

FRANÇOIS DE THÉLIN

Régularité de la solution d'une équation fortement (ou faiblement) non linéaire dans \mathbf{R}^n

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 2, n° 3-4 (1980), p. 249-281

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1980_5_2_3-4_249_0

© Université Paul Sabatier, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REGULARITE DE LA SOLUTION D'UNE EQUATION FORTEMENT (OU FAIBLEMENT) NON LINEAIRE DANS \mathbb{R}^n

François de Thélin ⁽¹⁾

(1) U.E.R. Mathématiques Informatique Gestion, Université Paul Sabatier - 31062 Toulouse.

Résumé : On étudie la régularité de la solution u d'une équation aux dérivées partielles elliptique lorsque l'opérateur est défini par des fonctions à croissance non nécessairement polynomiale, par exemple de type exponentiel ou logarithmique. Si le second membre est assez régulier, on prouve que u appartient à des espaces de Sobolev-Orlicz de type Nikol'skii (définis à l'aide de quotients différentiels) ou de type Besov (définis par interpolation) que l'on introduit ici.

Summary : We study regularity properties of the solution u of an elliptic partial differential equation when the operator is defined by functions with non necessary polynomial growth, for example with exponential or logarithmic growth. If the left hand side is sufficiently regular we prove that u belongs to some Sobolev-Orlicz space of Nikol'skii type (defined by differential quotients) or of Besov type (defined by interpolation) that we introduce here.

I. - INTRODUCTION

On s'intéresse à la régularité de la solution u de l'équation :

$$\tilde{A}u = - \operatorname{div} \left\{ \tilde{F}(\nabla u) \right\} + F(u) = f \text{ dans } \mathbb{R}^n$$

ou de l'équation

$$Au = \sum_{i=1}^n D_i F(D_i u) + F(u) = f \text{ dans } \mathbb{R}^n$$

où $|\nabla u|$ désigne la norme euclidienne du gradient de u , $\tilde{F}(\nabla u) = \frac{F(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u$ et F est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Le travail qui suit s'applique en particulier aux exemples suivants pour les opérateurs \tilde{A} et A :

Exemple 1 : $F(\xi) = \xi e^{|\xi|}$.

Exemple 2 : $F(\xi) = \text{Log}(1 + |\xi|) \text{sgn}(\xi)$.

Exemple 3 : $1 < p < +\infty$, $F(\xi) = |\xi|^{p-2} \xi$.

Exemple 4 : $F(\xi) = \xi \text{Log}(1 + |\xi|)$.

Exemple 5 : $1 < p \leq 2 \leq q < +\infty$, $F(\xi) = |\xi|^{p-2} \xi + |\xi|^{q-2} \xi$.

Dans le cadre de l'exemple 3, SIMON [10] a obtenu les résultats suivants pour $f \in L^{p^*}$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$: pour $1 < p \leq 2$, $u \in W^{2,p}$ et pour $p > 2$, u appartient à l'espace de Besov :

$$B_{\infty}^{p^*,p} = [W^{1,p}, W^{2,p}]_{p^*-1, \infty}$$

Dans DZHABRAILOV [3] et YAKOVLEV [13], on voit que, dans le cas $p > 2$, si $f \in W^{1,p^*}$ on a

$$u \in B_{\infty}^{1+\frac{2}{p},p} \text{ et } \tilde{F}(\nabla u) \in (W^{1,p})^n$$

Pour étudier le cas où la croissance de F n'est plus polynomiale, nous sommes amenés, dans une partie II, à introduire de nouveaux espaces de Sobolev-Orlicz de deux sortes : les uns de type Nikolskii que nous noterons $W^m L_{M,\sigma}$, les autres de type Besov (définis par interpolation) que nous noterons $B^{m+\sigma} L_M$.

Dans une partie III, la méthode des translations de Nirenberg nous donne directement, dans un cadre assez général, un théorème 1 qui prouve que, si le second membre est assez régulier, la solution est dans un espace $W^1 L_{M,\sigma}$; on obtient également un théorème 1' qui donne des résultats sur $\tilde{F}(\nabla u)$.

Pour affiner le théorème 1, on utilise les notions de sur et sous-homogénéité d'une fonction de Young (introduites en II) ; ces notions permettent d'obtenir un théorème 2 qui nous donne la solution dans un espace $B^{1+\sigma} L_M$; bien qu'écris dans un cadre non polynomial, ce théorème ne fonctionne pas si mal et permet de retrouver les résultats de SIMON [10] .

Lorsque l'opérateur \tilde{A} se décompose de manière convenable sous la forme $\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$, un théorème 3 nous montre que \tilde{A} a la régularité de \tilde{A}_1 et de \tilde{A}_2 ; c'est ainsi que l'opérateur associé à l'exponentielle a la régularité de tous les opérateurs associés à $|\xi|^{p-2} \xi$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.

Les deux derniers théorèmes sont consacrés aux cas d'exception des théorèmes 1 et 1' : un théorème 4 de régularité explicite pour l'exemple 2, mais seulement à variables séparées ; un théorème 5 non explicite pour l'exemple 1, mais seulement en dimension 2.

Une partie de ces résultats a déjà été publiée [11] ; pour certaines démonstrations, nous renverrons à la version détaillée de [11] .

II. - ETUDE DES ESPACES $W^m L_{M,\sigma}$ et $B^{m+\sigma} L_M$

1. - Rappels

Nous dirons qu'une application $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est *une fonction de Young* si M est convexe, paire et telle que :

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{M(\xi)}{\xi} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{M(\xi)}{\xi} = +\infty .$$

L'ensemble C_M des applications u mesurables sur \mathbb{R}^n telles que $p(u) = \int_{\mathbb{R}^n} M[u(x)] dx < +\infty$

n'est pas en général un espace vectoriel ; on désigne par E_M le plus grand sous-espace vectoriel inclus dans C_M et par L_M l'espace vectoriel engendré par C_M [6] . C_M est un espace vectoriel si et seulement si la condition Δ_2 -globale suivante est vérifiée [6]

$$\exists k > 0 : \forall \xi \in \mathbb{R} \quad , \quad M(2\xi) \leq k M(\xi) .$$

E_M et L_M sont des espaces de Banach lorsqu'on les munit de la norme de Luxembourg [6] :

$$\|u\|_M = \inf \left\{ \lambda > 0 : p\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\} .$$

Soient M_1 et M_2 deux fonctions de Young. Nous dirons que M_1 domine M_2 et écrirons $M_2 < M_1$

s'il existe k tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad M_2(\xi) \leq M_1(k\xi).$$

Remarquons que $M_2 < M_1 \Rightarrow L_{M_1} \subset L_{M_2}$ [6].

Les espaces de *Sobolev-Orlicz* sont définis de la manière suivante :

$$W^m E_M(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : D^r u \in E_M, \forall r : |r| \leq m \right\};$$

$$W^m L_M(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : D^r u \in L_M, \forall r : |r| \leq m \right\};$$

où $D^r = \frac{\partial^r}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ avec $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = r$.

$W^m E_M$ et $W^m L_M$ sont des espaces de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{W^m L_M} = \sum_{|r| \leq m} \|D^r u\|_M \quad [1].$$

La polaire N d'une fonction de Young M est encore une fonction de Young et L_N est le dual de E_M [6].

Nous noterons enfin $W^{-1} E_N(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des éléments u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de la forme $u = g + \sum_{i=1}^n D_i g_i$ où g et $g_i \in E_N$; muni de la norme duale de celle de $W^1 E_M$, $W^{-1} E_N$ est un espace de Banach dont le dual est $W^1 L_M$ [5].

2. - Sur et sous-homogénéité d'une fonction de Young

L'introduction des notions suivantes va nous permettre de cerner au plus près le comportement d'une fonction de Young.

DEFINITIONS. Soit M une fonction de Young.

Nous dirons que M est sur-homogène de degré $\bar{\omega}$ s'il existe des constantes $\bar{\omega} \in [1, +\infty[$, $c > 0$ et $d > 0$ telles que :

$$(1) \quad \forall h \in [0,1], \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad M(h\xi) \leq c h^{\bar{\omega}} M(d\xi).$$

Nous dirons que M est sous-homogène de degré $\underline{\omega}$ s'il existe des constantes $\underline{\omega} \in [1, +\infty[$, $c' > 0$ et $d' > 0$ telles que :

$$(2) \quad \forall h \in [0,1], \forall \xi \in \mathbb{R}, M(h\xi) \geq c' h^{\underline{\omega}} M(d'\xi).$$

Remarques et exemples.

a) Toute fonction de Young est sur-homogène de degré 1 ; $M(\xi) = \frac{1}{p} |\xi|^p$ est sur-homogène et sous-homogène de degré p ; pour d'autres exemples, voir [11] .

b) Soit M sur-homogène de degré $\bar{\omega}$ et sous-homogène de degré $\underline{\omega}$; alors nécessairement $\underline{\omega} \geq \bar{\omega}$.

c) De manière générale, on ne sait pas s'il existe un plus grand degré de sur-homogénéité de M et un plus petit degré de sous-homogénéité de M ; mais ces degrés sont atteints dans les exemples courants ; cela justifie la notation $\bar{\omega}(M)$ [respectivement $\underline{\omega}(M)$] pour un nombre vérifiant la relation (1) [respectivement (2)] .

DEFINITION. Nous dirons qu'une fonction de Young est quasi-homogène si $\underline{\omega}(M) < +\infty$ et $\bar{\omega}(M) > 1$.

PROPOSITION 1 [11] . Une fonction de Young M est sur-homogène de degré $\omega > 1$ si et seulement si sa polaire N est sous-homogène de degré ω^* avec $\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^*} = 1$.

PROPOSITION 2 [11] . Une fonction de Young vérifie la condition Δ_2 -globale si et seulement si elle est sous-homogène de degré fini.

