ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

THIERRY CAZENAVE

ALAIN HARAUX

Équations d’évolution avec non linéarité logarithmique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 2, nº 1 (1980), p. 21-51

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1980_5_2_1_21_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol II, 1980, P. 21 à 51

EQUATIONS D'EVOLUTION AVEC NON LINEARITE LOGARITHMIQUE

Thierry Cazenave [(1)] **et Alain Haraux** [(2)]

(1) et (2) Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Tour 55-65, 5e étage 4, place Jussieu - 75230 Paris Cédex 05.

Résumé : On étudie le problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger non linéaire

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + Vu + ku \operatorname{Log} |u|^2 = 0 \text{ dans } R^N \times R_+ \tag{1}$$

et l'équation de Klein-Gordon non linéaire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - ku \operatorname{Log} |u|^2 = 0 \text{ dans } R^3 \times R_+ . \tag{2}$$

On établit, sous des hypothèses convenables sur k, V et la donnée initiale l'existence et l'unicité d'une solution ainsi que la conservation des intégrales premières habituelles.

Summary : We study the Cauchy problem for the nonlinear schrödinger equation

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + Vu + ku \operatorname{Log} |u|^2 = 0 \text{ in } R^N \times R_+ \tag{1}$$

and for the nonlinear Klein-Gordon equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - ku \operatorname{Log} |u|^2 = 0 \text{ in } R^3 \times R_+ \tag{2}$$

We prove, under convienent hypotheses on k, V and the initial data, the existence and uniqueness of a solution. Furthermore, we establish the existence of the usual conservation laws associated to these equations.

I - INTRODUCTION

En 1975 dans [2] , puis dans [3] , Iwo Bialynicki-Birula et Jerzy Mycielski ont introduit une mécanique ondulatoire non linéaire d'un type particulier, motivée par le double but d'obtenir des ondes solitaires stables en un certain sens tout en préservant le maximum de bonnes propriétés des «équations d'ondes» linéaires. Ils étaient ainsi conduits à considérer l'équation de Schrödinger avec non linéarité logarithmique

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + Vu + ku \operatorname{Log} |u|^2 = 0 \tag{1}$$

et, dans le cas relativiste, l'équation des ondes avec non linéarité logarithmique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + mu - ku \operatorname{Log} |u|^2 = 0 \tag{2}$$

Du point de vue mathématique, la présence de ce terme non linéaire à dérivée infinie en 0 introduit une difficulté dans l'étude des équations (1) et (2) puisque la partie non linéaire n'est continue dans aucun espace fonctionnel raisonnable : on ne peut donc pas étudier le problème de Cauchy par les méthodes de [1] , [7] et [10] qui sont basées sur un théorème d'existence locale suivi d'estimations globales. Dans [8] , nous avons étudié le problème de Cauchy pour (1) par une méthode de *monotonie* : la régularisation de l'opérateur non linéaire intervient donc pour résoudre le problème *stationnaire* associé, et la théorie générale permet ensuite de résoudre le problème d'évolution par *régularisation de la donnée initiale.*

Dans le cas de l'équation (2), cette méthode n'est pas applicable, et on est donc obligé de régulariser directement la partie non linéaire au niveau du problème d'évolution. Il se trouve que ce procédé, non seulement fournit la solution de (2), mais permet également de justifier, par des passages à la limite assez techniques, la conservation des intégrales premières habituelles pour (2), et pour (1) lorsque V est réel et $k \geqslant 0$.

Dans ce dernier cas, nous donnons une démonstration détaillée de l'unicité dans $H^1(R^N)$ mentionnée dans [8] . Le théorème d'unicité pour (2) est plus délicat et sa démonstration en dimension 3 fait intervenir un lemme de trace assez fin.

Les auteurs remercient leurs collègues H. Bérestycki et P.L. Lions qui ont attiré leur attention sur l'équation (1), ainsi que L. Tartar et M. Schatzman pour des discussions aussi efficaces que stimulantes.

II - EQUATION DE SCHRODINGER

0. - NOTATIONS

Soit N un entier, $N \geqslant 3$. On note $L^p(R^N)$ et $H^m(R^N)$ les espaces $L^p(R^N,C)$ et et $H^m(R^N, C)$ munis de leurs normes habituelles, pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et m entier. On note $x^+ = \text{Sup}\ \{x, 0\}$ et $x^- = (-x)^+$.

Dans toute la suite, on notera $f(s) = \text{Log}\, s$ et $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(\sigma) d\sigma = s\, \text{Log}\, s - s$.

Pour n entier positif, on définit f_n et F_n par $f_n(s) = \text{Inf}\ \{n, \text{Sup}\ \{-n, f(s)\}\}$ et $F_n(s) = \displaystyle\int_0^s f_n(\sigma) d\sigma$.

V désigne un potentiel complexe élément de $L^1_{loc}(R^N)$ et k une constante réelle. Pour n entier positif, on définit V_n par :

$$V_n(x) = V(x) \quad \text{si} \quad |V(x)| \leqslant n.$$
$$V_n(x) = 0 \quad \text{si} \quad |V(x)| > n.$$

Pour $T \geqslant 0$ et u_0 donnés, on note (P) le problème

$$\begin{cases} i \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + Vu + k\, u\, \text{Log}\, |u|^2 = 0 \text{ dans }]0,T[\times R^N. \\ u(0) = u_0 \quad \text{dans } R^N. \end{cases}$$

I. - METHODE DE MONOTONIE

On suppose que $V \in L^{N/2}(R^N) + L^\infty(R^N)$ et que $[\text{Im}(V)]^- \in L^\infty(R^N)$. On note $H = L^2(R^N)$ et on définit un opérateur A de H dans H par :

$$D(A) = \left\{ u \in H^1_{loc}(R^N) \cap H,\ \Delta u + Vu + k\, u\, \text{Log}\, |u|^2 \in H \right\}.$$

et pour $u \in D(A)$, $Au = -i(\Delta u + Vu + k\, u\, \text{Log}\, |u|^2)$.

THEOREME 1.1. *Soit* $\lambda = 2|k| + \|(\text{Im}\, V)^-\|_{L^\infty}$. *Alors* $A + \lambda I$ *est maximal monotone dans* H.

Le théorème 1.1 s'applique à l'étude du problème (P) :

THEOREME 1.2. *Soit* $T > 0$.

a) Pour tout $u_0 \in D(A)$, (P) *a une solution unique* u *vérifiant*

$$u \in C^0(0,T;H),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0,T;H),\ u(t) \in D(A) \textit{ pour tout } t \in [0,T] \textit{ et } A\,u \in L^\infty(0,T;H).$$

Si de plus V *est réel, on a :*

$$\|u(t)\|_H = \|u_0\|_H \textit{ pour tout } t \in [0,T].$$

b) Si on suppose seulement $u_o \in H$, *alors* (P) *a une solution faible unique* u *au sens de H. Brezis* [4] *dans* $C^o(0,T;H)$.
Si V *est réel, on a :* $\|u(t)\|_H = \|u_o\|_H$ *pour tout* $t \in [0,T]$.
Dans le cas où $V \in L^2_{loc}(R^N)$, u *vérifie l'équation (1) au sens de* $\mathscr{D}'(]0,T[\times R^N)$.

1.1. Démonstration du Théorème 1.1. La monotonie de $A + \lambda I$ est liée à une propriété particulière de la non linéarité logarithmique.

LEMME 1.1.1. $\forall (z,z') \in C \times C, \quad |\,\mathrm{Im}\,\{(\bar z - \bar z')(z \,\mathrm{Log}\,|z| - z' \,\mathrm{Log}\,|z'|)\}\,| \leqslant |z - z'|^2.$

Démonstration. On a l'identité

$$\mathrm{Im}\,\{(\bar z - \bar z')(z\,\mathrm{Log}\,|z| - z'\,\mathrm{Log}\,|z'|)\} = [\mathrm{Im}(\bar z z')]\,(\mathrm{Log}\,|z| - \mathrm{Log}\,|z'|).$$

de la relation $\mathrm{Im}(\bar z z') = \dfrac{\bar z z' - z\bar z'}{2i}$, il résulte que

$$|\mathrm{Im}(\bar z z')| = \left|\frac{z'(\bar z - \bar z') + \bar z'(z' - z)}{2i}\right| \leqslant |z'|\,|z' - z|.$$

On peut supposer $0 < |z'| \leqslant |z|$. On a alors :

$$|\,\mathrm{Log}\,|z| - \mathrm{Log}\,|z'|\,| \leqslant \frac{1}{|z'|}\,|z - z'|.$$

Combinant les deux dernières inégalités, on obtient le résultat.
La démonstration du théorème 1.1. s'appuie d'autre part sur un résultat de régularité auxiliaire.

