ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ANNE-MARIE CHARBONNEL

Spectre conjoint d'opérateurs pseudodifférentiels qui commutent

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 5, nº 2 (1983), p. 109-147
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1983_5_5_2_109_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol V, 1983, P. 109 à 147

SPECTRE CONJOINT D'OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS QUI COMMUTENT

Anne-Marie Charbonnel (1)

(1) Institut de Mathématiques et d'Informatique, Université de Nantes, 2 chemin de la Houssinière 44072 Nantes Cédex - France.

Résumé : On étudie le comportement asymptotique du spectre conjoint de ν opérateurs pseudo-différentiels dans $\mathbb{R}^n$, commutant deux à deux, dont la somme des carrés satisfait à une hypothèse d'ellipticité globale.
On obtient une estimation du nombre d'éléments du spectre conjoint situés dans l'intersection d'un cône et d'une sphère dont le rayon tend vers l'infini.

Summary : We consider in $\mathbb{R}^n$ ν pseudodifferential operators P_j , $j = 1,\dots,\nu$, which commute, and we suppose that the operator $P = \sum_{j=1}^{\nu} P_j^2$ is globally elliptic.
We estimate the asymptotic behaviour of the joint spectrum, by studying the part of it which belongs to the intersection of a cone and of a sphere with a radius becoming infinite.

INTRODUCTION ET RESULTATS

Considérons l'hamiltonien quantique :

$$H = -\frac{h^2}{2m} \Delta + V$$

où V est une fonction radiale dans $\mathbb{R}^3$.

La symétrie sphérique du potentiel se traduit par le fait que H commute avec chacun des opérateurs suivants :

$$J_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \; ; \; J_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \; ; \; J_3 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \, .$$

En mécanique quantique, l'étude du spectre commun de H, de $|J|^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$, et de J_3 (générateur infinitésimal du groupe des rotations autour de $0x_3$) permet de faire une classification des états de la particule (cf. exemple 1 page 6). On peut, pour cet exemple, se référer à A. Messiah [12].

Plus généralement, considérons sur $\mathbb{R}^n$ ν opérateurs pseudodifférentiels $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu$, symétriques et commutant deux à deux, dont les symboles de Weyl q_i satisfont aux hypothèses suivantes :

(H-1) q_i admet un développement en composantes «quasi-homogènes» C^∞ en dehors de l'origine :

(0.1) $$q_i \sim \sum_{j \geq 0} a_j^i$$

avec

(0.2) $$a_j^i(\rho^k x, \rho^\ell \xi) = \rho^{2m-j} a_j^i(x,\xi), \; \forall \rho > 0, \quad \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$$

où k et ℓ sont des entiers ≥ 1 (indépendants de i).

(H-2) Le symbole principal joint $a_0 = (a_0^1, \ldots, a_0^\nu)$ vérifie :

(0.3) $$|a_0(x,\xi)| \neq 0 \quad \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}.$$

Les symboles q_i appartiennent alors aux classes de Beals $S^{2m/k+\ell}_{\Phi,\varphi}$ (cf [3]) avec :

(0.4) $$\begin{cases} \Phi(x,\xi) = \mu^\ell(x,\xi) \\ \varphi(x,\xi) = \mu^k(x,\xi) \end{cases} \quad \text{avec } \mu(x,\xi) = (1 + |x|^{1/k} + |\xi|^{1/\ell}),$$

et l'hypothèse (H-2) signifie que $Q = \sum_{i=1}^{\nu} Q_i^2$ est «globalement elliptique» (d'ordre 4m). En effet, si q désigne le symbole de Weyl de Q, alors (H-2) implique :

(0.5) $$\exists C_1, C_2 > 0 : q(x,\xi) \geq C_1 \, \mu^{4m}(x,\xi), \quad \forall (x,\xi) : |(x,\xi)| \geq C_2 .$$

Alors Q admet une unique réalisation autoadjointe dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, que l'on note encore Q, et l'opérateur $\widetilde{Q} = I + Q$ est d'inverse compact. Q possède donc un spectre composé d'une suite croissante de valeurs propres tendant vers $+\infty$, et il existe dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ une base orthonormale $(\varphi^j)_{j \in \mathbb{N}}$ composée de fonctions propres communes à tous les opérateurs Q_i et à Q. On définit alors le spectre joint des opérateurs $Q_1, \ldots, Q_\nu$ comme étant (cf. [6]) la partie Λ^Q de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

(0.6) $$\Lambda^Q = \left\{\lambda^j = (\lambda_1^j, \ldots, \lambda_\nu^j)\ ;\ Q_i\varphi^j = \lambda_i^j\varphi^j,\ \forall\, i = 1,\ldots,\nu,\quad \forall\, j \in \mathbb{N}\right\},$$

On se propose d'étudier le comportement asymptotique de Λ^Q, c'est-à-dire d'estimer :

(0.7) $$N_Q(\tau) = \mathrm{card}\ \ j \in \mathbb{N}\ ;\ \lambda^j \in \Lambda^Q \cap C \quad \text{et} \quad |\lambda^j| = [\Sigma(\lambda_i^j)^2]^{1/2} \leqslant \tau$$

où les valeurs propres sont comptées avec leur ordre de multiplicité, τ est un réel positif, et C un cône satisfaisant à l'hypothèse (H-3) :

(H-3) Soit $W = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^\nu\ ;\ \exists\,(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : a_o(x,\xi) = \lambda \text{ et } [da_o^i(x,\xi)]_{i=1,\ldots,\nu} \text{ système lié}\right\}$
W est l'ensemble des valeurs critiques du symbole principal joint a_o.
On suppose que C est un cône de sommet 0 fermé dans $\mathbb{R}^\nu$ dont le bord δC est C^1 par morceaux et ne rencontre pas W.

THEOREME 1. *Sous les hypothèses* (H-1), (H-2) *et* (H-3), *on peut écrire :*

$$N_Q(\tau) = (2\pi)^{-n}\,\mathrm{vol}\left\{q^{-1}(C) \cap |q| \leqslant \tau\right\} + 0(\tau^{(n-1)(k+\ell)/2m}), \quad \tau \to +\infty.$$

Pour démontrer le théorème 1, on fait une réduction au cas où $k + \ell = 2m$, en utilisant le calcul fonctionnel établi dans [5] pour remplacer Q_i par P_i :

(0.8) $$P_i = \widetilde{Q}^s\, Q_i \quad \text{où} \quad s = \frac{k+\ell-2m}{4m}.$$

Les résultats obtenus dans [5] ont pour corollaire le théorème suivant, que l'on utilisera à plusieurs reprises dans ce travail :

THEOREME 2. *Sous les hypothèses ci-dessus, si* f *appartient à la classe* $S^r_{1,o}(\mathbb{R}^\nu)$ *de Hörmander, avec* $r \in \mathbb{R}$, *ie si on a :*

(0.9) $$|f^{(\alpha)}(z)| \leqslant C_\alpha(1 + |z|)^{r-|\alpha|} \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}^\nu \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^\nu,$$

l'opérateur $f(Q_1, \ldots, Q_\nu)$ *défini dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *par :*

(0.10) $$f(Q_1,\dots,Q_\nu)\,\varphi^j = f(\lambda_1^j,\dots,\lambda_\nu^j)\varphi^j \quad \forall\, j \in \mathbb{N},$$

de domaine :

(0.11) $$D[f(Q_1,\dots,Q_\nu)] = \Big\{ u = \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j \varphi^j \in L^2(\mathbb{R}^n)\ ;\ \sum_{j\in\mathbb{N}} |u_j f(\lambda^j)|^2 < +\infty \Big\},$$

est un opérateur pseudodifférentiel dont le symbole a_f *appartient à* $S^{2mr/k+\ell}_{\phi,\varphi}$. *De plus, il résulte de* (H-1) *que* a_f *admet un développement asymptotique :*

(0.12) $$a_f \sim \sum_{j\geq o} a_{f,j}$$

dont les composantes $a_{f,j}$ *sont dans la classe* $S^{\frac{2mr}{k+\ell}-\frac{j}{k+\ell}}_{\phi,\varphi}$. *De plus, si* f *possède un développement asymptotique :*

$$f(z) = f_r(z) + \dots + f_{r-M}(z) + G_M(z),$$

où $f_{r-j}(z)$ *est homogène de degré* r–j, *et* G_M *vérifie :* $|G_M^{(\alpha)}(z)| \leq C_{\alpha M}(1+|z|)^{r-M-1-|\alpha|}$, *alors* $a_{f,j}$ *peut être choisi quasi-homogène de degré* 2mr–j.

Enfin, on peut préciser la forme des composantes :

(0.13) $$\begin{cases} a_{f,o} = f(a_o) \\ a_{f,1} = \langle (\nabla f)\,(a_o)\,,\, a_1 \rangle \\ a_{f,j} = \displaystyle\sum_{|h|\leq 3j} D_{jh}(q_1,\dots,q_\nu) \times f^{(h)}\,(a_o) \end{cases}$$

où D_{jh} *est un polynôme fonction des* a_j^i *et de leurs dérivées, indépendant de* f.

Ainsi les opérateurs P_i admettent pour symbole de Weyl $p_i \in S^1_{\Phi,\varphi}$, et on peut écrire pour p_i un développement asymptotique :

(0.14) $$p_i \sim \sum_{j\geq o} p_j^i \text{ avec } \begin{cases} p_j^i \in S^{1-j/k+\ell}_{\Phi,\varphi}, \\ p_j^i \text{ quasi homogène de degré } (k+\ell)-j. \end{cases}$$

On remarque aisément que a_o et p_o, les symboles principaux respectivement de $(Q_1,\dots,Q_\nu)$ et de $(P_1,\dots,P_\nu)$, ont le même ensemble de valeurs critiques W. On ramène alors le théorème 1 à l'estimation de la quantité :

$$N_p(\varphi_o,\tau) = \mathrm{card}\,\big\{ j \in \mathbb{N}\ ;\ \lambda^j \in \Lambda \cap C \text{ et } \varphi_o(\lambda^j) \leq \tau \big\}.$$

où Λ est le spectre conjoint des opérateurs $P_1,\dots,P_\nu$, et φ_o une fonction C^∞ de R^ν dans $\mathbb{R}^+$, homogène de degré 1, non nulle sauf en 0. Dans le cas homogène ($k = \ell = 1$), on pourra préciser les résultats en faisant l'hypothèse suivante sur C :

$$(\text{H-4}) \quad \begin{cases} \text{(i)} & C = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\nu} \,;\, \varphi_1(u) \leqslant 0 \right\} \text{ où } \varphi_1 \text{ est une fonction } C^1 \text{ pour morceaux.} \\ \text{(ii)} & \text{Pour tout } \alpha \neq 0, \text{ en tout point de la variété } \left\{ \varphi_0 = \alpha \right\} \cap \left\{ \varphi_1 \leqslant 0 \right\}, \text{ les gradients} \\ & \nabla \varphi_0 \text{ et } \nabla \varphi_1 \text{ sont linéairement indépendants.} \end{cases}$$

Le théorème 1 est alors une conséquence directe du théorème.

THEOREME 3. *Considérons* ν *opérateurs* $P_1,\dots,P_\nu$, *satisfaisant aux hypothèses* (H_1), (H_2) *et* (H_3) *avec* $k+\ell = 2m$. *Alors on peut écrire :*

$$N_p(\varphi_0, \tau) = (2\pi)^{-n} \operatorname{vol}[p^{-1}(C \cap \{ \varphi_0 \leqslant \tau \})] + \mathbf{O}(\tau^{n-1}), \; \tau \to +\infty.$$

où $p = (p_1,\dots,p_\nu)$ *désigne le symbole total joint des opérateurs* $P_1,\dots,P_\nu$.

De plus, si $k = \ell = 1$, *et si* C *vérifie aussi la condition* (H-4), *on a :*

$$N_p(\varphi_0, \tau) = \gamma_0 \tau^n + \gamma_1 \tau^{n-1/2} + \mathbf{O}(\tau^{n-1}), \; \tau \to +\infty.$$

avec

$$\gamma_0 = (2\pi)^{-n} \operatorname{vol}[p_0^{-1}(C \cap \{ \varphi_0 \leqslant 1 \})]$$

et

$$\gamma_1 = -(2\pi)^{-n} \left[\int_{\substack{\varphi_0 \circ p_0 = 1 \\ p_0 \in C}} < (\nabla \varphi_0) \circ p_0, p_1 > \frac{dS}{\| \nabla(\varphi_0 \circ p_0) \|} + \int_{\substack{\varphi_1 \circ p_0 \leqslant 1 \\ p_0 \in \delta C}} < (\nabla \varphi_1) \circ p_0, p_1 > \frac{dS_1}{\| \nabla(\varphi_1 \circ p_0) \|} \right]$$

où dS *et* dS_1 *sont les mesures de surface respectivement sur* $\{ \varphi_0 \circ p_0 = 1 \}$ *et* δC, $p_0 = (p_0^1,\dots,p_0^\nu)$ *est le symbole principal joint des opérateurs* p_j , *et* $p_1 = (p_1^1,\dots,p_1^\nu)$ *est le* ν*-uplet des seconds termes.*

Remarque 1. Le problème étudié ici a été traité par Y. Colin de Verdière [6] dans le cas où les opérateurs P_j sont des opérateurs pseudodifférentiels sur une variété compacte. Sur $\mathbb{R}^n$, le cas $\nu = 1$ a été étudié par B. Helffer et D.Robert [10] . On se propose ici d'établir des résultats analogues à ceux obtenus dans [6] en utilisant les techniques de [10] .

Remarque 2. Les hypothèses faites ci-dessus ont pour conséquence $\nu \leqslant n$.

Remarque 3. Dans le cas homogène, il semble possible d'utiliser [4] ou [9] pour déduire le théorème 3 de [6].

