ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEANNINE SAINT JEAN PAULIN

Homogénéisation et perturbations dans un problème lié à l'échauffement d'un câble électrique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 5, n° 1 (1983), p. 43-59
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1983_5_5_1_43_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol V, 1983, P. 43 à 59

HOMOGENEISATION ET PERTURBATIONS DANS UN PROBLEME LIE A L'ECHAUFFEMENT D'UN CABLE ELECTRIQUE

Jeannine Saint Jean Paulin *(1)*

(1) Analyse Numérique. L.A. n° 189. Tour 55-65, Université Pierre et Marie Curie. 4, place Jussieu 75230 Paris Cédex 05 - France.

Résumé : On étudie un problème elliptique dépendant de deux «petits» paramètres (ϵ : paramètre d'homogénéisation et δ : paramètre de perturbations) dans lequel l'opérateur homogénéisé correspondant aux termes du 2^e ordre est nul quelle que soit la manière dont $(\epsilon,\delta) \to (0,0)$. Puis on montre que les résultats de convergence et la solution limite sont très différents suivant l'ordre de grandeur relatif des deux petits paramètres.

Summary : We study an elliptic problem depending on two «small» parameters (ϵ : homogenization parameter and δ : perturbation parameter). For this problem the homogenized operator corresponding to the 2nd order operator is always zero whatever the way $(\epsilon,\delta) \to (0,0)$. However the convergence results and the limit solution depend very much on the relative size of the two small parameters.

INTRODUCTION

Ce travail a pour origine un problème posé par A. Bossavit [2] sur l'échauffement d'un câble électrique en court-circuit. Dans ce problème interviennent deux «petits» paramètres, l'un (ϵ) lié à la taille de la cellule de base (les fils qui composent le câble sont répartis périodiquement), l'autre (δ) correspondant à la faible conductivité thermique du substrat (qui n'est pas un isolant parfait) ; sont ainsi présents un aspect homogénéisation et un aspect perturbations. Comme le fait qu'il s'agisse d'un problème d'évolution n'introduit pas de difficulté mathématique particulière, on commence par regarder ce qui se passe dans le cas stationnaire.

On montre d'abord, sur un problème un peu plus général, que l'opérateur homogénéisé correspondant aux termes du 2e ordre est nul quelle que soit la manière dont les deux petits paramètres tendent vers zéro. La convergence de la solution u_ϵ^δ vers la solution limite a lieu dans $L^2(\Omega)$ faible. La difficulté vient de ce que la constante de coercivité tend vers zéro avec δ.

Puis pour le problème stationnaire qui nous intéresse, on calcule la solution limite quand δ est petit par rapport à ϵ et quand δ est grand par rapport à ϵ. La difficulté est de passer à la limite dans un terme d'ordre zéro qui est le produit de deux fonctions qui convergent chacune faiblement.

Enfin on donne les résultats dans le cas d'évolution considéré, ainsi que l'interprétation physique proposée par A. Bossavit.

1. - NOTATIONS. UN RESULTAT GENERAL

Soit $Y = (0,l_1(X(0,l_2)$ la cellule de base de IR^2 et soient τ_i $(i = 1...M)$ des ouverts connexes de IR^2, de frontière régulière, localement d'un même côté de leur frontière. On note Y^* la partie de Y correspondant au substrat et T celle correspondant aux fils :

$$Y^* = Y \setminus T, \qquad T = \bigcup_{i=1}^{M} (\bar{\tau}_i \cap Y), \qquad \theta = |Y^*| / |Y|$$

Si E est un sous-ensemble de Y, on définit :

$$\underline{\chi}_E(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in E \\ 0 & \text{si } y \notin E \end{cases}$$

et on désigne par χ_E le prolongement de $\underline{\chi}_E$ à IR^2 par périodicité.

Soit Ω un ouvert borné connexe de IR^2 de frontière régulière (Ω correspond à la section droite du câble). On pose :

$$\Omega_\epsilon^* = \left\{ x \in \Omega \;/\; \chi_{Y^*}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \neq 0 \right\}$$

(Ω_ϵ^* est la partie de Ω correspondant au substrat) et on désigne par Ω_ϵ^j $(j = 1...N_\epsilon)$ les composantes connexes de son complémentaire dans Ω (les Ω_ϵ^j sont les parties de Ω correspondant aux fils électriques). On suppose que Ω_ϵ^* est connexe et que les Ω_ϵ^j ont une frontière suffisamment régulière et sont localement d'un même côté de leur frontière.

On définit χ_ϵ par :

$$\chi_\epsilon(x) = \chi_{Y^*}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

Problème : On se donne $f_\epsilon^\delta \in L^2(\Omega)$ et $\lambda > 0$; on cherche la limite éventuelle, quand $(\epsilon,\delta) \to (0,0)$, de la solution u_ϵ^δ du système :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[((1-\chi_\epsilon)+\delta\chi_\epsilon)\nabla u_\epsilon^\delta] + \lambda\, u_\epsilon^\delta = f_\epsilon^\delta & \text{dans } \Omega \qquad (1.1) \\ u_\epsilon^\delta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega & \qquad (1.2) \end{cases}$$

On a le théorème suivant :

THEOREME 1.1. *Soit λ une constante strictement positive ; on se donne $f_\epsilon^\delta \in L^2(\Omega)$ telle que :*

$$|f_\epsilon^\delta|_{L^2(\Omega)} \leqslant k \qquad k : \textit{constante indépendante de } \epsilon \textit{ et } \delta. \tag{1.3}$$