LEMME 1.1.2. *Soit* $\alpha > 0$ *et* B_n *la boule centrée en* 0, *de rayon* n *dans* R^N. *Pour tout* $u \in D(A)$ *on a :*

$$\|u\|_{H^1(B_n)} \leqslant C(\|u\|_H, \|Au\|_H) + C(\alpha, \|u\|_H)n^{\alpha}.$$

Démonstration. On écrit $V = V_1 + V_2 + i\,W$, où V_1, V_2 et W sont réels et $V_1 \in L^{N/2}(R^N)$, $V_2 \in L^{\infty}(R^N)$. Soit d'autre part $\rho \in \mathscr{D}(R)$ une fonction positive telle que $\rho(x) = 1$ si $|x| \leqslant 1$, $\rho(x) = 0$ si $|x| \geqslant 2$. Pour $x \in R^N$ et $n \in N^*$, on pose $\rho_n(x) = \rho\left(\dfrac{|x|}{n}\right)$. On a $\|\nabla \rho_n\|_{L^{\infty}(R^N)} \leqslant \dfrac{C}{n}$.

On peut écrire :

$$\mathrm{Im}\Big(\int_{R^N} Au\ \rho_n^2\ \bar{u}\ dx\Big) = \int_{R^N} \mathrm{Re}(\nabla u\ \nabla(\rho_n^2\ \bar{u}))\ dx - \int_{R^N} V_1\ |\rho_n u|^2 dx -$$

$$- \int_{R^N} V_2\ |\rho_n u|^2 dx - k \int_{R^N} |\rho_n u|^2\ \mathrm{Log}\ |u|^2 dx.$$

On vérifie que : $\mathrm{Re}(\nabla u\ \nabla(\rho_n^2\ \bar{u})) = |\nabla(\rho_n u)|^2 - |\nabla \rho_n|^2\ |u|^2.$

Par ailleurs, on a $\Big|\mathrm{Im} \int_{R^N} Au\ \rho_n^2\ \bar{u}\,dx\Big| \leq C\ \|Au\|_{H'}\ \|u\|_{H}$,

et $$\int_{R^N} |\nabla \rho_n|^2\ |u|^2 dx + \int_{R^N} |V_2|\ |\rho_n u|^2 dx \leq C\ \|u\|_H^2.$$

Utilisant les techniques de H. Brézis - T. Kato [5], on montre que, pour $\epsilon > 0$

$$\int_{R^N} |V_1|\ \ |\rho_n u|^2 dx \leq \epsilon \int_{R^N} |\nabla(\rho_n u)|^2 dx + C(\epsilon)\ \ \|u\|_H^2.$$

Enfin de l'inégalité $|\mathrm{Log}\ |u|^2| \leq \epsilon |u|^{4/N} + C(\eta,\epsilon)\ |u|^{-\eta}$ $(\eta > 0)$, il résulte que :

$$\int_{R^N} |\rho_n u|^2\ |\mathrm{Log}\ |u|^2|\,dx \leq \epsilon \int_{R^N} |\rho_n u|^2\ |u|^{4/N} dx + C(\eta,\epsilon) \int_{R^N} |\rho_n u|^2\ |u|^{-\eta} dx.$$

Appliquant Hölder, on trouve :

$$\int_{R^N} |\rho_n u|^2\ |u|^{4/N} dx \leq \Big(\int_{R^N} |\rho_n u|^{2N/N-2} dx\Big)^{N-2/N} \Big(\int |u|^2 dx\Big)^{2/N}$$

$$\leq C\Big(\int |\nabla(\rho_n u)|^2 dx\Big)\ \|u\|_H^{4/N}.$$

Par ailleurs :

$$\int_{R^N} |\rho_n u|^2\ |u|^{-\eta} dx \leq C \int_{R^N} \rho_n^2 |u|^{2-\eta} \leq C \Big(\int_{R^N} |u|^2 dx\Big)^{2-\eta/2} \Big(\int_{R^N} \rho_n^{4/\eta}\ dx\Big)^{\eta/2}$$

$$\leq C\ \ \|u\|_H^{2-\eta}\ \ n^{\eta N/2}.$$

Il résulte des inégalités précédentes que :

$$\int_{R^N} |\nabla(\rho_n u)|^2 dx \leqslant \epsilon (1 + C \| u \|^{4/N}) \int_{R^N} |\nabla(\rho_n u)|^2 \lambda x + C(\epsilon) \| u \|_H^2$$

$$+ C(\eta, \epsilon) n^{\eta N/2} \| u \|_H^{2-\eta} + C \| Au \|_H \| u \|_H .$$

Choisissant ϵ assez petit et $\eta = \dfrac{2\alpha}{N}$, on en déduit le lemme.

Remarque 1.1.3. Dans le cas où $k \geqslant 0$, en utilisant l'inégalité $\operatorname{Log} | u |^2 \leqslant C(\epsilon) + \epsilon | u |^{4/N}$, on montre par la même méthode que $D(A) \subset H^1(R^N)$.

Monotonie de $A + \lambda I$. Pour u et v dans D(A), on écrit :

$$\operatorname{Re}\left\{\int_{R^N} [(A+\lambda I)v - (A+\lambda I)u] (\bar{v} - \bar{u}) dx\right\} = \lim_{n \to +\infty} \alpha_n,$$

avec

$$\alpha_n = \operatorname{Re}\left\{\int_{R^N} [(A + \lambda I)v - (A + \lambda I)u] \rho_n^2 (\bar{v} - \bar{u}) dx\right\}$$

$$= \operatorname{Im} \int_{R^N} \Delta(v - u) \rho_n^2 (\bar{v} - \bar{u}) dx + \int_{R^N} (\operatorname{Im} V) | \rho_n (v - u) |^2 dx$$

$$- k \int_{R^N} \rho_n^2 \operatorname{Im}\left\{(\bar{v} - \bar{u})(v \operatorname{Log} | v |^2 - u \operatorname{Log} | u |^2)\right\} dx + \lambda \int_{R^N} | \rho_n (v - u) |^2 dx$$

Appliquant les lemmes 1.1.1. et 1.1.2. on a donc :

$$\alpha_n \geqslant \frac{C}{n^{1/2}} + (\lambda - \| (\operatorname{Im} V)^- \|_{L^\infty(R^N)} - 2 | k |) \| \rho_n (v - u) \|_H^2 .$$

La monotonie de $A + \lambda I$ en résulte.

Maximalité de $A + \lambda I$. Posant $\mu = \lambda + 1$, on doit résoudre $Au + \mu u = f$ pour $f \in H$. L'équation $- i \Delta u - i V_n u - i u f_n(| u |^2) + \mu u = f$ a une solution unique $u_n \in H^2(R^N)$. Pour obtenir des estimations a priori, on multiplie l'équation par $\bar{u}_n$ et on intègre.

En prenant la partie réelle, on obtient :

$$\mu \int_{R^N} | u_n |^2 dx \leqslant \int_{R^N} | f | | u_n | dx.$$

Il en résulte que $\| u_n \|_H \leqslant C$.

En prenant la partie imaginaire et en appliquant les techniques du lemme 1.1.2., on obtient :

$$\int_{B_p} |\nabla u_n|^2 \, dx \leqslant C(\epsilon) p^\epsilon , \quad \epsilon > 0, p \in N.$$

Il existe donc une sous-suite n_k et $u \in H \cap H^1_{loc}(R^N)$ vérifiant :

$$u_{n_k} \to u \text{ dans H faible et presque partout.}$$

On en déduit que u est solution de l'équation $Au + \mu u = f$ et que $u \in D(A)$.

1.2. Démonstration du théorème 1.2. L'existence et l'unicité de la solution faible de (P) ainsi que les résultats de régularité du a) résultent du Théorème 3.17 de [4] . Dans le cas a) et si V est réel, on multiplie l'équation par ρ_n^2 u et on prend la partie imaginaire. Après intégration et passage à la limite, on trouve $\| u(t) \|_H = \| u_o \|_H$. Cette formule s'étend au cas b) par densité. Enfin, on voit aisément que si $u_o \in D(A)$, la solution de (P) vérifie l'équation (1) au sens de $\mathscr{D}'(]0,T[\times R^N)$.

Remarque 1.2.1. On ne sait pas si u(t) est l'unique solution de (P) au sens de $\mathscr{D}'(]0,T[\times R^N)$ telle que $u \in C^o(0,T;H)$.

Remarque 1.2.2. Les théorèmes 1.1. et 1.2. restent vrais si N = 1 (resp. N = 2) en supposant $V \in L^1(R) + L^\infty(R)$ (resp. $V \in L^{1+\epsilon}(R^2) + L^\infty(R^2)$, $\epsilon > 0$).

1.3. Régularité. On donne un résultat de régularité des éléments de D(A) permettant de préciser la régularité de la solution de (P).

En plus des hypothèses précédentes on suppose que $N \geqslant 5$ ou bien :

$$N = 4 \text{ et } V \in L^{2+\epsilon}_{loc}(R^N), \ \epsilon > 0$$
$$N \leqslant 3 \text{ et } V \in L^2_{loc}(R^N).$$

THEOREME 1.3. *Sous les conditions précédentes, on a* $D(A) \subset H^2_{loc}(R^N)$.

