ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

DOMINIQUE APPRATO
RÉMI ARCANGÉLI
JEAN GACHES

Fonctions spline par moyennes locales sur un ouvert borné de IR^n

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 5, nº 1 (1983), p. 61-87
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1983_5_5_1_61_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol V, 1983, P. 61 à 87

FONCTIONS SPLINE PAR MOYENNES LOCALES SUR UN OUVERT BORNE DE $\mathbb{R}^n$

Dominique Apprato (1), **Rémi Arcangéli** (2), **Jean Gaches** (3)

(1)(2) Département de Mathématiques et d'Informatique, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 64000 Pau - France.

(3) U.E.R. de Mathématiques, Informatique et Gestion, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne 31062 Toulouse - France.

Résumé : On introduit des fonctions spline d'interpolation et d'ajustement dans $H^1(\Omega)$ satisfaisant à des conditions de type moyenne locale. On établit l'existence et l'unicité de la fonction spline qui vérifie des conditions données. On montre ensuite que la méthode d'interpolation correspondante est convergente dans $H^1(\Omega)$. Enfin, on étudie trois méthodes d'approximation numérique des fonctions spline par moyennes locales.

Summary : We introduce interpolation and smoothing spline functions in the space $H^1(\Omega)$ which satisfy local mean-value conditions. We prove existence and uniqueness of the spline function which verifies given conditions. Then we prove convergence of the corresponding interpolation method in the space $H^1(\Omega)$. Finally, we study three numerical approximation methods for these mean-value spline functions.

0. - INTRODUCTION

Les travaux des nombreux auteurs qui, depuis I.J. SCHOENBERG [18], M. GOLOMB et H.F. WEINBERGER [11], M. ATTEIA [2] - [3], se sont intéressés aux fonctions spline, ne comportent que peu de résultats concernant l'explicitation ou l'approximation numérique des fonctions spline à *plusieurs variables.*

L'explicitation des fonctions spline à une ou plusieurs variables résulte en effet de la connaissance du noyau d'un espace de Hilbert. Dans le cas des fonctions spline à une variable, on connaît en général ce noyau. Dans le cas des fonctions spline à plusieurs variables sur un ouvert quelconque, ce noyau est le plus souvent impossible à déterminer explicitement. J. THOMANN [19] l'a exprimé sous forme de somme de série dans le cas d'un disque ouvert.

J. DUCHON [9] - [10] l'a explicité dans le cas où l'ouvert est l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier. Il fournit ainsi une réponse constructive au problème de l'interpolation dans un ouvert *quelconque* Ω de $\mathbb{R}^n$: la méthode de J. DUCHON consiste à prendre pour interpolé d'une fonction dans Ω la restriction à Ω d'une fonction spline d'interpolation sur $\mathbb{R}^n$. Le calcul de la fonction spline ne fait pas intervenir d'approximation à proprement parler, mais nécessite le calcul de coefficients solution d'un système linéaire.

Notre travail peut être considéré comme une autre réponse à ce problème d'interpolation. Son objet est de définir sur Ω des fonctions de type spline (possédant donc les propriétés de régularité et de convergence classiques des fonctions spline) dont l'approximation numérique soit aussi simple que possible. Il est clair que ce n'est pas le cas des fonctions spline *ponctuelles,* qui conduisent à des problèmes elliptiques dans $H^m(\Omega)$, avec $m \geqslant 2$, dont l'approximation est coûteuse (entraînant par exemple l'utilisation d'éléments finis de classe C^k, $k \geqslant 1$). Par contre les fonctions spline que nous présentons ici nécessitent seulement l'introduction de problèmes elliptiques dans $H^1(\Omega)$, dont l'approximation est relativement simple : c'est évidemment là que réside leur intérêt.

Au paragraphe 1, on montre l'existence et l'unicité de la fonction spline d'interpolation par moyennes locales σ dans $H^1(\Omega)$ satisfaisant à des conditions d'interpolation données. Une caractérisation de σ à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange permet, au paragraphe 2, de mettre en évidence les propriétés de régularité de σ. Le paragraphe 3 donne des résultats de convergence de l'interpolation de type spline par moyennes locales. Le paragraphe 4 traite des fonctions spline d'ajustement. Enfin le paragraphe 5 est consacré à l'étude de trois méthodes d'approximation des fonctions spline d'interpolation ou d'ajustement.

1. - DEFINITION DU PROBLEME

Tous les espaces considérés sont *réels.*

Soient Ω un ouvert (non vide) *borné connexe* de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, à *frontière* Γ *lipschitzienne,* N_0 un entier *strictement positif* et, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = 1$, soit N_α un entier *positif ou nul.* On pose $N = \sum_{|\alpha| \leqslant 1} N_\alpha$ et on définit l'ensemble d'indices

(1-1) $$M = \left\{(\alpha,j) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^* \,;\, |\alpha| \leqslant 1,\ N_\alpha > 0,\ 1 \leqslant j \leqslant N_\alpha\right\},$$

supposé ordonné de façon quelconque. Soit d'autre part $\{ \omega_{\alpha,j} ; (\alpha,j) \in M \}$ une famille de sous-ensembles *ouverts non vides connexes* de Ω.

On introduit *l'opérateur d'interpolation par moyennes locales* $\rho = (\rho_{\alpha,j} ; (\alpha,j) \in M)$, défini par

(1-2) $$\forall (\alpha,j) \in M, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \rho_{\alpha,j} v = \frac{1}{\text{mes } \omega_{\alpha,j}} \int_{\omega_{\alpha,j}} \partial^\alpha v \, dx.$$

Lorsque

$$\mathscr{A} = \{ \alpha \in \mathbb{N}^n ; \exists (\alpha,j) \in M \} \neq \{0\},$$

on dira que l'opérateur ρ défini par (1-1) et (1-2) est *d'ordre 1* ; dans le cas contraire, i.e. lorsque $N_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = 1$, on dira qu'il est *d'ordre 0* : l'ordre 1 correspond donc à une interpolation de type Hermite, l'ordre 0 à une interpolation de type Lagrange. Lorsque l'opérateur ρ est d'ordre 1, on suppose que la famille $\{ \omega_{\alpha,j} ; (\alpha,j) \in M \}$ vérifie l'hypothèse suivante :

(1-3) Les sous-ensembles $\bar{\omega}_{\alpha,j}$, $(\alpha,j) \in M$ sont deux à deux disjoints ou confondus et pour chaque $\alpha \in \mathscr{A}$, les sous-ensembles $\bar{\omega}_{\alpha,j}$, $j = 1,\dots,N_0$ sont deux à deux disjoints.

Lorsqu'il est d'ordre 0, on suppose seulement que l'ensemble $\{ \omega_{0,j} ; j = 1,\dots,N_0 \}$, auquel se réduit dans ce cas la famille $\{ \omega_{\alpha,j} ; (\alpha,j) \in M \}$, vérifie la condition

(1-4) Les sous-ensembles $\omega_{0,j}$ sont deux à deux disjoints.

Qu'il soit d'ordre 1 ou d'ordre 0, il est clair que l'opérateur ρ est *linéaire continu de* $H^1(\Omega)$ *dans* $\mathbb{R}^N$.

Soit $\beta = (\beta_i ; 1 \leq i \leq N)$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^N$. On définit la variété linéaire affine

(1-5) $$K = \{ u \in H^1(\Omega) ; \rho u = \beta \}$$

et le sous-espace vectoriel associé

(1-6) $$K_0 = \{ u \in H^1(\Omega) ; \rho u = 0 \}.$$

LEMME 1.1. *Soit* ρ *l'opérateur défini par* (1-1) *et* (1-2). *On suppose que l'hypothèse* (1-3) *est vérifiée lorsque* ρ *est d'ordre* 1 *et que l'hypothèse* (1-4) *est vérifiée lorsque* ρ *est d'ordre* 0. *Alors dans les deux cas, pour tout* $\beta \in \mathbb{R}^N$, K *est non vide.*

Démonstration. a) Pour établir le résultat lorsque ρ est d'ordre 1, on adopte les notations suivantes : on désigne par ω un élément quelconque de $\{\omega_{\alpha,j} \; ; \; (\alpha,j) \in M\}$, par I l'ensemble $\{\alpha \in \mathbb{N}^n \; ; \; \exists\, (\alpha,j) \in M, \; \omega_{\alpha,j} = \omega\}$ et on pose $\nu = \text{card } I$.
On considère alors l'opérateur $\tau \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^\nu)$ défini par

$$\tau v = \left(\frac{1}{\text{mes } \omega} \int_\omega \partial^\alpha v \; ; \alpha \in I\right).$$

Pour montrer que K est non vide, il suffit de montrer que τ est surjectif. En effet, s'il en est ainsi, pour tout $\beta^\nu \in \mathbb{R}^\nu$, il existe $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\tau v = \beta^\nu$ et par conséquent il existe une fonction $u_\omega \in C^\infty(\bar{\Omega})$ telle que $\tau\, u_\omega = \beta^\nu$, dont le support ne rencontre pas les autres sous-ensembles $\bar{\omega}_{\alpha,j}$. Il suffit de prendre $u_\omega = v\varphi \mid_\Omega$, où $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ est telle que $\varphi = 1$ sur $\bar{\omega}$ et que : $\forall (\alpha,j) \in M$, $\omega_{\alpha,j} \neq \omega$, $(\text{supp } \varphi) \cap \bar{\omega}_{\alpha,j} = \emptyset$. On en déduit que l'on obtient une solution $u \in H^1(\Omega)$ de l'équation $\rho u = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}^N$, en superposant des fonctions de type u_ω.