Soit u_ϵ^δ la solution du système (1.1) (1.2).
Alors, quand $(\epsilon,\delta) \to (0,0)$ on a, après extraction éventuelle de sous-suites :

$$u_\epsilon^\delta \longrightarrow u \textit{ dans } L^2(\Omega) \textit{ faible,} \qquad f_\epsilon^\delta \longrightarrow f \textit{ dans } L^2(\Omega) \textit{ faible}$$

où u et f sont liés par l'équation homogénéisée :

$$\lambda u = f \qquad \textit{dans } \Omega \tag{1.4}$$

De plus quelle que soit la sous-suite extraite, on a :

$$\xi_\epsilon^\delta \equiv ((1-\chi_\epsilon)+\delta\chi_\epsilon)\,\nabla u_\epsilon^\delta \longrightarrow 0 \textit{ dans } [L^2(\Omega)]^2 \textit{ faible.} \tag{1.5}$$

Remarque 1.2. L'opérateur homogénéisé correspondant aux termes du 2e ordre est nul quelle que soit la manière dont $(\epsilon,\delta) \to (0,0)$. Par contre, il est clair sur l'équation (1.4) que si la limite f de f_ϵ^δ dépend de la manière dont $(\epsilon,\delta) \to (0,0)$, alors u en dépend aussi ; nous en verrons un exemple au § 2.

Remarque 1.3. On vérifie aisément que si $f_\epsilon^\delta \to f$ dans $L^2(\Omega)$ fort, alors $u_\epsilon^\delta \to u$ dans $L^2(\Omega)$ fort.

Pour démontrer le Théorème 1.1, on a besoin d'un résultat auxiliaire (qu'on admet pour l'instant) concernant le problème «adjoint» dans la cellule de base :

PROPOSITION 1.4. *Soit $w^{\delta,\mu}$ la solution du problème :*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}((\chi_T+\delta\chi_{Y^*})\nabla w^{\delta,\mu}) = 0 & \textit{dans } Y \\ w^{\delta,\mu} - \mu y \quad Y\textit{-périodique de moyenne nulle.} \end{cases} \tag{1.6}$$

Alors, quand $\delta \to 0$, $w^{\delta,\mu}$ *vérifie :*

$$(1.7)\qquad \begin{cases} w^{\delta,\mu} \to w^{0,\mu} \text{ dans } H^1(Y) \\ \| w^{\delta,\mu} - w^{0,\mu} \|_{H^1(Y)} \leqslant C\delta \qquad C : \text{constante indépendante de } \delta \end{cases}$$

où $w^{0,\mu}$ *est la solution de :*

$$(1.8)\qquad \begin{cases} w^{0,\mu} = \text{constante dans } T \\ -\Delta w^{0,\mu} = 0 \qquad \text{dans } Y^* \\ (w^{0,\mu})^+ = (w^{0,\mu})^- \text{ sur } \partial T \\ w^{0,\mu} - \mu y \quad Y \text{ périodique de moyenne nulle} \end{cases}$$

Le signe $^-$ *(resp.* $^+$*) indique que les valeurs sont calculées dans* T *(resp.* Y^**).*

Démonstration du Théorème 1.1. En multipliant (1.1) par u_ϵ^δ et en utilisant l'hypothèse (1.3), on obtient les estimations a priori suivantes (où C est une constante indépendante de ϵ et δ) :

$$(1.9)\qquad \begin{cases} | u_\epsilon^\delta |_{L^2(\Omega)} \leqslant C \\ | \delta^{1/2} \nabla u_\epsilon^\delta |_{[L^2(\Omega_\epsilon^*)]^2} \leqslant C \\ \sum_i | \nabla u_\epsilon^\delta |_{[L^2(\Omega_\epsilon^i)]^2} \leqslant C \end{cases}$$

donc en particulier, $\xi_\epsilon^\delta \equiv ((1-\chi_\epsilon) + \delta\chi_\epsilon) \nabla u_\epsilon^\delta$ vérifie :

$$(1.10)\qquad | \xi_\epsilon^\delta |_{L^2(\Omega)^2} \leqslant C$$

Après extraction éventuelle de sous-suites, on peut passer à la limite faible dans l'équation (1.1) et on a (en désignant par ξ la limite de ξ_ϵ^δ dans $(L^2(\Omega))^2$ faible) :

$$(1.11)\qquad -\operatorname{div} \xi + \lambda u = f \qquad \text{dans } \Omega$$

Pour calculer ξ on utilise la méthode de l'énergie introduite par L. Tartar (8). On considère donc le problème adjoint (1.6) dans la cellule de base et on introduit $w_\epsilon^{\delta,\mu}$ par :

$$(1.12)\qquad w_\epsilon^{\delta,\mu}(x) = \epsilon\, w^{\delta,\mu}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

On remarque que $w_\epsilon^{\delta,\mu}$ est solution de :

$$(1.13) \qquad -\operatorname{div}(((1-\chi_\epsilon)+\delta\chi_\epsilon)\nabla w_\epsilon^{\delta,\mu}) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