Démonstration. On suppose $N \geqslant 5$, la démonstration est analogue pour $N \leqslant 4$. Soit $u \in D(A)$. On pose $f = Au + \mu u \in H$; $\mu = \lambda + 1$, λ étant défini au Théorème 1.1. On définit V_n^m par $V_n^m(x) = V(x)$ si $| V(x) | \in [m,n]$, $V_n^m(x) = 0$ sinon, pour $m \leqslant n$. On note u_n la solution de $-i \, \Delta u_n - i V_n u_n - ik u_n f_n(|u_n|^2) + \mu u_n = f$.

On sait (voir preuve du Théorème 1.1.) qu'il existe une sous suite, notée encore u_n vérifiant $u_n \to u$ dans H et $u_n \in H^2(R^N)$.

Soit $p \in N$. On a, en notant B_p la boule de R^N de centre 0 et de rayon p :

$$\| u_n \|_{H^2(B_p)} \leqslant C (\| u_n \|_{L^2(B_p)} + \| \Delta u_n \|_{L^2(B_p)})$$

Or

$$\| \Delta u_n \|_{L^2(B_p)} \leqslant \| f \|_H + \mu \| u_n \|_H + C \| u_n f_n (| u_n |^2) \|_{L^2(B_p)} + \| V_n u_n \|_{L^2(B_p)}.$$

On a comme au théorème 1.1. $\| u_n f_n(| u_n |^2) \|_{L^2(B_p)} \leqslant C(p)$.

Par ailleurs : $\| V_n u_n \|_{L^2(B_p)} \leqslant m \| u_n \|_H + \| V_n^m u_n \|_{L^2(B_p)}$

$$\leqslant m \| u_n \|_H + \| V_n^m \|_{L^{2N/N+4}(B_p)} \| u_n \|_{L^{2N/N-4}(B_p)}$$

$$\leqslant m \| u_n \|_H + C \| V_n^m \|_{L^{2N/N+4}(B_p)} \| u_n \|_{H^2(B_p)}$$

d'où $$(1 - C \| V_n^m \|_{L^{2N/N+4}(B_p)}) \| u_n \|_{H^2(B_p)} \leqslant C(p) + Cm$$

On en déduit le résultat en choisissant m assez grand pour que

$$C \sup_{n \geqslant m} \| V_n^m \|_{L^{2N/N+4}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

COROLLAIRE 1.4. *Soit* $u_o \in H^2(R^N) \cap L^{2-\epsilon}(R^N)$ $(\epsilon > 0)$. *On suppose que V satisfait les hypothèses du théorème 1.3.*
Alors $u_o \in D(A)$ *et la solution du problème* (P) *vérifie* $u(t) \in H^2_{loc}(R^N)$ *pour tout* $t \in [0,T]$.

2. - CAS V REEL, $k \geqslant 0$

Dans [3] , les auteurs considèrent seulement des potentiels réels, et physiquement $k > 0$: on peut donc s'attendre sous ces hypothèses à des propriétés supplémentaires. L'ensemble de ces propriétés fait l'objet du

THEOREME 2.1. *On suppose* $k \geqslant 0$, V *réel,* $V^+ \in (L^N + L^\infty)(R^N)$, $V^- \in (L^{N/2} + L^\infty)(R^N)$. *Pour tout* $T > 0$, *et tout* $u_o \in H^1(R^N)$, *tel que* $| u_o |^2 \operatorname{Log} | u_o |^2 \in L^1(R^N)$, *il existe une et une seule solution dans* $C((0,T;H^1(R^N))$ *du problème :*

$$
(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} i \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + Vu + k\, u \operatorname{Log} |u|^2 = 0 \ \textit{dans}\ \mathscr{D}'(]0,T[\ \times R^N) \\ \\ u(0,x) = u_o(x) \end{array} \right.
$$

De plus, on a $|u(t)|^2 \operatorname{Log} |u(t)|^2 \in L^1(R^N)$, $\forall\, t \in [0,T]$, *et* $u(t)$ *vérifie deux lois de conservation :*

$$\int_{R^N} |u(t,x)|^2\, dx = cte$$

$$\int_{R^N} |\nabla u|^2 - V|u|^2 - k|u|^2 \operatorname{Log} \frac{|u|^2}{e}\ )\, dx = cte$$

2.2. Unicité de la solution ($N \geqslant 3$)

LEMME 2.2.1. *Soient* u *et* v *dans* $L^\infty(0,T;H^1(R^N))$ *solutions dans* $\mathscr{D}'(]0,T[\ \times R^N)$ *de l'équation :*

$$(1) \qquad i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + Vu + k\, u \operatorname{Log} |u|^2 = 0$$

Alors : $\qquad \| v(t) - u(t) \|_H \leqslant e^{2kt} \| v(0) - u(0) \|_H$, $\forall\, t \in [0,T]$.

Remarque. On ne suppose pas ici $u \in C(0,T;H)$, donc il faut d'abord montrer que $u(0)$ et $v(0)$ ont un sens.

Cette version renforcée de l'unicité nous sera utile pour vérifier la conservation de $E(u)$ (voir plus loin).

LEMME 2.2.2. *Pour tout* $R > 0$ *fixé, l'opérateur* $u \to \Delta u + Vu + k\, u \operatorname{Log} |u|$ *est borné de* $H^1(R^N)$ *dans* $H^{-1}(B_R)$.

Démonstration. Pour tout $\epsilon > 0$, on peut écrire

$$|u \operatorname{Log} |u|| \leqslant C_1(\epsilon) |u|^{1-\epsilon} + C_2(\epsilon) |u|^{1+\epsilon}$$

d'où l'on déduit immédiatement que $u \operatorname{Log} |u|$ est borné de $H^1(R^N)$ dans $L^2(B_R)$. D'autre part, comme $H^1(R^N) \subset L^{2N/N-2}(R^N)$ on voit que

$$\| Vu \|_{L^{2N/N+2}(B_R)} \leqslant C \| V \|_{L^{N/2}(B_R)} \| u \|_{H^1(R^N)}$$

Or il est clair que $L^{2N/N+2}(B_R) \subset H^{-1}(B_R)$.

Grâce au lemme 2.2.2., on obtient immédiatement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0,T;H^{-1}(B_R)),$$

d'où l'on déduit $u(t) \in C(0,T;H^{-1}(B_R))$. Comme de plus $u \in L^\infty(0,T;H^1(R^N))$, on obtient immédiatement :

$$u \in C(0,T;H^1(R^N) \text{ faible})$$
$$u \in C(0,T;L^2(B_R)),\ \forall R > 0.$$

En résumé, 1) $u(0)$ et $v(0)$ ont un sens comme éléments de $H^1(R^N)$

2) On peut multiplier chaque terme du premier membre de (1) par une fonction quelconque de $L^1(0,T;H^1_o(B_R))$.

Démonstration du lemme 2.2.1. On «multiplie» les équations correspondant à u et v par $\rho_n^2(x)\ (\overline{u}-\overline{v})\ (t,x)$ au sens de la dualité entre $H^{-1}(B_{2n})$ et $H^1_o(B_{2n})$, puis on fait la différence, on intègre entre 0 et t et on prend la partie imaginaire. Posant $w = u - v$, on obtient immédiatement :

$$\operatorname{Im}\left(\int_o^t < i\,\frac{\partial w}{\partial t},\ \rho_n^2\, w > ds\right)$$

$$= \int_o^t \operatorname{Re}\left(< \rho_n\,\frac{\partial w}{\partial s},\ \rho_n\, w >\right) ds$$

$$= \frac{1}{2}\,|\rho_n\, w(t)|_H^2 - \frac{1}{2}\,|\rho_n\, w(0)|_H^2$$

Le terme correspondant au potentiel V est réel, et la partie imaginaire du terme non linéaire se majore, grâce au lemme 1.1.1., par :

$$2k \int_o^t |\ \rho_n\ w(s)\ |_H^2\, ds$$

On a enfin :

$$\int_o^t < \Delta\, w, \rho_n^2\ w > ds = \int_o^t \int_{R^N} \nabla w \,.\, \nabla\,(\rho_n^2\,\overline{w})\,dx\,ds$$

$$= \int_o^t \int_{R^N} \rho_n\ |\nabla w\,|^2\,dx\,ds + \int_o^t \int_{R^N} \nabla(\rho_n^2)\,.\,\overline{w}\ \nabla w\,dx\,ds$$

Comme on a : $\left| \int_0^t \int_{R^N} \nabla(\rho_n^2) \,.\, \overline{w}\, \nabla w \, dx\, ds \right| \leqslant \frac{C}{n} \, |w|_{L^\infty(0,T;H)} \, |\nabla w|_{L^1(0,T;H)}$

on obtient en définitive l'inégalité :

$$\frac{1}{2} \, |\rho_n w(t)|_H^2 - \frac{1}{2} \, |\rho_n w(0)|_H^2 \leqslant \frac{K}{n} + 2k \int_0^t |\rho_n w(s)|_H^2 \, ds$$

Posant $w_n(t) = |\rho_n w(t)|_H$, on a $w_n \in C(0,T;R)$ pour tout n, et un calcul élémentaire donne :

$$w_n^2(t) \leqslant e^{4kt} w_n^2(s) + (e^{4kt} - 1)\frac{2k}{n}$$

Faisant $n \to +\infty$, on en déduit :

$$|w(t)|_H^2 \leqslant e^{4kt} |w(s)|_H^2$$

ce qui achève la démonstration du lemme 2.2.1.