Prouvons donc que τ est surjectif ou, ce qui revient au même, puisque $\dim \text{Im } \tau < +\infty$, que l'opérateur transposé ${}^t\tau$ est surjectif. Or, pour tout $\gamma = (\gamma_\alpha \; ; \alpha \in I) \in \mathbb{R}^\nu$ (identifié à $(\mathbb{R}^\nu)'$), on a

$${}^t\tau\gamma = \frac{1}{\text{mes } \omega} \sum_{\alpha \in I} (-1)^{|\alpha|} \gamma_\alpha\, \partial^\alpha \chi_\omega ,$$

où χ_ω désigne la fonction caractéristique de l'ensemble ω. Il suffit alors de raisonner par transformation de Fourier pour pouvoir conclure.

b) Lorsque ρ est d'ordre 0, l'hypothèse (1-4) est insuffisante pour utiliser le raisonnement précédent. Mais dans ce cas, pour tout $\beta = (\beta_j \; ; 1 \leqslant j \leqslant N_o) \in \mathbb{R}^{N_o}$, on obtient immédiatement une solution $u \in H^1(\Omega)$, de l'équation $\rho u = \beta$ en prenant $u = \sum_{j=1}^{N_o} \beta_j \psi_j$ où, pour tout $j = 1,\ldots,N_o$, $\psi_j \in \mathscr{D}(\omega_{o,j})$ et $\int_{\omega_{o,j}} \psi_j \, dx = 1$. □

On note $<\cdot,\cdot>$ et $<\cdot>$ respectivement le produit scalaire et la norme euclidiens dans $\mathbb{R}^N$:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^N, \quad <\xi,\eta> = \sum_{i=1}^N \xi_i \eta_i, \quad <\xi> = <\xi,\xi>^{1/2}$$

et on pose, de façon usuelle,

$$\forall u \in L^2(\Omega), \qquad |u|_{0,\Omega} = \left(\int_\Omega u^2 \, dx\right)^{1/2}$$

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (u,v)_{1,\Omega} = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \; |u|_{1,\Omega} = (u,u)_{1,\Omega}^{1/2}$$

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \| u \|_{1,\Omega} = (|u|_{0,\Omega}^2 + |u|_{1,\Omega}^2)^{1/2}.$$

On pose d'autre part

(1-7) $\forall\, u \in H^1(\Omega),\ \forall\, v \in H^1(\Omega),\ (((u,v))) = \langle \rho u, \rho v \rangle + (u,v)_{1,\Omega}\,,\ |||u||| = (((u,u)))^{1/2}.$

Notons que, l'ouvert Ω étant à frontière continue,

PROPOSITION 1.1. *L'application* $u \mapsto |||u|||$, *définie par* (1-1), (1-2) *et* (1-7), *est une norme sur* $H^1(\Omega)$, *équivalente à la norme usuelle* $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

Démonstration. La proposition est un cas particulier d'un théorème de J. NECAS [16] . □

On introduit enfin le sous-ensemble

(1-8) $$S = \{ u \in H^1(\Omega)\ ;\ \forall\, v \in K_0\,,\ (u,v)_{1,\Omega} = 0 \}.$$

Il est clair que S est un sous-espace *fermé* de $H^1(\Omega)$, supplémentaire orthogonal de K_0 dans $H^1(\Omega)$ pour la norme $|||\cdot|||$.

On considère alors le problème suivant : trouver une fonction σ solution de

$$\begin{cases} \sigma \in K & (1\text{-}9) \\ \forall\, v \in K,\quad |\sigma|_{1,\Omega} \leqslant |v|_{1,\Omega}\,. & (1\text{-}10) \end{cases}$$

On convient d'appeler *fonction spline d'interpolation par moyennes locales dans* $H^1(\Omega)$ *relative à la semi-norme* $|\cdot|_{1,\Omega}$ *à l'opérateur* ρ *et à l'élément* β *de* $\mathbb{R}^N$ toute solution de (1-9), (1-10) s'il en existe.

Remarque 1.1. Il n'y a aucune difficulté réelle à généraliser le problème (1-9), (1-10) sous la forme d'un problème posé dans $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}^*$ quelconque, faisant intervenir des conditions de type moyenne locale portant sur des dérivées d'ordre inférieur ou égal à m (cf. P.J. LAURENT [13] pour une étude en dimension $n = 1$). Notons que le cas $m = 0$ correspond à une situation triviale.

On définit ainsi des fonctions spline d'interpolation par moyennes locales dans $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}^*$ quelconque, pour lesquelles on peut montrer des propriétés analogues à celles des solutions du problème (1-9), (1-10). Mais, si l'approximation numérique de ces fonctions en dimension $n = 2$ ou $n = 3$ s'avère (cf. § 5) relativement simple dans le cas $m = 1$, elle est déjà plus compliquée dans le cas $m = 2$ et il paraît difficile de l'envisager lorsque $m > 2$.

Aussi, pour ne pas alourdir l'exposé, limitons-nous notre étude au cas le plus simple, le cas $m = 1$. □

THEOREME 1.1. *On suppose vérifiée l'hypothèse* (1-3) *ou l'hypothèse* (1-4), *suivant que l'opérateur* ρ *est d'ordre* 1 *ou d'ordre* 0. *Alors le problème* (1-9), (1-10) *admet une solution unique* σ *caractérisée par*

$$\{\sigma\} = K \cap S, \tag{1-11}$$

ou encore par

$$\begin{cases} \sigma \in K & (1\text{-}12)\\ \forall\, v \in K_0\,,\ (\sigma,v)_{1,\Omega} = 0\,. & (1\text{-}13)\end{cases}$$

Démonstration. De façon équivalente, la solution de (1-9), (1-10) doit vérifier la relation

$$\forall\, v \in K\,,\quad |||\sigma||| \leqslant |||v|||\,,$$

donc σ est l'(unique) élément de norme $|||\circ|||$ minimale du sous-ensemble convexe fermé non vide K de $H^1(\Omega)$. D'autre part $K \cap S$ est réduit à un seul élément qui est précisément σ et qui est donc la solution, unique d'après ce qui précède, de (1-12), (1-13). □

On a évidemment le résultat suivant classique en théorie des fonctions spline (cf. P.J. LAURENT [13]) :

PROPOSITION 1.2. *On suppose vérifiée l'hypothèse* (1-3) *ou l'hypothèse* (1-4), *suivant que l'opérateur* ρ *est d'ordre* 1 *ou d'ordre* 0. *Alors la restriction* $\rho_\perp$ *de* ρ *à* S *est un isomorphisme de* S *sur* IR^N *et, pour tout* $\beta \in \mathrm{IR}^N$, $\rho_\perp^{-1}(\beta)$ *n'est autre que la fonction spline d'interpolation par moyennes locales* σ *relative à* $|\circ|_{1,\Omega}$, ρ *et* β.