Exemples

Exemple 1. On considère sur $\mathbb{R}^3$ les opérateurs :

$$\begin{cases} P_1(x,D_x) = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}|x|^2 \\ P_2(x,D_x) = \frac{1}{i}(x_2\,\partial_{x_3} - x_3\,\partial_{x_2}) \\ P_3(x,D_x) = -\frac{1}{2}\left\{(x_2\,\partial_{x_3} - x_3\,\partial_{x_2})^2 + (x_3\,\partial_{x_1} - x_1\,\partial_{x_3})^2 + (x_1\,\partial_{x_2} - x_2\,\partial_{x_1})^2\right\} \end{cases}$$

$$W = W_1 \cup W_2 \text{ où } W_1 = \{y_1 \geqslant o\ ;\ |y_2| = y_3\} \text{ et } W_2 = \{y_1 = y_3 \geqslant o\}.$$

Exemple 2.

$$\begin{cases} Q_1(x,D_x) = -\partial_{x_1}^{2k} + x_1^{2\ell} \\ Q_2(x,D_x) = -\partial_{x_2}^{2k} + x_2^{2\ell} \\ n = 2 \end{cases}$$

Exemple 3.

$$\begin{cases} P_1(x,D_x) = -\dfrac{1}{2m}\,\Delta + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^M \quad M \text{ entier} \geqslant 1 \\ P_2(x,D_x) = \dfrac{1}{i}\left(x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1}\right) \end{cases}$$

Dans ce dernier cas, on remarque que $P_1^{M+1} + P_2^{2M}$ est globalement elliptique puisque son symbole ne s'annule que si (x,ξ) est nul. Par ailleurs, les symboles de $P_1^{M+1} + P_2^{2M}$ admettent bien un développement en composantes quasihomogènes avec des exposants communs $k = 1$, $\ell = M$, l'ordre commun de ces opérateurs par rapport aux fonctions poids de R. Beals étant $\dfrac{2M}{k+\ell} = 2M$.

Quand les opérateurs dépendent de h, on obtient un comportement asymptotique du spectre conjoint pour h fixé positif. Une étude directe du spectre conjoint, analogue à celle qui est faite par B. Helffer et D. Robert, dans [10 bis], pour un opérateur, doit permettre d'obtenir, par des méthodes voisines de celles qui sont exposées ici, son comportement asymptotique quand h tend vers 0. (cf. aussi [13 bis]).

On utilisera dans la suite les espaces de Sobolev $E^s_{k,\ell}$ naturellement associés aux opérateurs étudiés ici et utilisés aussi dans [3] :

$$s \geqslant 0 \quad E^s_{k,\ell} = D[\ (I + \sum_{i=1}^{\nu} P_i^2)^{s/2}] \text{ muni de la norme du graphe}$$

$$s < 0 \quad E^s_{k,\ell} = \operatorname{Im}[(I + \sum_{i=1}^{\nu} P_i^2\ )^{-s/2}\ ] \text{ (dual de } E^{-s}_{k,\ell})$$

On a alors

$$\mathscr{S} = \bigcap_{s \geqslant o} E^s_{k,\ell} \quad \text{et } \mathscr{S}' = \bigcup_{s \geqslant o} E^{-s}_{k,\ell}.$$

On en déduit que les fonctions propres sont dans $\mathscr{S}$.
Le plan de ce travail est le suivant :

Dans un premier paragraphe, on montre comment, en utilisant le théorème taubérien énoncé par Y. COLIN DE VERDIERE [6] , on ramène la démonstration du théorème 3 à l'étude au voisinage de $(t_1,\dots,t_\nu) = 0$, de la trace, au sens des distributions, d'un opérateur :

$$\psi(P_1,\dots,P_\nu)e^{-i(t_1 P_1 + \dots + t_\nu P_\nu)},$$

où $\psi(P_1,\dots,P_\nu)$ est un opérateur fonction de $P_1,\dots,P_\nu$ au sens du théorème 2.

Dans les paragraphes suivants, on étudie cette trace, pour $|t|$ petit, en utilisant les techniques employées par B. HELFFER et D. ROBERT [10] : on construit, pour $|t|$ petit, une approximation de $\psi(P_1,\dots,P_\nu)e^{-i(t_1P_1 + \dots + t_\nu P_\nu)}$ par un opérateur intégral de Fourier B(t), modulo un opérateur suffisamment régularisant, c'est-à-dire envoyant $E^{-N}_{k,\ell}$ dans $E^N_{k,\ell}$, N étant choisi au départ aussi grand que l'on veut.

On montre ensuite que, si θ est une fonction de $C_0^\infty(\mathrm{IR}^\nu)$ à support suffisamment petit autour de l'origine, l'opérateur $\int_{\mathrm{IR}^\nu} B(t)\theta(t)dt$ est à noyau dans $\mathscr{S}(\mathrm{IR}^{2n})$.

Enfin, on étudie l'intégrale donnant la trace de cet opérateur par la méthode de la phase stationnaire.

Remarque. Dans tout ce qui suit on utilise la quantification de Weyl, et quand on parle du symbole d'un opérateur, il s'agit toujours de son symbole de Weyl.

1. - REDUCTIONS

Le principe de la démonstration du théorème 3 est le suivant. On cherche à évaluer :

$$N_P(\varphi_0, \tau) = \text{card}\left\{ j \in \mathbb{N} \,;\, \lambda^j \in \Lambda \cap C \quad \text{et} \quad \varphi_0(\lambda^j) \leqslant \tau \right\}, \quad \tau \to +\infty,$$

où φ_0 est une fonction homogène de degré 1 strictement positive, et C un cône fermé de $\mathbb{R}^\nu$ dont le bord ne rencontre pas W.

On construit deux fonctions ψ et $\widetilde{\psi}$ de $\dot{\mathbb{R}}^\nu$ dans $\mathbb{R}^+$, homogènes de degré 0, telles que :

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \text{Supp}\, \widetilde{\psi} \subset C \\ \widetilde{\psi} \equiv 1 \text{ dans un voisinage de } W \cap C \\ \psi = 1 - \widetilde{\psi} \text{ sur } C \\ (\text{supp}\, \psi) \cap W = \emptyset \end{cases}$$

On décompose alors $N_P(\varphi_0, \tau)$ en deux sommes :

$$(1.2) \qquad \Sigma_1(\tau) = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \varphi_0(\lambda) \leqslant \tau}} \widetilde{\psi}(\lambda)$$

et

$$(1.3) \qquad \Sigma_2(\tau) = \sum_{\lambda \in \Lambda \cap \tau D} \psi(\lambda) \quad \text{où} \quad D = C \cap \left\{ \lambda \,;\, \varphi_0(\lambda) \leqslant 1 \right\}.$$

où on répète chaque $\lambda \in \Lambda$ suivant sa multiplicité.

Dans [6] , Y. COLIN DE VERDIERE énonce un théorème taubérien que l'on utilise sous la forme suivante :

THEOREME 1.1. *Soit* Λ *une partie discrète de* $\mathbb{R}^\nu$. *On suppose qu'il existe un entier* N *tel que :*

$$(1.4) \qquad \text{card}\left\{ j \in \mathbb{N} \,;\, \lambda^j \in \Lambda \quad \textit{et} \quad |\lambda^j| \leqslant \tau \right\} = \mathbf{0}(\tau^N), \quad \tau \to +\infty.$$

On se donne pour chaque λ *appartenant à* Λ *des nombres* $a_\lambda \in [0,1]$, *et on définit une distribution* $Z \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^\nu)$ *par la formule :*

$$(1.5) \qquad Z(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \, e^{-i\langle t, \lambda \rangle}.$$

Soit $\rho \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R}^+)$ *une fonction paire telle que* $\hat{\rho} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu \,;\, \mathbb{R}^+)$ *et* $\hat{\rho}(0) = 1$. *On suppose que*

$\hat{\rho}$. Z s'écrit :

(1.6)
$$\begin{cases} \hat{\rho}Z(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^\nu} e^{-i<t,\zeta>} a(\zeta)d\zeta \\ \text{avec } a(\zeta) = a_o(\zeta) + 0(\|\zeta\|^{m-1}) \text{ pour } \|\zeta\| \to +\infty \text{ où } a_o(\zeta) \text{ est une fonction} \\ \text{continue, homogène de degré m sur } \dot{\mathbb{R}}^\nu . \end{cases}$$

Alors, si D *est un domaine de* $\mathbb{R}^\nu$ *compact, à frontière* C^1 *par morceaux, on a :*

(1.7)
$$\sum_{\lambda \in \Lambda \cap \tau D} a_\lambda = \int_{\tau D} a_o(\zeta)d\zeta + 0(\tau^{m+\nu-1}) \text{ pour } \tau \to +\infty .$$

L'hypothèse (1.6) permet de connaître le comportement à l'infini de la transformée de Fourier inverse de $\hat{\rho}Z(t)$, c'est-à-dire le comportement asymptotique, quand $\|\zeta\|$ tend vers $+\infty$, de

(1.8)
$$I(\zeta) = (2\pi)^{-\nu} \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{i<t,\zeta>} \hat{\rho}(t)Z(t)dt.$$

Pour étudier la somme $\Sigma_2(\tau)$, on définit la distribution :

(1.9)
$$Z_2(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \psi(\lambda)e^{-i<t,\lambda>}, \quad t \in \mathbb{R}^\nu.$$

Pour étudier $\Sigma_1(\tau)$, que l'on peut encore écrire :

$$\sum_{\substack{\mu \leqslant \tau \\ \mu \in \varphi_o(\Lambda)}} [\sum_{\lambda \in \Lambda} \widetilde{\psi}(\lambda)] = \sum_{\mu \leqslant \tau} b_\mu ,$$

on définit :

(1.10)
$$Z_1(t) = \sum_{\substack{\mu \in \varphi_o(\Lambda) \\ \lambda \in \Lambda}} b_\mu e^{-it\mu}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Z_2 apparaît comme la trace, au sens des distributions, de l'opérateur $\psi(P_1,...,P_\nu)e^{-i(t_1P_1+...+t_\nu P_\nu)}$ où $\psi(P_1,...,P_\nu)$ est défini par le théorème 2.

Z_1 est la trace (au sens de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^\nu)$) de l'opérateur $\widetilde{\psi}(P_1,...,P_\nu)e^{-it\widetilde{P}}$, où $\widetilde{P}$ est l'opérateur elliptique autoadjoint $\varphi_o(P_1,...,P_\nu)$.

Les paragraphes suivants vont permettre d'étudier ces traces, puis le comportement des intégrales $I(\zeta)$ correspondantes, et on appliquera le théorème taubérien pour obtenir l'estimation du théorème 3.

Interprétons tout d'abord $Z_1(t)$ et $Z_2(t)$. Soit :

$$U(t) = e^{-it_1P_1} \circ \ldots \circ e^{-it_\nu P_\nu}.$$

Les opérateurs $U(t)$ forment un groupe d'opérateurs unitaires, bornés dans $L^2(\mathrm{IR}^n)$. Posons :

$$\Psi = \psi(P_1,\ldots,P_\nu).$$

LEMME 1.2. $Z_2(t) = \mathrm{Tr}[\Psi \circ U(t)]$, *au sens des distributions.*

Démonstration. $(\Psi \circ U(t))u$ est défini pour $u = \sum_{j\in N} u_j \varphi^j \in L^2(\mathrm{IR}^n)$ par :

$$[\Psi \circ U(t)]u = \sum_{j\in N} \psi(\lambda^j)e^{-i<t,\lambda^j>} u_j\varphi^j. \tag{1.11}$$

Son noyau au sens des distributions est donc égal à :

$$K(t,x,y) = \sum_{j\in \mathrm{IN}} \psi(\lambda^j)e^{-i<t,\lambda^j>} \overline{\varphi}^j(y)\varphi^j(x). \tag{1.12}$$

Soit θ une fonction de $\mathscr{S}(\mathrm{IR}^\nu)$. On définit un opérateur U_θ par :

$$U_\theta = \int_{\mathrm{IR}^\nu} [\Psi \circ U(t)]\theta(t)dt. \tag{1.13}$$

Le noyau de U_θ est alors :

$$U_\theta(x,y) = \int_{\mathrm{IR}^\nu} K(t,x,y)\theta(t)dt = \sum_{j\in \mathrm{IN}} \int \psi(\lambda^j)e^{-i<t,\lambda^j>} \overline{\varphi}^j(y)\varphi^j(x)\theta)t)dt. \tag{1.14}$$

On va montrer que $U_\theta(x,y)$ est dans $\mathscr{S}(\mathrm{IR}^{2n})$, ce qui prouvera que U_θ est régularisant, et que sa trace est donnée par l'intégrale du noyau sur la diagonale ie :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\, U_\theta &= \sum_{j\in \mathrm{IN}} \int_{\mathrm{IR}^\nu} \psi(\lambda^j)e^{-i<t,\lambda^j>} \theta(t)dt \\ &= < Z_2(t), \theta(t) >. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Le lemme 1.2 découle alors aisément de (1.15). Etudions donc $U_\theta(x,y)$:

$$\begin{aligned} U_\theta(x,y) &= \sum_{j\in \mathrm{IN}} \int_R \frac{\psi(\lambda^j)}{(1+|\lambda^j|^2)^N} [(I-\Delta_t)^N e^{-i<t,\lambda^j>}]\theta(t)\varphi^j(x)\overline{\varphi}^j(y)dt \\ &= \sum_{j\in \mathrm{IN}} \frac{\psi(\lambda^j)}{(1+|\lambda^j|^2)^N} \left\{ \int_{\mathrm{IR}^\nu} e^{-i<t,\lambda^j>}(I-\Delta_t)^N\theta(t)dt \right\} \varphi^j(x)\overline{\varphi}^j(y). \end{aligned} \tag{1.16}$$

En utilisant une inégalité du type Sobolev dans les espaces $E^s_{k,\ell}$ avec $s > n\ell/2(k+\ell)$, (cf. par exemple [13]), on obtient :

$$\forall\, \alpha, \forall\, s > n\ell/2(k+\ell), \quad \exists\, C^\alpha_{s,n} : \forall\, u \in \mathscr{S}\ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n :$$

(1.17)

$$|\partial^\alpha_x \varphi^j(x)| \leqslant C^\alpha_{s,n}(1 + |x|^{2\ell})^{(n/4k - s(k+\ell)/2k\ell)}\, |\lambda^j|^{(2s+|\alpha|)/4}.$$

Il résulte aisément de (1.16) et (1.17) que U_θ est dans $\mathscr{S}\ (\mathbb{R}^{2n})$.