2.3. Obtention d'une solution $\mathcal{D}'$ par régularisation de l'équation

LEMME 2.3.1. *On suppose* $V \in L^\infty(R^N)$ *et que la fonction réelle* g *bornée, est telle que* $ug(|u|^2) = h(u)$ *soit lipschitzienne de* R^+ *dans* R. *Alors, pour tout* $u_o \in H^1(R^N)$, *il existe une et une seule solution* $u \in C(0,T;H^1(R^N))$ *du problème*

$$(P) \qquad i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + Vu + ug(|u|^2) = 0, \qquad u(0,x) = u_o(x)$$

De plus si on pose $G(w) = \int_0^w g(s)ds$ *pour* $w \geqslant 0$, *on a*

$$\| u(t) \|_H = \| u_o \|_H, \quad \forall\, t \in [0,T]$$

$$\int_{R^N} [\, |\nabla u(t)|^2 - V\, |u(t)|^2 - G(|u(t)|^2)]dx = \text{cte } \textit{sur } [0,T].$$

Démonstration. Lorsque V = 0, ce résultat est une conséquence de [10] . Indiquons seulement les grandes lignes de la démonstration : on peut écrire ($\overline{P}$) sous la forme d'une équation d'évolution dans $L^2(R^N)$

$$\frac{du}{dt} + A\,u(t) = 0, \qquad u(0) = u_o$$

où $A + \lambda I$ est maximal monotone pour $\lambda \geqslant \lambda_0$ et $D(A) = H^2(R^N)$. Donc pour $u_0 \in H^2(R^N)$ on a une solution H^2 qui vérifie les deux lois de conservation. Pour $u_0 \in H^1(R^N)$, on considère une suite $H^2(R^N) \ni u_0 \to u_0$ dans $H^1(R^N)$, et les solutions u_n associées : la suite des u_n est de Cauchy dans $C(0,T;H)$, par un argument de semi-continuité inférieure on voit qu'elle est bornée dans $L^\infty(0,T;H^1(R^N))$ que sa limite u est solution du problème $(\overline{P})$ et vérifie la *décroissance* de l'expression : $\int [\,|\nabla u|^2(t) - V\,|u(t)|^2 - G(|u(t)|^2)]dx$. L'*unicité* de la solution $L^\infty(0,T;H^1(R^N))$ est sans problème, passant à l'équation rétrograde on vérifie la 2ème loi de conservation et $u \in C(0,T;H^1(R^N))$.

Dans la suite, il sera commode d'utiliser les notations :

$$E(u) = \int_{R^N} [\,|\nabla u|^2 - V\,|u|^2 - kF(|u|^2)]dx$$

pour $u \in H^1(R^N)$ tel que $F(|u|^2) \in L^1(R^N)$, et

$$E_n(u) = \int_{R^N} [\,|\nabla u|^2 - V_n\,|u|^2 - kF_n(|u|^2)]dx$$

pour $u \in H^1(R^N)$.

LEMME 2.3.2. *Pour tout* $u_0 \in H^1(R^N)$, *il existe pour chaque* $n \in N$ *une solution unique* u_n *de*

$$(P_n) \qquad \begin{cases} i\,\dfrac{\partial u_n}{\partial t} + \Delta u_n + V_n u_n + k\,u_n f_n(|u_n|^2) = 0 \\ \\ u_n(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

telle que $u_n \in C(0,T;H^1(R^N))$.

De plus, si $F(|u_0|^2) \in L^1(R^N)$, *on a :*

$$E_n(u_n) = E_n(u_0)\ ,\quad \forall\, t \in [0,T]$$

$$\|u_n\|_{L^\infty(0,T;H^1(R^N))} \leqslant C$$

La première partie du lemme 2.3.2 est une conséquence immédiate du lemme 2.3.1. Grâce à la conservation de E_n, on peut écrire de plus :

$$\int_{R^N} [\,|\nabla u_n|^2(t) - V_n^+\,|u_n|^2(t)]\,dx \leqslant k \int_{R^N} F_n^+(|u_n|^2(t))dx + E_n(u_0)$$

Par les techniques de Brézis-Kato [5] , on voit aisément que :

$$\sup_{n\geqslant 0}\int_{R^N} V_n^+ |u|^2 dx \leqslant \frac{1}{4}\int_{R^N} |\nabla u|^2 dx + M\int_{R^N} |u|^2 dx,\ \forall u \in H^1(R^N)$$

Pour démontrer que $u_n(t)$ reste borné uniformément dans $L^\infty(0,T;H^1(R^N))$, il suffit donc de vérifier :

a) $$k\int_{R^N} F_n^+(|u|^2)dx \leqslant \frac{1}{4}\int_{R^N} |\nabla u|^2 dx + C(|u|_H^2)$$

où C est une fonction bornée sur les bornés indépendants de n.

b) Pour tout u dans $H^1(R^N)$ tel que $F(|u|^2) \in L^1(R^N)$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R^N} F_n(|u|^2)dx = \int_{R^N} F(|u|^2)dx$$

En effet de a) et de b) on déduit immédiatement :

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{R^N} |\nabla u_n|^2 (t)\, dx \leqslant 2E(u_o) + C_1(|u_o|_H^2), \quad \forall t \in [0,T].$$

Un calcul élémentaire donne :

(3) $$F_n(w) = \begin{cases} nw + e^{-n} - e^n & \text{pour } w \geqslant e^n \\ w \,\mathrm{Log}\, w - w + e^{-n} & \text{pour } e^{-n} \leqslant w \leqslant e^n \\ -nw & \text{pour } w \leqslant e^{-n} \end{cases}$$

En particulier, on a $F_n^+(w) \leqslant F^+(w) + w$.

Pour montrer a), il suffit donc de prouver le

LEMME 2.3.3. *Pour tout* $k \geqslant 0$, *on a l'inégalité suivante :*

$$k\int_{R^N} F^+(|u|^2)\, dx \leqslant \int_{R^N} |\nabla u|^2 dx + C\|u\|_{L^2}^2 \,\mathrm{Log}(C + \|u\|_{L^2}^2)$$

Démonstration. On utilise l'inégalité $\mathrm{Log}^+(s) \leqslant \epsilon s^{2/N} + C(\epsilon)$. Il en résulte que :

$$\int_{R^N} |u|^2 \mathrm{Log}^+(|u|^2)dx \leqslant \epsilon \int_{R^N} |u|^2 |u|^{4/N} dx + C(\epsilon) \|u\|^2_{L^2}$$

$$\leqslant \epsilon \left(\int_{R^N} |u|^2 dx\right)^{2/N} \left(\int_{R^N} |u|^{2N/N-2} dx\right)^{N-2/N} + C(\epsilon)\|u\|^2_{L^2}$$

$$\leqslant \epsilon C \|u\|^{4/N}_{L^2} \left(\int_{R^N} |\nabla u|^2 dx\right) + C(\epsilon) \|u\|^2_{L^2}$$

On choisit ϵ tel que $k\epsilon C \leqslant 1$. On a alors pour tout $v \in H^1(R^N)$ tel que $\|v\|_{L^2} \leqslant 1$ l'inégalité :

$$k \int_{R^N} |v|^2 \mathrm{Log}^+(|v|^2)dx \leqslant \int_{R^N} |\nabla v|^2 dx + C \int_{R^N} |v|^2 dx$$

Soit $u \in H^1(R^N)$, $\|u\|_{L^2} \geqslant 1$. On pose $v = \dfrac{u}{\|u\|_{L^2}}$. Il vient :

$$k \int_{R^N} |v|^2 \mathrm{Log}^+(|v|^2)du \leqslant \frac{1}{\|u\|_{L^2}} \int_{R^N} |\nabla u|^2 dx + C.$$

Or $$\int_{R^N} |v|^2 \mathrm{Log}^+(|v|^2)dx = \int_{|v| \geqslant 1} |v|^2 \mathrm{Log}\,|v|^2 dx$$

$$= \frac{1}{\|u\|^2_{L^2}} \int_{|u| \geqslant \|u\|_{L^2}} |u|^2 \mathrm{Log}\,|u|^2 dx - \frac{1}{\|u\|^2_{L^2}} \int_{|u| \geqslant \|u\|_{L^2}} |u|^2 \mathrm{Log}\,\|u\|^2 dx$$

Par ailleurs :

$$\int_{1 \leqslant |u| \leqslant \|u\|_{L^2}} |u|^2 \mathrm{Log}\,|u|^2 dx \leqslant \mathrm{Log}\,\|u\|^2_{L^2} \int_{R^N} |u|^2 dx$$

On a donc finalement :

$$k \int_{R^N} |u|^2 \mathrm{Log}^+(|u|^2)dx = k \int_{1 \leqslant |u| \leqslant \|u\|_{L^2}} |u|^2 \mathrm{Log}\,|u|^2 dx + k \int_{|u| > \|u\|_{L^2}} |u|^2 \mathrm{Log}\,|u|^2 dx$$

$$\leqslant 2k \|u\|^2_{L^2} \mathrm{Log}\,\|u\|^2_{L^2} + C\|u\|^2_{L^2} + \int_{R^N} |\nabla u|^2 dx.$$

Tenant compte de l'inégalité $F^+(s) \leqslant s\,\mathrm{Log}^+(s)$, on en déduit le lemme.