COROLLAIRE. Soit M une fonction de Young de polaire N ; les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) M est quasi-homogène ;
- (ii) N est quasi-homogène ;
- (iii) M et N vérifient la condition Δ_2 -globale ;
- (iv) M et N sont sous-homogènes de degré fini.

3. - Espaces $W^m L_{M,\sigma}$

Soit v mesurable et $h \in \mathbb{R}$; on note $\Delta_{i,h} v(x) = v(x+he_i) - v(x)$ et $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Pour

$\sigma > 0$ et u mesurable, on pose :

$$P_\sigma(u) = \sup_{\substack{0 < |h| \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \frac{1}{|h|^\sigma} \int_{\mathbb{R}^n} M[\Delta_{i,h} u(x)] dx.$$

DEFINITIONS.

$$L_{M,\sigma}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L_M(\mathbb{R}^n) : \exists k \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } p_\sigma\left(\frac{u}{k}\right) < +\infty \right\}$$

$$W^1 L_{M,\sigma}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : u \text{ et } D_j u \in L_{M,\sigma}(\mathbb{R}^n), j=1, \dots, n \right\}$$

$$\|u\|_{0,\sigma} = \|u\|_M + \inf \left\{ k > 0 : p_\sigma\left(\frac{u}{k}\right) \leq 1 \right\}$$

$$\|u\|_{1,\sigma} = \|u\|_{0,\sigma} + \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{0,\sigma}.$$

Exemple. Soient $1 < p < +\infty$ et $M(\xi) = \frac{1}{p} |\xi|^p$. Pour $0 < \sigma < p$, $L_{M,\sigma}$ est l'espace de Nikolskii $H_p^\sigma = B_\infty^{\sigma,p}$ de Besov. Pour $1 < p < +\infty$ et $\sigma = p$, $L_{M,p}$ est l'espace de Sobolev $W^{1,p}$. Pour $\sigma > p$, $L_{M,p} = \{0\}$.

PROPOSITION 3. $L_{M,\sigma}$ [resp. $W^1 L_{M,\sigma}$] est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{0,\sigma}$ [resp. $\|\cdot\|_{1,\sigma}$].

Démonstration. p_σ étant convexe, il est facile de voir que $\|\cdot\|_{0,\sigma}$ est une norme. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $L_{M,\sigma}$; (u_n) est donc de Cauchy dans L_M d'où l'on déduit l'existence d'une sous-suite (u_{n_p}) SCV pp vers $u \in L_M$. (u_n) étant bornée en norme $\|\cdot\|_{0,\sigma}$, il existe $\lambda > 0$ tel que : $\forall h : 0 < |h| \leq 1 ; \forall i = 1, \dots, n ; \forall n_p :$

$$\frac{1}{|h|^\sigma} \int_{\mathbb{R}^n} M \left[\frac{\Delta_{i,h} u_{n_p}(x)}{\lambda} \right] dx \leq 1.$$

Par application du lemme de Fatou, on en déduit que $u \in L_{M,\sigma}$; un autre passage à la limite prouverait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u - u_n\|_{0,\sigma} = 0$. Ainsi $L_{M,\sigma}$ est complet.

On montrerait de même que $W^1 L_{M,\sigma}$ est un espace de Banach en l'identifiant à un sous-espace de $\prod_{i=1}^{n+1} L_{M,\sigma}$. ■

Remarque [11]. $0 < \sigma < \sigma' \Rightarrow L_{M,\sigma'} \subset L_{M,\sigma}$.

PROPOSITION 4. Soit $u \in W^1 L_M$; alors $\forall i = 1, 2, \dots, n ; \forall h : 0 < |h| \leq 1$

$$\Delta_{i,h} u \in L_M \text{ et } \left\| \frac{\Delta_{i,h} u}{h} \right\|_M \leq \|u\|_{W^1 L_M}.$$

Démonstration. Soit $u \in W^1 L_M(\mathbb{R}^n)$; alors $u \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ et donc [8] pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $h \neq 0$, on a la relation :

$$\frac{\Delta_{i,h} u(x)}{h} = \int_0^1 D_i u(x + the_i) dt.$$

Avec la formule de Jensen et le théorème de Fubini, il vient pour $0 < |h| \leq 1$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} M \left[\frac{\Delta_{i,h} u(x)}{\lambda h} \right] dx &= \int_{\mathbb{R}^n} M \left[\int_0^1 \frac{D_i u(x + the_i)}{\lambda} dt \right] dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 M \left[\frac{D_i u(x + the_i)}{\lambda} \right] dt dx = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} M \left[\frac{D_i u(x + the_i)}{\lambda} \right] dx dt \leq 1 \end{aligned}$$

dès que $\lambda > \|D_i u\|_M$, d'où la relation cherchée. ■

COROLLAIRE. Soit $u \in L_N$; alors $\forall i = 1, \dots, n ; \forall h : 0 < |h| \leq 1$ on a :

$$\|\Delta_{i,h} u\|_{W^{-1} L_N} \leq |h| \|u\|_N.$$

Démonstration. Soit $M = N^* \Rightarrow N = M^*$; par définition :

$$\|\Delta_{i,h} u\|_{W^{-1} L_N} = \sup_{v \in W^1 E_M} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} [\Delta_{i,h} u(x)] v(x) dx}{\|v\|_{W^1 E_M}}$$

or $\int_{\mathbb{R}^n} [\Delta_{i,h} u(x)] v(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) [\Delta_{i,-h} v(x)] dx$ et il suffit d'appliquer la proposition 4 à v . ■

THEOREME 1. Soit M une fonction de Young sur-homogène de degré $\bar{\omega}$; on a alors les inclusions :

$$\begin{aligned} W^1 L_M &\hookrightarrow L_{M,\bar{\omega}} \hookrightarrow L_M \\ W^2 L_M &\hookrightarrow W^1 L_{M,\bar{\omega}} \hookrightarrow W^1 L_M \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons l'inclusion $W^1 L_M \hookrightarrow L_{M,\bar{\omega}}$. Soit $u \in W^1 L_M(\mathbb{R}^n)$; M étant sur-homogène de degré $\bar{\omega}$:

$$\frac{1}{|h|^{|\bar{\omega}|}} \int_{\mathbb{R}^n} M \left[\frac{\Delta_{i,h} u(x)}{\lambda} \right] dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} M \left[\frac{d\Delta_{i,h} u(x)}{\lambda h} \right] dx \leq c$$

$\forall h : 0 < |h| \leq 1$ dès que $\lambda > d \|u\|_{W^1 L_M} \geq d \left\| \frac{\Delta_{i,h} u}{h} \right\|_M$ (proposition 4) ; on en déduit facilement $u \in L_{M,\bar{\omega}}$ et

$$\|u\|_{L_{M,\bar{\omega}}} \leq \|u\|_M + \frac{d}{\max(1,c)} \|u\|_{W^1 L_M}$$

d'où l'inclusion cherchée.

On en déduirait facilement : $W^2 L_M \hookrightarrow W^1 L_{M,\bar{\omega}}$. Les inclusions de droite sont triviales. ■

PROPOSITION 5. Soit M une fonction de Young pour laquelle il existe des constantes $k > 0$ et $p > 1$ telles que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, k |\xi|^p \leq M(\xi).$$

Alors pour $0 < \sigma < p$, $L_{M,\sigma} \hookrightarrow H_p^{\sigma/p} = B_{\infty}^{\sigma/p,p}$ et pour $\sigma = p$, $L_{M,\sigma} \hookrightarrow W^{1,p}$.

Démonstration immédiate : voir [11].

Exemple : pour $M(\xi) = e^{|\xi|} - |\xi| - 1 \geq \frac{|\xi|^2}{2}$, on a $L_{M,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

COROLLAIRE. Soient $M(\xi) = e^{|\xi|} - |\xi| - 1$ et $n \leq 2$, alors $L_{M,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow E_M(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. On a $L_{M,2} \hookrightarrow W^{1,2}$ et d'après [1], pour $n \leq 2$ et $\Psi(\xi) = e^{\xi^2} - 1$, $W^{1,2} \hookrightarrow L_{\Psi}$; or Ψ domine essentiellement M [4], donc $L_{\Psi} \hookrightarrow E_M$. ■

Remarque. Nous verrons plus loin que cette inclusion est fautive pour $n = 3$.

4. - Espaces $B^{m+\sigma} L_M$

Soient M une fonction de Young et $\sigma \in]0,1[$.

DEFINITIONS.

$$B^\sigma L_M(\mathbb{R}^n) = [L_M(\mathbb{R}^n), W^1 L_M(\mathbb{R}^n)]_{\sigma, \infty}$$

$$B^{1+\sigma} L_M(\mathbb{R}^n) = [W^1 L_M(\mathbb{R}^n), W^2 L_M(\mathbb{R}^n)]_{\sigma, \infty}$$

c'est-à-dire que si l'on pose :

$$K(t,u) = \inf_{u=u_1+u_2} \left\{ \|u_1\|_M + t \|u_2\|_{W^1 L_M} \right\}.$$

$B^\sigma L_M$ est l'ensemble des $u \in L_M$ tels que $t^{-\sigma} K(t,u) \in L^\infty(]0, +\infty[)$; on sait [7] que $B^\sigma L_M$ est un espace de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{B^\sigma L_M} = \text{Ess. Sup.}_{t \in]0, +\infty[} t^{-\sigma} K(t,u).$$

Remarque. L'application $t \rightarrow K(t,u)$ étant croissante, il est facile de voir que

$$\|u\|_{B^\sigma L_M} = \text{Sup}_{t \in]0, +\infty[} t^{-\sigma} K(t,u).$$

THEOREME 2. $B^\sigma L_M(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des $u \in L_M(\mathbb{R}^n)$ tels que :

$$\text{Sup}_{\substack{0 < |h| \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \left\| \frac{\Delta_{i,h} u}{|h|^\sigma} \right\|_M \leq c < +\infty.$$