LEMME 1.3. $Z_1(t) = \mathrm{Tr}[\widetilde{\Psi}(P_1,\ldots,P_\nu)e^{-it\widetilde{P}}\ ]$, *au sens des distributions, où* $\widetilde{P} = \varphi_o(P_1,\ldots,P_\nu)$.

Démonstration. L'opérateur $\widetilde{\Psi}(P_1,\ldots,P_\nu)e^{-it\widetilde{P}}$ a pour noyau-distribution :

$$v(x,y) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \widetilde{\Psi}(\lambda^j)e^{-it\,\varphi_o(\lambda^j)}\, \varphi^j(x)\overline{\varphi}^j(y).$$

En écrivant alors :

$$e^{-it\,\varphi_o(\lambda^j)} = (1 + \varphi(\lambda^j))^{-N}\,(1 - \partial^2_{t^2})^N\, e^{-it\,\varphi_o(\lambda^j)}.$$

On conclut comme pour le lemme 1.2, puisque l'on a : $\varphi_o(\lambda) \geqslant C(|\lambda|)$.

On va, dans ce qui suit, démontrer le théorème suivant :

THEOREME 1.4. *Soit* $\mathscr{F}\,[\hat{\rho}Z_2]\,(\zeta)$ *la transformée de Fourier inverse de* $\hat{\rho}\,(t)Z_2(t)$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\,[\hat{\rho}Z_2]\,(\zeta) &= I(\zeta)\\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\widetilde{p}^{-1}(\zeta)} (\psi \circ p_o)\, \frac{dS_\zeta}{\|d\widetilde{p}_1 \wedge \ldots \wedge d\widetilde{p}_\nu\|} + \mathbf{O}(|\zeta|^{n-\nu-1})\end{aligned}$$

où $\widetilde{p} = (\widetilde{p}_1,\ldots,\widetilde{p}_\nu)$, *avec* $\widetilde{p}_j = \sum_{s=o}^{k+\ell-1} p^j_s$, p^j_s *étant défini par* (0.14), *et où* dS_ζ *désigne la mesure de volume canonique sur la surface* $\widetilde{p}^{-1}(\zeta)$, *et où* $\|d\widetilde{p}_1 \wedge \ldots \wedge d\widetilde{p}_\nu\|$ *désigne la norme euclidienne, dans l'espace des* ν*-formes linéaires alternées sur* $\mathbb{R}^{2n}$, *du produit extérieur des* $d\widetilde{p}_j$.

Les comportements de $\Sigma_2(\tau)$, et de $\Sigma_1(\tau)$, seront alors des conséquences du théorème 1.1., et feront l'objet du dernier paragraphe.

En vue d'étudier l'intégrale $I(\zeta) = (2\pi)^{-\nu}\ \mathrm{Tr}[\int e^{i\langle t,\zeta\rangle}\, \Psi \circ U(t)\hat{\rho}(t)dt]$, on commence par faire une approximation de $\Psi \circ U(t)$.

2. - APPROXIMATION DE $\Psi \circ U(t)$

On commence par approcher $U(t)$.

Notons $U^j(t_j)$ le groupe unitaire solution de l'équation de Schrödinger :

$$\left\{ \begin{array}{l} i \dfrac{\partial U}{\partial t_j} = P_j\, U \\ U(o) = I \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Alors

$$U(t) = U^1(t_1) \circ U^2(t_2) \circ \ldots \circ U^\nu(t_\nu). \tag{2.2}$$

Dans [10] , les auteurs construisent, lorsque $|t_j|$ est inférieur à un certain T, pour M entier positif et $\epsilon_o > 0$ arbitrairement petit, une approximation de $U^j(t_j)$ par un opérateur intégral de Fourier global, $U^j_{M,\epsilon_o}(t_j)$, défini par :

$$[U^j_{M,\epsilon_o}(t_j) \,.\, f]\,(x) = \iint e^{i[S^j(t_j,x,\eta_j)-(y,\eta_j)]}\, \chi_{\epsilon_o}(x,\eta_j) a^j_{(M)}(t_j,x,\eta_j) f(y)\, dy\, đ\eta_j \tag{2.3}$$

$$đ\eta_j = (2\pi)^{-n} d\eta_j$$

où la fonction de phase et l'amplitude sont obtenues comme suit :

(i) la fonction S^j s'écrit sous la forme :

$$S^j = \sum_{r=1}^{k=\ell} S^j_r \tag{2.4}$$

avec

$$S^j_r(t,\rho^k x,\rho^\ell \eta) = \rho^r S^j_r(t,x,\eta) \quad \forall\, r = 1,\ldots,k+\ell \qquad \forall\, t : |t| < T \qquad \forall (x,\eta) \in \mathbb{R}^{2n} - \{0\} \tag{2.5}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} S^j_{k+\ell}(0,x,\eta) = (x,\eta) \\ S^j_r(0,x,\eta) = 0 \qquad \forall\, r < k+\ell \end{array} \right\} \qquad \forall\, (x,\eta) \in \mathbb{R}^{2n} - \{0\}. \tag{2.6}$$

S^j est déterminée de la façon suivante : on trouve d'abord $S^j_{k+\ell}$ solution de l'équation caractéristique :

$$(2.7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial S^j_{k+\ell}}{\partial t}(t,x,\eta) + p^j_o\left(x, \dfrac{\partial S^j_{k+\ell}}{\partial x}(t,x,\eta)\right) = 0 \\[2ex] S^j_{k+\ell}(0,x,\eta) = \langle x,\eta \rangle \end{cases}$$

et on obtient ensuite par récurrence S^j_r, pour $1 \leqslant r < k+\ell$, en résolvant une équation dépendant de $S^j_{k+\ell}, S^j_{k+\ell-1}, \ldots, S^j_{r+1}$.

(ii) $\chi_{\epsilon_o} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et vérifie

$$(2.8)\quad \begin{cases} \chi_{\epsilon_o}(x,\eta) = 0 & \text{si } (x,\eta) \in B_{\epsilon_o} \\[2ex] \chi_{\epsilon_o}(x,\eta) = 1 & \text{si } (x,\eta) \in \complement B_{2\epsilon_o} \end{cases} \qquad \text{où } B_{\epsilon_o} = \left\{ (x,\eta)\,;\, |x|^{\frac{1}{k}} + |\eta|^{\frac{1}{\ell}} < \epsilon_o \right\}.$$

(iii) l'amplitude $a^j_{(M)}$ s'écrit :

$$(2.9)\quad \begin{cases} a^j_{(M)} = \displaystyle\sum_{r=o}^{M} a^j_r \\ \text{avec} \\ a^j_r(t,\rho^k x, \rho^\ell \eta) = \rho^{-r}\, a^j_r(t,x,\eta). \end{cases}$$

Les termes a^j_r sont obtenus, après détermination de S^j, en résolvant les équations de transport avec les conditions initiales

$$(2.10)\quad \begin{cases} a^j_o(0,x,\eta) = 1 \\[2ex] a^j_r(0,x,\eta) = 0 & \forall\, r > 0\,. \end{cases}$$

On établit dans [10] la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1.

(i) *Pour tout entier* $J \geqslant 0$ *et tout* $s \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$U^j(.) \in C^J(\,]-T,T[\,;\mathcal{L}(E^{s+J+1}_{k,\ell}, E^s_{k,\ell}))$$

(ii) *Pour tous entiers* J *et* $N \geqslant 0$, *il existe un entier* $\widetilde{M}(N,J) \geqslant 0$ *tel que, pour tout* $M \geqslant \widetilde{M}(N,J)$ *et pour tout* $j = 1,\ldots,\nu$, *on ait :*

$$U^j(.) - U^j_{M,\epsilon_o}(.) \in C^J(\,]-T,T[\,;\mathcal{L}(E^{-N}_{k,\ell}, E^N_{k,\ell})).$$

Dans [10] , les auteurs supposent «globalement elliptique» l'opérateur qu'ils étudient. Mais, pour la construction de $U^{j}_{M,\epsilon_o}(t_j)$, l'ellipticité de P_j n'est pas utile. Quant à la proposition 2.1, la démonstration faite dans [10] s'adapte aisément au cas où P_j , sans être elliptique, commute avec l'opérateur «globalement elliptique» $(I + \sum_{j=1}^{\nu} P_j^2)$; elle est donc encore valide dans notre contexte.

On définit alors $U_{M,\epsilon_o}(t)$ pour $|t_j| < T \quad \forall\ j = 1,\dots,\nu$, opérateur intégral de Fourier global sous la forme :

$$U_{M,\epsilon_o}(t) = U^{1}_{M,\epsilon_o}(t_1) \circ \dots \circ U^{\nu}_{M,\epsilon_o}(t_\nu) \tag{2.11}$$

où $U^{j}_{M,\epsilon_o}(t_j)$ est un opérateur intégral de Fourier du type étudié dans [10] .

La composition de ces opérateurs intégraux de Fourier (cf. [10]) permet alors d'écrire, en utilisant (2.3) :

$$[U_{M,\epsilon_o}(t) \,.\, f]\,(x) = (2\pi)^{-n\nu} \int e^{i\varphi(t,x,\xi,y)}\, \chi_{\epsilon_o}(x,\xi) a_{(M)}(t,x,\xi) f(y)\, dy d\xi \tag{2.12}$$

où

$$\xi = (x_2,\dots,x_\nu,\eta_1,\dots,\eta_\nu)$$

$$\chi_{\epsilon_o}(x,\xi) = \chi_{\epsilon_o}(x,\eta_1) \times \chi_{\epsilon_o}(x_2,\eta_2) \times \dots \times \chi_{\epsilon_o}(x_\nu,\eta_\nu)$$

$$a_{(M)}(t,x,\xi) = a^{1}_{(M)}(t_1,x,\eta_1) \times a^{2}_{(M)}(t_2,x_2,\eta_2) \times \dots \times a^{\nu}_{(M)}(t_\nu,x_\nu,\eta_\nu)$$

et

$$\varphi(t,x,\xi,y) = S^1(t_1,x,\eta_1) + S^2(t_2,x_2,\eta_2) + \dots + S^\nu(t_\nu,x_\nu,\eta_\nu) - x_2\eta_1 - x_3\eta_2 - \dots - y\eta_\nu \,.$$

De la Proposition 2.1 on déduit la

PROPOSITION 2.2. *Pour tous entiers* J *et* $N \geqslant 0$, *il existe un entier* $\widetilde{M}(N,J) > 0$ *tel que, pour tout* $\epsilon_o > 0$ *et pour tout* $M \geqslant \widetilde{M}$, *on ait :*

$$U_{M,\epsilon_o}(.) - U(.) \in C^J((\,]-T,T[\,)^\nu\,;\ \mathcal{L}(E^{-N}_{k,\ell}, E^{N}_{k,\ell})).$$

Démonstration. Ecrivons $U(t) - U_{M,\epsilon_o}(t)$ sous la forme :

$$U(t) - U_{M,\epsilon_o}(t) = U^1(t_1)\dots U^\nu(t_\nu) - U^1_{M,\epsilon_o}(t_1)\dots U^\nu_{M,\epsilon_o}(t_\nu)$$

$$= U^1(t_1)\dots U^{\nu-1}(t_{\nu-1})[U^\nu(t_\nu) - U^\nu_{M,\epsilon_o}(t_\nu)] +$$

$$(2.13)\qquad + U^1(t_1)\dots U^{\nu-2}(t_{\nu-2})[U^{\nu-1}(t_{\nu-1}) - U^{\nu-1}_{M,\epsilon_o}(t_{\nu-1})]\, U^\nu_{M,\epsilon_o}(t_\nu)$$

$$+ \dots +$$

$$+ [U^1(t_1) - U^1_{M,\epsilon_o}(t_1)]\, U^2_{M,\epsilon_o}(t_2)\dots U^\nu_{M,\epsilon_o}(t_\nu).$$

D'après la proposition 2.1, $U^j(.)$ appartient à $C^J(\,]-T,T[\,;\mathcal{L}(E^{s+J+1}_{k,\ell},E^s_{k,\ell}))$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout J dans $\mathbb{N}$, et il en est alors de même pour $U^j_{M,\epsilon_o}(.) = U^j(.) + [U^j_{M,\epsilon_o}(.) - U^j(.)]$ pour tout s dans $\mathbb{R}$ tel que $-N \leqslant s \leqslant N$, dès que M est suffisamment grand pour que $U^j_{M,\epsilon_o}(.) - U^j(.) \in C^J(\,]-T,T[\,;\mathcal{L}(E^{-N}_{k,\ell}, E^N_{k,\ell}))$. On en déduit la proposition 2.2.

Approchons maintenant $\Psi \circ U(t)$: D'après le théorème 2, $\Psi = \psi(P_1,\dots,P_\nu)$ est un opérateur pseudodifférentiel dont le symbole appartient à $S^o_{\Phi,\varphi}$, et admet un développement asymptotique sous la forme :

$$(2.14)\qquad \sigma(\Psi) = c \sim \sum_{j\geqslant o} c_j$$

où les c_j vérifient les assertions du théorème 2.

$U_{M,\epsilon_o}(t)$ étant un opérateur intégral de Fourier au sens de [10], on peut utiliser la formule de composition établie dans [10] d'un opérateur pseudodifférentiel par un opérateur intégral de Fourier global ; alors $\Psi \circ U_{M,\epsilon_o}(t)$ est un opérateur intégral de Fourier global dont la fonction de phase est la même que celle de $U_{M,\epsilon_o}(t)$, et dont l'amplitude peut s'écrire sous la forme :

$$(2.15)\qquad b_{(M),\epsilon_o}(t,x,\xi) = \sum_{r=o}^{M'} b_r^{\epsilon_o}(t,x,\xi) + b^{(M',M,\epsilon_o)}(t,x,\xi)$$

où

(i) les termes $b_r^{\epsilon_o}$ sont quasi-homogènes, d'exposants k et ℓ et de degré $-r$, pour $(x,\xi) \in (\mathbb{R}^{2n} \setminus B_{2\epsilon_o})^\nu$, et se calculent en fonction des termes c_j du développement de $\sigma(\Psi)$, des termes $a^j_r(t_j,x_j,\nu_j)$ pour $j = 1,\dots,\nu$, $r = 0\dots M$, dont $a^j_{(M)}$ est la somme, et de la fonction χ_{ϵ_o} introduite en (2.12). De plus $b_r^{\epsilon_o}(t,.,.)$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^{2n\nu})$.