LEMME 2.3.4. *Pour tout* $u \in L^2(R^N)$ *avec* $F(|u|^2) \in L^1(R^N)$, *on a :*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{R^N} F_n(|u|^2)dx = \int_{R^N} F(|u|^2)dx$$

Démonstration. Utilisant la formule (3) on voit que

$$|F_n(w)| \leqslant w + |F(w)| \qquad \text{pour } w \geqslant 0.$$

On applique alors le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $F_n(|u|^2)$.

LEMME 2.3.5. *Si* $u_{n_k} \to \tilde{u}$ *dans* $L^\infty(0,T;H^1(R^N))$ *faible *,* $\tilde{u}$ *est solution de (1) au sens de* $\mathscr{D}'$ *et on a* $\tilde{u} \in C(0,T;H^1(R^N)$ *faible) et* $\tilde{u}(0) = u_o$.

Démonstration. Pour toute boule ouverte B_R, on a u_{n_k} borné dans $L^\infty(0,T;H^1(B_R))$ et $\dfrac{\partial u_{n_k}}{\partial t}$ borné dans $L^\infty(0,T;H^{-1}(B_R))$. D'après le lemme de compacité d'Aubin (cf. [11] p. 58), u_{n_k} converge fortement dans $L^{2+\epsilon}(]0,T[\times B_R)$ pour tout ϵ tel que $0 < \epsilon < 2^* - 2 = \dfrac{4}{N-2}$, et presque partout sur $]0,T[\times B_R$.

On voit aisément que :

$$i \frac{\partial u_{n_k}}{\partial t} + \Delta u_{n_k} + V_{n_k} u_{n_k} \to i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \Delta \tilde{u} + V\tilde{u}$$

dans $\mathscr{D}'(]0,T[\times B_R)$.

D'autre part, on vérifie que $u_{n_k} f_{n_k}(|u_{n_k}|^2) \to \tilde{u} f(|u|^2)$ presque partout sur $]0,T[\times B_R$, avec

$$\| u_{n_k} f_{n_k}(|u_{n_k}|^2) \|_{L^2(]0,T[\times B_R)} \leqslant C$$

D'après [11], p. 12, on en déduit que :

$$u_{n_k} f_{n_k}(|u_{n_k}|^2) \to \tilde{u} f(|\tilde{u}|^2) \qquad \text{dans } L^2(]0,T[\times B_R)$$

Le reste est immédiat. D'après le lemme 2.2.1., $\tilde{u}$ ne dépend pas de (n_k), et dans la suite nous noterons u au lieu de $\tilde{u}$.

2.4. Propriétés de conservation et de continuité forte

Il n'est pas clair a priori que $\| u(t) \|_H = \| u_o \|_H$. Cela va résulter de la comparaison avec les solutions obtenues par la méthode de monotonie, et on obtiendra en même temps la conservation de E.

LEMME 2.4.1. u *coïncide avec la solution donnée par la théorème 1.2, et de plus on a*

$$\forall\, t \in [0,T]\,, \quad u_n(t) \to u(t) \qquad \textit{dans } H \ \textit{fort.}$$

Démonstration. On ne peut pas utiliser directement le résultat d'unicité parce qu'on ne sait pas a priori si la solution obtenue par monotonie est dans $L^\infty(0,T;H^1(R^N))$. Soit donc u_o^m une suite d'éléments de D(A) avec $u_o^m \to u_o$ dans H.

D'après le lemme 2.2.1., il vient :

$$\forall\, t \in [0,T]\,,\ \| u^m(t) - u(t) \|_H \leqslant e^{2kt} \| u_o^m - u_o \|_H,$$

et pour $m \to +\infty$, on obtient donc le résultat. D'après le lemme 2.3.5., on sait que $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ dans H pour tout t fixé et $n \to \infty$. Comme de plus, $\| u_n(t) \|_H \equiv \| u_o \|_H \equiv \| u(t) \|_H$, la convergence est *forte* dans H.

LEMME 2.4.2. *Si* $V^+ \in (L^N + L^\infty)(R^N)$, *on a*

$$\forall\, t \in [0,T]\,, E(u(t)) \leqslant E(u_o) \ \ (\textit{et}\ \ F(|u(t)|^2) \in L^1(R^N)).$$

Démonstration. On peut écrire pour tout $n \geqslant 0$:

$$\int_{R^N} [\,|\nabla u_n|^2 + V_n^- |u_n|^2 + k\, F_n^-(|u_n|^2)]\, dx$$

$$\leqslant \int_{R^N} [V_n^+ |u_n|^2 + k\, F_n^+(|u_n|^2]\, dx + E_n(u_o)$$

Par semi-continuité inférieure, et en utilisant le lemme 2.3.4., on en déduit :

$$\int_{R^N} [\,|\nabla u|^2 + V^- |u|^2 + k\, F^-(|u|^2)]\, dx$$

$$\leqslant E(u_o) + \liminf_{n \to \infty} [\int_{R^N} V_n^+ |u_n|^2\, dx + k \int_{R^N} F_n^+(|u_n|^2) dx]\,,$$

car $F_n^-(|u_n|^2)$ tend presque partout vers $F^-(|u|^2)$ pour $n \to +\infty$.
Comme on vérifie que sous l'hypothèse $V^+ \in (L^N + L^\infty)(R^N)$, l'application $w \to \int_{R^N} V^+ |w|^2\, dx$ est continue de $H^1(R^N)$ faible $\cap$ H fort dans R, il reste à examiner le terme non linéaire. A ce niveau, on a besoin d'une propriété d'équicontinuité des fonctions F_n^+, elle-même liée à la connaissance précise du module de continuité de la fonction u f($|u|^2$), que nous énonçons pour $u \in C$ sous la forme suivante :

LEMME 2.4.3. *Pour* w_1, w_2 *tels que* $|w_1| \leqslant |w_2|$, *on a*

$$|w_1 \operatorname{Log} |w_1| - w_2 \operatorname{Log} |w_2|| \leqslant (1 + |\operatorname{Log} |w_2||)\, |w_1 - w_2|$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |w_1 \operatorname{Log} |w_1| - w_2 \operatorname{Log} |w_2|| &\leqslant |\operatorname{Log} |w_2||\, |w_1 - w_2| + |w_1|\, |\operatorname{Log} |w_1| - \operatorname{Log} |w_2|| \\ &\leqslant |\operatorname{Log} |w_2||\, |w_1 - w_2| + |w_1|\, \frac{|w_2 - w_1|}{|w_1|}, \end{aligned}$$

grâce à la concavité du Log et à l'inégalité $|w_2| - |w_1| \leqslant |w_2 - w_1|$.
On peut écrire alors :

$$F_n^+(w) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad 0 \leqslant w \leqslant \alpha_n \\ w \operatorname{Log} |w| + a_n & \text{pour} \quad \alpha_n \leqslant w \leqslant e^n \\ n \operatorname{Log} w + b_n & \text{pour} \quad w \geqslant e^n \end{cases}$$

avec $\alpha_n \geqslant 1$ pour n assez grand.
Sur *chacun* des intervalles $[0,\alpha_n]$, $[\alpha_n, e^n]$ et $[e^n, +\infty[$, on a pour tous w_1, w_2 tels que $w_2 \geqslant w_1$:

$$|F_n^+(w_2) - F_n^+(w_1)| \leqslant \frac{2w_2^\epsilon}{\epsilon}\, |w_2 - w_1|, \qquad \forall\, \epsilon > 0.$$

Il est alors immédiat que cette inégalité s'étend au cas où w_1 et w_2 ne sont pas dans le même intervalle.
Faisant abstraction de l'ordre :

$$|F_n^+(w_2) - F_n^+(w_1)| \leqslant \frac{2(w_1^\epsilon + w_2^\epsilon)}{\epsilon}\, |w_2 - w_1|$$

Prenant $w_1 = |u|^2$ et $w_2 = |u_n|^2$, $\epsilon = 1$, on voit donc que

$$\int_{R^N} F_n^+(|u_n|^2) - F_n^+(|u|^2)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On achève alors aisément la démonstration du lemme 2.4.2.