Démonstration. Soient $u \in L_M(\mathbb{R}^n)$, $N = M^*$ et $h \in \mathbb{R}^n$; posons :

$$\Delta_h u(x) = u(x+h) - u(x) \text{ et } \omega(t,u) = \text{Sup}_{0 < |h| \leq t} \|\Delta_h u\|_M.$$

a) On décompose u sous la forme $u = u_1 + u_2$ avec

$$u_1(x) = \left(\frac{\sqrt{n}}{t}\right)^n \int_{\substack{0 < y_i \leq \frac{t}{\sqrt{n}} \\ i=1, \dots, n}} [u(x) - u(x+y)] dy \text{ et } u_2(x) = \left(\frac{\sqrt{n}}{t}\right)^n \int_{\substack{0 < y_i \leq \frac{t}{\sqrt{n}} \\ i=1, \dots, n}} u(x+y) dy$$

Il est facile de voir que $u_1 \in L_M$ et $\|u_1\|_M \leq \omega(t,u)$; de même $\|u_2\|_M \leq \|u\|_M$; d'autre part, pour tout $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$|\langle D_j u_2, v \rangle| \leq \frac{\sqrt{n}}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |v(x)| \left| u\left(x + \frac{t}{\sqrt{n}} e_j\right) - u(x) \right| dx \leq \frac{\sqrt{n}}{t} \omega(t,u) \|v\|_N,$$

donc $D_j u_2$ appartient au dual L_M de E_N et $\|D_j u_2\|_{(M)} \leq \frac{\sqrt{n}}{t} \omega(t,u)$ pour la norme duale équivalente à la norme de Luxembourg [6]. On en déduit la relation :

$$(1) \quad K(t,u) \leq (1+n\sqrt{n})2[\min(1,t) \|u\|_M + \omega(t,u)]$$

b) Inversement pour toute décomposition de u sous la forme $u = u_1 + u_2$ où $u_1 \in L_M$ et $u_2 \in W^1 L_M$, on a avec la proposition 4

$$\omega(t,u_2) \leq t \|u_2\|_{W^1 L_M}$$

d'où

$$\omega(t,u) \leq 2 \left(\|u_1\|_M + t \|u_2\|_{W^1 L_M} \right),$$

de plus

$$\min(1,t) \|u\|_M \leq \|u_1\|_M + t \|u_2\|_M,$$

d'où la relation :

$$(2) \quad \min(1,t) \|u\|_M + \omega(t,u) \leq 3K(t,u)$$

c) Posons

$$\|u\|_{B^\sigma L_M} = \sup_{\substack{h \in \mathbb{R}^n \\ h \neq 0}} |h|^{-\sigma} \|\Delta_h u\|_M.$$

Des relations (1) et (2), on déduit :

$$(3) \quad \|u\|_{B^\sigma L_M} \leq 2(1+n\sqrt{n}) \left\{ \|u\|_M + \|u\|_{B^\sigma L_M} \right\} \leq 8(1+n\sqrt{n}) \|u\|_{B^\sigma L_M}$$

d'où le résultat. ■

Remarque. Si pour $u \in L_M(\mathbb{R}^n)$ on pose :

$$q_\sigma(u) = \sup_{\substack{0 < |h| \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \int_{\mathbb{R}^n} M \left[\frac{\Delta_{i,h} u(x)}{|h|^\sigma} \right] dx$$

$B^\sigma L_M(\mathbb{R}^n)$ est aussi l'ensemble des $u \in L_M(\mathbb{R}^n)$ pour lesquels il existe $k > 0$ tel que $q_\sigma\left(\frac{u}{k}\right) < +\infty$; on voit alors le lien avec les espaces $L_{M,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ (Proposition 7).

PROPOSITION 6. Soit $u \in L_M(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\sup_{0 < |h| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} M \left[\frac{\Delta_{i,h} u(x)}{h} \right] dx < +\infty;$$

alors $D_i u \in L_M(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. $D_i u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est définie, pour tout $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, par la relation :

$$\langle D_i u, v \rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta_{i,h} u(x)}{h} v(x) dx,$$

or par hypothèse, $\forall h : 0 < |h| \leq 1$, $\|\Delta_{i,h} u\|_M \leq \lambda |h|$ et donc

$$|\langle D_i u, v \rangle| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta_{i,h} u}{h} \right\|_M \|v\|_N \leq \lambda \|v\|_N \text{ avec } N = M^*.$$

D'où $D_i u$ appartient au dual L_M de E_N . ■

PROPOSITION 7. Soient M une fonction de Young et $\sigma \in]0, 1[$.

Si M est sur-homogène de degré $\bar{\omega} : B^\sigma L_M(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_{M, \bar{\omega}^\sigma}(\mathbb{R}^n)$.

Si M est sous-homogène de degré $\underline{\omega} : L_{M, \underline{\omega}^\sigma}(\mathbb{R}^n) \rightarrow B^\sigma L_M(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Si M est sur-homogène de degré $\bar{\omega}$, on a pour $0 < |h| \leq 1$ et $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{1}{|h| \bar{\omega}^\sigma} M \left[\frac{\Delta_{i,h} u(x)}{\lambda} \right] \leq c M \left[\frac{d\Delta_{i,h} u(x)}{\lambda |h|^\sigma} \right], \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

et si M est sous-homogène de degré $\underline{\omega}$:

$$\frac{1}{|h| \underline{\omega}^\sigma} M \left[\frac{\Delta_{i,h} u(x)}{\lambda} \right] \geq c' M \left[\frac{d'\Delta_{i,h} u(x)}{\lambda |h|^\sigma} \right], \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

D'où les inclusions par intégration sur \mathbb{R}^n et en prenant les bornes supérieures. ■

PROPOSITION 8. Soient M une fonction de Young et $\sigma \in]0, 1[$. S'il existe $k > 0$ et $p > 1$ tels que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, k |\xi|^p \leq M(\xi).$$

On a l'inclusion :

$$B^\sigma L_M(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{\infty}^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n).$$

Démonstration. Immédiate par interpolation. ■

Exemple. Si $M(\xi) = e^{|\xi|} - |\xi| - 1$, on montre par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}, p \geq 2, \forall \xi \in \mathbb{R}, M(\xi) \geq \frac{1}{p!} |\xi|^p$ et donc $B^\sigma L_M \hookrightarrow B_{\infty}^{\sigma,p}$.

Remarque. On aurait des résultats analogues à ceux du théorème 2 et des propositions 7 et 8 pour l'espace $B^{1+\sigma} L_M$.

III. - RESULTATS DE REGULARITE

Dans toute cette partie et sauf avis contraire, nous considérons l'équation :

$$\tilde{A}u = -\operatorname{div}\{\tilde{F}(\nabla u)\} + F(u) = f \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

1. - Rappel du théorème d'existence

Nous supposons que F est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) F est strictement croissante, impaire et continue ;
- (ii) $F(0) = 0$ et $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} F(\xi) = +\infty$.

Avec (i) et (ii), la fonction

$$\xi \rightarrow M(\xi) = \int_0^{|\xi|} F(t) dt$$

est une fonction de Young de polaire

$$N(\xi) = \int_0^{|\xi|} F^{-1}(t) dt \quad [6].$$

Nous dirons alors que (M, F, N) est canonique.

Il est facile de voir que sous les hypothèses (i) et (ii) et pour (M, F, N) canonique,

les hypothèses suivantes du théorème d'existence de GOSSEZ [5] sont vérifiées :

- (1) F continue ;
- (2) il existe des constantes $a > 0$ et $b > 0$ telles que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, N[F(\xi)] \leq a M(b\xi) ;$$

- (3) F croissante ;
- (4) pour tout $f \in W^{-1} E_N$, il existe une constante K et un voisinage ϑ de f dans le dual $W^{-1} L_N$ de $W^1 E_M$ tels que, pour tout $g \in \vartheta$ et toute solution $v \in W^1 L_M$ de l'équation $\tilde{A}v = g$, on ait :

$$\|v\|_{W^1 L_M} \leq K.$$

Donc pour $f \in W^{-1} E_N$, le théorème d'existence [5] assure que l'équation $\tilde{A}u = f$ admet une solution $u \in W^1 L_M$; en outre $\tilde{F}(\nabla u) \in (L_N)^n$.

Désormais dans les énoncés de tous les théorèmes de régularité, nous supposons que les hypothèses (i) et (ii) sont vérifiées et que (M, F, N) est canonique.

Remarque. Sauf avis contraire, tous les théorèmes de régularité seront rédigés pour l'équation $\tilde{A}u = f$; on aurait des résultats analogues pour l'équation :

$$Au = - \sum_{i=1}^n D_i F(D_i u) + F(u) = f \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

2. - Les relations (\tilde{R}_α) et (\tilde{S}_β)

Pour démontrer les théorèmes de régularité, nous allons employer, sous la forme variationnelle, la méthode des translations de Nirenberg ; mais pour cela nous avons besoin des relations suivantes, vérifiées pour $F(\xi) = |\xi|^{p-2} \xi$ [10] et triviales dans le cas du Laplacien (pour lequel

$$\alpha = \beta = 2, F(\xi) = \xi, M(\xi) = N(\xi) = \frac{|\xi|^2}{2}$$

DEFINITIONS. 1) Soit $\alpha \in [0,2]$; nous dirons que (M, F, N) vérifie la relation (R_α) s'il existe

des constantes $k > 0$ et $k' > 0$ telles que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall \xi' \in \mathbb{R}, M \left(\frac{\xi - \xi'}{k} \right) \leq \left\{ (\xi - \xi') [F(\xi) - F(\xi')] \right\}^{\frac{\alpha}{2}} \left\{ N[k'F(\xi)] + N[k'F(\xi')] \right\}^{\frac{2-\alpha}{2}}.$$