En particulier, le premier terme vaut :

$$(2.16)\quad \begin{cases} b_o(t,x,\xi) = \chi_{\epsilon_o}(x,\xi) \times c_o(x,\partial_x S^1_{k+\ell}(t_1,x,\eta_1)) \times a^1_o(t_1,x,\eta_1) \times \\ \qquad\qquad \times\, a^2_o(t_2,x_2,\eta_2) \times \ldots \times a^\nu_o(t_\nu,x_\nu,\eta_\nu) \\ \text{où } \xi = (x_2,\ldots,x_\nu,\eta_1,\ldots,\eta_\nu), \\ \text{et } c_o = \psi(p^1_o,\ldots,p^\nu_o). \end{cases}$$

(ii) le reste $b^{(M',M,\epsilon_o)}(t,x,\xi)$ est l'amplitude d'un opérateur intégral de Fourier régularisant d'ordre N pourvu que M' soit suffisamment grand.

Finalement, on obtient donc une approximation de $\Psi \circ U(t)$ par un opérateur intégral de Fourier global $B_{MM'\epsilon_o}(t)$, dont l'amplitude peut s'écrire comme somme de termes $b_r^{\epsilon_o}(t,x,\xi)$, $b_r^{\epsilon_o}$ étant quasi-homogène d'exposants k et ℓ et de degré $-$ r pour (x,ξ) appartenant à $(IR^{2n} \setminus B_{2\epsilon_o})^\nu$.

$B_{MM'\epsilon_o}(t)$ vérifie la

PROPOSITION 2.3. *Pour tous entiers* J *et* $N \geqslant 0$, *il existe des entiers* M *et* M' *tels que*

$$\Psi \circ U(.) - B_{MM'\epsilon_o}(.) \in C^J\,[(\,]-T,T[\,)^\nu\,; \mathcal{L}(E^{-N}_{k,\ell}\,, E^N_{k,\ell})]\,.$$

Démonstration.

$$(2.17)\quad \Psi \circ U(t) - B_{MM'\epsilon_o}(t) = \Psi \circ [U(t) - U_{M,\epsilon_o}(t)] + [\Psi \circ U_{M,\epsilon_o}(t) - B_{MM'\epsilon_o}(t)]\,.$$

Ψ est un opérateur borné dans L^2 commutant avec $(I + \sum_{j=1}^{k} P_j^2)$. Donc Ψ envoie $E^s_{k,\ell}$ dans $E^s_{k,\ell}$ pour tout s dans IR.

Donc $\Psi \circ [U(t) - U_{M,\epsilon_o}(t)]$ est régularisant d'ordre N dès que $U(t) - U_{M,\epsilon_o}(t)$ l'est. Il en est de même pour les dérivées, et on montre ainsi que le premier terme de (2.17) est dans $C^J[(\,]-T,T[\,)^\nu\,; \mathcal{L}(E^{-N}_{k,\ell}\,, E^N_{k,\ell}\,)]$ dès que M est suffisamment grand. Le second terme s'écrit sous la forme :

$$[\Psi \circ U^1_{M,\epsilon_o}(t_1) - \widetilde{B}_{MM'\epsilon_o}(t_1)] \circ U^2_M(t_2) \circ \ldots \circ U^\nu_M(t_\nu).$$

Le premier facteur de ce produit est dans $C^J((\,]-T,T[\,)^\nu\,; \mathcal{L}(E^{-N}_{k,\ell}\,, E^N_{k,\ell}))$ d'après [10] dès que M' est suffisamment grand, et un raisonnement analogue à celui de la proposition 2.2 donne le résultat.

La contribution de $\Psi \circ U(t) - B_{MM'\epsilon_o}(t)$ à l'intégrale $I(\zeta)$ est alors donnée par le théorème suivant :

THEOREME 2.4. *Soit* $\theta \in C_o^\infty(IR^\nu)$: Supp $\theta \subset (]-T,T[\,)^\nu$ *et* $\theta(o) = 1$. *Alors, pour tout entier* J, *il existe des entiers* M_J *et* $M'_J > 0$ *et un réel* $C_J > 0$ *tels que*

$$\left| \mathrm{Tr}\left[\int [\Psi \circ U(t) - B_{M_J M'_J \epsilon_o}(t)]\, e^{it\zeta}\, \theta(t)dt\right] \right| \leqslant C_J(1 + |\zeta|)^{-J}.$$

Ce théorème découle de la proposition 2.3 et de [10] lemme 5.2.

L'étude de $I(\zeta) = (2\pi)^{-\nu}\, \mathrm{tr}\left[\int e^{it\zeta}\, \Psi \circ U(t)\theta(t)dt\right]$ quand $|\zeta|$ tend vers $+\infty$, se ramène donc, modulo $0(|\zeta|^{-\infty})$, à celle de

$$J_1(\zeta) = (2\pi)^{-\nu}\, \mathrm{tr}\left\{\int B(t)e^{it\zeta}\theta(t)dt\right\} \tag{2.18}$$

où on a noté B(t) pour $B_{MM'\epsilon_o}(t)$.

($\theta(t)$ est la fonction $\hat{\rho}(t)$ introduite dans le théorème taubérien).

Dans la suite on va noter $J(\zeta) = (2\pi)^\nu J_1(\zeta)$ et étudier $J(\zeta)$.

3. - ETUDE DE $J(\zeta)$ - 1ère étape

$\int B(t)e^{it\zeta}\theta(t)dt$ est évidemment un opérateur à trace puisque $\int e^{it\zeta}\, \Psi \circ U(t)\theta(t)dt$ et $\int e^{it\zeta}\, [\Psi \circ U(t) - B(t)]\, \theta(t)dt$ sont tous les deux des opérateurs à trace.

Le noyau au sens des distributions de $\int e^{it\zeta}\, B(t)\theta(t)dt$ est fourni par l'intégrale oscillante :

$$B(t,x,y)e^{it\zeta}\theta(t)dt = (2\pi)^{-n\nu} \int e^{i\varphi(t,x,\xi,y)}\, b(t,x,\xi)e^{it\zeta}\theta(t)dtd\xi$$

où on a noté $b(t,x,\xi) = \sum_{r=o}^{M'} b_{rM}^{\epsilon_o}(t,x,\xi)$.

Ce noyau vérifie la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. *Le noyau* $B_\theta(x,y)$ *de l'opérateur* $\int B(t)e^{it\zeta}\theta(t)dt$ *est dans* $S(IR^n \times IR^n)$.

Cette proposition se démontre à l'aide de troncatures et d'intégrations par parties, de manière tout à fait analogue à la proposition 3.4.

On en déduit l'expression de $J(\zeta)$:

(3.1) $$J(\zeta) = \sum_{r=o}^{M'} \int e^{i\left[\sum_{j=1}^{\nu} S^j(t_j,x_j,\eta_j) - x_2\eta_1 - x_3\eta_2 - \ldots - x_1\eta_\nu\right] + it\zeta} \times$$

$$\times\, b_{rM}^{\epsilon_o}(t,x,\eta)\theta(t)dtdx đ\eta\,.$$

où $b_{rM}^{\epsilon_o}$ est quasihomogène d'exposants k,ℓ et de degré $-r$ en (x,η) sur $(IR^{2n} \setminus B_{2\epsilon_o})^\nu$.

Il est utile pour la suite d'établir la propriété suivante du système formé par les opérateurs P_j :

PROPOSITION 3.2.

(i) *Pour tout* $j = 1,\ldots,\nu$, *la partie principale* p_o^j *de* P_j *est constante sur les courbes intégrales de tous les autres champs hamiltoniens* $H_{p_o^i}$, *et les trajectoires sont bornées.*

(ii) $\forall\, i,j = 1,\ldots,\nu,\ \ \forall\, t_i \in]-T,T[\,,\ \forall\, (x_i,\eta_i) \in IR^{2n} \setminus \{0\}$,

on a :

$$p_o^j\left(x_i\,, \frac{\partial S^i_{k+\ell}}{\partial x_i}(t_i,x_i,\eta_i)\right) = p_o^j\left(\frac{\partial S^i_{k+\ell}}{\partial \eta_i}(t_i,x_i,\eta_i),\, \eta_i\right).$$

Démonstration. (i) Le fait que les opérateurs P_i et P_j commutent se traduit par :

(3.2) $$\{p_o^i,p_o^j\} = 0 \qquad \forall\, 1 \leqslant i < j \leqslant \nu$$

où $\{p_o^i,p_o^j\}$ est le crochet de Poisson de p_o^i et p_o^j .

On a donc un système en involution, et p_o^j est une intégrale première pour $H_{p_o^i}$ (cf. par exemple [1]).

Il découle de là que $\sum_{j=1}^{\nu} (p_o^j)^2$, symbole principal de $\sum_{j=1}^{\nu} P_j^2$ est également constant sur toutes les trajectoires. L'ellipticité de cet opérateur prouve que les trajectoires sont bornées.

(ii) De (i) et des arguments d'homogénéité développés dans [10] , on déduit que le flot Φ_j^t associé à chaque champ hamiltonien $H_{p_o^j}$ est un difféomorphisme de $IR^{2n} \setminus \{0\}$ dans $IR^{2n} \setminus \{0\}$, dont le graphe est décrit par :

(3.3) $$\left\{ (\partial_{\eta_j} S^j_{k+\ell}(t,x_j,\eta_j),\eta_j,x_j,\partial_{x_j} S^j_{k+\ell}(t,x_j,\eta_j)\ ;\ (x_j,\eta_j) \in IR^{2n} \setminus \{0\}\right\}.$$

Ainsi, l'assertion (i) se traduit par la relation énoncée en (ii). Par ailleurs, les fonctions de phase $S^j = \sum_{r=1}^{k+\ell} S^j_r$ satisfont aux estimations suivantes :

(3.4) $$\partial_t^\delta \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha S^j_r(t,x_j,\eta_j) = \mathbf{0}(\mu^{k+\ell-|\beta|k-|\alpha|\ell}(x_j,\eta_j)).$$

On va maintenant, par des intégrations par parties, montrer que l'on peut, modulo un $0(|\zeta|^{-\infty})$, ramener l'étude de $J(\zeta)$ à celle d'une intégrale sur un compact où l'on pourra appliquer le théorème de la phase stationnaire.

$J(\zeta)$ est une somme d'intégrales $J_r(\zeta)$, r variant de 0 à M', où l'amplitude est $b^{\epsilon_o}_{rM}(t,x,\eta)\theta(t)$, avec $b^{\epsilon_o}_{rM}$ quasihomogène de degré $-r$ sur $(\mathrm{IR}^{2n} \setminus B_{2\epsilon_o})^\nu$. On va considérer, dans cette intégrale, la fonction de phase donnée dans (3.1) :

$$S(t,x,\eta) = \sum_{j=1}^{\nu} S^j(t_j,x_j,\eta_j) - x_2\eta_1 - x_3\eta_2 - \dots - x_1\eta_\nu + < t,\zeta >$$

sous la forme :

(3.5) $$S(t,x,\eta) = \varphi(t,x,\eta) + \tilde{S}(t,x,\eta)$$

où

(3.6) $$\begin{cases} \varphi(t,x,\eta) = \sum_{j=1}^{\nu} S^j_{k+\ell}(t_j,x_j,\eta_j) - x_2\eta_1 - \dots - x_1\eta_\nu + \sum_{j=1}^{\nu} t_j\zeta_j \\ t = (t_j)_{j=1,\dots,\nu} \in (\,]-T,T[\,)^\nu, \quad (x,\eta) \in \mathrm{IR}^{2n\nu}. \end{cases}$$

Soit

$$M = -iD^{-1}\left\{ \sum_{j=1}^{\nu} (\partial_{t_j}\varphi)^{2k\ell-1}\partial_{t_j} + \sum_{j=1}^{\nu}\sum_{i=1}^{n} (\partial_{x^i_j}\varphi)^{2k(k+\ell)-1}\partial_{x^i_j} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{\nu}\sum_{i=1}^{n} (\partial_{\eta^i_j}\varphi)^{2\ell(k+\ell)-1}\partial_{\eta^i_j} \right\}$$

où

$$D = \sum_{j=1}^{\nu} |\partial_{t_j}\varphi|^{2k\ell} + \sum_{j=1}^{\nu} |\partial_{x_j}\varphi|^{2k(k+\ell)} + \sum_{j=1}^{\nu} |\partial_{\eta_j}\varphi|^{2\ell(k+\ell)}.$$

En faisant des intégrations par parties à l'aide de M, on va prouver la :

PROPOSITION 3.3. *Soit*

$$J_{rA}(\zeta) = \int e^{i\varphi(t,x,\eta)} e^{i\tilde{S}(t,x,\eta)} X_A(|\zeta|^{-k/k+\ell}(x_1,\dots,x_\nu),\ |\zeta|^{-\ell/k+\ell}(\eta_1,\dots,\eta_\nu))$$

$$\times\, b_{rM}(t,x,\eta) \times \theta(t) dt dx d\!\!{}^-\eta$$

où X_A *est une fonction* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^{2n\nu}$ *vérifiant :*

$$X_A(x_1,\dots,x_\nu,\eta_1,\dots,\eta_\nu) = 0 \quad si \quad \sum_{j=1}^{\nu} (|x_j|^{1/k} + |\eta_j|^{1/\ell})^{k+\ell} \leqslant A$$

$$X_A(x_1,\dots,x_\nu,\eta_1,\dots,\eta_\nu) = 1 \quad si \quad \sum_{j=1}^{\nu} (|x_j|^{1/k} + |\eta_j|^{1/\ell})^{k+\ell} \geqslant 2A.$$

Alors, il existe une constante $A > 0$ *telle que :*

$$J_{rA}(\zeta) = \mathbf{0}(|\zeta|^{-\infty}) \textit{ quand } |\zeta| \to +\infty.$$

Cette proposition est une conséquence des 2 propriétés suivantes :

PROPOSITION 3.4. *Soit* $\zeta : |\zeta| \geqslant 1$. *Alors il existe deux constantes* K *et* A *telles que, si* K^1_ζ *désigne le compact :*

$$K^1_\zeta = \left\{ (x,\eta) \in \mathbb{R}^{2n\nu} ; \sum_{j=1}^{\nu} \mu^{(k+\ell)}(x_j,\eta_j) \leqslant A\,|\zeta| \right\},$$

on a, pour tout (x,η) *appartenant au complémentaire de* K^1_ζ *:*

$$\sum_{j=1}^{\nu} |\partial_{t_j} \varphi(t,x,\eta)|^{1/k+\ell} + \sum_{j=1}^{\nu} |\partial_{x_j} \varphi|^{1/\ell} + \sum_{j=1}^{\nu} |\partial_{\eta_j} \varphi|^{1/k} \geqslant \tag{3.7}$$

$$\geqslant K(|\zeta|^{1/k+\ell} + \sum_{j=1}^{\nu} \mu(x_j,\eta_j)).$$

PROPOSITION 3.5. *Pour tout* s *entier positif, il existe une constante* $C_s > 0$ *telle que, si* M^* *désigne l'adjoint de* M, *on a :*

$$|(M^*)^s e^{i\tilde{S}(t,x,\eta)} b^{\epsilon_0}_{rM}(t,x,\eta)\theta(t) X_A(|\zeta|^{-k/k+\ell} x,\ |\zeta|^{-\ell/k+\ell}\eta)| \leqslant C_s \left[\sum_{j=1}^{\nu} \mu(x_j,\eta_j) \right]^{-s} \tag{3.8}$$

(C_s *étant indépendante de* ζ *pour* $|\zeta| \geqslant 1$).