Fin de la démonstration du théorème 2.2.1. Comme on a pour tout $t > 0$, $u(t) \in H^1(R^N)$ et $F(|u(t)|^2 \in L^1(R^N)$, on voit que $E(u(t))$ est une fonction *décroissante* de t. D'autre part, la fonction $v(t) = u(T-t)$ est solution du problème :

$$\begin{cases} -i\dfrac{\partial v}{\partial t} + \Delta v + Vv + k\,v\,\mathrm{Log}\,|v|^2 = 0 \\ v(0) = u(T) \end{cases}$$

Les mêmes calculs que pour u montrent que $E(v(t))$ décroît, ce qui donne : $\forall\ t \in [0,T]$, $E(u(t)) \equiv E(u_0)$. Il reste à vérifier que $u \in C(0,T;H^1(R^N)$ fort). Pour cela, il suffit de prouver la continuité de $f_1(t) = \displaystyle\int_{R^N} |\nabla u|^2(x)dx$. Or on remarque que

$E(u(t)) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$, avec $f_2(t) = -\displaystyle\int_{R^N} V\,|u|^2(x)dx$, $f_3(t) = -k\displaystyle\int_{R^N} F(|u(x)|^2)dx$,

chacune de ces 3 fonctions étant s.c.i. par rapport à t.

LEMME 2.4.4. *Si* $(f_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ *sont des fonctions* s.c.i. *sur* $I = [0,T]$, *et si* $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} f_k$ *est* **continue,** *alors* **chaque** f_k *est continue.*

Démonstration. $f_1 = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} f_k - \sum_{k\neq 1} f_k \Rightarrow f_1$ est s.c.s.

La fonction $E(u(t))$ étant *constante,* on voit que f est continue, et cela termine la démonstration du théorème 2.1.

3. - REMARQUE

Dans [2] les auteurs considèrent l'équation

$$i\frac{\partial U}{\partial t} + \Delta U + VU + k\,U\,\mathrm{Log}\,|U|^2 = 0$$

où $U = (u_1,...,u_p)$ est un champ de vecteurs de R^N dans C^p et $|U|^2 = \sum_{i=1}^{p} |u_i|^2$.

Les techniques précédentes permettent de traiter ce cas comme celui de l'équation scalaire, et les résultats obtenus sont identiques au cas $p = 1$.

III - EQUATION DES ONDES

0. - NOTATIONS

On reprend les notations de la partie II et on définit, pour $T \geqslant 0$ et $(u_0,v_0) \in H^1(R^N) \times L^2(R^N)$ donnés, le problème (Q) :

$$(Q)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m\,u - k\,u\,\mathrm{Log}\,|u|^2 = 0 \qquad \text{sur }]0,T[\; \times R^N \\ u(0,x) = u_0(x)\,,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x) \end{cases}$$

avec $m > 0$ et $k \geqslant 0$.

1. - LE RESULTAT

Nous l'énonçons seulement pour la dimension $N = 3$ qui correspond au cas physique.

THEOREME 1. *Soit* (u_0,v_0) *dans* $H^1(R^3) \times L^2(R^3)$ *tel que* $|u_0|^2 \,\mathrm{Log}\, |u_0|^2 \in L^1(R^3)$. *Alors, il existe* $u \in C(0,T;H^1(R^3)) \cap C^1(0,T;L^2(R^3))$ *solution de* (Q), *unique dans la classe* $L^\infty(0,T;H^1(R^3)) \cap W^{1,2}(0,T;L^2(R^3))$.

De plus, on a $|u|^2 \,\mathrm{Log}\, |u|^2 \in L^1(R^3)$ *pour tout* $t \geqslant 0$, *et :*

$$(4)\qquad \int_{R^3} \left[\, \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + |\nabla u|^2 + m\,|u|^2 - k\,F(|u|^2)\right] dx = \mathrm{cte}$$

2. - PRELIMINAIRES

2.1. «Lemmes de Gronwall logarithmiques»

Nous aurons besoin de deux lemmes différents pour l'existence et l'unicité. Tous deux sont des conséquences de la

PROPOSITION 2.1.1. *Soit* I *un intervalle fermé de* R^+, $f : I \to R^+$ *une fonction croissante continue,* $T > 0$. *On suppose que* $w_0 \in I$, *et que pour tout* $v_0 \in [w_0, w_0 + \alpha]$, $\alpha > 0$, *l'équation différentielle :*

$$\frac{dv}{dt} = f(v(t)) \ \text{ sur } [0,T]\,,\ v(0) = v_0$$

a une solution $v(t) = \mathcal{T}(v_0,t)$ *telle que*

$$\mathcal{T} : [w_0, w_0 + \alpha] \times [0,T] \to I \text{ soit continue.}$$

Alors, si $w \in L^\infty(0,T;I)$ *est telle que :*

$$w(t) \leqslant w_0 + \int_0^t f(w(s))\,ds \qquad \text{p.p. sur } [0,T],$$

on a

$$w(t) \leqslant \mathcal{T}(w_0,t) \qquad \text{p.p. sur } [0,T].$$

Démonstration. Introduisons d'abord les nombres

$$P = \sup \left\{ \|w\|_{L^\infty(0,T)},\ \|\mathcal{T}\|_{L^\infty([w_0,w_0+\alpha] \times [0,T])} \right\}$$

$$M = \sup_{x \in I,\ |x| \leqslant P} |f(x)|$$

On va montrer que pour $0 \leqslant \epsilon \leqslant \alpha$, on a

$$w(t) \leqslant v_\epsilon(t) \underset{\text{def.}}{=} \mathcal{T}(w_0 + \epsilon, t), \qquad \text{p.p. sur } [0,T]$$

En effet, on a évidemment $w(s) \leqslant \mathcal{T}(w_0 + \epsilon, s)$ p.p. pour s assez petit. Posons :

$$\bar{t} = \sup \left\{ t \in [0,T],\ w(s) \leqslant \mathcal{T}(w_0 + \epsilon, s) \text{ p.p. sur } [0,t] \right\}$$

On a alors $w(s) \leqslant \mathcal{T}(w_0 + \epsilon, s)$ p.p. sur $[0,\bar{t}]$ et si $t \in [t,T]$, on peut écrire :

$$v_\epsilon(t) \geqslant v_\epsilon(\bar{t}) - M(t - \bar{t})$$

Grâce à la croissance de f, on a presque partout sur $[t,T]$:

$$w(t) \leqslant M(t - \bar{t}) + w_0 + \int_0^{\bar{t}} f(w(s))ds$$

$$\leqslant M(t - \bar{t}) + v_\epsilon(\bar{t}) - \epsilon$$

Soit, en comparant les deux inégalités :

$$w(t) \leqslant v_\epsilon(t) - \epsilon + 2M(t - \bar{t}) \qquad \text{p.p. sur } [t,T]$$

En particulier, $w(t) \leqslant \mathcal{T}(w_o + \epsilon\ , t)$ presque partout sur $[0, \inf \left\{ T, \bar{t} + \frac{\epsilon}{2M} \right\}]$, d'où :

$$\bar{t} \geqslant \inf \left\{ T, \bar{t} + \frac{\epsilon}{2M} \right\} \Rightarrow \bar{t} = T.$$

COROLLAIRE 2.1.2. *Soit* $a > 0$, $w_o \in [0, \frac{1}{e}]$ *et* $w(t) \geqslant 0$, $w \in L^\infty(0,T)$ *telle que :*

$$w(t) \leqslant w_o - a \int_0^t w(s) \operatorname{Log} w(s) ds \quad \text{p.p. sur } [0,T]$$

Alors on a : $w(t) \leqslant w_o^{\ e^{-at}}$ *pour presque tout* t *tel que :*

$$0 \leqslant t \leqslant \inf \left\{ \frac{1}{a} \operatorname{Log} [-\operatorname{Log} w_o]\ , T \right\}$$

COROLLAIRE 2.1.3. *Soit* $w_o \geqslant 0$, $a \geqslant 1$ *et* $w \in L^\infty(0,T)$ *une fonction* $\geqslant 0$ *telle que*

$$w(t) \leqslant w_o + a \int_0^t w(s) \operatorname{Log} [a+w(s)] ds \ \text{ p.p. sur } [0,T].$$

Alors on a :

$$w(t) \leqslant (a+w_o)^{e^{at}} \quad \text{p.p. sur } [0,T]\,.$$

2.2. Un Lemme de trace

Nous utiliserons dans la suite le résultat suivant qui nous a été communiqué par L. Tartar.

