |Z(\eta,r)|_o \leqslant \frac{1}{2c}$ pour r assez petit donc :

$$\frac{1}{2}\,|U(\eta,r)|_{L^2} \leqslant C(\,|Z(\eta,r)|_o)^p + |u|$$

$$|U(\eta,r)|_{L^2} \leqslant C((r^{1/p-1})^p + r^{p/p-1}) \quad \text{pour} \quad (\eta,r) \in \Lambda_o .$$

Soit
$$\underline{|U(\eta,r)|_{L^2} \leqslant C\, r^{p/p-1} \quad (\eta,r) \in \Lambda_o .}$$

D'autre part le lemme 3.15 nous fournit les estimations suivantes :

$$|\nabla_z h(z,u)| \leqslant C(|z|^{p-1} + |u|)$$

$$|\nabla_u h(z,u)| \leqslant C(|z| + |u|).$$

$\partial_\eta U(\eta,r)(\zeta) = - T(\partial_\eta h(z(\eta,r)(\zeta),U(\eta,r)(\zeta))) + \partial_\eta u$ car T commute avec les dérivations.

Donc :

$$|\partial_\eta U(\eta,r)|_{L^2} \leqslant |\partial_\eta h(Z(\eta,r),U(\eta,r))|_{L^2} + C$$
$$\leqslant |\nabla_z h(Z(\eta,r),U(\eta,r))|_{L^2} |\partial_\eta Z(\eta,r)|_o$$
$$+ |\nabla_u h(Z(\eta,r),U(\eta,r))|_o |\partial_\eta U(\eta,r)|_{L^2} + C$$

or
$$|\nabla_z h(Z(\eta,r),U(\eta,r))|_{L^2} \leqslant C((|Z(\eta,r)|_o)^{p-1} + |U(\eta,r)|_{L^2})$$
$$\leqslant C\, r$$

et
$$|\nabla_u h(Z(\eta,r),U(\eta,r))|_o \leqslant C(|Z(\eta,r)|_o + |U(\eta,r)|_o)$$
$$\leqslant C\, r^{\frac{1}{p-1}}$$

donc
$$|\partial_\eta U(\eta,r)|_{L^2} \leqslant C\, r\, \frac{1}{r} + C\, r^{\frac{1}{p-1}} |\partial_\eta U(\eta,t)|_{L^2} + C$$

$$C\, r^{\frac{1}{p-1}} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{pour r assez petit}$$

donc

$$\underline{|\partial_\eta U(\eta,r)|_{L^2} \leqslant C \quad \text{pour} \quad (\eta,r) \in \Lambda_o .}$$

5.4. - Construction des disques analytiques dont le bord est sur M

Pour $(\eta,r) \in \Lambda_o$, $U(\eta,r) + \sqrt{-1}\ h(Z(\eta,r), U(\eta,r)) : \partial D \to \mathbb{C}^d$ est valeur au bord d'un disque analytique $G_1(\eta,r) : \bar{D} \to \mathbb{C}^d$ tel que Re $G_1(\eta,r)(o) = u$, et, $A_1(\eta,r) = (Z(\eta,r), G_1(\eta,r))$ de $\bar{D}$ dans $\mathbb{C}^N$ est un disque analytique dont le bord est sur M (voir la remarque 2.9).

$A_1 : \Lambda_o \times \bar{D} \to \mathbb{C}^N$ est une famille de disques analytiques à bord sur M, de plus $Z(o,o)(\zeta) = U(o,o)(\zeta) = o$ pour tout ζ de ∂D donc $A_1(o,o)(\zeta) = o$ pour tout ζ de ∂D.

Si ω est un voisinage de o sur M, on peut réduire r_o , et donc Λ_o , pour que $A_1(\eta,r)(\zeta) \in \omega$ pour $(\eta,r) \in \Lambda_o$ et $\zeta \in \partial D$.

On a trouvé une famille A_1 dont le bord est dans ω, si l'on montre que l'image de A_1 contient un voisinage de o dans $\mathbb{C}^N$, on aura montré que M est localement CR prolongeable au voisinage de o.