Nous dirons que (M, F, N) vérifie la relation (\tilde{R}_α) s'il existe des constantes $k > 0$ et $k' > 0$ telles que :

$$\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \xi' = (\xi'_1, \dots, \xi'_n) \in \mathbb{R}^n :$$

$$M \left[\frac{|\xi - \xi'|}{k} \right] \leq \left\{ \sum_{j=1}^n (\xi_j - \xi'_j) \left[F \left(|\xi| \right) \frac{\xi_j}{|\xi|} - F \left(|\xi'| \right) \frac{\xi'_j}{|\xi'|} \right] \right\}^{\frac{\alpha}{2}} \left\{ N[k'F(|\xi|)] + N[k'F(|\xi'|)] \right\}^{\frac{2-\alpha}{2}}.$$

2) Soit $\beta \in [0, 2]$; nous dirons que (N, F, M) vérifie la relation (S_β) s'il existe des constantes $k > 0$ et $k' > 0$ telles que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall \xi' \in \mathbb{R}, N \left[\frac{F(\xi) - F(\xi')}{k} \right] \leq \left\{ (\xi - \xi') [F(\xi) - F(\xi')] \right\}^{\frac{\beta}{2}} \left\{ M(k'\xi) + M(k'\xi') \right\}^{\frac{2-\beta}{2}}.$$

Nous dirons que (N, F, M) vérifie la relation (\tilde{S}_β) s'il existe des constantes $k > 0$ et $k' > 0$ telles que :

$$\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \xi' = (\xi'_1, \dots, \xi'_n) \in \mathbb{R}^n :$$

$$N \left[\frac{1}{k} \left| F \left(|\xi| \right) \frac{\xi}{|\xi|} - F \left(|\xi'| \right) \frac{\xi'}{|\xi'|} \right| \right] \leq \left\{ \sum_{j=1}^n (\xi_j - \xi'_j) \left[F \left(|\xi| \right) \frac{\xi_j}{|\xi|} - F \left(|\xi'| \right) \frac{\xi'_j}{|\xi'|} \right] \right\}^{\frac{\beta}{2}} \left\{ M(k'|\xi|) + M(k'|\xi'|) \right\}^{\frac{2-\beta}{2}}$$

Remarques. a) La relation (\tilde{R}_α) assure en particulier l'unicité de la solution $u \in W^1 L_M(\mathbb{R}^n)$ de l'équation $\tilde{A}u = f$ dans \mathbb{R}^n .

b) (M, F, N) vérifie (R_α) si et seulement si (M, F^{-1}, N) vérifie (S_α) .

c) Si (M, F, N) vérifie (\tilde{R}_α) ou (R_α) et si M est sous-homogène, on a $\underline{\omega}(M) \geq \alpha$.

d) Pour obtenir les théorèmes concernant l'opérateur A à partir des théorèmes concernant l'opérateur \tilde{A} , il suffit de remplacer :

(M, F, N) vérifie (\tilde{R}_α) par (M, F, N) vérifie (R_α) ;

(N, F, M) vérifie (\tilde{S}_β) par (N, F, M) vérifie (S_β) .

3. - Théorèmes généraux de régularité ; exemples

Nous dirons que l'opérateur \tilde{A} défini par :

$$\tilde{A}u = -\operatorname{div} \{ \tilde{F}(\nabla u) \} + F(u)$$

est quasi-homogène si $M(\xi) = \int_0^{|\xi|} F(t)dt$ est une fonction de Young quasi-homogène.

Sous des hypothèses assez générales, on obtient *les deux théorèmes suivants*, particulièrement adaptés aux opérateurs non quasi-homogènes.

THEOREME 1. *Sous les hypothèses :*

(1) N satisfait la condition Δ_2 -globale ;

(2) (M, F, N) vérifie (\tilde{R}_α) ;

et si $f \in L_N(\mathbb{R}^n)$ [respectivement $f \in W^1 L_N(\mathbb{R}^n)$], la solution u de l'équation $\tilde{A}u = f$ appartient à $W^1 L_{M, \frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^n)$ [respectivement $W^1 L_{M, \alpha}(\mathbb{R}^n)$];

THEOREME 1'. *Sous les hypothèses :*

(1) M satisfait la condition Δ_2 -globale ;

(2) (N, F, M) vérifie (\tilde{S}_β) ;

et si $f \in L_N(\mathbb{R}^n) \cap W^{-1} E_N(\mathbb{R}^n)$ [respectivement $f \in W^1 L_N(\mathbb{R}^n) \cap W^{-1} E_N(\mathbb{R}^n)$] la solution u de l'équation $\tilde{A}u = f$ est telle que $\tilde{F}(\nabla u)$ appartient à $\left[L_N, \frac{\beta}{2}(\mathbb{R}^n) \right]^n$ [respectivement $\left[L_{N, \beta}(\mathbb{R}^n) \right]^n$].

Remarque. On peut observer la symétrie entre les théorèmes 1 et 1' ; le théorème 1 est adapté aux opérateurs non quasi-homogènes correspondant au cas $\underline{\omega}(M) = +\infty$ et $\overline{\omega}(M) > 1$ (exemple $F(\xi) = \xi e^{|\xi|}$) mais pas à ceux correspondant au cas $\underline{\omega}(M) < +\infty$ et $\overline{\omega}(M) = 1$ (exemple $F(\xi) = \operatorname{Log}(1 + |\xi|) \operatorname{sgn}(\xi)$) ; c'est exactement le contraire pour le théorème 1'.

Moyennant des hypothèses plus restrictives, on a le résultat plus précis suivant, adapté aux opérateurs quasi-homogènes.

Notons $r = \frac{2\underline{\omega}(M)}{\alpha}$ et r^* tel que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r^*} = 1$.

THEOREME 2. *Sous les hypothèses :*

- (1) M quasi-homogène ;
- (2) (M, F, N) vérifie les relations (\tilde{R}_α) et (R_α) ;

et si $f \in L_N(\mathbb{R}^n)$, la solution u de l'équation $\tilde{A}u = f$ appartient à $B^{r^*} L_M(\mathbb{R}^n)$ lorsque $r > 2$ et à $W^2 L_M(\mathbb{R}^n)$ lorsque $r = 2$.

Remarque. Sous les hypothèses du théorème 2, on aurait également le résultat suivant de régularité intermédiaire ($\sigma \in]0,1[$). Si

$$f \in B^{\sigma-1} L_N = [W^{-1} L_N, L_N]_{\sigma, \infty} = \left\{ u \in W^{-1} L_N, \frac{1}{h^\sigma} \|\Delta_{j,h} u\|_{W^{-1} L_N} \in L^\infty(0,1) \right. \\ \left. \text{pour } j = 1, \dots, n \right\},$$

alors

$$u \in B^{1 + \frac{\sigma}{r-1}} L_M.$$

De même, avec les hypothèses du théorème 1, on aurait

$$f \in B^{\sigma-1} L_N \Rightarrow u \in W^1 L_M, \frac{\alpha\sigma}{2} \text{ et } f \in B^\sigma L_N \Rightarrow u \in W^1 L_M, \frac{\alpha(\sigma+1)}{2}.$$

Exemple 1.

$$\underline{F(\xi) = \xi e^{|\xi|}} \\ (M(\xi) = (|\xi| - 1) e^{|\xi| + 1})$$

Toutes les hypothèses du *théorème 1* sont réalisées pour $\alpha = 2$ [11] ; ainsi $f \in L_N \Rightarrow u \in W^1 L_{M,1}$; ce résultat est optimal au sens suivant :

$$\forall \sigma > 1, \exists u \in W^1 L_M, u \notin W^1 L_{M,\sigma} \text{ avec } \tilde{A}u \in L_N.$$

Pour un contre-exemple, voir [11].

Ici M n'est pas sous-homogène de degré fini ; les hypothèses du théorème 2 ne sont pas vérifiées et de fait sur cet exemple, la régularité de u n'est pas supérieure à celle donnée par le théorème 2 (en prenant $\underline{\omega}(M) = +\infty$). De manière précise

$$\forall \sigma \in]0,1[, \exists u \in W^1 L_M, u \notin B^{\sigma+1} L_M \text{ avec } \tilde{A}u \in L_N.$$

Prenons en effet $n = 1$, $\sigma \in]0,1[$, $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$ et $p \geq \frac{2}{\sigma}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \alpha < 1 + \frac{\sigma}{2}$, $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\eta(x) = 1$ sur $[-3, 3]$ et $u(x) = |x|^\alpha \eta(x)$.

On montre que $u \in W^1 L_M$, $\tilde{A}u \in L_N$ mais $D_i u$ n'appartient pas à l'espace $B_{\infty}^{\sigma,p}$; d'où la conclusion avec l'injection $B^{\sigma} L_M \hookrightarrow B_{\infty}^{\sigma,p}$ qui résulte de la relation $M(\xi) \geq \frac{1}{p!} |\xi|^p$ (proposition 8 du II).

Cet exemple prouve également que les espaces $B^{1+\sigma} L_M$ ne sont pas adaptés à la croissance exponentielle; dans ce cas, les espaces naturels sont les espaces $W^1 L_{M,\sigma}$.

Pour $f \in W^1 L_N$, le théorème 1 nous donne $u \in W^1 L_{M,2} \subset W^{2,2}$ d'après la proposition 5 du II; de plus si $n \leq 2$, on déduit de l'inclusion $W^{2,2} \subset W^1 L_{\psi}$ avec $\psi(\xi) = e^{\xi^2} - 1$ [1] que $u \in W^1 E_M$.

Ce dernier résultat est faux en dimension 3.

Prenons pour cela $\lambda \in]0,1[$, $\eta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ telle que

$$\eta(\rho) = 1 \text{ pour } \rho \leq \frac{R}{2}, \eta(\rho) = 0 \text{ pour } \rho \geq R \text{ et } \zeta(\rho) = \lambda \eta(\rho) \int_R^{\rho} \text{Log} \frac{R}{r} dr \text{ pour } 0 < \rho \leq R$$

$$\zeta(\rho) = 0 \text{ pour } \rho > R$$

et soit

$$u(x) = \zeta(\rho) \text{ où } \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

On montre que

$$u \in W^1 L_M(\mathbb{R}^n), u \notin W^1 E_M(\mathbb{R}^n), \tilde{A}u \in W^1 L_N(\mathbb{R}^n).$$

Remarquons enfin que les hypothèses du théorème 1' ne sont pas réalisées (voir 6)b).