LEMME 2.2.1. *Soit* $N > 1$, $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^N,\ \ |x| = 1 \right\}$ *et* $p \in [2,\infty]$. *Alors pour tout* $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$ *et tout* $s > 0$, *la trace de* u *sur* sS *est dans* $L^{\frac{p+2}{2}}(sS)$ *et on a :*

$$\text{si } p < \infty \qquad s^{N-1} \int_S |u(s\xi)|^{\frac{p+2}{2}} d\xi \leqslant \frac{p+2}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\text{si } p = \infty \qquad \| u(s\ \cdot\ ) \|_{L^\infty(S)} \leqslant \| u \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

Démonstration. On sait que la trace de u est dans $H^{1/2}(sS)$ et donc dans $L^{\frac{2N}{N-1}}(sS)$; si $p < \infty$, il suffit, pour raison de densité de vérifier le résultat pour $u \in C_o^\infty(R^N)$. On a :

$$\frac{d}{dr}\Big[-r^{N-1}\int_S |u(r\xi)|^{\frac{p+2}{2}}\,d\xi\Big] =$$

$$-(N-1)r^{N-2}\int_S |u(r\xi)|^{\frac{p+2}{2}}\,d\xi - r^{N-1}\int_S \frac{\partial}{\partial r}|u(r\xi)|^{\frac{p+2}{2}}\,d\xi$$

$$\leqslant \frac{p+2}{2}\,r^{N-1}\int_S |u(r\xi)|^{p/2}\,|\nabla u(r\xi)|\,d\xi\,.$$

D'où

$$s^{N-1}\int_S |u(s\xi)|^{\frac{p+2}{2}}\,d\xi \leqslant \frac{p+2}{2}\int_s^{\infty} r^{N-1}\int_S |u(r\xi)|^{p/2}\,|\nabla u(r\xi)|\,d\xi\,dr$$

$$\leqslant \frac{p+2}{2}\,\|u\|^{p/2}_{L^p(R^N)}\,\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$

Le cas $p = \infty$ s'obtient par passage à la limite en p.

2.3. Un rappel sur l'équation des ondes

Rappel 2.3. La solution dans $\mathbb{R}^3$ de l'équation

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = h(t,x) \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

est donnée par la formule

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi}\int_{|\xi|\leqslant t} \frac{1}{|\xi|}\,h(t-|\xi|, x+\xi)\,d\xi$$

(cf. [9], p. 204).

3. - UNICITE (pour N = 3)

Soient données u_1 et u_2 deux solutions du problème (Q). Il nous suffit de vérifier que $u_1 = u_2$ sur un intervalle $[0,\delta]$, δ ne dépendant que de

$$\|u_i\|_{L^\infty(0,T\,;\,H^1(\mathbb{R}^N))} \quad \text{et} \quad \Big\|\frac{\partial u_i}{\partial t}\Big\|_{L^2(0,T\,;\,L^2(\mathbb{R}^N))}$$

Vérifions d'abord que si $\varphi = u_2 - u_1$ on a $\varphi \in L^\infty(\ ]0,T[\ \times \mathbb{R}^N)$ avec de plus $\|\varphi\|_{L^\infty(\ ]0,t[\ \times \mathbb{R}^N)} \leqslant Ct$ pour $0 \leqslant t \leqslant T$.

Pour cela, posons $\psi = m(u_2 - u_1) + k[u_2 \operatorname{Log} |u_2| - u_1 \operatorname{Log} |u_1|\,]$. On a presque partout sur $]0,T[\ \times \mathbb{R}^N$:

$$\varphi(t,x) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t s\left[\int_S \psi(t-s,x+s\sigma)d\sigma\ \right]ds$$

Soit alors u l'une quelconque des fonctions u_1 et u_2 ; pour tout t fixé, on a pour presque tout s :

$$\|u(t-s,\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|u\|_{L^\infty(0,T\,;\,H^1(\mathbb{R}^N))}$$

D'après le Lemme 2.2.1., on a alors pour tout $\rho > 0$,

$$\rho^2 \int_S |u(t-s,x+\rho\sigma)|^4\, d\sigma \leqslant 4\,\|u(t-s,\cdot)\|^3_{L^6}\,\|u(t-s,\cdot)\|_{H^1}$$

du fait que $$H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3).$$

Faisant $\rho = s$ et utilisant Cauchy-Schwarz :

$$s\int_S |u(t-s,x+s\sigma)|^2\, d\sigma \leqslant C$$

Or on peut écrire :

$$|mu + ku \operatorname{Log} |u|\,| \leqslant K(1 + |u|^2)$$

Appliquant cette majoration à ψ et intégrant successivement en σ puis en s, on trouve bien :

$$|\varphi(t,x)| \leqslant C_1 t + C_2 t^2 \quad \text{p.p. sur }]0,T[\ \times \mathbb{R}^N.$$

En particulier, il existe donc δ_1 dépendant uniquement des normes des u_i dans les espaces adéquats, tel que :

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\ ]0,\delta_1[\ \times \mathbb{R}^N)} \leqslant \frac{1}{e}\ .$$

Remarquons maintenant qu'il existe une constante C (universelle) telle que :

$$|\psi| \leqslant C\varphi(1 + |u_1| + |u_2| + |\operatorname{Log}\varphi|)$$

presque partout sur $]0,\delta_1[\ \times \mathbb{R}^N$.

En effet, d'après II, Lemme 2.4.3., on a presque partout sur l'ensemble $\{ |u_1| \geqslant |u_2| \}$:

$$|u_1 \operatorname{Log} |u_1| - u_2 \operatorname{Log} |u_2|| \leqslant (1 + |\operatorname{Log} |u_1||)\, |u_2 - u_1|$$

– Là où $|u_1| \leqslant 1$, on peut écrire : $|u_1 - u_2| \leqslant 2\, |u_1|$, donc

$$\operatorname{Log} |u_1| \geqslant \operatorname{Log} |u_1 - u_2| - \operatorname{Log} 2 \;\Rightarrow\; |\operatorname{Log} |u_1|| \leqslant \operatorname{Log} 2 + |\operatorname{Log} \varphi|$$

– Là où $|u_1| \geqslant 1$, on majore simplement $|\operatorname{Log} |u_1||$ par $C(1 + |u_1|)$.

Utilisant de nouveau le Lemme 2.2.1 avec $p = 2$, et $p = +\infty$, on trouve alors, en posant

$$w(t) = \sup_{s \in [0,t]} \|\varphi(s,.)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} :$$

$$|\varphi(t,x)| \leqslant (K_1 t^2 + K_2 t) w(t) + M \int_0^t (t-s)\, |w(s)|\, |\operatorname{Log} |w(s)||\, ds$$

$$\Rightarrow w(t) \leqslant (K_1 t^2 + K_2 t) w(t) + M \int_0^t (t-s)\, |w(s)|\, |\operatorname{Log} |w(s)||\, ds.$$

Pour $t \leqslant \delta_2$, on a $K_1 t^2 + K_2 t \leqslant \frac{1}{2}$.

Alors : $$w(t) \leqslant 2\, Mt \int_0^t w(s)\, |\operatorname{Log} |w(s)||\, ds$$

L'application du Corollaire 2.1.2. avec $w_o = 0$ achève la démonstration de l'unicité.

4. - OBTENTION D'UNE SOLUTION POUR L'EQUATION REGULARISEE

Soit g une fonction bornée sur R^+ telle que $ug(u^2)$ soit lipschitzienne. Posons pour $w \geqslant 0$:

$$G(w) = \int_0^w g(\sigma)\, d\sigma$$

LEMME 4.1. *Pour tout* (u_o, v_o) *dans* $H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ *il existe une solution unique* u *dans* $C(0,T,H^1(\mathbb{R}^N)) \cap C^1(0,T\,;L^2(\mathbb{R}^N))$ *du problème*

$$(\overline{Q}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + ug(|u|^2) = 0 \\ u(0,x) = u_o(x)\,,\; \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_o(x) \end{cases}$$

et on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} [\,|\frac{\partial u}{\partial t}|^2 + |\nabla u|^2 + G(|u|^2)\,]dx = \text{cte}.$

Démonstration. Dans le cas $(u_o,v_o) \in H^2(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$, le résultat est une conséquence immédiate de [6].

Grâce à la continuité de l'intégrale d'énergie, tout sera prouvé si on montre que la solution est unique dans $H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ et dépend des données initiales de façon lipschitzienne dans cet espace.

Si u^1 et u^2 sont des solutions associées aux données initiales (u_o^1,v_o^1) et (u_o^2,v_o^2), posons

$$w(t) = u_1(t) - u_2(t).$$

Faisant la différence des deux équations après multiplication par $(I - \epsilon\Delta)^{-1} \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial t}$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}\,\|\nabla(I-\epsilon\Delta)^{-1/2}w\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\,\|(I-\epsilon\Delta)^{-1/2}\frac{\partial w}{\partial t}\|^2_{L^2}\Big]$$

$$\leqslant M\int_{\mathbb{R}^N} |w|\,|\frac{\partial w}{\partial t}|\,dx \leqslant K\Big[\frac{1}{2}\,\|\nabla w\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\,\|\frac{\partial w}{\partial t}\|^2_{L^2}\Big]$$

On intègre en t, puis on fait $\epsilon \to 0$: il vient

$$\|\nabla w\|^2_{L^2} + \|\frac{\partial w}{\partial t}\|^2_{L^2} \leqslant e^{Kt}\big[\,\|\nabla w_o\|^2_{L^2} + \|v_o^1 - v_o^2\|^2_{L^2}\big].$$

Faisant $g(w) = g_n(w) = mw - kf_n(w)$, on obtient :

LEMME 4.2. *Pour tout* (u_o,v_o) *dans* $H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$, *et pour tout* $n > 0$, *il existe une et une seule solution*

$$u_n \in C(0,T\,;H^1(\mathbb{R}^N)) \cap C^1(0,T\,;L^2(\mathbb{R}^N))$$

du problème

$$(Q_n)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \Delta u_n + mu_n - ku_n f_n(|u_n|^2) = 0\\[2mm] u_n(0,x) = u_o(x),\ v_n(0,x) = v_o(x)\end{array}\right.$$

et on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\,|\frac{\partial u_n}{\partial t}|^2 + |\nabla u_n(t)|^2 + m\,|u_n(t)|^2 - kF_n(|u_n(t)|^2)\,]\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} [\,|v_o|^2 + |\nabla u_o|^2 + m\,|u_o|^2 - kF_n(|u_o|^2)]\,dx \qquad (5)$$

5. - EXISTENCE

On va construire la solution u du problème (Q) comme limite des solutions u_n du problème (Q_n).

