ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PIERRE LOUIS LIONS
BENOÎT PERTHAME

Une remarque sur les opérateurs non linéaires intervenant dans les inéquations quasi-variationnelles

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 5, nº 3-4 (1983), p. 259-263
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1983_5_5_3-4_259_0>

© Université Paul Sabatier, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol V, 1983, P. 259 à 263

UNE REMARQUE SUR LES OPERATEURS NON LINEAIRES INTERVENANT DANS LES INEQUATIONS QUASI-VARIATIONNELLES

Pierre Louis Lions [(1)] **et Benoît Perthame** [(2)]

(1) Ceremade. Université Paris IX-Dauphine, Place de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cédex 16.
(2) E.N.S. 45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cédex 05.

Résumé : Dans cette note nous caractérisons les opérateurs intervenant naturellement dans les inéquations quasi-variationnelles.

Summary : In this note we caracterize the operators arising in quasi-variational inequalities.

I. - INTRODUCTION

A. Bensoussan et J.L. Lions ([1], [2]) ont introduit une classe de problèmes aux dérivées partielles non linéaires appelés inéquations quasi-variationnelles. Ces problèmes, qui interviennent en contrôle impulsionnel stochastique, sont de la forme :

(1) $$\max(-\Delta u+u-f,\ u-Mu)=0 \quad \text{dans } R^N$$

où f est une fonction donnée et M est un opérateur non linéaire de l'espace $C_b(R^N)$ des fonctions continues bornées sur R^N dans lui-même. L'exemple canonique d'opérateur M est :

(2) $$M_0u(x)=\inf_{\xi\geqslant 0}\ k(\xi)+u(x+\xi) \quad , \qquad \forall\, x\in R^N$$

où $\xi \geqslant 0$ signifie : $\xi = (\xi_1,...,\xi_N)$ et $\xi_i \geqslant 0$ pour tout i et où $k(\xi)$ est une constante par exemple positive (dépendant de ξ).

Des propriétés importantes (fondamentales pour l'existence de solution faible de (1) - cf. [1], [2], U. Mosco [8]) de cet opérateur M_0 sont :

$$\text{(3)} \qquad M \text{ est croissant i.e. : } Mu \leqslant Mv \text{ sur } R^N \text{ si } u \leqslant v \text{ sur } R^N$$

$$\text{(4)} \qquad \forall\, u \in C_b(R^N),\ \forall\, \lambda \in R \qquad M(u+\lambda) = Mu + \lambda.$$

De plus une autre propriété très importante de M_0 (impliquant notamment la continuité et l'unicité des solutions faibles de (1) - cf. Hanouzet et Joly [6]) est la concavité i.e. :

$$\text{(5)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} M \text{ est concave : } M(\theta u+(1-\theta)v) \geqslant \theta\, Mu + (1-\theta)Mv \quad \text{sur } R^N \\ \\ \forall\, u, v \in C_b(R^N), \qquad \forall\, \theta \in [0,1]. \end{array} \right.$$

Enfin il est clair que M_0 vérifie :

$$\text{(6)} \qquad Mu(x+h) = M\{u(\cdot+h)\}(x) \qquad \forall\, u \in C_b(R^N), \quad \forall\, x,h \in R^N.$$

Dans ce qui suit nous montrons que si M est un opérateur de $C_b(R^N)$ dans $C_b(R^N)$ vérifiant (3)-(6) alors nécessairement il existe une famille $(k_\alpha,P_\alpha)_{\alpha \in A}$ - où les k_α sont des constantes minorées et où les P_α sont des mesures de probabilité sur R^N - telle que : $\forall\, u \in C_b(R^N)$, $\forall\, x \in R^N$

$$\text{(7)} \qquad Mu(x) = \inf_{\alpha \in A} \{ k_\alpha + (u * P_\alpha)(x) \}.$$

Nous expliquons également brièvement comment (1) s'interprète comme un problème de contrôle stochastique impulsionnel. Signalons également que ce résultat est utilisé dans B. Perthame [9] pour l'obtention de solutions $W^{2,\infty}(R^N)$ de (1) si M vérifie (3)-(6).

II. - LE RESULTAT DE CARACTERISATION

THEOREME. *Soit* M *un opérateur de* $C_b(R^N)$ *dans* $C_b(R^N)$ *vérifiant* (3)-(6). *Alors il existe une famille de constantes* $(k_\alpha)_{\alpha \in A}$ *minorée et de mesures de probabilité sur* R^N $(P_\alpha)_{\alpha \in A}$ *telle que :* $\forall\, u \in C_b(R^N)$, $\forall\, x \in R^N$:

$$\text{(7)} \qquad Mu(x) = \inf_{\alpha \in A} \{ k_\alpha + (u * P_\alpha)(x) \}.$$

Remarque 1. Si $M = M_0$ alors on peut prendre $A = \{\xi \geqslant 0\}$, $\alpha = \xi$, $k_\alpha = k(\xi)$, $P_\alpha = \delta_{-\xi}$. De plus il est clair que M défini par (7) vérifie (3)-(6).

Remarque 2. La démonstration ci-dessous montre également que si M vérifie seulement (3)-(5) alors pour tout $x \in R^N$ on a :

$$\forall\, u \in C_b(R^N)\ ,\quad Mu(x) = \inf_{\alpha \in A} \left\{ k_\alpha(x) + \int u \, dP_{\alpha,x} \right\}$$

où k_α, P_α dépendent donc maintenant de $x \in R^N$.