Exemple 2.

$$F(\xi) = \text{Log}(1 + |\xi|) \text{sgn}(\xi)$$

$$\left(M(\xi) = (1 + |\xi|) \text{Log}(1 + |\xi|) - |\xi| \text{ et } N(\xi) = M^*(\xi) = e^{|\xi|} - |\xi| - 1. \right)$$

Les hypothèses du théorème 1' sont réalisées pour $\beta = 2$; ainsi pour $f \in W^1 L_N \cap W^{-1} E_N$, $\tilde{F}(\nabla u) \in (L_{N,2})^n \subset (W^{1,2})^n$ et donc [1], si $n = 2$, appartient à $(E_N)^2$.

Par contre, on ne peut pas appliquer le théorème 1 (voir 6)a).

Exemple 3.

$$\frac{F(\xi) = |\xi|^{p-2} \xi \text{ avec } 2 < p \leq +\infty}{\left(M(\xi) = \frac{1}{p} |\xi|^p \right)}$$

Le résultat le plus intéressant est obtenu avec le théorème 2 dont les hypothèses sont réalisées pour $\alpha = 2$ [10, 11] et $r = p$; donc si $f \in L_N = L^{p^*}$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$, le théorème 2 nous donne $u \in B^{r^*} L_M = B_\infty^{p^*, p}$.

On retrouve ainsi le résultat de SIMON [10] qui est d'ailleurs optimal.

On peut aussi appliquer le théorème 1 ; pour $f \in L^{p^*}$, il donne seulement $u \in W^1 L_{M,1} = B_\infty^{1+\frac{1}{p}, p}$ qui est un mauvais résultat ; cela tient au fait que le théorème 1 est adapté aux opérateurs non quasi-homogènes et il n'y a pas assez d'hypothèses pour obtenir un bon résultat pour les opérateurs quasi-homogènes. Mais pour $f \in W^{1,p^*}$, le théorème 1 nous donne $u \in W^1 L_{M,2} = B_\infty^{1+\frac{2}{p}, p}$ (pour $p > 2$, $1 + \frac{2}{p} > p^*$) ; on retrouve là un résultat de DZHABRAILOV [3] et SIMON [10].

Les hypothèses du théorème 1' sont également vérifiées avec $\beta = p^*$ et pour $f \in W^{1,p^*}$, il donne $|\nabla u|^{p-2} D_i u \in L_{N,p^*} = W^{1,p^*}$; on retrouve un résultat de YAKOVLEV [13].

Exemple 3'.

$$\frac{F(\xi) = |\xi|^{p-2} \xi \text{ avec } 1 < p \leq 2}{\left(M(\xi) = \frac{1}{p} |\xi|^p \right)}$$

Les hypothèses du théorème 2 sont réalisées pour $\alpha = p = \underline{\omega}(M)$ [10] et $r = 2$; donc si $f \in L_N = L^{p^*}$, il donne $u \in W^2 L_M = W^{2,p}$.

Là encore, on retrouve le résultat de SIMON [10] qui est optimal.

On pourrait aussi appliquer le théorème 1' avec $\beta = 2$; pour $f \in L^{p^*}$, on trouve $|\nabla u|^{p-2} D_i u \in L_{N,1} = B_\infty^{\frac{1}{p^*}, p^*}$ et pour $f \in W^{1,p^*}$, $|\nabla u|^{p-2} D_i u \in L_{N,2} = B_\infty^{\frac{2}{p^*}, p^*}$; ces résultats se trouvent dans SIMON [10].

Exemple 4.

$$F(\xi) = \xi \operatorname{Log}(1 + |\xi|)$$

$$\left(M(\xi) = \int_0^{|\xi|} t \operatorname{Log}(1+t) dt \right)$$

M étant quasi-homogène, le meilleur résultat sera obtenu avec le théorème 2 dont les hypothèses sont vérifiées pour $\underline{\omega}(M) = 3$, $\bar{\omega}(M) = 2$, $\alpha = 2$ [11] et $r = 3$; ainsi pour $f \in L_N$, on trouve $u \in B^{\frac{3}{2}} L_M$; bien que M ne soit pas homogène, on peut montrer que ce résultat est optimal au sens suivant :

$$\forall \epsilon > 0, \exists u \in W^1 L_M, u \notin B^{\frac{3}{2} + \epsilon} L_M \text{ avec } \tilde{A}u \in L_N.$$

On pourrait aussi appliquer le théorème 1 ; pour $f \in L_N$, il donne seulement $u \in W^1 L_{M,1} \hookrightarrow B^{\frac{4}{3}} L_M$ (par sous-homogénéité de M) ; pour $f \in W^1 L_N$, il donne $u \in W^1 L_{M,2} \hookrightarrow B^{\frac{5}{3}} L_M$.

Les hypothèses du théorème 1', sont également vérifiées pour $\beta = \frac{3}{2}$; pour $f \in L_N$, on trouve

$$\tilde{F}(\nabla u) \in \left(L_N, \frac{3}{4} \right)^n \hookrightarrow \left(B^{\frac{3}{8}} L_N \right)^n$$

(par sous-homogénéité de N) ; pour $f \in W^1 L_N$,

$$\tilde{F}(\nabla u) \in \left(L_N, \frac{3}{2} \right)^n \hookrightarrow \left(B^{\frac{3}{4}} L_N \right)^n.$$

4. - Démonstration des théorèmes 1, 1' et 2

Dans tout ce paragraphe, on pose $\phi(\xi) = \frac{F(\xi)}{\xi}$. Pour v mesurable dans \mathbb{R}^n on note :

$$\tau_{j,h} v(x) = v(x + h e_j) \text{ et } \Delta_{j,h} v = \tau_{j,h} v - v$$

a) LEMME 1. On suppose que les hypothèses du théorème d'existence sont vérifiées et que $f \in W^{-1} E_N(\mathbb{R}^n)$; alors si $u \in W^1 L_M(\mathbb{R}^n)$ est solution de l'équation $\tilde{A}u = f$, on a pour tout h : $0 < |h| \leq 1$ et tout $j = 1, \dots, n$:

$$(1) \quad I_1 + I_2 = I_3$$

avec

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n [\Delta_{j,h}(\phi(|\nabla u|) D_i u)] [\Delta_{j,h} D_i u] dx$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^n} [\Delta_{j,h} F(u)] [\Delta_{j,h} u] dx$$

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^n} [\Delta_{j,h} f] [\Delta_{j,h} u] dx.$$

Démonstration. Soit $u \in W^1 L_M$ solution de $\tilde{A}u = f$; pour $\zeta \in W^1 L_M$, on a :

$$(2) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \phi(|\nabla u|) D_i u D_i \zeta dx + \int_{\mathbb{R}^n} F(u) \zeta dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \zeta dx$$

et

$$(3) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \left\{ \tau_{j,h} [\phi(|\nabla u|) D_i u] \right\} D_i \zeta dx + \int_{\mathbb{R}^n} \tau_{j,h} F(u) \zeta dx = \int_{\mathbb{R}^n} [\tau_{j,h} f] \zeta dx$$

d'où (1) en prenant $\zeta = \Delta_{j,h} u$ et retranchant (2) de (3). ■

b) DEMONSTRATION DU THEOREME 1. Appliquant la relation (\tilde{R}_α) et la formule de Hölder, il vient pour $0 \leq |h| \leq 1$; $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} M \left[\frac{\Delta_{j,h} D_i u}{k} \right] dx \leq \left\{ I_1 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left(N[k' \tau_{j,h} F(|\nabla u|)] + N[k' F(|\nabla u|)] \right) dx \right\}^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

Sachant que $F(|\nabla u|) \in L_N$ et que N vérifie la condition Δ_2 -globale, il existe une constante c indépendante de h, i et j telle que :

$$(4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} M \left[\frac{\Delta_{j,h} D_i u}{k} \right] dx \leq c \left\{ I_1 \right\}^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Par croissance de F et d'après le lemme 1 on a :

$$(5) \quad 0 \leq I_1 \leq I_3 \quad \text{et} \quad 0 \leq I_2 \leq I_3.$$

Si $f \in L_N$, il vient d'après la proposition 4 du II :

$$(6) \quad |I_3| \leq \|\Delta_{j,h} f\|_N \|\Delta_{j,h} u\|_M \leq |h|^2 \|f\|_N \|u\|_{W^1 L_M}.$$

Si $f \in W^1 L_N$:

$$(7) \quad |I_3| \leq |h|^2 \|f\|_{W^1 L_N} \|u\|_{W^1 L_M}.$$

Sachant que $u \in W^1 L_M$, on déduit le théorème 1 des relations (4), (5), (6) et (7). ■

c) DEMONSTRATION DU THEOREME 1'. Appliquant la relation (\tilde{S}_β) et la formule de Hölder, il vient pour $0 < |h| \leq 1$; $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} N \left[\frac{\Delta_{j,h} \phi(|\nabla u|) D_i u}{k} \right] dx \leq \left\{ I_1 \right\}^{\frac{\beta}{2}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left(M \left[k' \tau_{j,h} |\nabla u| \right] + M \left[k' |\nabla u| \right] \right) dx \right\}^{\frac{2-\beta}{2}}.$$

Sachant que $u \in W^1 L_M$ et que M vérifie la condition Δ_2 -globale, il existe une constante $c > 0$ indépendante de h, i et j telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} N \left[\frac{\Delta_{j,h} \phi(|\nabla u|) D_i u}{k} \right] \leq c \left\{ I_1 \right\}^{\frac{\beta}{2}}.$$