Pour cela il suffit de montrer que $\Omega_1^r = \{A_1(\eta,r)(o) ; (\eta,r) \in \Lambda_o\}$ contient un voisinage de o dans $\mathbb{C}^N$.

5.5. - Comparaison de A et A_1

On note par abus

$$G(\eta,r)\ (e^{i\phi}) = G_\phi$$

$$U(\eta,r)(e^{i\phi}) = U_\phi$$

$$G_1(\eta,r)(e^{i\phi}) = G_{1,\phi}$$

$$Z(\eta,r)(e^{i\phi}) = Z_\phi$$

Comme $\operatorname{Im} G_1(\eta,r) - \operatorname{Im} G(\eta,r) : \bar{D} \to \mathbb{R}^d$ est harmonique sur D pour $(\eta,r) \in \Lambda_o$ on a

$$\operatorname{Im} G_1(\eta,r)(o) - \operatorname{Im} G(\eta,r)(o) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} (\operatorname{Im} G_{1\phi} - \operatorname{Im} G_\phi)d\phi$$

mais

$$G_\phi \in M,\ G_{1,\phi} \in \widetilde{M} \text{ donc } \operatorname{Im} G_{1,\phi} = h(Z_\phi,U_\phi),\ \operatorname{Im} G_\phi = \widetilde{h}(Z_\phi)$$

or

$$h(Z_\phi,U_\phi) - \widetilde{h}(Z_\phi) = R(Z_\phi,U_\phi) \quad \text{(Lemme 3.15)}$$

donc

$$|\operatorname{Im} G_{1,\phi} - \operatorname{Im} G_\phi| \leqslant C\ |U_\phi|\,(|U_\phi| + |Z_\phi|) + C\ |Z_\phi|^{p+1}\ .$$

Soit

$$|\operatorname{Im} G_1(\eta,r)(o) - \operatorname{Im} G(\eta,r)(o)| \leqslant C \int_o^{2\pi} |\operatorname{Im} G_{1,\phi} - \operatorname{Im} G_\phi| d\phi$$

$$\leqslant C \int_o^{2\pi} (|U|_\phi + |Z_\phi|)\, |U_\phi| d\phi + C \int_o^{2\pi} |Z_\phi|^{p+1} d\phi$$

$$\leqslant C\, (|U(\eta,r)|_o + |Z(\eta,r)|_o) \int_o^{2\pi} |U_\phi| d\phi + C\, (|Z(\eta,r)|_o)^{p+1}$$

$$\leqslant C\, (|U(\eta,r)|_o + |Z(\eta,r)|_o)\, |U(\eta,r)|_{L^2} + C(|Z(\eta,r)|_o^{p+1})$$

$$\leqslant C\, r^{\frac{p+1}{p-1}}$$ pour $(\eta,r) \in \Lambda_o$ ceci d'après les estimations précédentes.

Soit $$\underline{|A_1(\eta,r)(o) - A(\eta,r)(o)| \leqslant C\, r^{\frac{p+1}{p-1}}}$$

car $$A_1(\eta,r)(o) = (Z(\eta,r)(o),\ u + \sqrt{-1}\, \operatorname{Im} G_1(\eta,r)(o))$$

et $$A(\eta,r)(o) = (Z(\eta,r)(o)\,,\ u + \sqrt{-1}\, \operatorname{Im} G(\eta,r)(o)).$$

De plus $A(o,r)(o) = o$ voir 4.4 on obtient finalement :

(5.5.1) $$\underline{|A_1(o,r)(o)| \leqslant C\, r^{\frac{p+1}{p-1}} \quad (\eta,r) \in \Lambda_o}$$

$$\operatorname{Im} G_1(\eta,r)(o) - \operatorname{Im} G(\eta,r)(o) = \frac{1}{2\pi} \int_{o2}^{2\pi} (\operatorname{Im} G_{1,\phi} - \operatorname{Im} G_\phi) d\phi$$