On se fixe arbitrairement $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on multiplie (1.1) par $\phi w_\epsilon^{\delta,\mu}$ et (1.13) par ϕu_ϵ^δ et on intègre par parties ; il vient :

$$\int_\Omega ((1-\chi_\epsilon)+\delta\chi_\epsilon)\nabla u_\epsilon^\delta (w_\epsilon^{\delta,\mu}\ \nabla\phi + \phi\ \nabla w_\epsilon^{\delta,\mu})dx + \lambda \int_\Omega u_\epsilon^\delta \phi w_\epsilon^{\delta,\mu}\, dx -$$

$$-\int_\Omega ((1-\chi_\epsilon)+\delta\chi_\epsilon)\ \nabla w_\epsilon^{\delta,\mu}(u_\epsilon^\delta\ \nabla\phi + \phi\nabla u_\epsilon^\delta)dx = \int_\Omega f_\epsilon^\delta \phi w^{\delta,\mu}\, dx$$

ce qui s'écrit encore :

$$(1.14) \int_\Omega \xi_\epsilon^\delta w_\epsilon^{\delta,\mu}\ \nabla\phi\, dx + \lambda\int_\Omega u_\epsilon^\delta \phi w_\epsilon^{\delta,\mu}\, dx - \int_\Omega ((1-\chi_\epsilon)+\delta\chi_\epsilon)\nabla w_\epsilon^{\delta,\mu} u_\epsilon^\delta \nabla\phi dx =$$

$$= \int_\Omega f_\epsilon^\delta \phi w_\epsilon^{\delta,\mu}\, dx$$

On a déjà des résultats de convergence sur ξ_ϵ^δ et u_ϵ^δ ; en ce qui concerne $w_\epsilon^{\delta,\mu}$, on montre aisément (en utilisant la Proposition 1.4 et la définition (1.12)) que :

$$(1.15) \quad \left\{ \begin{array}{ll} |\ w_\epsilon^{\delta,\mu} - \mu x|_{L^2(\Omega)} \leqslant C & \text{C indép. de } \epsilon \text{ et } \delta \\ |\nabla w_\epsilon^{\delta,\mu}|_{L^2(\Omega)^2} \leqslant C & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \end{array} \right.$$

Le terme le plus gênant a priori dans (1.14) est $(1-\chi_\epsilon)\ \nabla w_\epsilon^{\delta,\mu} u_\epsilon^\delta$ car on a seulement convergence faible dans $L^2(\Omega)^2$ pour ∇u_ϵ^δ et $\nabla w_\epsilon^{\delta,\mu}$; le point important est de remarquer que $(1-\chi_\epsilon)\ \nabla w_\epsilon^{\delta,\mu}$ tend vers zéro dans $L^2(\Omega)^2$ fort (ce qui permet de passer à la limite). En effet, puisque $\nabla\ w^{0,\mu}$ est nul dans T d'après (1.8), on a :

$$|(1-\chi_\epsilon)\ \nabla w_\epsilon^{\delta,\mu}|_{L^2(\Omega)^2} \leqslant C\,(|\chi_T\ \nabla\ (w^{\delta,\mu} - w^{0,\mu})|_{L^2(Y)^2} + |\chi_T\ \nabla w^{0,\mu}|_{L^2(Y)^2})$$

$$\leqslant C\ \| w^{\delta,\mu} - w^{0,\mu} \|_{H^1(Y)}$$

donc, d'après la Proposition 1.4 :

$$(1.16) \qquad |(1-\chi_\epsilon)\nabla w_\epsilon^{\delta,\mu}|_{L^2(\Omega)^2} \leqslant C\delta \qquad \text{C indép. de } \epsilon \text{ et } \delta$$

En utilisant les convergences dans L^2 faible et les estimations (1.15) (1.16), on peut passer à la limite dans (1.14) et on obtient :

$$\int_\Omega (\mu x)\xi\nabla\phi dx + \lambda\int_\Omega (\mu x)u\phi dx - 0 = \int_\Omega (\mu x)f\phi dx$$

En intégrant par parties le premier terme, en se souvenant que ϕ est arbitraire et que div ξ vérifie (1.11), on en déduit :

$$\xi\,\nabla(\mu x) = 0$$

Ceci est vrai quel que soit $\mu \in \mathrm{IR}^2$, donc ξ est nul ; en reportant cette valeur dans (1.11), on obtient l'équation homogénéisée (1.4).

Les calculs effectués jusqu'à présent mettent surtout en évidence l'aspect «homogénéisation». Pour achever la démonstration du Théorème 1.1, il reste à démontrer la Proposition 1.4 ; c'est là qu'intervient l'aspect «perturbations».

Démonstration de la Proposition 1.4. On se ramène, par la translation $w^{\delta,\mu}(y) = \mu y - \psi^\delta(y)$, à l'étude du problème suivant :

$$\begin{cases} \psi^\delta \in V \\ a_T(\psi^\delta,\phi) + \delta a_*(\psi^\delta,\phi) = L_T(\phi) + \delta L_*(\phi) \qquad \forall\, \phi \in V \end{cases}$$

où on a posé :

$$\begin{cases} V = \{\, \phi \in H^1(Y), \phi \quad \text{Y-périodique de moyenne nulle} \,\} \qquad \|\phi\|_V = |\nabla\phi|_{L^2(Y)^2} \\ a_T(\psi,\phi) = \int_T \nabla\psi\,\nabla\phi\, dy \qquad a_*(\psi,\phi) = \int_{Y^*} \nabla\psi\,\nabla\phi\, dy \\ L_T(\phi) = \int_T \nabla(\mu y)\,\nabla\phi\, dy \qquad L_*(\phi) = \int_{Y^*} \nabla(\mu y)\,\nabla\phi\, dy \end{cases}$$

et on cherche un développement asymptotique de ψ^δ. On introduit donc :

$$V_T \equiv \{\, \phi \in V : a_T(\phi,\phi) = 0 \,\} = \{\, \phi \in V : \phi = \text{constante sur } T \,\}$$

et on montre que si $v \to L'(v)$ est une forme linéaire continue sur V nulle sur V_T, il existe ψ dans V (défini modulo V_T) tel que $a_T(\psi,\phi) = L'(\phi) \quad \forall\, \phi \in V$.