La fin de la démonstration est analogue à la précédente. ■

d) DEMONSTRATION DU THEOREME 2. Reprenons la majoration de I_3 avec le corollaire de la proposition 4 du II :

$$(8) \quad |I_3| \leq \|\Delta_{j,h} f\|_{W^{-1} L_N} \|\Delta_{j,h} u\|_{W^1 L_M} \leq |h| \|f\|_N \|\Delta_{j,h} u\|_{W^1 L_M}.$$

Avec les relations (4), (5) et (8), il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} M \left[\frac{\Delta_{j,h} D_i u}{k} \right] dx \leq c' \left\{ |h| \|\Delta_{j,h} u\|_{W^1 L_M} \right\}^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Pour $0 < |h| \leq h_0 = \min \left\{ 1, \frac{1}{2c' \|u\|_{W^1 L_M}} \right\}$, il vient par sous-homogénéité de M :

$$\int_{\mathbb{R}^n} M \left[\frac{\Delta_{j,h} D_i u}{k'' \left\{ |h| \|\Delta_{j,h} u\|_{W^1 L_M} \right\}^{\frac{\alpha}{2\omega(M)}}} \right] dx \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^n} M \left[\frac{\Delta_{j,h} D_i u}{k} \right] dx}{c' \left\{ |h| \|\Delta_{j,h} u\|_{W^1 L_M} \right\}^{\frac{\alpha}{2}}} \leq 1.$$

Il existe alors une constante k'' indépendante de h , i et j telle que :

$$(9) \quad \|\Delta_{j,h} D_i u\|_M \leq k'' \left\{ |h| \|\Delta_{j,h} u\|_{W^1 L_M} \right\}^{\frac{\alpha}{2\omega(M)}}.$$

La relation (9) étant vraie pour tous les $D_i u$ et pour u (en utilisant (R_α)), il vient

$$\|\Delta_{j,h} u\|_{W^1 L_M} \leq (n+1)k'' \left\{ |h| \|\Delta_{j,h} u\|_{W^1 L_M} \right\}^{\frac{\alpha}{2\omega(M)}}$$

donc

$$\|\Delta_{j,h} u\|_{W^1 L_M} \leq c |h|^{\frac{\alpha}{2\omega(M)-\alpha}},$$

d'où le théorème 2. ■

5. - Opérateurs décomposables

Il peut être parfois intéressant de chercher des résultats de régularité dans des espaces distincts de ceux déterminés par le théorème d'existence ; c'est ce qui se produit lorsque l'opérateur \tilde{A} se décompose sous la forme $\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$ avec :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 u &= -\operatorname{div} \left\{ \tilde{F}_1(\nabla u) \right\} + F_1(u), \\ \tilde{A}_2 u &= -\operatorname{div} \left\{ \tilde{F}_2(\nabla u) \right\} + F_2(u), \end{aligned}$$

autrement dit $F = F_1 + F_2$.

Notons $r_1 = \frac{2\omega(M_1)}{\alpha_1}$ et r_1^* tel que $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1^*} = 1$.

THEOREME 3. Soient (M, F, N) et (M_1, F_1, N_1) canoniques. Sous les hypothèses :

- (1) M_1 quasi-homogène ;
- (2) (M_1, F_1, N_1) vérifie les relations (\tilde{R}_{α_1}) et (R_{α_1}) ;
- (3) F_2 croissante ;

et lorsque $f \in L_{N_1}(\mathbb{R}^n)$, la solution u de l'équation $\tilde{A}u = f$ appartient à $B^{r_1^*}_{L_{M_1}}(\mathbb{R}^n)$ pour $r_1 > 2$

et à $W^2 L_{M_1}(\mathbb{R}^n)$ pour $r_1 = 2$.

Exemple 1.

$$\underline{F(\xi) = \xi e^{|\xi|}}$$

Pour chaque p entier, $p \geq 2$, considérons

$$M_p(\xi) = \frac{1}{p} |\xi|^p, N_p = M_p^* \text{ et } F_p(\xi) = |\xi|^{p-2} \xi.$$

Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, les hypothèses du théorème 3 sont vérifiées pour $\underline{\omega}(M_p) = p$ et $\alpha_1 = 2$ [10, 11] ; soit p^* tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

On obtient alors le résultat suivant :

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \geq 2, f \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in B_{\infty}^{p^*, p}(\mathbb{R}^n)$$

(respectivement $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ pour $p = 2$).

L'opérateur \tilde{A} a donc la régularité de tous les opérateurs \tilde{A}_p

$$u \rightarrow -\operatorname{div} \{ |\nabla u|^{p-2} \nabla u \} + |u|^{p-2} u, p \in \mathbb{N}, p \geq 2;$$

et en outre il vérifie un résultat spécifique (théorème 1).

Remarquons que $B_{\infty}^{p^*, p} = W^1 L_{M_p, p^*}$; lorsque $p \rightarrow +\infty$, $p^* \rightarrow 1$; tout se passe comme si $M_p \rightarrow M$, $N_p \rightarrow N$, $f \in L^{p^*}$ revient à $f \in L_N$ et $u \in W^1 L_{M, 1}$; le résultat du théorème 1 apparaît comme résultat limite de celui du théorème 3.

Exemple 5.

$$\underline{F(\xi) = |\xi|^{p-2} \xi + |\xi|^{q-2} \xi \text{ avec } 1 < p \leq 2 \leq q}$$

En prenant $M_p(\xi) = \frac{1}{p} |\xi|^p$, on a $\alpha_1 = p$ [10] et le théorème 3 nous donne :

$$f \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n);$$

en prenant $M_q(\xi) = \frac{1}{q} |\xi|^q$, on a $\alpha_1 = 2$ [10, 11]

et pour $f \in L^{q^*}(\mathbb{R}^n)$, on trouve $u \in B_{\infty}^{q^*,q}(\mathbb{R}^n)$ ($W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ lorsque $q = 2$) ;

tout se passe comme si l'opérateur \tilde{A}_p (ou \tilde{A}_q) était seul.

Démonstration du Théorème 3. D'après l'hypothèse (3), N_1 domine N [6] , donc pour $f \in L_{N_1} = E_{N_1} \subset E_N$, on peut appliquer le théorème d'existence. D'autre part, d'après la relation (\tilde{R}_{α_1}) et la formule de Hölder il vient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} M_1 \left[\frac{\Delta_{j,h} D_i u}{k} \right] dx \leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \left\{ \Delta_{j,h} \left[\frac{F_1(|\nabla u|)}{|\nabla u|} D_i u \right] \right\} [\Delta_{j,h} D_i u] dx \right\}^{\frac{\alpha_1}{2}} .$$

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} N_1[k'F_1(|\nabla u|)] dx + \int_{\mathbb{R}^n} N_1[k'\tau_{j,h} F_1(|\nabla u|)] dx \right\}^{\frac{2-\alpha_1}{2}} .$$

Par croissance de F_2 , on a avec les notations de 4) :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \left\{ \Delta_{j,h} \left[\frac{F_1(|\nabla u|)}{|\nabla u|} D_i u \right] \right\} [\Delta_{j,h} D_i u] dx \leq I_1$$

et (M_1, F_1, N_1) étant canonique :

$$\int_{\mathbb{R}^n} N_1[k'F_1(|\nabla u|)] dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} M_1[k''|\nabla u|] dx .$$

Sachant que $u \in W^1 L_M \subset W^1 L_{M_1}$ et que M_1 vérifie Δ_2 globale, il existe alors une constante c indépendante de h telle que :

$$(10) \quad \int_{\mathbb{R}^n} M_1 \left[\frac{\Delta_{j,h} D_i u}{k} \right] dx \leq c \left\{ I_1 \right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

de plus :

$$(11) \quad \|I_3\| \leq \|\Delta_{j,h} f\|_{W^{-1} L_{N_1}} \|\Delta_{j,h} u\|_{W^1 L_{M_1}} \leq c' |h| \|\Delta_{j,h} u\|_{W^1 L_{M_1}}$$

(10) et (11) remplaçant respectivement les relations (4) et (8), la fin de la démonstration est analogue à celle du théorème 2. ■

6. - Résultats complémentaires

a) Résultats explicites de régularité concernant une équation à croissance logarithmique

Pour des raisons techniques, nous allons nous limiter à l'étude de l'équation :

$$Au = - \sum_{i=1}^n D_i F(D_i u) + F(u) = f \text{ dans } \mathbb{R}^n$$

dans le cadre de l'exemple 2 suivant :

$$F(\xi) = \text{Log}(1 + |\xi|) \text{sgn}(\xi)$$

$$M(\xi) = (1 + |\xi|) \text{Log}(1 + |\xi|) - |\xi|$$

$$N(\xi) = M^*(\xi) = e^{|\xi|} - |\xi| - 1 .$$

La principale difficulté vient du fait que les relations (R'_α) sont inopérantes (puisque N ne vérifie pas Δ_2) et que (M, F) ne vérifie aucune relation (R'_α) de la forme :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall \xi' \in \mathbb{R}, M\left(\frac{\xi - \xi'}{k}\right) \leq \left\{ (\xi - \xi') [F(\xi) - F(\xi')] \right\}^{\frac{\alpha}{2}} \left\{ M(k\xi) + M(k\xi') \right\}^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

(on aboutit à une absurdité pour $\xi = 2\xi' \rightarrow +\infty$). Néanmoins on a le résultat suivant :

LEMME 2. Soient $p \in]1, 2[$ et $q = \frac{p}{2-p}$; il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall \xi' \in \mathbb{R} : |\xi - \xi'|^p \leq k \left\{ (\xi - \xi') [F(\xi) - F(\xi')] \right\}^{\frac{p}{2}} \left\{ 1 + |\xi|^q + |\xi'|^q \right\}^{\frac{2-p}{p}}$$

Démonstration. Par application du théorème des accroissements finis, on a : $\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall \xi' \in \mathbb{R}$,

$$(12) \quad |\xi - \xi'| \leq |F(\xi) - F(\xi')| (1 + |\xi| + |\xi'|)$$

d'où le résultat en multipliant par $|\xi - \xi'|$ et en remarquant que :

$$\max \left\{ 1, |\xi|, |\xi'| \right\} \leq \left(1 + |\xi|^q + |\xi'|^q \right)^{\frac{2-p}{p}} . \quad \blacksquare$$

On obtient alors le théorème de régularité suivant :

THEOREME 4. Si

$$f \in L_N(\mathbb{R}^n) \cap W^{-1} E_N(\mathbb{R}^n)$$

$$[\text{respectivement } f \in W^1 L_N(\mathbb{R}^n) \cap W^{-1} E_N(\mathbb{R}^n)]$$

la solution u de l'équation $Au = f$ appartient à $B_\infty^{3/2,p}(\Omega)$ [respectivement $W^{2,p}(\Omega)$] pour tout ouvert borné Ω de \mathbb{R}^n et tout p :

$$1 < p < \frac{4n}{4n-1}$$

$$[\text{respectivement } 1 < p < \frac{2n}{2n-1}].$$

$(B_\infty^{3/2,p}(\Omega)$ désigne l'interpolé $[W^{1,p}(\Omega), W^{2,p}(\Omega)]_{1/2, \infty}$).