Démonstration. Immédiate. □

2. - FORMULATION DU PROBLEME AVEC MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE

Considérons le problème suivant : trouver un couple $(\sigma,\lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathrm{IR}^N$, solution de

$$\begin{cases} \sigma \in K, & (2\text{-}1)\\ \forall\, v \in H^1(\Omega),\ (\sigma,v)_{1,\Omega} + \langle \lambda, \rho v\rangle = 0. & (2\text{-}2)\end{cases}$$

Montrons d'abord le

LEMME 2.1. *Pour tout* $u \in S$, *il existe un élément unique* $\ell \in IR^N$ *tel que*

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad (u,v)_{1,\Omega} + < \ell, \rho v > 0. \tag{2-3}$$

Démonstration. Posons

$$\forall v \in S, \quad L_u(v) = (u,v)_{1,\Omega} \,. \tag{2-4}$$

Il est clair que (2-4) définit un opérateur $L_u \in \mathcal{L}(S, IR) = S'$. D'autre part, puisque (proposition 1-2) $\rho_\perp$ est un isomorphisme de S sur IR^N, son transposé ${}^t\rho_\perp$ est un isomorphisme de $(IR^N)'$ sur S', d'où

$$\exists \,!\, \ell' \in (IR^N)' , \quad L_u = {}^t\rho_\perp(-\ell')$$

et, par conséquent,

$$\exists \,!\, \ell \in IR^N, \quad \forall v \in S , \quad L_u(v) = - < \ell, \rho_\perp v >$$

Mais, K_o étant un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$,

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \exists \,!\, v_o \in K_o , \quad \exists \,!\, v_\perp \in S , \quad v = v_o + v_\perp ,$$

d'où, compte tenu de ce que, pour tout $v_o \in K_o$, $(u,v_o)_{1,\Omega} = \rho v_o = 0$, il vient

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad (u,v)_{1,\Omega} = (u,v_\perp)_{1,\Omega} = - < \ell, \rho_\perp v_\perp > = - < \ell, \rho v >$$

et le résultat. □

Alors

THEOREME 2.1. *On suppose vérifiée l'hypothèse* (1-3) *ou l'hypothèse* (1-4), *suivant que l'opérateur* ρ *est d'ordre* 1 *ou d'ordre* 0. *Alors le problème* (2-1), (2-2) *admet une solution unique* (σ,λ), *où* σ *est la solution du problème* (1-9), (1-10).

Démonstration. a) Si (σ,λ) est solution de (2-1), (2-2), alors il vient dans (2-2)

$$\forall v \in K_o , \quad (\sigma,v)_{1,\Omega} = 0,$$

donc σ est solution de (1-12), (1-13) et par conséquent, d'après le théorème 1.1, de (1-9), (1-10). De plus σ est unique.

b) Soit σ la solution de (1-9), (1-10). Donc $\sigma \in S$. D'après le lemme 2.1, il existe un élément unique $\lambda \in \mathbb{R}^N$ tel que (relation (2-3)) :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \ (\sigma,v)_{1,\Omega} + < \lambda, \rho v > = 0.$$

D'où l'existence et l'unicité de la solution de (2-1), (2-2). □

Le vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^N$ qui apparaît dans (2-2) est le *multiplicateur de Lagrange.* La méthode dite «des multiplicateurs de Lagrange» a été étudiée de façon générale par différents auteurs : I. BABUŠKA, F. BREZZI, M. CROUZEIX et P.A. RAVIART, J.M. THOMAS, etc... (cf. par exemple F. BREZZI [6]). □

Montrons maintenant un théorème de *régularité.*

THEOREME 2.2. *On suppose que l'opérateur* ρ *défini par* (1-1) *et* (1-2) *est d'ordre* 0. *Dans ce cas, tout élément* $u \in S$ *vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *u est une fonction analytique dans l'ouvert* $\Omega' = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{N_0} \gamma_{0,j}$, *où, pour tout* $j = 1,\dots,N_0$, $\gamma_{0,j}$ *désigne la frontière de* $\omega_{0,j}$;

(ii) $u \in H^2_{loc}(\Omega)$, [(1)]

(iii) *si, de plus, l'ouvert* Ω *est* de classe C^∞, *alors* $u \in H^2(\Omega)$. [(1)]

Démonstration. Remarquons d'abord, puisque l'opérateur d'interpolation est d'ordre 0, que l'ensemble d'indices M se réduit à $\{(0,j) \in \{0\} \times \mathbb{N}^* \, ; 1 \leqslant j \leqslant N_0\}$ et que $N = N_0$.

(i) Considérons d'abord l'ouvert $\Omega_1 = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{N_0} \bar{\omega}_{0,j}$. Il est clair que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1), \ \varphi \in K_0 \, ;$$

donc que

$$\forall \in \mathcal{D}(\Omega_1), \ (u,\varphi)_{1,\Omega} = 0.$$

On en déduit que

$$\Delta u = 0, \ \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_1),$$

et par conséquent u est harmonique dans Ω_1.

---

(1) La démonstration des points (ii) et (iii) est due à J.M. THOMAS (communication personnelle).

Soit maintenant j un entier quelconque tel que $1 \leqslant j \leqslant N_o$. On vérifie immédiatement que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\omega_{o,j}),\ \ \forall k = 1,...,n,\ \ \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \in K_o.$$

On a alors

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\omega_{o,j}),\ \ \forall k = 1,...,n,\ \ (u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k})_{1,\Omega} = 0,$$

d'où il vient

$$\forall k = 1,...,n,\ \ \frac{\partial}{\partial x_k}(\Delta u) = 0,\ \text{ dans } \mathscr{D}'(\omega_{o,j}),$$

on en déduit que

$$\exists\, C_j \in \mathrm{IR},\ \ \Delta u = C_j\,,\ \text{ dans } \mathscr{D}'(\omega_{o,j}),$$

et par conséquent (ellipticité de l'opérateur Δ) u est analytique dans l'ouvert $\omega_{o,j}$. D'où le point (i).

(ii) D'après le lemme 2.1, il existe $\ell \in \mathrm{IR}^{N_o}$ tel que le couple (u,ℓ) vérifie (2-3). Comme

$$< \ell, \rho v > = \sum_{j=1}^{N_o} \frac{\ell_j}{\text{mes } \omega_{o,j}} \int_{\omega_{o,j}} v\, dx\,,$$

on voit que l'application $v \to -< \ell,\rho v >$ appartient à $(L^2(\Omega))'$. Donc il existe $g \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = g, & \text{p.p. dans } \Omega, & (2\text{-}5) \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{sur } \Gamma, & (2\text{-}6) \end{cases}$$

la condition (2-6), portant sur la dérivée normale extérieure à $\Gamma\ \frac{\partial u}{\partial \nu}$, étant a priori formelle. La «régularité à l'intérieur» (cf. J.L. LIONS - E. MAGENES [14]) des solutions de l'équation elliptique (2-5) implique alors le point (ii).

(iii) Si la frontière Γ est de classe C^∞, on sait (cf. par exemple J. NEČAS [16]) que l'opérateur $(I - \Delta, \gamma_1)$, où I désigne l'opérateur identité et γ_1 l'opérateur trace de la dérivée normale, est un isomorphisme de $H^2(\Omega)$ sur $L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$. La condition (2-6) a alors un sens dans $H^{1/2}(\Gamma)$ et, écrivant (2-5) sous la forme

$$u - \Delta\, u = g + u \in L^2(\Omega),$$

le point (iii) suit. □

Remarque 2.1. Lorsque l'opérateur ρ défini par (1-1) et (1-2) est *d'ordre* 1, les résultats du théorème 2.2 ne subsistent plus, exception faite de la propriété partielle : u est harmonique dans l'ouvert $\Omega \setminus \bigcup_{(\alpha,j) \in M} \overline{\omega}_{\alpha,j}$.

Ce phénomène de moindre régularité dans le cas d'interpolation d'Hermite a déjà été constaté pour les splines ponctuelles (cf. par exemple P.J. LAURENT [13] en dimension n = 1).

Il n'est sans doute pas inutile d'insister sur l'effet *régularisant* de l'interpolation par fonctions spline d'interpolation par moyennes locales, dans une situation standard (interpolation de type Lagrange dans un ouvert à frontière lipschitzienne ou même simplement continue) : à une fonction w appartenant à $H^1(\Omega)$ [et même à $L^2(\Omega)$!], on associe ainsi une fonction σ interpolant w, la fonction spline d'interpolation par moyennes locales relative à $|\cdot|_{1,\Omega}$, ρ et $\beta = \rho w$, qui, elle, appartient à $H^1(\Omega) \cap H^2_{loc}(\Omega)$ et qui est donc continue dans Ω en dimension n = 2 ou n = 3.

On retrouve là un aspect bien connu de la théorie des fonctions spline. □

3. - CONVERGENCE DE L'INTERPOLATION

Soit D *une suite de* $\mathbb{R}^*_+$ *convergeant vers* 0. Pour chaque $d \in D$, soient : N^d_o un entier > 0 ; pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = 1$, N^d_α un entier $\geqslant 0$; M^d un ensemble d'indices défini comme en (1-1) ; $\{ \omega^d_{\alpha,j} \; ; (\alpha,j) \in M^d \}$ une famille de sous-ensembles ouverts non vides connexes de Ω vérifiant l'hypothèse (1-3) ou l'hypothèse (1-4) suivant que l'opérateur ρ^d est d'ordre 1 ou d'ordre 0, où $\rho^d = (\rho^d_{\alpha,j} \; ; (\alpha,j) \in M^q)$ désigne un opérateur d'interpolation par moyennes locales défini comme en (1-2) ; enfin K^d, K^d_o et S^d des sous-ensembles de $H^1(\Omega)$ définis comme en (1-5) (1-6) et (1-8) respectivement. D'autre part, pour tout $d \in D$ on pose

$$\Omega^d_o = \sum_{j=1}^{N^d_o} \omega^d_{o,j} \tag{3-1}$$

et, pour tout sous-ensemble A de Ω, on note $\delta(A)$ le diamètre de A.