Par la théorie des perturbations (cf. J.L. Lions (5)), on sait alors construire un développement asymptotique de ψ^δ, et on a l'estimation d'erreur :

(1.17) $$\|\psi^\delta - (\delta^{-1}\psi_{-1} + \psi_0)\|_V \leqslant C\delta \qquad \text{C indép. de } \delta$$

De plus, en regardant comment sont définis ψ_{-1} et ψ_0, on remarque que ψ_{-1} est nul et que $w^{0,\mu}(y) = \mu y - \psi_0$ est solution de (1.8) ; en revenant aux $w^{\delta,\mu}$ on obtient (1.7) à partir de (1.17), ce qui achève la démonstration de la Proposition 1.4.

Remarque 1.5. On a vu, d'après le Théorème 1.1, que l'équation homogénéisée (1.4) qui lie u et f ne contient plus d'opérateur du 2e ordre et est indépendante de la manière dont $(\epsilon,\delta) \to (0,0)$. Ces propriétés sont très liées à la forme particulière du système (1.1) (1.2) : en effet, on va montrer que si dans (1.1) on remplace le terme $(1 - \chi_\epsilon) + \delta\chi_\epsilon$ par le terme $\delta(1 - \chi_\epsilon) + \chi_\epsilon$ les résultats correspondants sont faux.

Soit v_ϵ^δ la solution de :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left((\delta(1-\chi_\epsilon)+\chi_\epsilon)\nabla v_\epsilon^\delta\right)+\lambda v_\epsilon^\delta = 1 & \text{dans } \Omega \\ v_\epsilon^\delta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

En appliquant les résultats classiques d'homogénéisation et de perturbations (cf. A. Bensoussan-J.L. Lions-G. Papanicolaou (1), J.L. Lions (5)), on vérifie aisément que quand on fait d'abord $\epsilon \to 0$ puis $\delta \to 0$, alors v_ϵ^δ converge vers la solution v_* du système :

$$\begin{cases} -q_{ij}\,\dfrac{\partial^2 v_*}{\partial x_i\,\partial x_j} + \lambda v_* = 1 & \text{dans } \Omega \\ v_* = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(les q_{ij} sont des constantes qu'on sait déterminer) ; dont contrairement à ce qui se passait pour le système (1.1) (1.2), il reste encore un opérateur du 2e ordre dans l'équation homogénéisée.

D'autre part, si on fait d'abord $\delta \to 0$ puis $\epsilon \to 0$ on montre, en utilisant des résultats de perturbations puis d'homogénéisation d'un problème avec trous (cf. D. Cioranescu-J. Saint Jean Paulin (4)) que v_ϵ^δ converge dans $L^2(\Omega)$ faible vers la solution v^* de :

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\theta}\, q_{ij}\,\dfrac{\partial^2 v^*}{\partial x_i\,\partial x_j} + \lambda v^* = 1 & \text{dans } \Omega \\ v^* = \dfrac{1-\theta}{\lambda} \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

En comparant les deux systèmes obtenus, il est clair que :

$$v_* \neq v^*$$

donc, contrairement à ce qui se passait pour le système (1.1) (1.2), le système homogénéisé qui lie la limite de v_ϵ^δ à la limite des données dépend de la manière dont $(\epsilon,\delta) \to (0,0)$.

2. - CAS OU LE MEMBRE DE DROITE DEPEND DE u_ϵ^δ. ENONCE DES RESULTATS

En fait, l'analogue stationnaire du problème d'électricité a une forme moins générale que (1.1) (1.2) et s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{lc} (2.1) & -\operatorname{div}\left(\left((1-\chi_\epsilon)+\delta\chi_\epsilon\right)\nabla u_\epsilon^\delta\right)+\lambda u_\epsilon^\delta=(1-\chi_\epsilon)\,(1+Ku_\epsilon^\delta) \quad \text{dans } \Omega \\ (2.2) & u_\epsilon^\delta=0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right.$$

On va d'abord donner une équation qui lie les limites de u_ϵ^δ et de $(1-\chi_\epsilon)u_\epsilon^\delta$, puis on cherchera la limite de u_ϵ^δ.

PROPOSITION 2.1. *On suppose que les constantes* λ *et* K *vérifient*

$$\lambda > K > 0 \tag{2.3}$$

Soit u_ϵ^δ *la solution de (2.1) (2.2). Alors, quand* $(\epsilon,\delta) \to (0,0)$, *on a après extraction éventuelle de sous-suites :*

$$u_\epsilon^\delta \longrightarrow u \quad \textit{dans } L^2(\Omega) \textit{ faible}, \qquad (1-\chi_\epsilon)u_\epsilon^\delta \longrightarrow U \quad \textit{dans } L^2(\Omega) \textit{ faible},$$

où u *et* U *sont liés par l'équation homogénéisée :*

$$u = (1-\theta) + KU \qquad \textit{dans } \Omega. \tag{2.4}$$

Démonstration de la Proposition 2.1. On pose :

$$f_\epsilon^\delta = (1-\chi_\epsilon)(1+Ku_\epsilon^\delta)$$

On constate, en multipliant (2.1) par u_ϵ^δ et en intégrant par parties, que f_ϵ^δ vérifie (1.3). La Proposition 2.1 est alors un simple corollaire du Théorème 1.1.