Remarque. On déduit immédiatement du lemme 3 qui va suivre l'inclusion :

$$L^p(\Omega) \subset L_M(\Omega)$$

il en résulte l'inclusion des Sobolev et Besov correspondants et en particulier :

$$B_\infty^{2,p}(\Omega) \subset B^2 L_M(\Omega)$$

$$W^{2,p}(\Omega) \subset W^2 L_M(\Omega)$$

LEMME 3.

$$\forall p \in]1,2], \forall \xi \in \mathbb{R}, M(\xi) \leq \frac{1}{p-1} |\xi|^p$$

Démonstration facile en remarquant que $M(\xi) \leq |\xi| \log(1 + |\xi|)$: ■

Notons B_r la boule ouverte de \mathbb{R}^n de centre 0 et de rayon r pour la norme $|x| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

LEMME 4. Si

$$f \in L_N(\mathbb{R}^n) \cap W^{-1} E_N(\mathbb{R}^n)$$

$$[\text{respectivement } f \in W^1 L_N(\mathbb{R}^n) \cap W^{-1} E_N(\mathbb{R}^n)]$$

la solution u de $Au = f$ est telle que pour chaque $i = 1, \dots, n$, pour chaque $r > 0$ et chaque

$$q : 1 < q < \frac{2n}{2n-1} \left[\text{respectivement } 1 < q < \frac{n}{n-1} \right] D_i u \in L^q(B_r).$$

Démonstration.

a) Supposons d'abord $f \in L_N(\mathbb{R}^n) \cap W^{-1} E_N(\mathbb{R}^n)$

Reprenant les notations de 4), on a :

$$(13) \quad 0 \leq I_1 \leq I_3 \leq c |h|$$

Fixons maintenant $i = 1, \dots, n ; j = 1, \dots, n$ et $h : 0 \leq |h| \leq 1$ et soit $x \in B_r$.

1er cas :

$$x \in E_1 = \{x \in B_r : 0 \leq D_i u(x) \leq D_i u(x + he_j)\}$$

ou bien

$$x \in A_1 = \left\{ x \in E_1 : \frac{1 + D_i u(x + he_j)}{1 + D_i u(x)} \geq 1 + |h|^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Alors

$$F[D_i u(x + he_j)] - F[D_i u(x)] = \text{Log} \left[\frac{1 + D_i u(x + he_j)}{1 + D_i u(x)} \right] \geq |h|^{\frac{1}{2}} \text{Log} 2$$

$$(14) \quad \Rightarrow \int_{A_1} \frac{|\Delta_{j,h} D_i u|}{|h|^{1/2}} dx \leq \frac{1}{\text{Log} 2} \int_{A_1} \frac{[\Delta_{j,h} F(D_i u)] [\Delta_{j,h} D_i u]}{|h|} dx$$

ou bien

$$x \in C_1 = \left\{ x \in E_1 : \frac{1 + D_i u(x + he_j)}{1 + D_i u(x)} < 1 + |h|^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$(15) \quad \Rightarrow \int_{C_1} \frac{|\Delta_{j,h} D_i u|}{|h|^{1/2}} dx \leq \mu(C_1) + \int_{C_1} |D_i u| dx.$$

2ème cas :

$$x \in E_2 = \{x \in B_r : D_i u(x) \leq 0 \leq D_i u(x + he_j)\}$$

ou bien

$$x \in A_2 = \left\{ x \in E_2 : [1 + D_i u(x + h e_j)] [1 - D_i u(x)] \geq 1 + |h|^{1/2} \right\}.$$

Alors

$$F[D_i u(x + h e_j)] - F[D_i u(x)] = \text{Log} \left\{ [1 + D_i u(x + h e_j)] [1 - D_i u(x)] \right\} \geq |h|^{1/2} \text{Log} 2$$

d'où par intégration une relation du type (14) ; ou bien $x \in C_2 = \bigcup_{E_2} A_2$, d'où une relation du type (15).

Les autres cas se ramènent aux deux précédents en échangeant les rôles de $D_i u(x)$ et $D_i u(x + h e_j)$ et sachant que F est impaire.

Posons $A = \bigcup_{i=1}^6 A_i$; il vient avec (14), puis par croissance de F :

$$(16) \quad \int_A \frac{|\Delta_{j,h} D_i u|}{|h|^{1/2}} dx \leq \frac{1}{\text{Log} 2} \int_A \frac{[\Delta_{j,h} F(D_i u)] [\Delta_{j,h} D_i u]}{|h|} dx \leq \frac{l_1}{|h| \text{Log} 2} \leq \frac{c}{\text{Log} 2}$$

où c est une constante indépendante de h .

Posons $C = \bigcup_{i=1}^6 C_i$; d'après (15), il vient :

$$(17) \quad \int_C \frac{|\Delta_{j,h} D_i u|}{|h|^{1/2}} dx \leq \mu(B_r) + \int_{B_r} |D_i u(x)| dx + \int_{B_r} |D_i u(x + h e_j)| dx \leq c'$$

où c' est une constante indépendante de h : $0 < |h| \leq 1$.

En effet $\mu(B_{r+1}) < +\infty$ et de $D_i u \in L_M(\mathbb{R}^n)$, on déduit $D_i u \in L^1(B_{r+1})$.

De (16) et (17), on déduit a fortiori

$$\sup_{\substack{0 < \delta < r \\ 0 < |h| \leq \min(1, \delta) \\ j=1, \dots, n}} \int_{(B_r)_\delta} \frac{|\Delta_{j,h} D_i u|}{|h|^{1/2}} dx \leq c < +\infty$$

où $(B_r)_\delta = \{ u \in B_r : d(x, \partial B_r) > \delta \} = B_{r-\delta}$, ce qui prouve que pour chaque $i = 1, \dots, n$, $D_i u$

appartient à l'espace de Nikolskii $H_1^{1/2}(B_r)$; on en déduit [9] $D_i u \in L^q(B_r)$ pour $1 < q < \frac{2n}{2n-1}$.

b) Supposons maintenant $f \in W^1 L_N(\mathbb{R}^n) \cap W^{-1} E_N(\mathbb{R}^n)$

En changeant $|h|^{1/2}$ en $|h|$ et sachant que

$$(13') \quad 0 \leq I_1 \leq I_3 \leq \|\Delta_{j,h} f\|_N \|\Delta_{j,h} u\|_M \leq c |h|^2$$

une démonstration analogue à a) prouve que, pour tout $\epsilon > 0$, $D_i u \in H_1^{1-\epsilon}(B_r)$ et donc [9] $D_i u \in L^q(B_r)$ pour $1 < q < \frac{n}{n-1}$. ■

Démonstration du théorème 4.

a) Supposons d'abord $f \in L_N(\mathbb{R}^n) \cap W^{-1} E_N(\mathbb{R}^n)$ et soient $r > 0$ et $p : 1 < p < \frac{4n}{4n-1}$ (on a $\frac{p}{2-p} < \frac{2n}{2n-1}$).

Prenons $q \in \left] \frac{p}{2-p}, \frac{2n}{2n-1} \right[$; avec le lemme 2 et la formule de Hölder, il vient pour chaque $i = 1, \dots, n$ et tout $h : 0 < |h| \leq 1$:

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |\Delta_{j,h} D_i u|^p dx &\leq k \left\{ \int_{B_r} [\Delta_{j,h} D_i u] [\Delta_{j,h} F(D_i u)] dx \right\}^{\frac{p}{2}} \\ &\quad \left\{ \int_{B_r} (1 + |D_i u|^q + |\tau_{j,h} D_i u|^q) dx \right\}^{\frac{2-p}{2}} \\ &\leq k \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n [\Delta_{j,h} D_i u] [\Delta_{j,h} F(D_i u)] dx \right\}^{\frac{p}{2}} \left\{ \mu(B_r) + 2 \int_{B_{r+1}} |D_i u|^q dx \right\}^{\frac{2-p}{2}}. \end{aligned}$$

Avec le lemme 4 et la relation (13), on en déduit :

$$(18) \quad \|\Delta_{j,h} D_i u\|_{L^p(B_r)} \leq k' \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} [\Delta_{j,h} f] [\Delta_{j,h} u] dx \right\}^{1/2} \leq c |h|^{1/2}$$

où c est une constante indépendante de h .