Etant donné une fonction quelconque $w \in H^1(\Omega)$, on définit pour chaque $d \in D$ la fonction spline d'interpolation par moyennes locales σ^d relative à $|\cdot|_{1,\Omega}$, ρ^d et $\beta^d = \rho^d w$.

Le problème de la *convergence de l'interpolation* est le suivant : supposant que, quand $d \to 0$, «le nombre de conditions d'interpolation croît indéfiniment» (en un sens évidemment à préciser), a-t-on

$$\lim_{d \to 0} \| \sigma^d - w \|_{1,\Omega} = 0 \; ?$$

Nous allons montrer qu'il est bien ainsi moyennant les hypothèses suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} (3\text{-}2) & \text{l'ouvert } \Omega \text{ est } \textit{convexe}, \\ (3\text{-}3) & \lim\limits_{d \to 0} \max\limits_{j=1,\dots,N_o^d} \delta(\omega_{o,j}^d) = 0, \\ (3\text{-}4) & \lim\limits_{d \to 0} \operatorname{mes}(\Omega \setminus \Omega_o^d) = 0. \end{array}\right.$$

Montrons d'abord une inégalité «de type Poincaré» qu'on pourra comparer avec des inégalités analogues (cf. par exemple J. NEČAS [16]).

LEMME 3.1. *Soient* Ω *un ouvert borné convexe de* $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, *et* Ω^* *un sous-ouvert non vide de* Ω. *Alors il existe une constante* $\mu(n)$ *ne dépendant que de* n, *telle que pour tout* $v \in H^1(\Omega)$:

$$(3\text{-}5) \qquad |v|_{0,\Omega} \leqslant (\operatorname{mes}\Omega^*)^{-1} \left\{ (\operatorname{mes}\Omega)^{1/2} \left| \int_{\Omega^*} v\,dx \right| + \mu(n)(\operatorname{mes}\Omega)\delta(\Omega)|v|_{1,\Omega} \right\}.$$

Démonstration. Puisque $C^1(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, il suffit évidemment de montrer (3-5), pour $v \in C^1(\bar{\Omega})$. Pour tout $v \in C^1(\bar{\Omega})$, on a, puisque Ω est convexe,

$$\forall a \in \Omega,\ \forall x \in \Omega,\ v(a) = v(x) + \int_0^1 Dv(x + t(a-x)) \,.\, (a-x)dt$$

d'où, après intégration en x sur Ω^*,

$$\forall a \in \Omega,\ (\operatorname{mes}\Omega^*)v(a) = \int_{\Omega^*} v(x)dx + \int_{\Omega^*} dx \int_0^1 Dv(x + t(a-x)) \,.\, (a-x)dt.$$

On en déduit que

$$\forall a \in \Omega,\ (\operatorname{mes}\Omega^*)\,|v(a)| \leqslant \left| \int_{\Omega^*} v(x)dx \right| + \int_{\Omega} \left| \int_0^1 Dv(x + t(a-x)) \,.\, (a-x)dt \right| dx,$$

et, après avoir pris les normes $L^2(\Omega)$ des deux membres, il vient

$$(3\text{-}6) \qquad (\operatorname{mes}\Omega^*)\,|v|_{0,\Omega} \leqslant (\operatorname{mes}\Omega)^{1/2} \left| \int_{\Omega^*} v(x)dx \right| +$$
$$+ \left(\int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} \left| \int_0^1 Dv(x + t(a-x)) \,.\, (a-x)dt \right| dx \right]^2 da \right)^{1/2}.$$

D'après un résultat de J. MEINGUET [15] , il existe une constante $\mu(n)$ telle que le second terme du second membre de (3-6) soit majoré par la quantité

$$\mu(n)\ (\operatorname{mes}\Omega)\delta(\Omega)\ |v|_{1,\Omega}$$

(cf. J. MEINGUET [15] et J.L. GOUT [12] dans une situation plus générale, où sont données des majorations de la constante $\mu(n)$).
D'où le résultat. □

Alors

THEOREME 3.1. *Soit* w *une fonction quelconque de* $H^1(\Omega)$ *et, pour tout* $d \in D$, *soit* σ^d *la fonction spline d'interpolation par moyennes locales relative à* $|\cdot|_{1,\Omega}$, ρ^d *et* $\rho^d w$. *Si les hypothèses* (3-2), (3-3) *et* (3-4) *sont vérifiées, on a :*

$$\lim_{d \to 0} \|\sigma^d - w\|_{1,\Omega} = 0.$$

Démonstration. a) Montrons d'abord que la suite $(\sigma^d)_{d \in D}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. Puisque, pour tout $d \in D$, $w \in K^d$, on a, par définition de σ^d,

(3-7) $$\forall d \in D, \ |\sigma^d|_{1,\Omega} \leqslant |w|_{1,\Omega}.$$

D'autre part, il résulte de (3-4) que, pour fixer les idées,

$$\exists\, d' > 0, \ \ \forall\, d \in D, \ d \leqslant d', \ \ \text{mes}\, \Omega_o^d \geqslant \frac{\text{mes}\,\Omega}{2}.$$

Appliquant alors, pour tout $d \in D$, le lemme 3-1 à la fonction $\sigma^d - w$, avec $\Omega^* = \Omega_o^d$, il vient, puisque $\sigma^d - w \in K_o^d$:

(3-8) $$\forall\, d \in D, \ d \leqslant d', \ \ |\sigma^d - w|_{0,\Omega} \leqslant 2\mu(n)\delta(\Omega)\ |\sigma^d - w|_{1,\Omega}.$$

On déduit de (3-7) et (2-8) que la suite de terme général σ^d est bornée dans $H^1(\Omega)$.

b) Montrons maintenant que

(3-9) $$\forall\, \mathscr{B} \subset \Omega, \ \lim_{d \to 0} \int_{\mathscr{B}} \sigma^d\, dx = \int_{\mathscr{B}} w\, dx,$$

où $\mathscr{B} = B(a,r)$, boule ouverte de centre a et de rayon r.

Soit $\mathscr{B}$ une telle boule. Pour tout $d \in D$, notons Δ_1^d la réunion de sous-ensembles $\omega_{o,j}^d \subset \mathscr{B}$ et Δ_2^d la réunion des $\omega_{o,j}^d$ tels que $\omega_{o,j}^d \not\subset \mathscr{B}$ et $\omega_{o,j}^d \cap \mathscr{B} \neq \emptyset$. Soit, d'autre part ϵ un nombre quelconque donné tel que $0 < \epsilon \leqslant r$.

D'après (3-3) et (3-4), il existe $d_o \in D$ tel que, pour tout $d \in D$, $d \leqslant d_o$, on ait : $\max\limits_{j=1,\dots,N_o^d} \delta(\omega_{o,j}^d) \leqslant \epsilon$ et $\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_o^d) \leqslant \epsilon$, et par conséquent

(3-10) $$\forall\, d \in D,\ d \leqslant d_o\,,\ \ \text{mes}(\mathscr{B} \setminus \Omega_o^d) \leqslant \epsilon$$

De plus

(3-11) $$\exists\, C > 0, \forall\, d \in D,\ d \leqslant d_o\,,\ \ \text{mes}\, \Delta_2^d \leqslant C\epsilon,$$

car, les $\omega_{o,j}^d$ étant disjoints et de diamètre $\leqslant \epsilon$, on vérifie que

$$\forall\, d \in D,\ d \leqslant d_o\,,\ \text{mes}\, \Delta_2^d \leqslant \text{mes}(B(a,r+\epsilon) \setminus B(a,r)).$$

On a alors, pour tout $d \in D$,

$$\left| \int_{\mathscr{B}} (\sigma^d - w)dx \right| \leqslant \left| \int_{\mathscr{B} \setminus \Omega_o^d} (\sigma^d - w)dw \right| + \left| \int_{\Delta_1^d} (\sigma^d - w)dx \right| + \left| \int_{\Delta_2^d} (\sigma^d - w)dx \right|$$

et le 2ème terme du second membre est nul puisque, pour tout $d \in D$, $\sigma^d - w \in K_o^d$. Il résulte de (3-10) et (3-11) que

$$\forall\, d \in D,\ d \leqslant d_o\,, \left| \int_{\mathscr{B}} (\sigma^d - w)dx \right| \leqslant (1 + C^{1/2})\epsilon^{1/2}\, |\sigma^d - w|_{0,\Omega}\,,$$

donc, compte tenu de (3-7) et (3-8) que

$$\exists\, C' > 0,\ \forall\, d \in D,\ \ d \leqslant d_o\,, \left| \int_{\mathscr{B}} (\sigma^d - w)dx \right| \leqslant C'\, \epsilon^{1/2}.$$