Il reste maintenant à calculer U en fonction de u ; on va montrer que les limites u et U dépendent de la manière dont $(\epsilon,\delta) \to (0,0)$ alors que l'équation (2.4) qui les lie n'en dépend pas.

THEOREME 2.2. *On fait toujours l'hypothèse (2.3). Alors :*

a) quelle que soit la manière dont $(\epsilon,\delta) \to (0,0)$, *on a :*

$$u \leqslant (1-\theta)\,/\,(\lambda - K) \qquad \textit{dans } \Omega$$

b) si $\delta\epsilon^{-2} \to 0$ *quand* $(\epsilon,\delta) \to (0,0)$, *on a :*

(2.5) $$U = u = (1-\theta) / (\lambda - K) \quad \textit{dans } \Omega$$

et $u_\epsilon^\delta \longrightarrow u$ *dans* $L^2(\Omega)$ *faible mais pas dans* $L^2(\Omega)$ *fort*

c) si $\exists\, t > 1$, *tel que :* $\delta\epsilon^{-1/(t+2)} \to \infty$ *quand* $(\epsilon,\delta) \to (0,0)$, *on a :*

(2.6) $$U / (1-\theta) = u = (1-\theta) / (\lambda - K(1-\theta)) \quad \textit{dans } \Omega$$

et $u_\epsilon^\delta \to u$ *dans* $L^2(\Omega)$ *fort*

d) dans le cas limite où on fait d'abord $\delta \to 0$ *puis* $\epsilon \to 0$, *on a les mêmes résultats que dans le cas b)*

e) dans le cas limite où on fait d'abord $\delta \to 0$ *puis* $\epsilon \to 0$, *on a les mêmes résultats que dans le cas c).*

COROLLAIRE 2.3. *Dans le cas particulier où* $\delta = \epsilon^s$, *alors :*

si $s > 2$ $\quad u = (1-\theta) / (\lambda - K)$

si $s < 1/3$ $\quad u = (1-\theta) / (\lambda - K(1-\theta))$

Le corollaire est trivial. Pour la partie a) du Théorème, il suffit de remarquer que : $(1-\chi_\epsilon)u_\epsilon^\delta \leqslant u_\epsilon^\delta$, donc : $U \leqslant u$ et d'utiliser l'équation (2.4). Le reste du Théorème 2.2 sera démontré dans les § 3 à 5.

Remarque 2.4. Une condition nécessaire pour que la convergence de u_ϵ^δ vers u ait lieu dans $L^2(\Omega)$ fort est que (2.6) soit vérifiée : en effet, si on a convergence forte, on peut passer à la limite dans $(1-\chi_\epsilon)u_\epsilon^\delta$ en faisant le produit des limites, donc : $U = (1-\theta)u$ et (2.6) est alors une conséquence de (2.4).

3. - ETUDES DES CAS LIMITES d) ET e)

Cas limite d) : on fait d'abord $\delta \to 0$, *puis* $\epsilon \to 0$.

Quand $\delta \to 0$, à ϵ fixe, le problème (2.1) (2.2) est un problème de perturbations. En appliquant les méthodes de perturbations (cf. J.L. Lions (5)), on obtient :

$$u_\epsilon^\delta \to v_\epsilon^0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort,}$$

où v_ϵ^0 est la solution de :

$$\begin{cases} -\Delta v_\epsilon^0 + \lambda v_\epsilon^0 = 1 + K v_\epsilon^0 & \text{dans } \Omega_\epsilon^i \quad (i = 1 \dots N_\epsilon) \\ \left(\dfrac{\partial v_\epsilon^0}{\partial n}\right)^- = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\epsilon^i \\ \lambda v_\epsilon^0 = 0 & \text{dans } \Omega_\epsilon^* \end{cases}$$

(n est la normale extérieure à Ω_ϵ^* , le signe $^-$ indique les valeurs sont calculées dans les Ω_ϵ^i). Ce système se résout explicitement par :

$$v_\epsilon^0 = (1 - \chi_\epsilon) / (\lambda - K)$$

Quand on fait ensuite $\epsilon \to 0$, on obtient :

$$v_\epsilon^0 \longrightarrow (1 - \theta) / (\lambda - K) \qquad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible,}$$

ce qui achève la démonstration de la partie d) du Théorème 2.2.

Cas limite e) : on fait d'abord $\epsilon \to 0$, puis $\delta \to 0$.

Quand $\epsilon \to 0$, à δ fixe, le problème (2.1) (2.2) est un problème d'homogénéisation. En appliquant la méthode des échelles multiples (cf. J.L. Lions (6), A. Bensoussan - J.L. Lions - G. Papanicolaou (1)), on obtient :

$$u_\epsilon^\delta \to v_0^\delta \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort}$$

où v_0^δ est la solution de :

$$\begin{cases} -q_{ij}^\delta \dfrac{\partial^2 v_0^\delta}{\partial x_i \, \partial x_j} + \lambda v_0^\delta = (1 - \theta)(1 + K v_0^\delta) & \text{dans } \Omega \qquad (3.1) \\ v_0^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \qquad (3.2) \end{cases}$$

Les coefficients homogénéisés q_{ij}^δ sont donnés par :

(3.3) $$q_{ij}^{\delta} = \frac{1}{|Y|} \int_Y (\chi_T + \delta\chi_{Y*}) \nabla w^{\delta,\mu_i} \nabla w^{\delta,\mu_j} dy$$

(les $w^{\delta,\mu}$ sont définis par (1.6) et on a posé : $\mu_1 = (1,0)$, $\mu_2 = (0,1)$).
Quand on fait ensuite $\delta \to 0$, on applique au système (3.1) (3.2) la théorie des perturbations (cf. J.L. Lions (5)) : en utilisant (1.7) et le fait que $\nabla w^{0,\mu} = 0$ dans T. On montre d'abord que :

(3.4) $$|q_{ij}^{\delta}| \leqslant C\,\delta \qquad C \text{ indép. de } \delta$$

puis on en déduit que :

$$v_0^{\delta} \to (1-\theta)/(\lambda - K(1-\theta)) \qquad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort}$$

ce qui achève la démonstration de la partie e) du Théorème 2.2.