Preuve de la proposition 3.3. Le support de X_A est contenu dans le complémentaire de K^1_ζ. Par ailleurs, sur $\complement K^1_\zeta$, $\chi_{\epsilon_0}(x,\eta)$ est identique à 1, et $J_{rA}(\zeta)$ coïncide avec l'intégrale sur $[-T,T] \times \complement K^1_\zeta$ de la fonction à intégrer pour le calcul de $J_r(\zeta)$.

D'autre part, M étant un opérateur vérifiant : $Me^{i\varphi} = e^{i\varphi}$, il résulte de la proposition 3.5 que l'intégrale $J_{rA}(\zeta)$ est bien définie comme intégrale oscillante. De plus, sur le complémentaire de K_ζ^1, $(\sum_{j=1}^{\nu} \mu(x_j,\eta_j))^{-s}$ est majoré par $A'|\zeta|^{-s/k+\ell}$, où A' est une constante positive, ce qui prouve le résultat annoncé dans la proposition 3.3 (puisque C_s est indépendante de ζ pour $|\zeta| \geqslant 1$).

Démonstration de la proposition 3.4. On choisit A tel que

$$\frac{4}{A^2} < \frac{C_1}{2\nu} \tag{3.9}$$

où C_1 est la constante intervenant dans la condition d'ellipticité (0.5).

(1) Supposons réalisée la condition

$$\sum_{j=1}^{\nu} \left| \frac{\partial S^j_{k+\ell}}{\partial t_j}(t_j,x_j,\eta_j) \right|^2 \geqslant C \left(\sum_{j=1}^{\nu} \mu^{2(k+\ell)}(x_j,\eta_j) \right) \tag{3.10}$$

où C vérifie :

$$\frac{4}{A^2} < C < \frac{C_1}{2\nu}. \tag{3.11}$$

On a :

$$\sum_{j=1}^{\nu} \mu^{2(k+\ell)}(x_j,\eta_j) = \sum_{j=1}^{\nu} (1 + |x_j|^{1/k} + |\eta_j|^{1/\ell})^{2(k+\ell)} \geqslant \frac{A^2}{2} |\zeta|^2.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\nu} |\partial_{t_j} \varphi|^2 &= \sum_{j=1}^{\nu} |\partial_{t_j} S^j_{k+\ell} + \zeta_j|^2 \\ &\geqslant \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} |\partial_{t_j} S^j_{k+\ell}|^2 - \sum_{j=1}^{\nu} |\zeta_j|^2 \\ &\geqslant \frac{A^2 C}{4} |\zeta|^2 - |\zeta|^2 = \left(\frac{A^2 C}{4} - 1\right) |\zeta|^2. \end{aligned}$$

et $\frac{A^2C}{4} - 1$ est positif dès que (3.11) est vérifiée.

Par ailleurs

$$\sum_{j=1}^{\nu} |\partial_{t_j}\varphi|^2 \geqslant (\frac{C}{2}-\frac{2}{A^2}) \sum_{j=1}^{\nu} \mu^{2(k+\ell)}(x_j,\eta_j)$$

et $(\frac{C}{2}-\frac{2}{A^2})$ est également positif dans les mêmes conditions.

Pour tout A vérifiant (3.9), il existe donc K tel que (3.7) soit vérifiée.

(2) Supposons maintenant que l'on ait

$$\sum_{j=1}^{\nu} \left| \frac{\partial S^j_{k+\ell}}{\partial t_j}(t_j,x_j,\eta_j) \right|^2 \leqslant C\,(\sum_{j=1}^{\nu} \mu^{2(k+\ell)}(x_j,\eta_j)).$$

Alors

$$\sum_{j=1}^{\nu} (p^j_o)^2 (x_j, \frac{\partial S^j_{k+\ell}}{\partial x_j}(t_j,x_j,\eta_j)) \leqslant C \left[\sum_{j=1}^{\nu} \mu^{2(k+\ell)}(x_j,\eta_j) \right].$$

Mais l'ellipticité globale de $\sum_{j=1}^{\nu} P_j^2$ permet d'écrire :

$$\left[\sum_{j=1}^{\nu} (p^j_o)^2\right](x_i\ \frac{\partial S^i_{k+\ell}}{\partial x_i}) \geqslant C_1\ \mu^{2(k+\ell)}(x_i,\eta_i) \quad \forall\ (x_i,\eta_i) : |(x_i,\eta_i)| \geqslant C_2$$

et donc :

$$\sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} (p^j_o)^2 (x_i, \frac{\partial S^i_{k+\ell}}{\partial x_i}) \geqslant C_1 \sum_{i=1}^{\nu} \mu^{2(k+\ell)}(x_i,\eta_i)$$

d'où l'on déduit :

$$\sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} \left[(p^j_o)^2(x_i, \frac{\partial S^i_{k+\ell}}{\partial x_i}) - (p^j_o)^2 (x_j, \frac{\partial S^j_{k+\ell}}{\partial x_j})\right] \geqslant (C_1 - \nu C) \sum_{i=1}^{\nu} \mu^{2(k+\ell)}(x_i,\eta_i)$$

$$\geqslant \frac{C_1}{2} \sum_{i=1}^{\nu} \mu^{2(k+\ell)}(x_i,\eta_i)$$

si (3.11) est vérifiée.

Alors il existe $(\tilde{i}, j)$ tel que

(3.12) $$(p^j_o)^2(x_{\tilde{i}}, \frac{\partial S^{\tilde{i}}_{k+\ell}}{\partial x_{\tilde{i}}}) - (p^j_o)^2 (x_j, \frac{\partial S^j_{k+\ell}}{\partial x_j}) \geqslant \frac{C_1}{2\nu^2} \sum_{i=1}^{\nu} \mu^{2(k+\ell)}(x_i,\eta_i).$$

Majorons le premier membre de l'inégalité (3.12) par

$$\sum_{r=\tilde{j}}^{j-1} \left| (p_o^j)^2 (x_r, \frac{\partial S^r_{k+\ell}}{\partial x_r}) - (p_o^j)^2 (x_{r+1}, \frac{\partial S^{r+1}_{k+\ell}}{\partial x_{r+1}}) \right|,$$

et nous obtenons, en tenant compte du fait que

$$(p_o^j)^2 (x_r, \frac{\partial S^r_{k+\ell}}{\partial x_r}) = (p_o^j)^2 (\frac{\partial S^r_{k+\ell}}{\partial \eta_r}, \eta_r)$$

l'existence d'un couple $(j, \tilde{j})$ tel que :

$$(3.13) \quad \left| (p_o^j)^2 (\frac{\partial S^{\tilde{j}}_{k+\ell}}{\partial \eta_{\tilde{j}}}, \eta_{\tilde{j}}) - (p_o^j)^2 (x_{\tilde{j}+1}, \frac{\partial S^{\tilde{j}+1}_{k+\ell}}{\partial x_{\tilde{j}+1}}) \right| \geqslant \frac{C_1}{2\nu^3} \sum_{i=1}^{\nu} \mu^{2(k+\ell)}(x_i, \eta_i) .$$

En appliquant alors la formule des accroissements finis sur [0,1] successivement aux fonctions :

$$(3.14) \quad \Psi_1(\rho) = (p_o^j)^2 \left[x_{\tilde{j}+1} + \rho^k (\frac{\partial S^{\tilde{j}}_{k+\ell}}{\partial \eta_{\tilde{j}}} - x_{\tilde{j}+1}), \frac{\partial S^{\tilde{j}+1}}{\partial x_{\tilde{j}+1}} + \rho^\ell (\eta_{\tilde{j}} - \frac{\partial S^{\tilde{j}+1}_{k+\ell}}{\partial x_{\tilde{j}+1}}) \right]$$

$$(3.15) \quad M(\rho) = 1 + \left| x_{\tilde{j}+1} + \rho^k (\frac{\partial S^{\tilde{j}}_{k+\ell}}{\partial \eta_{\tilde{j}}} - x_{\tilde{j}+1}) \right|^{1/k} + \left| \frac{\partial S^{\tilde{j}+1}}{\partial x_{\tilde{j}+1}} + \rho^\ell (\eta_{\tilde{j}} - \frac{\partial S^{\tilde{j}+1}_{k+\ell}}{\partial x_{\tilde{j}+1}}) \right|^{1/\ell}$$

$$(3.16) \quad \Psi_2(\rho) = \mu(x_{\tilde{j}+1}, \eta_{\tilde{j}+1}) + \rho(|\partial_{\eta_{\tilde{j}}} \varphi|^{1/k} + |\partial_{x_{\tilde{j}+1}} \varphi|^{1/\ell})$$

on obtient :

$$(3.17) \exists K_1 : K_1 \sum_{i=1}^{\nu} \mu^{2(k+\ell)}(x_i, \eta_i) \leqslant \left[|\partial_{\eta_{\tilde{j}}} \varphi|^{1/k} + |\partial_{x_{\tilde{j}+1}} \varphi|^{1/\ell} \right] \times \left| \sum_{i=1}^{\nu} \mu(x_i, \eta_i) \right|^{2(k+\ell)-1}$$

et donc

$$(3.18) \qquad \exists K_1' : K_1' \sum_{i=1}^{\nu} \mu(x_i, \eta_i) \leqslant |\partial_{\eta_{\tilde{j}}} \varphi|^{1/k} + |\partial_{x_{\tilde{j}+1}} \varphi|^{1/\ell}.$$

Enfin, sur le complémentaire de K^1_ζ, on a

$$\sum_{i=1}^{\nu} \mu^{(k+\ell)} (x_i, \eta_i) \geqslant A |\zeta|$$

et donc

$$\exists\, A'>0 : \sum_{i=1}^{\nu} \mu(x_i,\eta_i) > A' \,|\zeta|^{1/k+\ell}$$

on a bien obtenu (3.7).

Démonstration de la proposition 3.5. $b_{rM}(t,x,\eta)$ est borné ainsi que ses dérivées, par rapport aux variables d'espace.

$\chi_A(\,|\zeta|^{-k/k+\ell}(x_1,\dots,x_\nu),\ |\zeta|^{-\ell/k+\ell}(\eta_1,\dots,\eta_\nu))$ est borné, et ses dérivées font apparaître des puissances négatives de $|\zeta|$ et des termes bornés indépendamment de $|\zeta|$ (pour $|\zeta|\geqslant 1$).

Il reste à étudier $e^{i\widetilde{S}}$:

Les dérivées $\partial_{t_j}\widetilde{S}$ se comportent en $\mu^{k+\ell-1}(x_j,\eta_j)$; les dérivées par rapport aux variables d'espace se majorent en $\mu^{\ell-1}(x_j,\eta_j)$ pour $\partial_{x_j}\widetilde{S}$, et en $\mu^{k-1}(x_j,\eta_j)$ pour $\partial_{\eta_j}\widetilde{S}$.

Lorsqu'on applique M* à $e^{i\widetilde{S}}$, on fait apparaître devant $\partial_{t_j}\widetilde{S}$ un terme en $\mu^{(2k\ell-1)(k+\ell)}(x_j,\eta_j)$, devant $\partial_{x_j}\widetilde{S}$ le facteur $\mu^{[2k(k+\ell)-1]\ell}(x_j,\eta_j)$ et devant $\partial_{\eta_j}\widetilde{S}$ un terme en $\mu^{[2\ell(k+\ell)-1]k}$. Compte tenu du dénominateur de M*, on gagne alors $(\sum_{j=1}^{\nu}\mu(x_j,\eta_j))^{-1}$ (avec une majoration indépendante de $|\zeta|$ pour $|\zeta|\geqslant 1$).