D'où (3-9).

c) La suite (σ^d) étant bornée dans $H^1(\Omega)$, il existe une suite $(\sigma^{d_k})_{k \in \mathbb{N}}$ extraite de (σ^d) et un élément $\sigma \in H^1(\Omega)$ tels que (σ^{d_k}) converge faiblement vers σ dans $H^1(\Omega)$ quand $k \to +\infty$. Mais alors, pour toute boule ouverte $\mathscr{B} \subset \Omega$,

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{\mathscr{B}} \sigma^{d_k}\, dx = \int_{\mathscr{B}} \sigma\, dx$$

et il résulte de (3-9) que

$$\forall\ \mathscr{B} \subset \Omega\,,\ \int_{\mathscr{B}} \sigma\, dx = \int_{\mathscr{B}} w\, dx,$$

donc que

$$\sigma = w, \ \ \text{p.p. dans } \Omega.$$

On en déduit que la suite (σ^d) converge faiblement vers w dans $H^1(\Omega)$.

Montrons pour terminer que (σ^d) converge fortement vers w. On a évidemment

$$|\sigma^d - w|^2_{1,\Omega} = |\sigma^d|^2_{1,\Omega} + |w|^2_{1,\Omega} - 2(\sigma^d, w)_{1,\Omega}.$$

Compte tenu de (3-7), la convergence faible de (σ^d) vers w implique alors que

$$\lim_{d \to +\infty} |\sigma^d - w|_{1,\Omega} = 0,$$

ce qui, d'après (3-8), montre que

$$\lim_{d \to +\infty} \| \sigma^d - w \|_{1,\Omega} = 0,$$

et le résultat suit. □

Remarque 3.1. Lorsque Ω *n'est pas convexe,* on a encore (cf. R. ARCANGELI - J. GACHES [1]) convergence de (σ^d) vers w sous les seules hypothèses (3-3) et (3-4), si l'on se place dans la situation suivante : les autres définitions étant par ailleurs inchangées, on suppose que, pour tout $d \in D$, ρ^d est l'opérateur

$$\rho^d = (\rho^d_{\alpha,j} \; ; \; (\alpha,j) \in M^d \cup \{(0,0)\}),$$

avec

$$\forall\, v \in H^1(\Omega), \quad \rho^d_{0,0}\, v = \frac{1}{\operatorname{mes} \omega_{0,0}} \int_{\omega_{0,0}} v\, dx,$$

où $\omega_{0,0}$ désigne un sous-ensemble ouvert connexe non vide *indépendant de* d de Ω. □

Donnons pour terminer une estimation de l'erreur $\sigma^d - w$ *en norme* $L^2(\Omega)$. A cet effet, modifions légèrement le cadre défini au début de ce paragraphe : supposons, de façons plus générale, que D soit un *sous-ensemble de* $\mathbb{R}^*_+$ *admettant* 0 *pour point adhérent ;* supposons en outre, comme il est loisible, que le paramètre d qui indexe la famille d'interpolation satisfasse à la relation

(3-12) $$d = \max_{j=1,\dots,N^d_0} \delta(\omega^d_{0,j}),$$

et enfin que soit vérifiée la condition

(3-13) Pour tout $d \in D$ et pour tout $j = 1,\dots N^d_0$, les sous-ensembles $\omega^d_{0,j}$ sont *convexes.*

(et par conséquent à frontière lipschitzienne : cf. R.T. ROCKAFELLAR [17]). Notons que (3-12) implique (3-3).

PROPOSITION 3.1. *Soit* w *une fonction quelconque de* $H^1(\Omega)$ *et, pour tout* $d \in D$, *soit* σ^d *la fonction spline d'interpolation par moyennes locales relative à* $|\circ|_{1,\Omega}$, ρ^d *et* $\rho^d w$. *On suppose vérifiées les hypothèses* (3-2), (3-4), (3-12) *et* (3-13). *Alors, quand* $d \to 0$, *on a l'estimation de l'erreur*

(3-14)
$$|\sigma^d - w|^2_{0,\Omega} = 0(d^2) + 0\left\{[\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_o^d)]^{\alpha(n)}\right\}$$

avec : $\alpha(1) = 1$,

$\alpha(2) = 1 - \epsilon$, *pour tout* $\epsilon > 0$,

$\alpha(n) = \dfrac{2}{n}$, si $n > 2$.

Démonstration. a) Appliquant pour tout $d \in D$ le lemme 3-1, avec $\Omega = \Omega^* = \omega^d_{o,j}$, $j \in \{1,\ldots,N_o^d\}$ et $v = \sigma^d - w$, il vient

$$\forall\, d \in D,\quad |\sigma^d - w|_{0,\omega^d_{o,j}} \leqslant \mu(n)\, d\, |\sigma^d - w|_{1,\omega^d_{o,j}},$$

d'où compte tenu du fait que $\sigma^d \to w$ dans $H^1(\Omega)$, on a, quand $d \to 0$:

(3-15)
$$|\sigma^d - w|_{0,\Omega_o^d} = o(d).$$

b) Posons $\Omega^d_* = \Omega \setminus \overline{\Omega}^d_o$ et, pour tout nombre $p \in [1, +\infty]$, notons $|\circ|_{0,p,\Omega^d_*}$ la norme usuelle dans $L^p(\Omega^d_*)$. Rappelons que, puisque l'ouvert Ω^d_* est borné à frontière lipschitzienne, on a les inclusions de Sobolev :

(3-16)
$$H^1(\Omega^d_*) \hookrightarrow C^o(\overline{\Omega^d_*}),\ \text{si } n = 1,$$

(3-17)
$$H^1(\Omega^d_*) \hookrightarrow L^q(\Omega^d_*),\ \text{pour tout } q \in [1, +\infty[\,,\ \text{si } n = 2,$$

(3-18)
$$H(\Omega^d_*) \hookrightarrow L^{2n/n-2}(\Omega^d_*),\ \text{si } n > 2.$$

Majorons maintenant, pour tout $d \in D$, la quantité $|\sigma^d - w|_{0,\Omega^d_*}$ en traitant successivement les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n > 2$.

Lorsque $n = 1$, on a évidemment

$$\forall\, d \in D,\quad |\sigma^d - w|_{0,\Omega^d_*} \leqslant (\text{mes}\,\Omega^d_*)^{1/2}\, |\sigma^d - w|_{0,\infty,\Omega^d_*},$$

d'où, compte tenu de (3-16) et du fait que $\sigma^d \to w$ dans $H^1(\Omega)$, il vient, quand $d \to 0$:

(3-19) $$|\sigma^d - w|_{0,\Omega_*^d} = o\left\{(\text{mes}\ \Omega_*^d)^{1/2}\right\}.$$

Lorsque n = 2, on obtient en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\forall\, d \in D,\ |\sigma^d - w|_{0,\Omega_*^d} \leqslant (\text{mes}\ \Omega_*^d)^{1/2 - 1/q}\ |\sigma^d - w|_{0,q,\Omega_*^d},$$

avec $q \in [2, +\infty[$, quelconque. L'inclusion (3-17) donne alors, quand $d \to 0$:

(3-20) $$|\sigma^d - w|_{0,\Omega_*^d} = 0\left\{(\text{mes}\ \Omega_*^d)^{\frac{1-\epsilon}{2}}\right\},\quad \epsilon > 0 \text{ quelconque.}$$

Enfin, pour n > 2, on obtient de même

$$\forall\, d \in D,\ |\sigma^d - w|_{0,\Omega_*^d} \leqslant (\text{mes}\ \Omega_*^d)^{\frac{1}{n}}\ |\sigma^d - w|_{0,\frac{2n}{n-2},\Omega_*^d},$$

et, d'après (3-18), quand $d \to 0$:

$$|\sigma^d - w|_{0,\Omega_*^d} = o\left\{(\text{mes}\ \Omega_*^d)^{\frac{1}{n}}\right\}.$$

c) L'estimation (3-14) résulte alors de (3-15), (3-18), (3-19) et (3-20). □

Remarque 3.2. Le résultat *optimal* est donc, comme on pouvait le prévoir,

$$|\sigma^d - w|_{0,\Omega} = o(d).$$

Il a lieu, en particulier, dans le cas suivant : *l'opérateur ρ est d'ordre* 0 *et* $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_o^d$. □