Remarque 3.1. Les méthodes d'échelles multiples et de perturbations utilisées pour le cas e) permettent d'obtenir, si on le souhaite, une estimation d'erreur et des termes supplémentaires pour le développement asymptotique.

4. - ETUDE DU CAS b) : ON SUPPOSE QUE $\delta\epsilon^{-2} \to 0$ QUAND $(\epsilon,\delta) \to (0,0)$

Si on fait un développement asymptotique formel (cf. J. Saint Jean Paulin (7) pour des détails) on obtient le résultat (2.5) ; le fait que formellement :

$$\lim (1-\chi_\epsilon) u_\epsilon^{\delta} = \lim u_\epsilon^{\delta}$$

suggère de multiplier (2.1) par $(1-\chi_\epsilon)\phi$ (pour ϕ régulière) dans le but de faire apparaître $(1-\chi_\epsilon)u_\epsilon^{\delta}$ dans le membre de gauche. C'est l'idée de base de la méthode ; pour l'appliquer, il faut auparavant régulariser $(1-\chi_\epsilon)$.

1e étape : régularisation de $(1-\chi_\epsilon)$

On introduit un autre petit paramètre α et une fonction h^{α} régulière, définie sur Y qui approche $(1-\chi_{Y*})$ au sens suivant :

(4.1) $$\begin{cases} 0 \leqslant h^{\alpha} \leqslant 1 & \text{dans } Y \\ h^{\alpha}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in T \\ 0 & \text{si } y \in Y^* \text{ avec } d(y,\partial T) > \alpha \end{cases} \\ (\nabla h^{\alpha})(y) = \alpha^{-1}\, 0(1) \end{cases}$$

On remarque qu'on a l'estimation :

$$|h^{\alpha}-(1-\chi_{Y*})|_{L^2(Y)} \leqslant C\alpha^{1/2} \tag{4.2}$$

Notation. On désigne par $\sim$ l'opérateur qui, à une fonction Y-périodique g, associe la fonction $\widetilde{g}$ définie sur Ω par :

$$\widetilde{g}(x)=g(\frac{x}{\epsilon}).$$

On approche $(1-\chi_\epsilon)$ par $(h^\alpha)^\sim$ et on déduit de (4.2) l'estimation :

$$|(h^{\alpha})^{\sim}-(1-\chi_{\epsilon})|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\alpha^{1/2} \qquad \text{C indép. de } \epsilon \tag{4.3}$$

2e étape : estimations a priori

On se donne arbitrairement $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$; on multiplie (2.1) par $(h^\alpha)^\sim$ et on intègre par parties. Il vient :

$$\int_\Omega ((1-\chi_\epsilon)+\delta\chi_\epsilon)\nabla u_\epsilon^\delta\,(\phi\,\nabla((h^\alpha)^\sim)+(h^\alpha)^\sim\nabla\phi)dx+\lambda\int_\Omega u_\epsilon^\delta\,\phi(h^\alpha)^\sim\,dx= \tag{4.4}$$

$$=\int_\Omega (1-\chi_\epsilon)(1+Ku_\epsilon^\delta)\,\phi(h^\alpha)^\sim\,dx$$

On s'intéresse d'abord au membre de droite. En utilisant (4.3) et le fait que les normes de u_ϵ^δ et $(1-\chi_\epsilon)$ sont bornées (respectivement dans $L^2(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$), indépendamment de ϵ et δ, on obtient :

$$\left|\int_\Omega (1-\chi_\epsilon)(h^\alpha)^\sim\,(1+Ku_\epsilon^\delta)\phi dx-\int_\Omega (1-\chi_\epsilon)(1+Ku_\epsilon^\delta)\phi dx\right|\leqslant C\alpha^{1/2}$$

où C est une constante dépendant de ϕ mais indépendante de α, ϵ et δ.

Pour les termes du membre de gauche où n'intervient pas $\nabla(h^\alpha)^\sim$, on a une estimation analogue ; le terme en $(1-\chi_\epsilon)\,\nabla(h^\alpha)^\sim$ est nul puisque h^α est constante dans T. Reste le terme en $\delta\chi_\epsilon(\nabla(h^\alpha)^\sim)$:

$$\left|\int_\Omega \delta\chi_\epsilon\,\nabla u_\epsilon^\delta(\nabla(h^\alpha)^\sim)\phi dx\right|=\left|\int_\Omega \delta\chi_\epsilon\,\nabla u_\epsilon^\delta\,\epsilon^{-1}(\nabla h^\alpha)^\sim\phi\,dx\right|$$

$$\leqslant C\delta\epsilon^{-1}\,\alpha^{-1}\,|\chi_\epsilon\,\nabla u_\epsilon^\delta|_{L^2(\Omega)^2}$$

$$\leqslant C\delta^{1/2}\,\epsilon^{-1}\,\alpha^{-1}$$

où C est une constante dépendant de ϕ mais indépendante de α, ϵ et δ ; en particulier, si $\delta\epsilon^{-2} \to 0$, on peut choisir α tel que $\delta^{1/2}\,\epsilon^{-1}\,\alpha^{-1} \to 0$.