$$|\partial_\eta \operatorname{Im} G_1(\eta,r)(o) - \partial_\eta \operatorname{Im} G(\eta,r)(o)| \leqslant \frac{1}{2} \int_o^{2\pi} |\partial_\eta \operatorname{Im} G_{1,\phi} - \partial_\eta \operatorname{Im} G_\phi| d\phi$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} |\partial_\eta (h(Z_\phi,U_\phi) - \tilde{h}(Z_\phi))| d\phi$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} |\partial_\eta (h-\tilde{h})(Z_\phi,U_\phi)| d\phi$$ en posant $\tilde{h}(z,u) = \tilde{h}(z)$

$$\leqslant C\, |\nabla_z (h-\tilde{h})(Z(\eta,r),U(\eta,r)|_{L^2}\, |\partial_\eta Z(\eta,r)|_o$$

$$+ C\, |\nabla_u h(Z(\eta,r),U(\eta,r))|_o\, |\partial_\eta U(\eta,r)|_{L^2} = A+B$$

$$A \leqslant C(|U(\eta,r)|_{L^2} + (|Z(\eta,r)|_o)^p)\, |\partial_\eta Z(\eta,r)|_o$$ car $h-\tilde{h}(z,u) = R(z,u)$

et $|\nabla_z R(z,u)| \leqslant C(|u| + |z|^p)$

$$A \leqslant C\, r^{p/p-1} \times \frac{1}{r}$$

$$A \leqslant C\, r^{1/p-1}$$

et

$$B \leqslant C(|Z(\eta,r)|_o + |U(\eta,r)|_o)\, |\partial_\eta U(\eta,r)|_{L^2} \quad \text{car} \quad |\nabla_u h(z,u)| < C(|u| + |z|)$$

$$B \leqslant C\, r^{1/p-1} \times C$$

$$B \leqslant C\, r^{1/p-1}.$$

Finalement :

$$|\partial_\eta \operatorname{Im} G_1(\eta,r)(o) - \partial_\eta \operatorname{Im} G(\eta,r)(o)| \leqslant C\, r^{1/p-1}$$

donc

(5.5.2) $$\underline{|\partial_\eta A_1(\eta,r)(o) - \partial_\eta A(\eta,r)(o)| \leqslant C\, r^{1/p-1}} \quad (\eta,r) \in \Lambda_o$$

Il reste à estimer $|(\partial_\eta A)(\eta,r)(o) - (\partial_\eta A)(o,r)(o)|$

$$A(\eta,r)(o) = (z, u + \sqrt{-1}\, \operatorname{Im} G(\eta,r)(o))$$

$$(\partial_\eta A)(\eta,r)(o) = (\partial_\eta z, \partial_\eta u + \sqrt{-1}\, (\partial_\eta \operatorname{Im} G)(\eta,r)(o))$$

$$(\partial_\eta A)(o,r)(o) = (\partial_\eta z, \partial_\eta u + \sqrt{-1}\, (\partial_\eta \operatorname{Im} G)(o,r)(o))$$

car $\eta = (z,u,t)$ et $\partial_\eta z$ et $\partial_\eta u$ sont des constantes donc

$$|(\partial_\eta A)(\eta,r)(o) - (\partial_\eta A)(o,r)(o)| = |(\partial_\eta \operatorname{Im} G)(\eta,r)(o) - (\partial_\eta \operatorname{Im} G)(o,r)(o)|$$

d'après (4.8)

$$\operatorname{Im} G(\eta,r)(o) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{p} \sum_{s=1}^{d} b^k\, t_s\, q^k(\zeta_s,\dots,\zeta_s)$$

$$+ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{p'} \sum_{ji} q^k(\dots,z,\dots)$$

or $q^k(\dots,z,\dots)$ est un terme du type

$$c\left(\frac{t_1}{r}\right)^{n_1}\dots\left(\frac{t_d}{r}\right)^{n_d} r^{\ell} z_1^{j_1}\dots z_n^{j_n}\bar{z}_1^{k_1}\dots\bar{z}_n^{k_n}$$

où $c \in \mathbb{C}^n$, $n_1,\dots,n_d$, $j_i,\dots,j_n$, $k_1,\dots,k_n \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{R}^+$, et, un des j_i ou un des k_i est non nul.