4. - FONCTIONS SPLINE D'AJUSTEMENT

On conserve les notations du paragraphe 1, on se donne un paramètre ϵ strictement positif et on pose

(4-1) $$\forall\, v \in H^1(\Omega),\quad J_\epsilon(v) = \langle \rho v - \beta \rangle^2 + \epsilon\, |v|_{1,\Omega}^2 .$$

Conformément à la terminologie usuelle, on convient d'appeler *fonction spline d'ajustement par moyennes locales dans* $H^1(\Omega)$ *relative à la semi norme* $|\cdot|_{1,\Omega}$, *à l'opérateur* ρ, *à l'élément* β *de* $\mathbb{R}^N$ *et au paramètre* ϵ toute solution, s'il en existe du problème de minimisation : trouver une fonction $\sigma_\epsilon \in H^1(\Omega)$ solution de

$$(4\text{-}2) \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega),\ J_\epsilon(\sigma_\epsilon) \leqslant J_\epsilon(v).$$

THEOREME 4.1. *Le problème* (4-2) *admet une solution unique* σ_ϵ . *La fonction spline d'ajustement par moyennes locales* σ_ϵ *appartient au sous-espace* S *défini en* (1-8) *et est également la solution unique du problème variationnel : trouver* $\sigma_\epsilon \in H^1(\Omega)$ *solution de*

$$(4\text{-}3) \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega),\ <\rho\sigma_\epsilon , \rho v> + \epsilon(\sigma_\epsilon, v)_{1,\Omega} = <\beta, \rho v>.$$

Démonstration. Le fait que (4-2) et (4-3) admettent la même solution unique σ_ϵ résulte du lemme de Lax-Milgram : la forme linéaire $v \to <\beta,\rho v>$ est linéaire continue sur $H^1(\Omega)$ et la forme bilinéaire $(u,v) \to <\rho u,\rho v> + \epsilon(u,v)_{1,\Omega}$ est symétrique continue sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$-elliptique, puisque

$$\forall\, v \in H^1(\Omega),\ <\rho v>^2 + \epsilon\, |v|^2_{1,\Omega} \geqslant \mathrm{Min}(1,\epsilon)\ \ |||v|||^2$$

où $|||\circ|||$ est la norme (1-7). D'autre part, il résulte de (4-3) que

$$\forall\, v \in K_0\ ,\ (\sigma_\epsilon, v)_{1,\Omega} = 0,$$

donc $\sigma_\epsilon \in S$. □

L'espace (de dimension N rappelons-le) S contient donc aussi les fonctions spline d'ajustement, c'est la raison pour laquelle on l'appelle *espace des fonctions spline.* Il ne dépend que de la semi-norme $|\circ|_{1,\Omega}$ et de l'opérateur ρ. □

Le résultat suivant montre que la fonction spline d'ajustement σ_ϵ relative à $|\circ|_{1,\Omega}$, ρ, β et ϵ est une *approximation,* quand $\epsilon \to 0$, de la fonction spline d'interpolation σ relative à $|\circ|_{1,\Omega}$, ρ et β.

THEOREME 4.2. *Quand* $\epsilon \to 0$, *on a :* $\| \sigma_\epsilon - \sigma \|_{1,\Omega} = 0(\epsilon)$.

Démonstration. On adapte une démonstration de J.P. AUBIN [4] .

Compte tenu de ce que $\beta = \rho\sigma$, il vient dans (4-3)

$$\forall\, v \in H^1(\Omega),\ (1-\epsilon) <\rho(\sigma_\epsilon - \sigma), \rho v> + \epsilon(((\sigma_\epsilon - \sigma, v))) = -\epsilon(((\sigma,v))) + \epsilon <\rho\sigma, \rho v>,$$

où $(((\ .\ )))$ est le produit scalaire (1-7). Notant $\rho^* \in \mathcal{L}(\mathrm{IR}^N\ ,\ H^1(\Omega))$ l'adjoint hilbertien de l'opérateur ρ pour le produit scalaire (1-7), on obtient

(4-4) $$(1-\epsilon)\rho^*\rho(\sigma_\epsilon-\sigma)+\epsilon(\sigma_\epsilon-\sigma)=-\epsilon\sigma+\epsilon\rho^*\rho\sigma.$$

Or $\sigma \in S=\overline{\operatorname{Im}\rho^*}=\operatorname{Im}\rho^*$, car $\dim \operatorname{Im}\rho^*=N<+\infty$. Donc il existe $\xi \in \mathbb{R}^N$ telle que

$$-\sigma=\rho^*\xi.$$

Mais $\xi=\xi_o+\xi_\perp$, avec $\xi_o \in \operatorname{Ker}\rho^*$ et $\xi_\perp \in (\operatorname{Ker}\rho^*)^\perp=\overline{\operatorname{Im}\rho}=\operatorname{Im}\rho$, donc d'après la proposition 1-2, il existe $y \in S$ tel que

$$-\sigma=\rho^*\rho y.$$

Posant alors

$$z=\sigma+y\in S,$$

il vient alors dans (4-4)

$$(1-\epsilon)\rho^*\rho\,\frac{\sigma_\epsilon-\sigma}{\epsilon}+\epsilon\,\frac{\sigma_\epsilon-\sigma}{\epsilon}=\rho^*\rho z,$$

soit encore, en posant

$$v_\epsilon=\frac{\sigma_\epsilon-\sigma}{\epsilon},$$

la relation

(4-5) $$(1-\epsilon)\rho^*\rho(v_\epsilon-z)+\epsilon(v_\epsilon-z)=\epsilon(\rho^*\rho z-z).$$

Formant alors le produit scalaire (1-6) des deux membres de (4-5) avec $v_\epsilon-z$, il vient

$$(1-\epsilon)<\rho(v_\epsilon-z)>^2+\epsilon\,|||v_\epsilon-z|||^2\leqslant|||\rho^*\rho z-z|||\ \ |||v_\epsilon-z|||,$$

d'où

$$|||v_\epsilon-z|||\leqslant|||\rho^*\rho z-z|||$$

et le résultat. □

Il en résulte, en particulier que $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\ \|\sigma_\epsilon-\sigma\|_{1,\Omega}=0.$ □

Terminons avec un autre résultat de convergence.

PROPOSITION 4.1. *On suppose que l'opérateur* ρ *défini par* (1-1) *et* (1-2) *est d'ordre* 0 *et que l'ouvert* Ω *est de classe* C^∞. *Alors on a*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \|\sigma_\epsilon - \sigma\|_{2,\Omega} = 0,$$

où $\|\cdot\|_{2,\Omega}$ *désigne la norme usuelle dans* $H^2(\Omega)$.

Démonstration. Etant donné les hypothèses faites sur ρ et Ω, le théorème 2-2 indique que σ_ϵ et σ appartiennent à $H^2(\Omega)$.

On déduit de (4-3), de (2-2) et de la relation $\rho\sigma = \beta$ que

$$\forall v \in H^1(\Omega),\ (\sigma_\epsilon - \sigma, v)_{1,\Omega} = -<\frac{\rho\sigma_\epsilon - \rho\sigma}{\epsilon} - \lambda, \rho v>. \tag{4-6}$$

Or, d'après le théorème 4-2, σ_ϵ tend vers σ dans $H^1(\Omega)$, et d'après la proposition 1-2, l'opérateur $\rho \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), \mathrm{IR}^N)$ est surjectif, donc :

$$\lambda = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\rho\sigma_\epsilon - \rho\sigma}{\epsilon}. \tag{4-7}$$

On raisonne ensuite comme dans la démonstration du théorème 2.2. On voit que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $g_\epsilon \in L^2(\Omega)$ vérifiant

$$\forall v \in L^2(\Omega),\ -<\frac{\rho\sigma_\epsilon - \rho\sigma}{\epsilon} - \lambda, \rho v> = \int_\Omega g_\epsilon\, v\, dx, \tag{4-8}$$

et que

$$\exists C_0 > 0,\ \forall \epsilon > 0\quad |g_\epsilon|_{0,\Omega} \leqslant C_0 < \frac{\rho\sigma_\epsilon - \rho\sigma}{\epsilon} - \lambda>. \tag{4-9}$$

On déduit de (4-6) et (4-8) que $\sigma_\epsilon - \sigma$ vérifie

$$\begin{cases} -\Delta(\sigma_\epsilon - \sigma) = g_\epsilon, & \text{p.p. dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial\nu}(\sigma_\epsilon - \sigma) = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Alors (régularité du problème de Neumann), l'opérateur $(I - \Delta, \gamma_1)$ est un isomorphisme de $H^2(\Omega)$ sur $L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$, donc

$$\exists C_1 > 0,\ \forall \epsilon > 0,\ \|\sigma_\epsilon - \sigma\|_{2,\Omega} \leqslant C_1 \|g_\epsilon + \sigma_\epsilon - \sigma\|_{0,\Omega},$$

d'où le résultat, compte tenu de (4-9) et (4-7). □

On remarquera que la relation (4-7) constitue une estimation du multiplicateur de lagrange λ. □

5. - APPROXIMATION DES FONCTIONS SPLINE

L'opérateur ρ défini en (1-1), (1-2) et l'élément β de $\mathbb{R}^N$ étant fixés, on se propose *d'approcher* la fonction spline d'interpolation par moyennes locales σ relative à $|\circ|_{1,\Omega}$, ρ et β.