4. - ETUDE DE $J(\zeta)$ - 2ème étape

On vient de ramener l'étude de $J_r(\zeta)$ à celle d'une intégrale sur le compact K_ζ, que l'on notera $J'_r(\zeta)$:

$$J'_r(\zeta) = (2\pi)^{-\nu n} \int_{[-T,T]\times \mathbb{R}^{2n\nu}} e^{iS(t,x,\eta)} \chi_{\epsilon_0}(x,\eta)\theta(t)\, b_{rM}(t,x,\eta)\, \times \tag{4.1}$$

$$\times\, \widetilde{\chi}_A(|\zeta|^{-k/k+\ell}\,x,\ |\zeta|^{-\ell/k+\ell}\,\eta)\,dt\,dx\,d\eta$$

où $\widetilde{\chi}_A = 1-\chi_A$ est à support dans

$$K = \left\{(x,\eta)\in \mathbb{R}^{2n\nu}\ ;\ \sum_{j=1}^{\nu} (|x_j|^{1/k} + |\eta_j|^{1/\ell})^{k+\ell} \leqslant 2A\right\}.$$

Pour étudier le comportement en $|\zeta|$ de $J'_r(\zeta)$, on va utiliser un théorème de la phase stationnaire. Pour cela faisons tout d'abord dans l'intégrale le changement de variables $x = |\zeta|^{k/k+\ell}\widetilde{x}$, $\eta = |\zeta|^{\ell/k+\ell}\widetilde{\eta}$ de manière à faire apparaître $|\zeta|$ devant la fonction de phase. $J'_r(\zeta)$ devient :

(4.2)
$$\left\{\begin{array}{l} J'_r(\zeta) = (2\pi)^{-n\nu}\,|\zeta|^{n\nu} \displaystyle\int e^{i|\zeta|\tilde{\varphi}(t,x,\eta,\epsilon,\sigma)} \times \theta(t) \times \\ \qquad\qquad \times\, b^{\epsilon}_{rM}{}^{o}(t, |\zeta|^{k/k+\ell}x, |\zeta|^{\ell/k+\ell}\eta)\tilde{X}_A(x,\eta)dtdxd\eta \\ \text{avec} \\ \tilde{\varphi}(t,x,\eta,\epsilon,\sigma) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\nu} S^j_{k+\ell}(t,x,\eta) + \sum_{j=1}^{\nu}\sum_{s=1}^{k+\ell-1} \epsilon^s S^j_{k+\ell-s}(t,x,\eta) - \\ \qquad\qquad - x_2\eta_1 - \dots - x_1\eta_\nu + \displaystyle\sum_{j=1}^{\nu} t_j\sigma_j \end{array}\right.$$

où

(4.2 bis)
$$\left\{\begin{array}{l} \epsilon = |\zeta|^{-1/k+\ell} \\ \sigma = \dfrac{\zeta}{|\zeta|} \end{array}\right.$$

Dans la suite on considère ϵ et σ comme 2 paramètres indépendants de ζ, et on étudie le comportement de $J_r(\zeta)$ en la regardant comme une intégrale $K_r(\zeta,\epsilon')$, dépendant du paramètre $\epsilon' = (\epsilon,\sigma)$, dont l'expression est donnée par (4.2).

Notons $\tilde{b}_{rM}(t,x,\eta)$ l'amplitude de $K_r(\zeta,\epsilon')$ ($\tilde{b}_{rM}$ dépend de ζ). Etudions d'abord la variété critique de la fonction de phase ci-dessus : soit $\Sigma_{\epsilon'}$ la variété critique de la fonction de phase dans (4.2). $\Sigma_{\epsilon'}$ est déterminée par les équations :

(4.3)
$$\left\{\begin{array}{lll} (1) & \dfrac{\partial S^j_{k+\ell}}{\partial t_j} + \dfrac{\zeta_j}{|\zeta|} + \displaystyle\sum_{s=1}^{k+\ell-1} \epsilon^{k+\ell-s}\frac{\partial S^j_s}{\partial t_j} = 0 & \forall\, j = 1,\dots,\nu \\ (2) & \dfrac{\partial S^j_{k+\ell}}{\partial x_j} - \eta_{j-1} + \displaystyle\sum_{s=1}^{k+\ell-1} \epsilon^{k+\ell-s}\frac{\partial S^j_s}{\partial x_j} = 0 & \text{avec } j-1=\nu \text{ pour } j=1 \\ (3) & \dfrac{\partial S^j_{k+\ell}}{\partial \eta_j} - x_{j+1} + \displaystyle\sum_{s=1}^{k+\ell-1} \epsilon^{k+\ell-s}\frac{\partial S^j_s}{\partial \eta_j} = 0 & \text{avec } j+1=1 \text{ si } j=\nu \end{array}\right.$$

PROPOSITION 4.1. *Soit* $\Sigma'_{\epsilon'} = \Sigma_{\epsilon'} \cap \operatorname{supp} \tilde{b}_{rM}$. *Si* T *est suffisamment petit, il existe* ϵ_1 *tel que* $\Sigma'_{\epsilon'}$ *soit déterminée dans* $\mathbb{R}^{2n\nu}$, $\forall\, \epsilon < \epsilon_1$, *par les équations*

$$\left\{\begin{array}{l} t_j = 0 \quad \forall\, j,\ x_j = x_c \quad \forall\, j,\ \ \eta_j = \eta_c \quad \forall j, \textit{ où } (x_c,\eta_c) \textit{ vérifie} \\ (4.4) \quad p^j_o(x_c,\eta_c) + \displaystyle\sum_{s=1}^{k+\ell-1} \epsilon^s p^j_s(x_c,\eta_c) = \sigma_j. \end{array}\right.$$

Démonstration. Les différents termes de la fonction de phase (cf. [10]) sont déterminés par les équations :

$$(4.5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \partial_{t_j} S^j_{k+\ell} + p^j_o\left(x_j, \dfrac{\partial S^j_{k+\ell}}{\partial x_j}\right) = 0 \\ S^j_{k+\ell}(0,x_j,\eta_j) = x_j\eta_j \end{array}\right. \\ \text{et pour } 1 \leqslant s \leqslant k+\ell-1 \\ \left\{\begin{array}{l} -\partial_{t_j} S^j_s - \Gamma^j_s(S^j_{k+\ell},\dots,S^j_s) = 0 \\ S^j_s(0,x_j,\eta_j) = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

où $\Gamma^j_s(S^j_{k+\ell},\dots,S^j_s)$ est une expression dépendant des termes $p^j_o,\dots,p^j_{k+\ell-1}$ et de leurs dérivées, valant en particulier à $t_j = 0$:

$$(4.6)\qquad \Gamma^j_s(S^j_{k+\ell},\dots,S^j_s)\,(0,x_j,\eta_j) = p^j_{k+\ell-s}(x_j,\eta_j) \quad \forall\, s = 1,\dots,k+\ell-1.$$

De sorte que $\partial_{t_j} S^j_s(0,x_j,\eta_j)$ est égal à :

$$(4.7)\qquad \partial_{t_j} S^j_s(0,x_j,\eta_j) = -\,p^j_{k+\ell-s}(x_j,\eta_j) \qquad \forall\, s = 1,\dots,k+\ell.$$

Démontrons que, dans les conditions de la proposition 4.1, on a $t_j = 0 \quad \forall\, j = 1,\dots,\nu$. La relation (4.7), jointe à (4.3) (1), donne alors exactement (4.4). Cela découle des lemmes suivants :

LEMME 4.2.

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \forall\, \alpha \quad \exists\, T > 0 : \ \forall\, t_j : |t_j| \leqslant T \qquad \forall\, (x_j,\eta_j) \in \mathbb{R}^{2n\nu},$$

si $(t,x,\eta) \in \Sigma_\epsilon$ *alors*

$$|\eta_j - \eta_{\tilde j}| < \alpha \ \textit{et}\ |x_j - x_{\tilde j}| < \alpha \qquad \forall\, j = 1,\dots,\nu \qquad \forall\, \tilde j = 1,\dots,\nu\,.$$

Preuve. Sur le compact K sur lequel on travaille, les applications

$$(t,x,\eta) \to (S^1_s(t_1,x_1,\eta_1),\dots,S^\nu_s(t_\nu,x_\nu,\eta_\nu))$$

sont de classe C^∞ pour tout $s = 1,\dots,k+\ell$. Or les fonctions $S^j_s(t_j,x_j,\eta_j)$ sont solution des équations (4.5).

On en déduit alors :

$$(4.8)\quad \begin{cases} \forall\, \alpha_1 > 0 \quad \exists\, T_o : \forall\, t : |t_j| < T_o \quad \forall\, j = 1,\ldots,\nu \quad \forall (x,\eta) \in K : \\ \left| \dfrac{\partial S^j_{k+\ell}}{\partial x_j}(t_j,x_j,\eta_j) - \eta_j \right| < \alpha_1 \\ \left| \dfrac{\partial S^j_s}{\partial x_j}(t_j,x_j,\eta_j) \right| < \alpha_1 \qquad \forall\, s = 1,\ldots,(k+\ell-1). \end{cases}$$

Le résultat du lemme 4.2 découle alors de (4.3) en choisissant α_1 en fonction de α et de ϵ.

LEMME 4.3. *(i) Sur le support de* $\widetilde{b}_{rM}$, *le système*

$$\left\{ dp^j_o \left(x_1, \frac{\partial S^1_{k+\ell}}{\partial x_1}(t_1,x_1,\eta_1) \right) \right\} \qquad j = 1,\ldots,\nu$$

est un système libre dans $\mathbb{R}^{2n}$.

(ii) Il existe $T_o > 0$ *tel que,* $\forall\, T \leqslant T_o$, *le système*

$$\{ dp^j_o(x_j,\eta_j) \} \qquad j = 1,\ldots,\nu$$

soit un système libre pour tout (x,η) *tel que* $(t,x,\eta) \in \Sigma'_{\epsilon'}$.

Preuve. (i) Le calcul de $\widetilde{b}_{rM}$ fait apparaître les propriétés suivantes :

- $\widetilde{b}_{oM}$ est le produit de plusieurs fonctions et de

$$\Psi\left(p^1_o(x_1, \frac{\partial S^1_{k+\ell}}{\partial x_1}), \ldots, p^\nu_o(x_1, \frac{\partial S^1_{k+\ell}}{\partial x_1}) \right)$$

- pour $r > 0$, $\widetilde{b}_{rM}$ est une somme de termes contenant chacun en facteur des dérivées de Ψ au point

$$\left(p^1_o(x_1, \frac{\partial S^1_{k+\ell}}{\partial x_1}), \ldots, p^\nu_o(x_1, \frac{\partial S^1_{k+\ell}}{\partial x_1}) \right)$$

(ζ ne figure plus dans ces termes puisqu'on a pu le faire sortir par homogénéité dans chaque terme). Comme le support de Ψ ne rencontre pas l'ensemble W des valeurs critiques de $(p^1_o,\ldots,p^\nu_o)$, sur le support $\widetilde{b}_{rM}$ on a nécessairement :

$$\left(p_o^j(x_1, \frac{\partial S^1_{k+\ell}}{\partial x_1})\right)_{j=1,\dots,\nu} \notin W. \tag{4.9}$$

(i) est ainsi prouvé.

(ii) Σ'_ϵ, est une variété compacte sur laquelle le système

$$\left\{ dp_o^j \left(x_1, \frac{\partial S^1_{k+\ell}}{\partial x_1}(t_1,x_1,\eta_1)\right)\right\}_{j=1,\dots,\nu}$$

est un système libre.

On peut alors trouver un recouvrement fini de Σ'_ϵ, par des ouverts U_J, où J décrit l'ensemble des parties à ν éléments de $\{1,\dots,2n\}$, tels que

$$\forall\ (t,x,\eta) \in \bar{U}_J \quad \left| \left(\frac{\partial p_o^j}{\partial x_r}\right)\left(x_1, \frac{\partial S^1_{k+\ell}}{\partial x_1}(t_1,x_1,\eta_1)\right)\right|_{\substack{j=1,\dots,\nu \\ r\in J}} \neq 0 \tag{4.10}$$

(on note $x_r = \eta_s$ pour $r = n + s$ et $|a_{ij}|_{\substack{i=\dots\\ j=\dots}}$ signifie dét $[a_{ij}]_{\substack{i=\dots\\ j=\dots}}$).

Soit alors

$$\alpha_J = \min_{(t,x,\eta)\in\bar{U}_J} \left| \left(\frac{\partial p_o^j}{\partial x_r}\right)\left(x_1, \frac{\partial S^1_{k+\ell}}{\partial x_1}(t_1,x_1,\eta_1)\right)\right|_{\substack{j=1,\dots,\nu \\ r\in J}} > 0$$

et $\alpha = \min\limits_J \alpha_J$.

Il existe β_J et T_o tels que, pour tout $(t,x,\eta) \in \Sigma'_\epsilon$, on ait :

$$\left.\begin{array}{l} |x_j - x_1| < \beta_J \\ |\eta_j - \eta_1| < \beta_J \\ |t_j| < T_o \end{array}\right\} \Rightarrow \left| \left| \left(\frac{\partial p_o^j}{\partial x_r}\right)(x_j,\eta_j)\right|_{\substack{j=1,\dots,\nu \\ r\in J}} - \left| \left(\frac{\partial p_o^j}{\partial x_r}\right)\left(x_1, \frac{\partial S^1_{k+\ell}}{\partial x_1}(t_1,x_1,\eta_1)\right)\right|_{\substack{j=1,\dots,\nu \\ r\in J}} \right| < \frac{\alpha}{2}$$

Soit $\beta = \min\limits_J \beta_J$ et $T_o(\beta,\epsilon)$ donné par le lemme 4.2. Alors, si $(t,x,\eta) \in \bar{U}_J$, le déterminant

$$\left|\left(\frac{\partial p_o^j}{\partial x_r}\right)(x_j,\eta_j)\right|_{\substack{j=1,\dots,\nu \\ r\in J}} \quad \text{est aussi non nul.}$$

On a ainsi achevé la démonstration du lemme 4.3.