3e étape : passage à la limite

Avec le choix de α qu'on vient d'indiquer, et en utilisant les estimations a priori (1.9) ainsi que celles qu'on vient d'établir, on peut passer à la limite dans (4.4) quand α, ϵ et δ tendent vers zéro et on obtient :

$$0 + \int_\Omega \lambda U \phi dx = \int_\Omega ((1-\theta) + KU)\phi dx \qquad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

donc :

$$\lambda U = (1-\theta) + KU$$

En comparant cette relation avec (2.4), on obtient le résultat (2.5), ce qui achève la démonstration de la partie b) du Théorème 2.2.

5. - ETUDE DU CAS c) : ON SUPPOSE QUE $\exists\, t > 1$ TEL QUE $\delta\epsilon^{-1/(t+2)} \to \infty$ QUAND $(\epsilon,\delta) \to (0,0)$

Les calculs formels, par une méthode de développement asymptotique, donnent le même résultat que dans le cas limite e) ; pour les justifier, il faut obtenir une estimation de la norme de $u_\epsilon^\delta - v_0^\delta$ dans $L^2(\Omega)$ en fonction de puissances de ϵ et δ et de constantes indépendantes de ϵ et δ (on a défini v_0^δ par (3.1) (3.2)).

On esquisse la démonstration (voir J. Saint Jean Paulin (7) pour les détails). On introduit l'erreur ϕ_ϵ^δ définie par :

$$\phi_\epsilon^\delta(x) = u_\epsilon^\delta(x) - (v_0^\delta(x) + \epsilon v_1^\delta\,(x,\frac{x}{\epsilon}) + \epsilon^2\, v_2^\delta\,(x,\frac{x}{\epsilon})) \tag{5.1}$$

où v_0^δ, v_1^δ et v_2^δ sont les premiers termes du développement asymptotique de u_ϵ^δ calculés par la méthode des échelles multiples (en considérant (2.1) (2.2) comme un problème d'homogénéisation).

On établit d'abord une équation dont ϕ_ϵ^δ est solution dans Ω :

LEMME 5.1. *L'erreur ϕ_ϵ^δ vérifie :*

$$-\operatorname{div}\,(((1-\chi_\epsilon) + \delta\chi_\epsilon)\nabla\,\phi_\epsilon^\delta) + (\lambda - K(1-\chi_\epsilon))\phi_\epsilon^\delta = \epsilon\delta^{-2}\, G_\epsilon^\delta \quad \textit{dans } \Omega \tag{5.2}$$

où $\| G_\epsilon^\delta \|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant C$ *C indépendant de ϵ et δ.*

Démonstration du lemme 5.1. La méthode d'échelles multiples permet d'exprimer v_1^δ et v_2^δ en fonction de v_0^δ et de ses dérivées. En utilisant le fait que v_0^δ est solution de (3.1) (3.2) et que q_{ij}^δ vérifie l'estimation (3.4), on montre que :

$$(5.3) \qquad \forall\, s>0 \qquad \delta^{s/2} \| v_0^\delta \|_{H^s(\Omega)} \leqslant C_s \qquad C_s \text{ indép. de } \delta$$

On en déduit une estimation de v_1^δ et v_2^δ en fonction des puissances de δ ; en explicitant le membre de gauche de (5.2), on peut alors établir pour G_ϵ^δ l'estimation annoncée. On veut maintenant estimer ϕ_ϵ^δ sur $\partial\Omega$:

LEMME 5.2. L'erreur ϕ_ϵ^δ vérifie :

$$(5.4) \qquad \forall\, t>1, \quad \phi_\epsilon^\delta = \epsilon^{1/2}\, \delta^{-(t+1)/2}\, g_\epsilon^\delta(t) \qquad \textit{sur } \partial\Omega$$

où $\| g_\epsilon^\delta(t) \|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leqslant C_t$ $\quad C_t$ *indép. de ϵ et δ.*

Démonstration du lemme 5.2. Puisque u_ϵ^δ et v_0^δ sont nuls sur $\partial\Omega$, on a :

$$\phi_\epsilon^\delta(x) = -\,\epsilon v_1^\delta(x, \frac{x}{\epsilon}) - \epsilon^2\, v_2^\delta(x, \frac{x}{\epsilon}) \qquad \text{sur } \partial\Omega$$

En utilisant l'expression explicite de $v_1^\delta(x, \frac{x}{\epsilon})$ en fonction de $\nabla\, v_0^\delta$, le fait que l'opérateur $\sim$ opère dans $H^{1/2}$ avec norme $\epsilon^{1/2}\, 0(1)$ (on le montre par interpolation), le fait que H^t est un multiplicateur sur H^1 pour $t > n/2$ (où n est la dimension de l'espace) et la majoration (5.3), on montre que :

$$\epsilon^{1/2} \| v_1^\delta\, (x, \frac{x}{\epsilon}) \|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leqslant C\delta^{-(t+1)/2} \qquad C \text{ indép. de } \epsilon \text{ et } \delta$$

On fait un calcul analogue avec l'autre terme et on obtient ainsi (5.4).