Nous examinerons successivement trois méthodes d'approximation correspondant aux formulations du problème que nous avons rencontrés aux paragraphes 1 et 2 ainsi qu'à celle du paragraphe 4, qui concerne les fonctions spline d'ajustement.

Dans la suite, on désignera par $\mathcal{H}$ (resp. par $\mathcal{E}$) *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}_+^*$ *admettant* 0 *pour point adhérent* et, pour tout $h \in \mathcal{H}$, par V_h un sous-espace de dimension finie $I(h)$ de $H^1(\Omega)$.

5-1. - Formulation du problème sur le sous-espace K_o

Soit (cf. lemme 1.1) $\tilde{\sigma} \in H^1(\Omega)$ une fonction telle que

$$\rho\tilde{\sigma} = \beta.$$

Alors, posant

$$\sigma_o = \sigma - \tilde{\sigma},$$

on voit qu'on peut associer au problème (1-12), (1-13) le problème suivant : trouver une fonction σ_o telle que

$$\left\{\begin{array}{ll} (5\text{-}1) & \sigma_o \in K_o, \\ (5\text{-}2) & \forall\, v \in K_o,\ (\sigma_o, v)_{1,\Omega} = -(\tilde{\sigma}, v)_{1,\Omega}, \end{array}\right.$$

problème qui comme (1-12), (1-13) admet une solution unique σ_o (d'ailleurs le fait que la semi-norme $|\circ|_{1,\Omega}$ soit sur K_o une norme équivalente à la norme $\|\circ\|_{1,\Omega}$ montre directement l'existence et l'unicité de σ_o).

Pour approcher le problème (5-1), (5-2), on essaie de construire une famille $(V_{oh})_{h\in\mathcal{H}}$

de sous-espace de K_o, ce qui est possible dans certains cas. Par exemple (et sur ce point nous renvoyons à un travail ultérieur), lorsque Ω et les sous-ensembles $\omega_{\alpha,j}$, $(\alpha,j) \in M$, sont des *ouverts polygonaux de* $\mathbb{R}^2$, on peut choisir la famille $(V_h)_{h \in \mathcal{H}}$ de manière à pouvoir prendre, pour tout $h \in \mathcal{H}$:

$$\widetilde{\sigma} \in V_h$$

et

$$V_{oh} \subset V_h \ , \ \text{avec} \dim V_{oh} = I(h) - N$$

(plus précisément dans ce cas, on peut choisir pour $(V_h)_{h \in \mathcal{H}}$ une famille d'espaces d'éléments finis polynomiaux de degré 1).

De façon générale, pour tout $h \in \mathcal{H}$, on considère le *problème approché* : trouver une fonction σ_{oh} vérifiant

$$\begin{cases} \sigma_{oh} \in V_{oh} & (5\text{-}3) \\ \forall v_h \in V_{oh} \ , \ (\sigma_{oh}, v_h)_{1,\Omega} = -(\widetilde{\sigma}, v_h)_{1,\Omega} \, . & (5\text{-}4) \end{cases}$$

On a évidemment la

PROPOSITION 5.1. *Il existe une constante* $C > 0$ *indépendante du sous-espace* V_{oh} *telle que*

$$\| \sigma_o - \sigma_{o,h} \|_{1,\Omega} \leqslant C \inf_{v_h \in V_{oh}} \| \sigma_o - v_h \|_{1,\Omega} \, .$$

Démonstrattion. La proposition n'est autre que le *lemme de Céa* (cf. P.G. CIARLET [7]). □

On en déduit que si la famille $(V_{oh})_{h \in \mathcal{H}}$ vérifie l'hypothèse d'approximation

$$(5\text{-}5) \qquad \forall v \in K_o \, , \ \lim_{h \to 0} \ \inf_{v_h \in V_{oh}} \| v - v_h \|_{1,\Omega} = 0,$$

alors on a :

$$\lim_{h \to 0} \| \sigma_o - \sigma_{oh} \|_{1,\Omega} = 0,$$

et que si $\sigma_o \in H^2(\Omega)$ et si, quand $h \to 0$,

$$(5\text{-}6) \qquad \inf_{v_h \in V_{oh}} \| \sigma_o - v_h \|_{1,\Omega} = 0(h),$$

alors on a, quand $h \to 0$:

(5-7) $$\| \sigma_o - \sigma_{oh} \|_{1,\Omega} = 0(h). \quad \square$$

5.2. - Formulation avec multiplicateur de Lagrange

On associe au problème (2-1), (2-2) le problème approché suivant : trouver un couple $(\sigma_h, \lambda_h) \in V_h \times \mathrm{IR}^N$ solution de

$$\begin{cases} \rho\sigma_h = \beta & (5\text{-}8) \\ \forall v_h \in V_h, \quad (\sigma_h, v_h)_{1,\Omega} + <\lambda_h, \rho v_h> = 0 & (5\text{-}9) \end{cases}$$

THEOREME 5.1. *On suppose que*

(5-10) $$\delta > 0, \quad \forall \mu \in \mathrm{IR}^N, \quad \operatorname*{Sup}_{v_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{<\rho v_h, \mu>}{\| v_h \|_{1,\Omega}} \geqslant \delta <\mu>.$$

Alors le problème (5-8), (5-9) *admet une solution unique* $(u_h, \lambda_h) \in V_h \times \mathrm{IR}^N$ *et il existe une constante* C *indépendante du sous-espace* V_h *telle que*

$$\| \sigma - \sigma_h \|_{1,\Omega} + <\lambda - \lambda_h> \leqslant C \inf_{v_h \in V_h} \| \sigma - v_h \|_{1,\Omega}.$$

Démonstration. Le problème (5-8), (5-9) est un cas particulier d'un problème plus général étudié par F. BREZZI [6] : ici IR^N est son propre sous-espace d'approximation. Remarquant que, d'après la proposition 1-1, la condition

$$\exists \gamma > 0 \quad \forall v_h \in K_o \cap V_h, \quad (v_h, v_h)_{1,\Omega} \geqslant \gamma \| v_h \|^2_{1,\Omega}$$

se trouve vérifiée, on en déduit le résultat (cf. J.M. THOMAS [21]). □

Remarque 5.1. On vérifie que l'hypothèse (5-10) est satisfaite, par exemple, lorsque la famille $(V_h)_{h \in \mathcal{H}}$ vérifie l'hypothèse (numériquement «raisonnable») suivante : il existe $h_o \in \mathcal{H}$ tel que soient satisfaites les conditions

$$\begin{cases} \forall h \leqslant h_o, \quad \rho V_h = \mathrm{IR}^N \\ \forall h \leqslant h_o, \ \forall h' \leqslant h, \quad V_h \subset V_{h'}. \end{cases} \quad \square$$

On déduit du théorème 5.1 que si la famille $(V_h)_{h \in \mathcal{H}}$ vérifie l'hypothèse d'approximation

(5-11) $$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \lim_{h \to 0} \ \inf_{v_h \in V_h} \ \| v - v_h \|_{1,\Omega} = 0,$$

alors on a :

$$\lim_{h \to 0} \ \| \sigma - \sigma_h \|_{1,\Omega} = 0,$$

et que si $\sigma \in H^2(\Omega)$ et si, quand $h \to 0$,

(5-12) $$\inf_{v_h \in V_h} \ \| \sigma - v_h \|_{1,\Omega} = 0(h),$$

alors on a, quand $h \to 0$,

(5-13) $$\| \sigma - \sigma_h \|_{1,\Omega} = 0(h). \quad \square$$

5.3. - Fonctions spline d'ajustement

Soit J_ϵ la fonctionnelle définie en (4-1). Au problème de minimisation (4-2) on associe le problème approché suivant : trouver $\sigma_{\epsilon,h} \in V_h$ solution de

(5-14) $$\forall v_h \in V_h, \ J_\epsilon(\sigma_h) \leqslant J_\epsilon(v_h).$$