Remarque 3. D'après un résultat général de M.G. Crandall et L. Tartar [3], on voit que si M vérifie (3) et (4) alors :

$$\| (Mu-Mv)^+ \|_\infty \leqslant \| (u-v)^+ \|_\infty \qquad \forall\, u,v \in C_b(R^N)$$

et donc en particulier :

$$\text{(8)} \qquad \| Mu-Mv \|_\infty \leqslant \| u-v \|_\infty , \qquad \forall\, u,v \in C_b(R^N).$$

La démonstration de ces inégalités étant très simple, nous la rappelons : il suffit de remarquer que $u \leqslant v + \| (u-v)^+ \|_\infty$ et donc d'après (3)

$$Mu \leqslant M(v + \| (u-v)^+ \|_\infty) = Mv + \| (u-v)^+ \|_\infty \qquad \text{(d'après (4))}.$$

Démonstration du Théorème. On note ϕ l'application de $C_b(R^N)$ dans R définie par : $\phi(u) = Mu(0)$. D'après (5) ϕ est concave et d'après (8) ϕ est lipschitzienne sur $C_b(R^N)$. On déduit alors de résultats classiques d'analyse convexe (cf. par exemple I. Ekeland et R. Temam [4]) qu'en tout point u de $C_b(R^N)$ il existe μ_u dans le sur-différentiel de ϕ au point u. Bien sûr μ_u est une mesure bornée sur R^N et on a :

$$\phi(v) = \inf_u \left\{ \phi(u) + \int (v-u) d\mu_u \right\}, \qquad \forall\, u \in C_b(R^N).$$

En particulier :

$$\phi(v) \leqslant \phi(u) + \int (v-u) d\mu_u \ , \qquad \forall\, u,v \in C_b(R^N).$$

On déduit de cette inégalité et de (3) que μ_u est une mesure positive. De plus en prenant $v = u + \lambda$ avec $\lambda \in R$ on obtient :

$$\forall\, \lambda \in R \qquad \lambda \leqslant \int \lambda \, d\mu_u = \lambda\, \mu_u(R^N)$$

et donc $\mu_u(R^N) = 1$.

Pour conclure on pose $k_u = \phi(u) - \int u \, d\mu_u$ et on introduit P_u la mesure de probabilité définie par : $P_u(B) = \mu_u(-B)$ pour tout borélien B de R^N. Alors d'une part $k_u \geqslant \phi(0)$ et d'autre part d'après (6) :

$$\forall h \in R^N \qquad Mv(h) = \phi \left\{ v(\cdot + h) \right\}$$
$$= \inf_u \left\{ k_u + \int v(x+h) d\mu_u(x) \right\}$$
$$= \inf_u \left\{ k_u + (v * P_u)(h) \right\}.$$

Remarque 4. Ainsi que nous l'avons indiqué dans l'introduction, la forme obtenue (7) de tout opérateur M vérifiant (3)-(6) implique immédiatement que l'on peut obtenir l'existence et l'unicité de solutions $u \in W^{2,\infty}(R^N)$ d'inéquations quasi-variationnelles pour les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (et pour (1) en particulier). Ceci est une conséquence de la méthode de résolution introduite dans B. Perthame [9] , [10] - méthode qui utilise les estimations a priori développées dans P.L. Lions [7] , L.C. Evans et P.L. Lions [5] .

Pour conclure, nous décrivons brièvement le problème de contrôle stochastique impulsionnel associé à (1) : u peut s'interpréter comme la fonction coût minimum correspondant à un problème en horizon infini où l'état est représenté par un mouvement brownien qui, en une suite croissante de temps d'arrêt, saute de telle façon que le saut est une variable aléatoire indépendante du brownien et dont la loi appartient à la famille $(P_\alpha)_{\alpha \in A}$. Le cas particulier $M = M_0$ est le cas habituel où le saut est un élément ξ du cône positif de R^N. Cette interprétation stochastique est développée dans B. Perthame [10] .

REFERENCES

[1] A. BENSOUSSAN et J.L. LIONS. *«Nouvelle formulation de problèmes de contrôle impulsionnel et applications»*. Comptes-Rendus Paris, 276 (1973), p. 1189-1192.

[2] A. BENSOUSSAN et J.L. LIONS. *«Inéquations variationnelles et quasi-variationnelles en contrôle stochastique et en contrôle impulsionnel»*. Dunod, Paris (1982).

[3] M.G. CRANDALL et L. TARTAR. *«Some relations between non expansive and order preserving mappings»*. A paraître.

[4] I. EKELAND et R. TEMAM. *«Convex analysis and variational problems»*. North-Holland, Amsterdam (1976).

[5] L.C. EVANS et P.L. LIONS. *«Résolution des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman pour les opérateurs uniformément elliptiques»*. Comptes-Rendus, 290 (1980), p. 1049-1052.

[6] B. HANOUZET et J. JOLY. *«Convergence uniforme des itérés définissant la solution faible d'une inéquation quasi-variationnelle»*. Comptes-Rendus Paris, 286 (1978).

[7] P.L. LIONS. *«Résolution analytique des problèmes de Bellman-Dirichlet»*. Acta Mathematica, 146 (1981), p. 151-166.

[8] U. MOSCO. *«Implicit variational problems and quasi-variational inequalities. In Non-linear operators and the Calculus of Variations»*. Bruxelles, 1975, Springer Berlin (1976).

[9] B. PERTHAME. *«Inéquations quasi-variationnelles et équations de Hamilton-Jacobi-Bellman dans R^N»*. A paraître.

[10] B. PERTHAME. Travail en préparation.

(Manuscrit reçu le 20 décembre 1982)