<u>Si $\partial_n = \dfrac{\partial}{\partial t_i}$</u>

$$(\partial_\eta \operatorname{Im} G)(\eta,r)(o) = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{p'} b^k q^k(\zeta_i,\dots,\zeta_i)$$

$$+ 2\operatorname{Re}\sum_{n_i\geqslant i} C\, n_i\,\frac{1}{r}\left(\frac{t_1}{r}\right)^{n_1}\dots\left(\frac{t_i}{r}\right)^{n_i-1}\dots\left(\frac{t_d}{r}\right)^{n_d} r^{\ell} z_1^{j_1}\dots z_n^{j_n}\bar{z}_1^{k_1}\dots\bar{z}_n^{k_n}$$

$$(\partial_\eta \operatorname{Im} G)(o,r) = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{p'} b^k q^k(\zeta_i,\dots,\zeta_i)$$

donc

$$|(\partial_\eta \operatorname{Im} G)(\eta,r) - (\partial_\eta \operatorname{Im} G)(o,r)| \leqslant \frac{c}{r}\,|z| \leqslant \frac{c}{r}\, r^{p/p-1}$$

$$|(\partial_\eta \operatorname{Im} G)(\eta,r) - (\partial_\eta \operatorname{Im} G)(o,r)| \leqslant C\, r^{1/p-1} \quad \text{pour } (\eta,r)\in\Lambda_o .$$

<u>Si $\dfrac{\partial}{\partial\eta} = \dfrac{\partial}{\partial u_i}$</u> alors $|(\partial_\eta \operatorname{Im} G)(\eta,r)(o) - (\partial_\eta \operatorname{Im} G)(o,r)(o)| = o$

<u>Si $\dfrac{\partial}{\partial\eta} = \dfrac{\partial}{\partial z_i}$</u>

$$|\partial_\eta \operatorname{Im} G(\eta,r)(o)| \leqslant |2\operatorname{Re}\sum_{j_i\geqslant 1} C_{ji}\left(\frac{t_1}{r}\right)^{n_1}\dots\left(\frac{t_d}{r}\right)^{n_d} r^k z_1^{j_1}\dots z_i^{j_i-1}\dots z_n^{j_n}\dots z_n^{k_n}|$$

$$\leqslant C\, r^{1/p-1}$$

donc $|\partial_\eta \operatorname{Im} G(\eta,r)(o) - (\partial_\eta \operatorname{Im} G)(o,r)(o)| \leqslant C\, r^{1/p-1}$ de même si $\dfrac{\partial}{\partial\eta} = \dfrac{\partial}{\partial\bar{z}_i}$

finalement on obtient :

(5.5.3) $$(\partial_\eta A)(\eta,r)(o) - \partial_\eta A(o,r)(o)| \leqslant C\, r^{1/p-1} \quad (\eta,r)\in\Lambda_o$$

5.6. - CONCLUSION

Posons $A^r_{1,\cdot} : \Lambda^r \to \mathbb{C}^N$

$$\eta \to A_1(\eta,r)(o)$$

or d'après (4.5) on a $|D A^r_\cdot|(o) \neq o$ et donc $|D A^r_\cdot|(\eta) \neq o$ pour $(\eta,r) \in \Lambda_o$ et r_o assez petit.

On aura $|D_\eta A^r_{1,\cdot}|(\eta) \neq o$ pour $(\eta,r) \in \Lambda_o$ et r_o assez petit d'après (5.5.2).

On ne peut pas conclure immédiatement comme on l'avait fait pour $\widetilde{M}$ car ici $a_r = A_1(o,r)(o)$ n'est pas nécessairement nul, mais $|D_\eta A^r_{1,\cdot}|(o) \neq o$ donc $(D_\eta A^r_{1,\cdot})^{-1}(o)$ existe et il existe λ positif tel que :

$$2\lambda \,\| (D_\eta A^r_{1,\cdot})^{-1}(o) \| \leqslant 1 \tag{5.6.1}$$

où $\| \quad \|$ désigne la norme usuelle des matrices.