Il résulte du lemme de Lax-Milgram, appliqué dans V_h muni de la norme $||| \cdot |||$ définie en (1-7), que le problème (5-14) admet une solution unique $\sigma_{\epsilon,h}$, qui est également la solution unique du problème variationnel : trouver $\sigma_{\epsilon,h} \in V_h$ vérifiant

(5-15) $$\forall v_h \in V_h, \ < \rho\sigma_{\epsilon,h}, \rho v_h > + \epsilon(\sigma_{\epsilon,h}, v_h)_{1,\Omega} = < \beta, \rho v_h > .$$

Alors

PROPOSITION 5.2. *Pour tout* $\epsilon \in \mathscr{E}$ *et pour tout* $h \in \mathcal{H}$, *on a la majoration*

(5-16) $$||| \sigma_{\epsilon,h} - \sigma_\epsilon ||| \leqslant \left(\frac{\mathrm{Max}(1,\epsilon)}{\mathrm{Min}(1,\epsilon)} \right)^{1/2} \inf_{v_h \in V_h} \ ||| \sigma_\epsilon - v_h ||| .$$

Démonstration. L'inégalité (5-16) n'est autre que l'explication du résultat du lemme de Céa, compte tenu de la symétrie de la forme bilinéaire qui intervient dans (5-15). □

On en déduit que si l'hypothèse (5-11) est vérifiée, on a

$$\forall \epsilon \in \mathscr{E} \ , \ \lim_{h \to 0} \ \| \sigma_\epsilon - \sigma_{\epsilon,h} \|_{1,\Omega} = 0 \, ,$$

i.e. la convergence de l'approximation $\sigma_{\epsilon,h}$ vers la spline d'ajustement relative à $| \circ |_{1,\Omega}$, ρ, β et ϵ, et aussi évidemment, d'après le théorème 4.2.

$$\lim_{\epsilon \to 0} \ \lim_{h \to 0} \ \| \sigma - \sigma_{\epsilon,h} \|_{1,\Omega} = 0. \qquad \square \tag{5-17}$$

Enfin

THEOREME 5.2. *On suppose que l'opérateur* ρ *est d'ordre* 0, *que l'ouvert* Ω *est de classe* C^∞ *et que la famille* $(V_h)_{h \in \mathcal{H}}$ *vérifie l'hypothèse d'approximation*

$$\exists C_1 > 0, \ \ \forall u \in H^2(\Omega) , \ \ \operatorname*{Inf}_{v_h \in V_h} \ \| u - v_h \|_{1,\Omega} \leqslant C_1 \ \| u \|_{2,\Omega} \, h \, . \tag{5-18}$$

Alors

(i) *Pour tout* $\epsilon \in \mathscr{E}$, *il existe une constante* $C(\epsilon) > 0$, *indépendante du sous-espace* V_h, *telle que*

$$\| \sigma_\epsilon - \sigma_{\epsilon,h} \|_{1,\Omega} \leqslant C(\epsilon) h. \tag{5-19}$$

(ii) *Quand* h *et* ϵ *tendent vers* 0 *en restant liés par la relation*

$$\epsilon = C_2 \, h^{2/3} \, , \tag{5-20}$$

où C_2 *désigne une constante* > 0 *indépendante de* h *et* ϵ, *on a :*

$$\| \sigma - \sigma_{\epsilon,h} \|_{1,\Omega} = 0(h^{2/3}).$$

Démonstration. a) L'opérateur ρ étant d'ordre 0 et l'ouvert Ω étant de classe C^∞, il résulte du théorème 2.2 que $S \subset H^2(\Omega)$.

Alors (5-19) résulte de (5-16), (5-18) et de la proposition 1.1.

b) On déduit de (5-16) et (5-19) que

(5-21) $\forall\, h \in \mathcal{H},\ \ \forall\, \epsilon \in \mathcal{E}\ ,\ \ \| \sigma - \sigma_{\epsilon,h} \|_{1,\Omega} \leqslant \| \sigma - \sigma_\epsilon \|_{1,\Omega} + C\,\epsilon^{-1/2}\, \| \sigma_\epsilon \|_{2,\Omega}\, h,$

où C désigne une constante > 0 indépendante de h et de ϵ.

Utilisant le théorème 4.2, la proposition 4.1 et (5-20), le résultat suit. □

On notera que la relation (5-20) conduit dans (5-21) à une majoration optimale. □

Remarque 5.2. L'hypothèse Ω de classe C^∞ », qui conditionne les résultats du théorème 2.2 (point (iii)) et de la proposition 4.1, est une condition *sévère* du point de vue de l'analyse numérique. On peut néanmoins conjecturer que ces résultats restent valables sous une hypothèse moins restrictive. □

En résumé, on peut noter, en ce qui concerne les trois méthodes d'approximation que nous avons successivement étudiés :

- qu'elles conduisent à la résolution de systèmes linéaires d'ordres $I(h) - N$, $I(h) + N$ et $I(h)$ respectivement ;

- qu'elles sont toutes trois convergentes sous l'hypothèse classique d'approximation (5-11) [qui s'écrit (5-5) dans le cas de la formulation sur K_o], la convergence de l'approximation «spline d'ajustement» étant de type particulier [cf. (5-17)] ;

- que les majorations d'erreurs obtenues (sous les hypothèses restrictives) sont respectivement en $0(h)$, $0(h)$ et $0(h^{2/3})$;

- enfin que la mise en oeuvre de la formulation sur K_o apparaît moins facile que celle des deux autres méthodes.

* *
*

Ce travail doit beaucoup à l'aide amicale de notre collègue J.M. THOMAS, que nous sommes heureux de remercier ici.

REFERENCES

[1] ARCANGELI R. et GACHES J. *«Fonctions spline d'interpolation en moyenne».* Séminaire d'Analyse Numérique, Toulouse (1974)

[2] ATTEIA M. *«Fonctions spline généralisées».* C.R.A.S. Paris, 261, 2149-2152 (1965).

[3] ATTEIA M. *«Fonctions «spline» et noyaux reproduisants d'Aronszajn-Gergman».* R.I.R.O., 4e année, R-3, 31-43 (1970).

[4] AUBIN J.P. *«Estimate of the error in the approximation of optimization problems with constraints by problems without constraints».* dans *«Control theory and the calculus of variations»,* édité par A.V. Balakrishnan, Academic Press, New-York (1969).

[5] BABUSKA I. *«The finite element method with Lagrangian multipliers».* Numer. Math., 20, 179-192 (1973).

[6] BREZZI F. *«On the existence uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers».* R.A.I.R.O., 8e année, R-2, 129-151 (1974).

[7] CIARLET P.G. *«The finite element method for elliptic problems».* North Holland, Amsterdam (1978).

[8] CROUZEIX M. et RAVIART P.A. *«Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations I».* R.A.I.R.O., 7e année, R-3, 33-76 (1973).

[9] DUCHON J. *«Fonctions-spline à énergie invariante par rotation».* Rapport de recherche n^{o} 27, Mathématiques appliquées, Grenoble (1976).

[10] DUCHON J. *«Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces».* R.A.I.R.O. Anal. Num., 10, n^{o} 12, 5-12 (1976).

[11] GOLOMB M. et WEINBERGER H.F. *«Optimal approximation and error bounds».* dans «On numerical approximation», édité par R. Langer, Univ. of Wisconsin Press, 117-190 (1958).

[12] GOUT J.L. *«Eléments finis polygonaux de Wachspress».* Thèse, Pau (1980).

[13] LAURENT P.J. *«Approximation et optimisation».* Hermann, Paris (1972).

[14] LIONS J.L. et MAGENES E. *«Problèmes aux limites non homogènes et applications».* Vol. 1, Dunod, Paris (1968).

[15] MEINGUET J. *«Structures et estimations de coefficients d'erreurs».* R.A.I.R.O., Anal. Num., 11, n^{o} 4, 355-368 (1977).

[16] NECAS J. *«Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques».* Masson, Paris (1967).

[17] ROCKAFELLAR R.T. *«Clarke's tangent cones and the boundaries of closed sets in IR^n».* Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 3, n° 1, 145-154 - (1979).

[18] SCHOENBERG I.J. *«Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions».* Quart. of Appl. Math. 4, 45-99 et 112-141 (1946).

[19] THOMANN J. *«Détermination et construction de fonctions-spline à deux variables sur un domaine rectangulaire ou circulaire».* Thèse de 3e cycle, Lille (1970).

[20] THOMAS J.M. *«Sur l'analyse numérique des méthodes d'éléments finis hybrides et mixtes».* Thèse, Paris VI (1977).

[21] THOMAS J.M. *«Méthodes d'éléments finis mixtes et hybrides».* Cours D.E.A. 1980-1981, rédigé par P. JOLY.

(Manuscrit reçu le 20 avril 1982)