Or $D_i u \in L^p(B_r)$ (puisque $p < q$) , d'où avec (18) $D_i u \in B_{\infty}^{\frac{1}{2}, p}(B_r)$; sachant que $W^{1,1}(B_r) \hookrightarrow L^p(B_r)$, on a donc $u \in B_{\infty}^{\frac{3}{2}, p}(B_r)$.

b) Supposons $f \in W^1 L_N(\mathbb{R}^n) \cap W^{-1} E_N(\mathbb{R}^n)$ et soient $r > 0$ et $p : 1 < p < \frac{2n}{2n-1}$; prenons $q \in \left] \frac{p}{2-p}, \frac{n}{n-1} \right[$; une démonstration analogue à la précédente prouve qu'à l'aide des lemmes 2 et 4 et de la relation (13'), on a :

$$\forall h : 0 < |h| \leq 1, \|\Delta_{j,h} D_i u\|_{L^p(B_r)} \leq c |h|$$

où c est une constante indépendante de h ; on en déduit comme précédemment $u \in W^{2,p}(B_r)$.

Le théorème résulte alors immédiatement du fait que tout ouvert borné Ω de \mathbb{R}^n peut être inclus dans une boule B_r . ■

c) *Un résultat non explicite de régularité concernant une équation à croissance exponentielle dans \mathbb{R}^2*

Nous allons étudier seulement le cas de l'exemple 1 :

$$F(\xi) = \xi e^{|\xi|}, \quad M(\xi) = (|\xi| - 1)e^{|\xi|} + 1 \quad \text{et} \quad N = M^*$$

THEOREME 5. *Les fonctions F , M et N étant ainsi déterminées, si $n = 2$ et si $f \in W^1 L_N(\mathbb{R}^2)$, la solution u de l'équation $\tilde{A}u = f$ est telle que*

$$\tilde{F}(\nabla u) \in (W^1 L_N(\mathbb{R}^2))^2$$

$$\text{Posons } \phi(\xi) = \frac{F(\xi)}{\xi} = e^{|\xi|}.$$

Faute de relation (S _{β}), on a le résultat suivant :

LEMME 5. *Soit $p \in]1, 2[$, il existe $\alpha > 1$ et $k > 0$ tels que :*

$$\forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \xi' = (\xi'_1, \xi'_2) \in \mathbb{R}^2$$

on a pour $i = 1, 2$:

$$|\xi_i \phi(|\xi|) - \xi'_i \phi(|\xi'|)|^p \leq k \left\{ \sum_{i=1}^2 (\xi_i - \xi'_i) [\xi_i \phi(|\xi|) - \xi'_i \phi(|\xi'|)] \right\}^{\frac{p}{2}} \left\{ 1 + F(\alpha|\xi|) + F(\alpha|\xi'|) \right\}^{\frac{2-p}{2}}$$

$$\forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, |\xi| \leq 1 \text{ et } \forall \xi' = (\xi'_1, \xi'_2) \in \mathbb{R}^2, |\xi'| \leq 1,$$

on a pour $i = 1, 2$:

$$|\xi_i \phi(|\xi|) - \xi'_i \phi(|\xi'|)|^2 \leq k \sum_{j=1}^2 (\xi_j - \xi'_j) [\xi_j \phi(|\xi|) - \xi'_j \phi(|\xi'|)].$$

Démonstration. Par majoration de la dérivée de $F(\xi)$, on voit que $|\xi| \leq 1$ et $|\xi'| \leq 1$ (ξ et $\xi' \in \mathbb{R}$) impliquent

$$|F(\xi) - F(\xi')| \leq 2e |\xi - \xi'|$$

d'où

$$(19) \quad |F(\xi) - F(\xi')|^2 \leq k(\xi - \xi') [F(\xi) - F(\xi')].$$

D'autre part, $\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall \xi' \in \mathbb{R}$ on a

$$|F(\xi) - F(\xi')| \leq |\xi - \xi'| \left\{ 2e + 2F(|\xi|) + 2F(|\xi'|) \right\};$$

remarquant que pour $\alpha > \frac{p}{2-p}$, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, F(|\xi|) \leq k \left\{ F(|\alpha \xi|) \right\}^{\frac{2-p}{p}}$$

on en déduit en multipliant par $|F(\xi) - F(\xi')|$:

$$(20) \quad |F(\xi) - F(\xi')|^p \leq k \left\{ (\xi - \xi') [F(\xi) - F(\xi')] \right\}^{\frac{p}{2}} \left\{ 1 + F(|\alpha \xi|) + F(|\alpha \xi'|) \right\}^{\frac{2-p}{2}}.$$

Le lemme 4 se déduit alors de (19) et (20) en décomposant les vecteurs $\xi \in \mathbb{R}^2$ et $\xi' \in \mathbb{R}^2$ sur une base bien choisie de \mathbb{R}^2 . ■

Démonstration du théorème 5. Soit u solution de $\tilde{A}u = f$ et h fixé $0 < |h| \leq 1$. Notons

$$E_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2, \exists i : |D_i u(x)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$E_{j,h} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2, x + h e_j \in E_0 \right\}.$$

$D_i u$ appartenant à $L_M(\mathbb{R}^2)$, $\mu(E_{j,h}) = \mu(E_0) < +\infty$.

Considérons : $E = E_0 \cup \bigcup_{j=1}^2 E_{j,h}$ et

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} N \left(\frac{\Delta_{j,h} [\phi(|\nabla u|) D_i u]}{h} \right) dx = J_1 + J_2$$

avec

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus E} N \left[\frac{\Delta_{j,h} [\phi(|\nabla u|) D_i u]}{h} \right] dx \leq \int_{\mathbb{R}^2 \setminus E} \left[\frac{\Delta_{j,h} [\phi(|\nabla u|) D_i u]}{h} \right]^2 dx \\ &\leq k \int_{\mathbb{R}^2 \setminus E} \sum_{i=1}^n \frac{\{\Delta_{j,h} [\phi(|\nabla u|) D_i u]\} [\Delta_{j,h} D_i u]}{h^2} dx \\ &\leq k \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^2 \frac{\{\Delta_{j,h} [\phi(|\nabla u|) D_i u]\} [\Delta_{j,h} D_i u]}{h^2} dx \end{aligned}$$

on en déduit, comme dans la démonstration du théorème 1, que puisque $f \in W^1 L_N(\mathbb{R}^2)$, J_1 est majorée par une constante indépendante de h .

$$J_2 = \int_E N \left[\frac{\Delta_{j,h} [\phi(|\nabla u|) D_i u]}{h} \right] dx \leq \frac{1}{p-1} \int_E \left| \frac{\Delta_{j,h} [\phi(|\nabla u|) D_i u]}{h} \right|^p dx$$

où $p \in]1, 2[$ (lemme 3) ; avec le lemme 5 et la formule de Hölder il vient :

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \frac{1}{p-1} \left\{ \int_E \sum_{i=1}^2 \frac{[\Delta_{j,h} D_i u] (\Delta_{j,h} [\phi(|\nabla u|) D_i u])}{h^2} dx \right\}^{\frac{p}{2}} \\ &\quad \left\{ \int_E [1 + F(\alpha |\nabla u|) + F(\alpha \tau_{j,h} |\nabla u|)] dx \right\}^{\frac{2-p}{2}}. \end{aligned}$$

Or d'après un corollaire du théorème 1 dans ce cas particulier $u \in W^1 E_M(\mathbb{R}^2)$ d'où $\phi(\alpha |\nabla u|) = e^{\alpha |\nabla u|}$ et $|\nabla u|$ appartient à L^2 et de plus $\mu(E)$ est une constante finie indépendante de h .

On en déduit

$$J_2 \leq c \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sum_{i=1}^2 [\Delta_{j,h} D_i u] \Delta_{j,h} \phi(|\nabla u|) D_i u}{h^2} \right\}^{\frac{p}{2}}$$

où c est une constante indépendante de h , donc J_2 est majorée par une constante ; il en est alors de même de I . De la proposition 5 du II, on en déduit alors $\phi(|\nabla u|) D_i u \in W^1 L_N(\mathbb{R}^2)$. ■

REFERENCES

- [1] R.A. ADAMS. «*Sobolev Spaces*». Academic Press, 1975.
- [2] BUTZER-BERENS. «*Semi-groups of operators and approximation*». Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [3] A.D. DZHABRAILOV. «*An investigation of certain classes of second order quasi-linear elliptic equations. I, II, III*». *Differential Equations* 5 (1969), 1683-1693 ; 6 (1970), 684-693, 977-982.
- [4] A. FOUGERES. «*Approximation, traces et prolongements dans les espaces de Sobolev-Orlicz ; application à l'opérateur du calcul des variations à coefficients très fortement non linéaires*». Thèse, Besançon, 1972.
- [5] J.P. GOSSEZ. «*Non linear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients*». *Transactions of the A.M.S.*, 190 (1974), 163-205.
- [6] KRASNOSEL'SKII-RUTICKII. «*Convex functions and Orlicz Spaces*». Noordhoff, 1961.
- [7] LIONS-PEETRE. «*Sur une classe d'espaces d'interpolation*». *Inst. Hautes Etudes*, 19 Paris (1964), 5-58.
- [8] J. NEČAS. «*Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*». Masson, 1967.
- [9] S.M. NIKOL'SKII. «*Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*». Springer-Verlag, 1975.
- [10] J. SIMON. «*Sur une équations aux dérivées partielles non linéaires*». Thèse, Paris, 1977.
- [11] F. de THELIN. «*Régularité intérieures de la solution d'un problème de Dirichlet fortement non linéaires*». *C.R. Acad. Sc. Paris* 286 (1978) 443-445 et publication 7802 du L.A. 226, Université de Bordeaux I (1978).
- [12] G.N. YAKOVLEV. «*The boundary value problem for quasilinear elliptic equations of second order*». *Proc. Steklov Inst. Math.* 117 (1972) 381-403.
- [13] G.N. YAKOVLEV. «*Properties of solutions of a class of second order quasilinear elliptic equations in divergence form*». *Proc. Steklov Inst. Math.* 131 (1974) 242-252.

(Manuscrit reçu le 16 juillet 1979)