Revenons maintenant aux équations (4.3) [(2) et (3)]. Notons

$$\sigma_s^j(t_j,x_j,\eta_j) = \int_o^1 \frac{\partial S_s^j}{\partial t_j}(\tilde\sigma t_j,x_j,\eta_j)d\tilde\sigma .$$

Alors $S_s^j(t_j,x_j,\eta_j) = S_s^j(0,x_j,\eta_j) + t_j\sigma_s^j(t_j,x_j,\eta_j)$. On obtient ainsi

$$(4.11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial S^j_{k+\ell}}{\partial x_j} = \eta_j + t_j \dfrac{\partial \sigma^j_{k+\ell}}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial S^j_{k+\ell}}{\partial \eta_j} = x_j + t_j \dfrac{\partial \sigma^j_{k+\ell}}{\partial \eta_j} \\[2ex] \dfrac{\partial S^j_s}{\partial x_j} = t_j \dfrac{\partial \sigma^j_s}{\partial x_j} \quad \dfrac{\partial S^j_s}{\partial \eta_j} = t_j \dfrac{\partial \sigma^j_s}{\partial \eta_j} \end{cases}$$

Alors (4.3) [(2) et (3)] deviennent :

$$(4.12)\quad \begin{cases} (2)\quad \eta_j - \eta_{j-1} + t_j \dfrac{\partial \sigma^j_{k+\ell}}{\partial x_j} + \displaystyle\sum_{s=1}^{k+\ell-1} \epsilon^{k+\ell-s}\, t_j \dfrac{\partial \sigma^j_s}{\partial x_j} = 0 \\[2ex] (3)\quad x_j - x_{j+1} + t_j \dfrac{\partial \sigma^j_{k+\ell}}{\partial \eta_j} + \displaystyle\sum_{s=1}^{k+\ell-1} \epsilon^{k+\ell-s}\, t_j \dfrac{\partial \sigma^j_s}{\partial \eta_j} = 0 \end{cases}$$

De (4.12) on déduit :

$$(4.13)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{\nu} t_j \left[\sum_{s=1}^{k+\ell} \epsilon^{k+\ell-s} \frac{\partial \sigma^j}{\partial x_j}(t_j,x_j,\eta_j)\right] = 0 \\[2ex] \displaystyle\sum_{j=1}^{\nu} t_j \left[\sum_{s=1}^{k+\ell} \epsilon^{k+\ell-s} \frac{\partial \sigma^j}{\partial \eta_j}(t_j,x_j,\eta_j)\right] = 0 \end{cases}$$

Les équations (4.5) et (4.7) permettent d'écrire :

$$(4.14)\qquad \begin{cases} \sigma_s^j(0,x_j,\eta_j) = -\,p^j_{k+\ell-s}\,(x_j,\eta_j) \\[2ex] \dfrac{\partial\sigma_s^j}{\partial x_j}(0,x_j,\eta_j) = -\,\dfrac{\partial p^j_{k+\ell-s}}{\partial x_j}\,(x_j,\eta_j) \\[2ex] \dfrac{\partial\sigma_s^j}{\partial \eta_j}(0,x_j,\eta_j) = -\,\dfrac{\partial p^j_{k+\ell-s}}{\partial \eta_j}\,(x_j,\eta_j) \end{cases}$$

Le système linéaire :

$$(4.15)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{\nu} t_j\left(\sum_{s=1}^{k+\ell} \epsilon^{k+\ell-s}\,\frac{\partial p^j_{k+\ell-s}}{\partial x_j}\,(x_j,\eta_j)\right) = 0 \\[3ex] \displaystyle\sum_{j=1}^{\nu} t_j\left(\sum_{s=1}^{k+\ell} \epsilon^{k+\ell-s}\,\frac{\partial p^j_{k+\ell-s}}{\partial \eta_j}\,(x_j,\eta_j)\right) = 0 \end{cases}$$

n'admet que la solution nulle.

En effet, le lemme 4.3 entraîne clairement que (4.15) n'admet que la solution triviale, et par conséquent (4.13) également, si l'on choisit T et ϵ suffisamment petits.

La proposition 4.1 est ainsi démontrée.

Précisons maintenant le choix de ϵ_0 : On montre aisément, en utilisant la caractérisation de Σ'_ϵ, et la quasihomogénéité de $\sum_{j=1}^{\nu} (p_0^j)^2$, l'existence de 2 voisinages de Σ'_ϵ, de la forme :

$$(4.16)\qquad \begin{cases} V = (\,]-T_1,T_1[\,)^\nu \times V_1 \\[2ex] V' = (\,]-T_1,T_1[\,)^\nu \times V'_1 \end{cases} \qquad \text{avec (4.17)}\quad V'_1 \supset V_1$$

tels que ϵ_0 puisse être choisi de manière à avoir :

$$(4.18)\qquad \chi_{\epsilon_0}\left(\,|\zeta|^{k/k+\ell}x,\ |\zeta|^{\ell/k+\ell}\eta\right) = 1 \qquad \forall\,(x,\eta)\in V'_1\,.$$

En choisissant alors une nouvelle fonction de troncature $Y(x,\eta)$ égale à 1 sur V_1 et à support dans $V'_1 \supset V_1$, on écrit $K_r(\zeta,\epsilon')$ comme somme de 2 intégrales :

(4.19) $$K_{r1}(\zeta,\epsilon') = (2\pi)^{-n\nu}\,|\zeta|^{n\nu-r/k+\ell}\int e^{i\,|\zeta|\varphi(t,x,\eta,\zeta/|\zeta|)} \times \tilde{b}_{rM}(t,x,\eta)Y(x,\eta)dtdxd\eta$$

et

(4.20) $$K_{r2}(\zeta,\epsilon') = (2\pi)^{-n\nu}\,|\zeta|^{n\nu}\int e^{i\,|\zeta|\varphi(t,x,\eta,\zeta/\,|\zeta|)}$$
$$\times\,(1-Y(x,\eta))\times\tilde{b}_{rM}(t,|\zeta|^{k/k+\ell}x,\,|\zeta|^{\ell/k+\ell}\eta)dtdxd\eta.$$

L'amplitude de K_{r_1} est à support dans V'. (Pour écrire K_{r_1} on peut utiliser la quasi-homogénéité de l'amplitude et sortir $|\zeta|^{-r/k+\ell}$ de l'intégrale).

L'amplitude de K_{r_2} est nulle si (x,η) appartient à V.

Le théorème de la phase non stationnaire entraîne :

(4.21) $$K_{r_2}(\zeta,\epsilon') = 0(|\zeta|^{-\infty})$$
$$|\zeta|\to+\infty$$

L'étude de $K_r(\zeta,\epsilon')$ se ramène donc à celle de $K_{r_1}(\zeta,\epsilon')$ que l'on notera encore $K_r(\zeta,\epsilon')$ dans ce qui suit, en gardant aussi la notation $\tilde{b}_{rM}$ pour son amplitude. On va traiter $K_r(\zeta,\epsilon')$ par la méthode de la phase stationnaire.

Vérifions d'abord que la variété critique :

(4.22) $$\Sigma'_{\epsilon'} = \Sigma_{\epsilon'} \cap \operatorname{supp}\tilde{b}_{rM}$$

est non dégénérée pour $\tilde{\varphi}$.

Reprenons le recouvrement de $\Sigma'_{\epsilon'}$ par les ouverts U_J, en notant $\mathscr{F}$ l'ensemble (fini) des indices J, et soit $(\Phi_J)_{J\in\mathscr{F}}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Alors :

(4.23) $$K_r(\zeta,\epsilon') = \sum_{J\in\mathscr{F}} K_{r_{\Phi_J}}(\zeta,\epsilon')$$

où $K_{r_{\Phi_J}}(\zeta,\epsilon')$ désigne l'intégrale sur le support de Φ_J.

Etudions une de ces intégrales. Supposons par exemple que sur U_J ce soit le déterminant

(4.24) $$\Delta(x,\eta,\epsilon) = \left|\frac{\partial p_o^j}{\partial x_{r'}}(x,\eta) + \sum_{s=1}^{k+\ell-1}\epsilon^s\frac{\partial p_s^j}{\partial x_{r'}}(x,\eta)\right|_{\substack{j=1,\dots,\nu\\ r'=1,\dots,\nu}}$$

qui soit non nul, et notons Φ la fonction Φ_J correspondante.

Alors, sur le support de Φ, on peut paramètrer $\Sigma'_{\epsilon'}$ par l'application $g_{\epsilon'}$ définie par :

$$(4.25)\quad \begin{cases} g_{\epsilon'}(x_{\nu+1},\dots,x_n,\eta_1,\dots,\eta_n) = (g_{1\epsilon'}(x_{\nu+1},\dots,\eta_n),\dots,g_{\nu\epsilon'}(x_{\nu+1},\dots,\eta_n),x_{\nu+1},\dots,\eta_n) \\ \text{où } (g_{1\epsilon'}(x_{\nu+1},\dots,\eta_n),\dots,g_{\nu\epsilon'}(x_{\nu+1},\dots,\eta_n)) \text{ est solution implicite du sytème} \\ p_o^j(x,\eta) + \sum_{s=1}^{k+\ell-1} \epsilon^s p_s^j(x,\eta) = \sigma_j \qquad \forall\, j=1,\dots,\nu. \end{cases}$$

Les dérivées secondes de la fonction de phase par rapport aux variables autres que $(t_j)_{j=1,\dots,\nu}$ et $(x_j)_{j=1,\dots,\nu}$ sont toutes nulles si $t_j = 0 \;\; \forall\, j$. Le hessien de la fonction de phase est donc nul sur la variété tangente à $\Sigma'_{\epsilon'}$. Par contre, sur l'espace normal il est donné par :

$$(4.26)\quad \tilde{\varphi}''(0,x,\eta,\epsilon') = \begin{bmatrix} \left[\dfrac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial t_i\,\partial t_j}\right]_{\substack{i=1,\dots,\nu\\ j=1,\dots,\nu}} & \left[\dfrac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial t_j\,\partial x_i} = -\dfrac{\partial p_j^*(\epsilon)}{\partial x_i}\right]_{\substack{i=1,\dots,\nu\\ j=1,\dots,\nu}} \\ \left[-\dfrac{\partial p_j^*(\epsilon)}{\partial x_i}\right]_{\substack{i=1,\dots,\nu\\ j=1,\dots,\nu}} & 0 \end{bmatrix}$$

où

$$(4.27)\quad p_j^*(\epsilon) = p_o^j(\epsilon) + \sum_{s=1}^{k+\ell-1} \epsilon^s p_s^j.$$

Son déterminant vaut $-\Delta[(x,\eta,\epsilon)]^2$ et est donc non nul sur le support de Φ. Ainsi, la forme quadratique $\tilde{\varphi}''(0,x,\eta,\epsilon')_{|N}$ n'est pas dégénérée.

Par ailleurs $\tilde{\varphi}$ est nulle sur $\Sigma'_{\epsilon'}$, et on peut ainsi avoir directement le comportement de $K_r(\zeta,\epsilon')$ sans travailler sur chaque composante connexe de $\Sigma'_{\epsilon'}$.

Calculons maintenant la signature de $\tilde{\varphi}''(0,x,\eta,\epsilon')_{|N}$. Pour cela, regardons l'expression de $\tilde{\varphi}''(0,x,\eta,\epsilon')$ dans la carte locale correspondant au support de Φ :

$$\tilde{\varphi}''(0,x,\eta,\epsilon')\,.\,(\delta t_1,\dots,\delta t_\nu,\delta x_1,\dots,\delta x_\nu) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial t_i^2} \times (\delta t_i)^2 - 2\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial p_i^*(\epsilon)}{\partial x_j}\,\partial x_j\,\partial t_i\,.$$

En notant s_i le signe de $\dfrac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial t_1^2}$, on décompose $\widetilde{\varphi}''$ de la façon suivante :

$$\widetilde{\varphi}''(0,x,\eta,\epsilon)\,.\,(\delta t_1,\ldots,\delta x_\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} s_i \left[\sqrt{\left|\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial t_i^2}\right|}\,.\,\delta t_i - \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial t_i^2}\right|}} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial p_i^*(\epsilon)}{\partial x_j}\,\delta x_j\right]^2 -$$

$$-\sum_{i=1}^{\nu} s_i \frac{1}{\left|\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial t_1^2}\right|}\left(\sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial p_i^*(\epsilon)}{\partial x_j}\,\partial x_j\right)^2 .$$

Les formes F_i définies par $F_i(\delta t_1,\ldots,\delta x_\nu) = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial p_i^*}{\partial x_j}\,\delta x_j$ sont linéairement indépendantes puisque leur déterminant est égal à $\Delta(x,\eta,\epsilon)$ et est donc non nul. On déduit de cette décomposition que la signature de $\widetilde{\varphi}''(0,x,\eta,\epsilon')_{\,|N}$ est égale à 0.

Une variante avec paramètre du théorème de la phase stationnaire (que l'on établit aisément en adaptant la démonstration de [7]) permet d'obtenir :

$$(4.28)\quad \left\{\begin{array}{l} K_r(\zeta,\epsilon') = (2\pi)^{-n\nu}\,|\zeta|^{n\nu-r/k+\ell}\left(\dfrac{2\pi}{|\zeta|}\right)^{\nu+n(\nu-1)} p_r(\,|\zeta|\,,\epsilon') \\[2ex] \text{avec } p_r(\,|\zeta|\,,\epsilon') \sim \displaystyle\sum_{s\geqslant o} a_s^r(\epsilon')\,|\zeta|^{-s} \\[2ex] \text{et} \\[2ex] a_o^r(\epsilon') = \displaystyle\int_{\Sigma'_{\epsilon'}} \widetilde{b}_r(t,x,\eta)\,|\det(\widetilde{\varphi}''(0,x,\eta,\epsilon')_{\,|N}\,|^{-1/2}\, dv_{\Sigma'_{\epsilon'}} \end{array}\right.$$

où $dv_{\Sigma'_{\epsilon'}}$ est la mesure induite par $dtdxd\eta$ sur $\Sigma'_{\epsilon'}$.

Si r n'est pas nul, $\widetilde{b}_r(t,x,\eta)$ est nul sur $\Sigma'_{\epsilon'}$ car les termes $a_r^j(t,x,\eta)$, ainsi que leurs dérivées en x ou η, sont tous nuls en $t = 0$. On déduit de ce qui précède l'estimation :

$$(4.29)\qquad K_r(\zeta,\epsilon') = \underset{|\zeta|\to+\infty}{\mathbf{O}}\,(\,|\zeta|^{-\nu+n-1-1/k+\ell})\qquad \forall\, r\geqslant 1$$

avec une majoration uniforme par rapport à ϵ'.