De plus

$$\| (D_\eta A^r_{1,\cdot})(\eta) - (D_\eta A^r_{1,\cdot})(o) \| \leqslant \| (D_\eta A^r_{1,\cdot})(\eta) - (D_\eta A^r_\cdot)(\eta) \|$$

$$+ \| (D_\eta A^r_\cdot)(\eta) - (D_\eta A^r_\cdot)(o) \| + \| (D_\eta A^r_\cdot)(o) - (D_\eta A^r_{1,\cdot})(o) \|$$

$$= A + B + C$$

A et C tendent vers o quand r tend vers o pour cela voir (5.5.2) B tend aussi vers o quand r tend vers o, d'après (5.5.3).

Soit $\| (D_\eta A^r_{1,\cdot})(\eta)) - (D_\eta A^r_{1,\cdot})(o) \| \leqslant \lambda$ pour $(\eta,r) \in \Lambda_o$ et r_o suffisamment petit (5.6.2).

On utilise un théorème d'inversion locale précisé à savoir :

Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, C^1 au voisinage de x_o

λ,ν deux constantes positives

si $2\lambda \,\| Df(x_o)^{-1} \| \leqslant 1$ et $\| Df(x) - Df(x_o) \| < \lambda$ pour tout x dans $B(x_o,\nu)$, où $B(x_o,\nu)$ est la boule ouverte dans $\mathbb{R}^m$ de centre x_o et de rayon ν alors $f(B(x_o,\nu)) \supset B(f(x_o),\lambda v)$

(voir par exemple la démonstration du théorème d'inversion locale dans [9] page 222).

ici $\quad f : R^{2N} \to R^{2N}$

$$\eta \to A_1(\eta,r)(o)$$

$x_o = o$ et $f(x_o) = a_r$

$\nu = r^{p/p-1}$

et d'après (5.6.1) et (5.6.2) on obtient pour $r \leqslant r_o$:

$$f(B(o,r^{p/p-1})) \supset B(a_r , \lambda r^{p/p-1})$$

Soit $\Omega_1^r \supset B(a_r , \lambda r^{p/p-1})$ or $|a_r| < C\, r^{p+1/p-1} = (C\, r^{1/p-1})\, r^{p+p-1}$

d'après (5.5.1), donc $|a_r| < \lambda r^{p/p-1}$ pour r_o assez petit c'est-à-dire $o \in B(a_r , \lambda r^{p/p-1}) \subset \Omega_1^r$ donc Ω_1^r contient un voisinage de o dans $\mathbb{C}^N$.

REFERENCES

[1] M.S. BAOUENDI et F. TREVES. *«A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields».* Ann. of Marh. 113 (1981), 387-421.

[2] M.S. BAOUENDI et F. TREVES. *«About the holomorphic extension of CR functions on real hypersurfaces in complex space».* Duke Math. J. 51, (1984), 77-107.

[3] E. BISHOP. *«Differentiable manifolds in complex Euclidean space».* Duke Math. J., 32 (1965), 1-22.

[4] AL BOGGESS. *«CR extendability near a point where the first Leviform vanishes».* Duke Math. J. 48 (1981), 665-684.

[5] AL BOGGESS et J.C. POLKING. *«Holomorphic extension of CR functions»* Duke Math. J. 49 (1982), 757-784.

[6] C.D. HILL et G. TAIAINI. *«Families of analytic disc in $\mathbb{C}^n$ with Boundaries on a prescribed CR-submanifold».* Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa 4-5 (1978), 327-380.

[7] L. HORMANDER. *«An introduction to complex analysis in several variables».* Van Nostrand N.J. 1966.

[8] H. LEWY. *«On the local character of the solutions of an a typical linear differential equation in three variables and a related theorem for regular functions of two complex variables».* Ann. of Math. (2) 64 (1956), 514-522.

[9] W. RUDIN. *«Principles of Mathematical analysis 3 rd edition».* Mc Graw Hill, (1964).

[10] R.O. WELLS, *Jr.* *«On the local holomorphic hull of a real submanifold in several complex variables».* Comm. Pure Appl. Math. 19 (1966), 145-165.

[11] R.O. WELLS, Jr. *«Holomorphic hulls and holomorphic convexity of differentiable submanifolds».* Trans. Amer. Math. Soc. 132 (1968), 245-262.

(Manuscrit reçu le 14 octobre 1985)