Pour achever la démonstration de la partie c) du Théorème 2.2, on montre d'abord que, puisque ϕ_ϵ^δ vérifie (5.2) (5.4), on a la majoration :

$$| \phi_\epsilon^\delta |_{L^2(\Omega)} \leqslant C\epsilon^{1/2}\, \delta^{-(t+2)/2}$$

et par conséquent :

$$| u_\epsilon^\delta - v_0^\delta |_{L^2(\Omega)} \leqslant C\epsilon^{1/2}\, \delta^{-(t+2)/2} \qquad C \text{ indép. de } \epsilon \text{ et } \delta$$

D'autre part, l'estimation de $v_0^\delta - u$ est classique et vient du fait que v_0^δ est solution du problème de perturbations (3.1) (3.2). La convergence de $u_\epsilon^\delta - u$ dans $L^2(\Omega)$ fort est une conséquence des deux estimations précédentes ; on a même un peu mieux que le résultat annoncé puisque la méthode de démonstration donne une estimation de $| u_\epsilon^\delta - u |_{L^2(\Omega)}$.

6. - CAS PARABOLIQUE. ECHAUFFEMENT D'UN CABLE ELECTRIQUE

Avec les notations précédentes, l'étude de l'évolution de la température au cours de l'échauffement d'un câble haute-tension conduit au problème parabolique suivant, posé par A. Bossavit (2) :

$$(6.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_\epsilon^\delta}{\partial t} - \operatorname{div}\,(((1-\chi_\epsilon)+\delta\chi_\epsilon)\,\nabla u_\epsilon^\delta) = (1-\chi_\epsilon)(1+Ku_\epsilon^\delta) & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ u_\epsilon^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \\ u_\epsilon^\delta(.\,,0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Les Ω_ϵ^i correspondent aux fils d'aluminium, Ω_ϵ^* au substrat isolant et la constante K au coefficient de température de l'aluminium ; ϵ est lié à la taille de la cellule de base (les fils d'aluminium sont répartis périodiquement) et δ correspond à la faible conductivité thermique du substrat (qui n'est pas un isolant parfait)

Les méthodes précédentes s'adaptent facilement à l'étude du problème (6.1) et on montre :

PROPOSITION 6.1. *Soit* u_ϵ^δ *la solution de (6.1). Alors :*

1) si $\delta\epsilon^{-2} \to 0$ *quand* $(\epsilon,\delta) \to (0,0)$, *ou si on fait d'abord* $\delta \to 0$ *puis* $\epsilon \to 0$,

$$u_\epsilon^\delta \rightharpoonup u \quad \textit{dans } L^2(0,T\,;L^2(\Omega)) \textit{ faible}$$

où u *est caractérisé par :*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = (1-\theta) + Ku & \textit{dans } \Omega \times (0,T) \\ u(.\,,0) = 0 & \textit{dans } \Omega \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$u(x,t) = \frac{1-\theta}{K}\,(e^{Kt}-1) \quad \textit{dans } \Omega \times (0,T)$$

2) si $\exists\, t > 1$ *tel que* $\delta\epsilon^{-1/(t+2)} \to \infty$ *quand* $(\epsilon,\delta) \to (0,0)$ *ou si on fait d'abord* $\epsilon \to 0$ *puis* $\delta \to 0$,

$$u_\epsilon^\delta \to u \quad \textit{dans } L^2(0,T\,;L^2(\Omega)) \textit{ fort}$$

où u *est caractérisé par :*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = (1-\theta)\,(1+Ku) & \textit{dans } \Omega \times (0,T) \\[2ex] u(.\,,0) = 0 & \textit{dans } \Omega \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$u(x,t) = \frac{1}{K}\;\left(e^{(1-\theta)Kt} - 1\right) \qquad \textit{dans } \Omega \times (0,T)$$

INTERPRETATION PHYSIQUE DU RESULTAT

Ces résultats mathématiques ont été interprétés par A. Bossavit (3) qui souligne que ϵ et δ sont en fait des nombres sans dimension et que dans le processus d'adimensionalisation des équations qui conduit à (6.1) intervient un changement d'échelle de temps. La différence de comportement obtenue mathématiquement correspondrait donc :

- au «court terme» pour $\delta \ll \epsilon$: le substrat n'a pas encore eu le temps de chauffer (c'est un isolant) ;

- au «long terme» pour $\delta \gg \epsilon$: le substrat a eu le temps de chauffer (puisque ce n'est pas un isolant parfait).

REFERENCES

[1] A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS - G. PAPANICOLAOU. *«Asymptotic methods in periodic structures».* North Holland 1978.

[2] A. BOSSAVIT. *«Application de quelques techniques de calcul opérationnel et de perturbations au problème de l'échauffement d'un câble en court-circuit».* E.D.F. Bulletin de la direction des études et recherches, série C. Mathématiques, informatique n^o 1, 1977.

[3] A. BOSSAVIT. Communication personnelle, 1980.

[4] D. CIORANESCU - J. SAINT JEAN PAULIN. *«Homogenization in open sets with holes».* J. Math. Anal. Appl. 71 (1979) 590-607.

[5] J.L. LIONS. *«Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal».* Lecture Notes in Mathematics n^o 323, Springer 1973.

[6] J.L. LIONS. Cours au Collège de France, 1977.

[7] J. SAINT JEAN PAULIN. *«Etude de quelques problèmes de mécanique et d'électrotechnique liés aux méthodes d'homogénéisation».* Thèse, Paris 1981.

[8] L. TARTAR. *«Problèmes d'homogénéisation dans les équations aux dérivées partielles».* Cours Peccot, Collège de France, 1977.

(Manuscrit reçu le 7 juillet 1981)