Pour $r = 0$, les fonctions de troncature étant choisies de telle sorte que $\widetilde{b}_o$ et b_o coïncident sur $\Sigma'_{\epsilon'}$, on a :

$$(4.30)\qquad \widetilde{b}_o(t,x,\eta) = \Psi(p_o^1(x,\eta),\ldots,p_o^\nu(x,\eta))\qquad \forall\,(t,x,\eta)\in\Sigma'_{\epsilon'}\,.$$

On obtient donc :

$$(4.31)\qquad K_o(\zeta,\epsilon') = (2\pi)^{\nu-n}\,|\zeta|^{n-\nu}\int_{\Sigma'_{\epsilon'}} (\Psi\circ p_o)(x,\eta)\,\left|\det\widetilde{\varphi}''_{\,|N}\right|^{-1/2} dv_{\Sigma'_{\epsilon'}} +$$

$$+\ \underset{|\zeta|\to+\infty}{\mathbf{0}}\ (|\zeta|^{n-\nu-1})$$

l'estimation du reste étant là encore uniforme en ϵ'.

Le paramétrage (4.25) permet, après remplacement de ϵ' par sa valeur en fonction de ζ', et après changement de variables inverse de celui de (4.2), d'écrire (4.31) sous la forme :

$$(4.32)\qquad K_o(\zeta,\epsilon') = (2\pi)^{\nu-n}\int_{\widetilde{p}^{-1}(\zeta)} (\Psi\circ p_o)\,\frac{dS_\zeta}{\|d\widetilde{p}_1\wedge\ldots\wedge d\widetilde{p}_\nu\|} +$$

$$+\ \mathbf{0}(|\zeta|^{n-\nu-1})\ \text{pour } |\zeta|\to+\infty$$

où

$$(4.33)\qquad \widetilde{p}_j = \sum_{s=o}^{k+\ell-1} p^j_s\,,$$

dS_ζ étant la mesure de volume canonique sur la surface $\widetilde{p}^{-1}(\zeta)$, et $\|d\widetilde{p}_1\wedge\ldots\wedge d\widetilde{p}_\nu\|$ étant la norme, dans l'espace des ν-formes linéaires alternées sur $\mathbb{R}^{2n}$, du produit extérieur des $d\widetilde{p}_j$.

Le théorème 1.4 est ainsi démontré.

5. - DEMONSTRATION DU THEOREME 3

Estimons d'abord $\Sigma_1(\tau)$: $Z_1(t) = \displaystyle\sum_{\substack{\widetilde{\lambda}=\varphi_o(\lambda)\\ \lambda\in\Lambda}} b_{\widetilde{\lambda}}\, e^{-it\widetilde{\lambda}} = \sum_{\widetilde{\lambda}\in M} b_{\widetilde{\lambda}}\, e^{-it\widetilde{\lambda}}$ où M est le spectre de $\varphi_o(P_1,\ldots,P_\nu)$.

$Z_1(t)$ est, au sens des distributions, la trace de $\widetilde{\Psi}(P_1,\ldots,P_\nu)\,.\,e^{-it\varphi_o(P_1,\ldots,P_\nu)}$. $\widetilde{P} = \varphi_o(P_1,\ldots,P_\nu)$ est elliptique autoadjoint, et on peut donc utiliser le théorème 1.4 avec un seul opérateur $\widetilde{P}$.

Comme $\widetilde{P}$ est elliptique, son symbole principal n'a pas de valeur critique sur la variété critique de la fonction de phase. Le théorème de la phase stationnaire s'applique donc comme précédemment, et on en déduit, au voisinage de 0

$$(5.1)\quad \begin{cases} Z_1(t) = (2\pi)^{-n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-it\zeta}\, a(\zeta)d\zeta \\ \text{avec} \\ a(\zeta) = \displaystyle\int_{\widetilde{(\varphi_o \circ p)}(\mu) = \zeta} (\widetilde{\Psi} \circ p_o)(\mu) \frac{dS^1_\zeta}{\| \operatorname{grad} \widetilde{(\varphi_o \circ p)} \|} + 0(|\zeta|^{n-2}) \end{cases}$$

$\widetilde{\varphi_o \circ p}$ éant la somme des $(k + \ell)$ premières composantes du symbole de $\widetilde{P}$.

On peut alors appliquer le théorème 1.1 à $Z_1(t)$ avec $m = n - 1$, $\nu = 1$, $\Lambda = M$ et $a_{\widetilde{\lambda}} = b_{\widetilde{\lambda}}$ pour $\widetilde{\lambda} \in M$, $D_o = [0,1]$.

(Pour vérifier l'estimation grossière (1.4), il suffit de remarquer que le premier membre de (1.4) est majoré par le cardinal de l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur elliptique $\sum\limits_{i=1}^{\nu} P_i^2$ inférieures ou égales à τ^2).

On en déduit alors :

$$(5.2)\qquad \Sigma_1(\tau) = \sum_{\substack{\widetilde{\lambda} \leqslant \tau \\ \widetilde{\lambda} \in M}} b_{\widetilde{\lambda}} = (2\pi)^{-n} \int_{\tau D_o} a_o(\zeta)d\zeta + 0(|\zeta|^{n-1}),\quad \tau \to +\infty,$$

où $a_o(\zeta)$ est le premier terme du développement de $a(\zeta)$ dans (5.1) soit :

$$(5.3)\qquad \Sigma_1(\tau) = (2\pi)^{-n} \int_{\widetilde{(\varphi_o \circ p)} \leqslant \tau} (\widetilde{\psi} \circ p_o)dxd\eta + \mathbf{0}(\tau^{n-1})$$

Estimons maintenant $\Sigma_2(\tau\ )$: $Z_2(t)$ est la trace, au sens des distributions, de $\psi(P_1,\dots,P_\nu)e^{-i(t_1P_1,\dots,t_\nu P_\nu)}$.

On déduit du théorème 1.4 le comportement de la transformée de Fourier inverse de $Z_2(t)$:

$$(5.4)\quad \begin{cases} a(\zeta) = a_o(\zeta) + \mathbf{0}(|\zeta|^{n-\nu-1}) \\ \text{avec } a_o(\zeta) = (2\pi)^{-n} \displaystyle\int_{\widetilde{p}^{-1}(\zeta)} (\psi \circ p_o) \frac{dS_\zeta}{\| d\widetilde{p}_1 \wedge \dots \wedge d\widetilde{p}_\nu \|} \end{cases}$$

Une nouvelle application du théorème taubérien fournit alors :

$$(5.5)\qquad \Sigma_2(\tau) = (2\pi)^{-n} \int_{\widetilde{p}^{-1}(\tau D)} (\psi \circ p_o)dxd\eta + \mathbf{0}(\tau^{n-1})$$

où $D = C \cap \{\varphi_o \leqslant 1\}$.

Il découle alors du calcul fonctionnel établi dans [5] que les intégrales de $(\widetilde{\Psi} \circ p_o)$ sur $\{\widetilde{\varphi_o \circ p} \leqslant \tau\}$ d'une part, et sur $\{\varphi_o \circ \widetilde{p} \leqslant \tau\}$ d'autre part, diffèrent d'un $\mathbf{O}(\tau^{n-1})$. Pour la même raison, on peut remplacer, dans les estimations ci-dessus, $\widetilde{p}$ par p. L'égalité $N_P(\varphi_o\,;\tau) = \Sigma_1(\tau) + \Sigma_2(\tau)$ entraîne alors le théorème 3.

Remarque. L'application du théorème taubérien fournit comme reste un $\mathbf{O}(|\tau|^{n-1})$, sauf dans le cas où $n = 1$. Ce cas a été traité dans [10], puisqu'alors ν est égal à 1, et les auteurs ont montré que le coefficient du terme correspondant était nul.

Il reste à traiter le cas particulier des composantes homogènes : Dans ce cas, $\widetilde{p}$ s'écrit $p_o + p_1$, où p_o est homogène de degré 2, et p_1 de degré 1. Les estimations de $\Sigma_1(\tau)$ et $\Sigma_2(\tau)$ permettent d'écrire :

$$(5.6)\qquad N_P(\varphi_o\,;\tau) = (2\pi)^{-n} \int_{(p_o+p_1)^{-1}(C \cap \{\varphi_o \leqslant \tau\})} (\psi + \widetilde{\Psi}')\circ p_o \, dx d\eta + \mathbf{O}(\tau^{n-1}).$$

En faisant le changement de variables $x = |\tau|^{1/2}\widetilde{x}$, $\eta = |\tau|^{1/2}\widetilde{\eta}$, on obtient :

$$(5.7)\qquad \begin{cases} N_P(\varphi_o\,;\tau) = (2\pi)^{-n}\tau^n \displaystyle\int_{(p_o+\epsilon p_1)^{-1}(C\cap\{\varphi_o \leqslant 1\})} (\psi + \widetilde{\Psi})(p_o) dx d\eta \\[2ex] \text{avec } \epsilon = |\tau|^{-1/2}. \end{cases}$$

Notons $I(\epsilon)$ l'intégrale $\displaystyle\int_{(p_o+\epsilon p_1)^{-1}(C \cap \{\varphi_o \leqslant 1\})} (\psi \circ p_o) dx d\eta$. Elle s'écrit :

$$(5.8)\qquad I(\epsilon) = \int_{\substack{\varphi_o(p_o + \epsilon p_1) \leqslant 1 \\ \varphi_1(p_o + \epsilon p_1) \leqslant 0}} (\psi \circ p_o) dx d\eta$$

On va faire un développement limité de $I(\epsilon)$ à l'ordre 2 au voisinage de $\epsilon = 0$. Par partition de l'unité, on se ramène à :

$$(5.9)\qquad I_\Phi(\epsilon) = \int_{\substack{\varphi_o(u + \epsilon\widetilde{p}_1(u)) \leqslant 1 \\ \varphi_1(u + \epsilon\widetilde{p}_1(u)) \leqslant 0}} \widetilde{\Phi}(u)\Psi(u)\frac{du}{\Delta}$$

où on a fait sur le support d'un des termes, noté Φ, de la partition de l'unité le changement de variables :

$$u_1 = p_o^1(x,\eta),\ldots,u_\nu = p_o^\nu(x,\eta),$$

$$u_{\nu+1} = x_{\nu+1},\ldots,u_n = x_n,\ u_{n+1} = \eta_1,\ldots,u_{2n} = \eta_n\ ,$$

et où on note $\widetilde{\Phi}(u)$ et $\widetilde{p}_1(u)$ les fonctions obtenues à partir de $\Phi(x,\eta)$ et $p_1(x,\eta)$ après changement de variables.

De la même façon, les gradients $(\nabla\ \varphi_o)(u)$ et $(\nabla\ \varphi_1)(u)$ étant linéairement indépendants, on fait une nouvelle partition de l'unité, et, sur le support de chacun des termes, on fait un nouveau changement de variables.

(Il est évidemment nécessaire pour cela d'isoler l'origine).

Ces calculs conduisent facilement (cf. par exemple [8]) aux termes annoncés dans l'énoncé du théorème 3.

REFERENCES

[1] V. ARNOLD. *«Méthodes mathématiques de la mécanique classique»*. Editions MIR, Moscou.

[2] K. ASADA, D. FUJIWARA. *«On some oscillatory integral transformation in $L^2(IR^n)$»* Jap. J. Math. 4 (1978) p. 299-361.

[3] R. BEALS. *«A general calculus of pseudodifferential operators»*. Duke Math. J. 42 (1975) p. 1-42.

[4] L. BOUTET DE MONVEL. *«Opérateurs à coefficients polynomiaux, espace de Bargman et opérateurs de Toeplitz»*. Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1980-81, Exposé n^o 2 bis (6 oct. 1980).

[5] A.M. CHARBONNEL. *«Calcul fonctionnel à plusieurs variables pour des opérateurs pseudodifférentiels dans IR^n»*. Israël Journal of Mathematics Vol 45 n^o 1 (1983).

[6] Y. COLIN DE VERDIERE. *«Spectre conjoint d'opérateurs pseudodifférentiels qui commutent - I - Le cas non intégrable»*. Duke Math. J. 46 (1979) p. 169-182.

[7] Y. COLIN DE VERDIERE. Note C.R. Acad. Sci. Paris vol. 276, p. 1517-1519.

[8] I.M. GEL'FAND, G.E. SHILOV. *«Generalized functions». Vol. 1.* Academic Press, New York.

[9] V. GUILLEMIN, S. STERNBERG. *«Some problems in integral geometry and some related problems in microlocal analysis»*. Amer. J. Math. 101 (1979) p. 915-955.

[9 bis] V. GUILLEMIN, S. STERNBERG. *«Homogeneous quantization and Multiplicities of group representations»* . (Preprint)

[9 ter] V. GUILLEMIN. *«A new proof of Weyl's formula on the asymptotic distribution of eigenvalues»*. (Preprint).

[10] B. HELFFER, D. ROBERT. *«Propriétés asymptotiques du spectre d'opérateurs pseudodifferentiels sur IR^n»*. Comm. in P.D.E. 7(7). 795-882 (1982).

[10 bis] B. HELFFER, D. ROBERT. *«Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques»*. Annales de l'Institut Fourier de l'Université de Grenoble. Tome XXXI - Fasc. 3, 1981.

[11] L. HÖRMANDER. *«The Weyl calculus of pseudodifferential operators»*. Comm. Pure Appl. Math. 32 (1979) p. 359-443.

[12] A. MESSIAH. *«Mécanique quantique»*. Vol. 2. Dunod 1972.

[13] D. ROBERT. *«Propriétés spectrales d'opérateurs pseudodifférentiels»*. Comm. in P.D.E. 3(9) (1978) p. 755-826.

[13 bis] D. ROBERT. *«Calcul fonctionnel sur les opérateurs admissibles et application»*. Journal of Functional Analysis. Vol. 45 n° 1, Janvier 1982.

(Manuscrit reçu le 26 février 1982)