5.1. Estimations a priori

LEMME 5.1.1. *La solution* u_n *du problème* (Q_n) *donnée par le lemme 4.2. vérifie :*

$$\| u_n \|_{L^\infty(0,T,H^1)} \leqslant \text{Cste} \; ; \; \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T,L^2)} \leqslant \text{Cste}$$

et

$$\sup_{t \in [0,T]} \int_{R^3} F_n^-(|u_n|^2)dx \leqslant \text{Cste}.$$

Démonstration. On écrit la relation (5) et on applique II, Lemme 2.3.3. en remarquant que $F_n^+(s) \leqslant s + F^+(s)$. Il vient :

$$\int_{R^3} \left\{ \left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right|^2 + |\nabla u_n|^2 + m\,|u_n|^2 \right\} dx \leqslant C + C \, \| u_n \|_{L^2}^2 \operatorname{Log}(C + \| u_n \|_{L^2}^2)$$

$$+ \int_{R^3} |\nabla u_n|^2 \, dx.$$

On a donc

$$\int_{R^3} \left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| dx \leqslant C + C \, \| u_n \|_{L^2}^2 \operatorname{Log}(C + \| u_n \|_{L^2}^2)$$

On écrit ensuite
$$u_n(t) = u_o + \int_0^t \frac{\partial u_n}{\partial t}(s)ds.$$

Il en résulte
$$\| u_n(t) \|_{L^2}^2 \leqslant 2 \, \| u_o \|_{L^2}^2 + 2 \left(\int_0^t \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t}(s) \right\|_{L^2} ds \right)^2$$

$$\leqslant 2 \, \| u_o \| + 2T \int_0^t \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t}(s) \right\|_{L^2}^2 ds.$$

On pose alors $\varphi_n(t) = 2T \int_0^t \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t}(s) \right\|_{L^2}^2 ds$. On obtient l'inégalité

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial t}(t) \right\|_{L^2}^2 \leqslant C + C \, \varphi_n(t) \operatorname{Log}(C + \varphi_n(t)).$$

En intégrant de 0 à $t \in [0,T]$ et en appliquant le Corollaire 2.1.3., on en déduit que

$\| \varphi_n \|_{L^\infty(0,T)} \leqslant$ Cste et donc que

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T,L^2)} \leqslant \text{Cste et } \| u_n \|_{L^\infty(0,T,L^2)} \leqslant \text{Cste}$$

On utilise ensuite l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}^3} F^+(|u_n|^2)dx \leqslant \epsilon \| u_n \|_{L^2}^{4/3} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx + C(\epsilon) \| u_n \|_{L^2}^2$$

établie dans la démonstration de II, Lemme 2.3.3. En choisissant ϵ assez petit, on déduit alors de la relation (5) que :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 + |\nabla u_n|^2 + m |u_n|^2 + kF_n^-(|u_n|^2) \right\} dx \leqslant \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx + C$$

Le Lemme en résulte.

5.2. Passage à la limite

LEMME 5.2.1. *Il existe* $u \in L^\infty(0,T,H^1(R^3))$ *vérifiant*

- $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0,T,L^2(R^3))$
- u (Resp. $\frac{\partial u}{\partial t}$) *est faiblement continue à valeurs dans* $H^1(R^3)$ (Resp. $L^2(R^3)$).
- *Pour tout* $t \in (0,T)$, $F^-(|u(t)|^2) \in L^1(R^3)$ *et*

$$\sup_{t \in [0,T]} \int_{R^3} F^-(|u(t)|^2)dx < +\infty$$

- u *est solution du problème* (Q).

Démonstration. D'après le Lemme 5.2.1. on peut extraire de u_n une sous-suite u_ν et une fonction u vérifiant $u \in L^\infty(0,T,H^1(R^3))$, u faiblement continue à valeurs dans $H^1(R^3)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0,T,L^2(R^3))$ et

$$\begin{array}{lll} u_\nu \to u & \text{dans} & L^\infty(0,T,H^1(R^3)) \text{ faible } * \\ \frac{\partial u}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t} & \text{dans} & L^\infty(0,T,L^2(R^3)) \text{ faible } * \\ u_\nu \to u \ \text{ p.p.} & \text{dans} &]0,T[\times R^3. \end{array}$$

u est donc à la limite solution de l'équation (2) dans $\mathscr{D}'(]0,T[\times R^3)$ et $u(0) = u_0$.

En utilisant les techniques de II, Lemme 2.2.2., on peut voir que pour $R > 0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^\infty(0,T,H^{-1}(B_R))$ et qu'il existe une sous-suite u_{ν_k} telle que $\dfrac{\partial^2 u_{\nu_k}}{\partial t^2} \to \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ dans $L^\infty(0,T,H^{-1}(B_R))$. Il résulte que $\dfrac{\partial u}{\partial t}(0) = v_o$.

Enfin, on vérifie en appliquant le Lemme de Fatou, que pour tout $t \in [0,T]$, $F^-(|u(t)|^2) \in L^1(R^3)$ et que $\displaystyle\int_{R^3} F^-(|u(t)|^2)du \leqslant$ Cste.

6. - REGULARITE

Pour achever la démonstration du Théorème 1 il reste à établir que u (Resp. $\dfrac{\partial u}{\partial t}$) est continue à valeurs dans $H^1(R^3)$ (Resp. $L^2(R^3)$) et que u vérifie la relation (4). Pour cela, on va affiner le résultat de convergence obtenu en 5.2.

LEMME 6.1. *La suite* u_ν *considérée au Lemme 5.2.1. vérifie* $u_\nu(t) - u(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ *pour tout* $t \in [0,T^*]$ *et*

$$\sup_{t \in [0,T^*]} \| u_\nu(t) - u(t) \|_{L^\infty} \to 0 , \quad \nu \to +\infty$$

où T^* *ne dépend que de* $\| u_o \|_{H^1}$ *et* $\| v_o \|_{L^2}$.

Démonstration. Posons $v_\nu = u_\nu - u$ et $g_\nu = u_\nu f_\nu(|u_\nu|^2) - uf(|u|^2) - mv_\nu$, v_ν est solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v_\nu}{\partial t^2} - \Delta v_\nu = g_\nu \\ v_\nu(0) = \dfrac{\partial v_\nu}{\partial t}(0) = 0 \end{cases}$$

utilisant les techniques de 3, on vérifie que pour tout $t \in [0,T]$, $v_\nu(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ et que $\| v_\nu(t) \|_{L^\infty} \leqslant Ct$. On écrit ensuite

$$u_\nu f_\nu(|u_\nu|^2) - uf(|u|^2) = u_\nu f_\nu(|u_\nu|^2) - uf_\nu(|u|^2) + u(f_\nu(|u|^2) - f(|u|^2))$$

Or $\quad |uf_\nu(|u|^2) - uf(|u|^2)| = \begin{cases} |u|\,|\mathrm{Log}\,|u|^2| \text{ si } |u|^2 > e^\nu \text{ ou bien } |u|^2 < e^{-\nu} \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$

Notant que si $|u|^2 \leqslant e^{-\nu}$ alors $|u|\,|\mathrm{Log}\,|u|^2| \leqslant \nu e^{-\nu}$ et que si $|u|^2 \geqslant e^\nu > 1$ alors

$|u|\,|\mathrm{Log}\,|u|^2\,| \leqslant C\ |u|^{5/4}$, on en déduit que

$$\int_{|\xi|\leqslant t} \frac{1}{|\xi|}\,|u(f_\nu(|u|^2)-f(|u|^2))|\,(t-|\xi|, x+\xi)d\xi \leqslant C\,\nu\,e^{-\nu}$$

$$+\ C\Big(\int_{\substack{|\xi|\leqslant t\\ |u|>e^\nu}} |u(t-|\xi|, x+\xi)|^{5/3}d\xi\Big)^{3/4}$$

$$\leqslant C\nu e^{-\nu} + Ce^{-\frac{3\nu}{4}}\Big(\int_{|\xi|\leqslant t} |u(t-|\xi|\ , x+\xi)|^2 d\xi\Big)^{3/4}$$

En procédant comme en 3. pour le terme $u_\nu f_\nu(|u_\nu|^2) - uf_\nu(|u|^2)$ et en utilisant le corollaire 2.1.2., on en déduit le lemme.

LEMME 6.2. *La solution du problème* (Q) *vérifie* $E(u(t), \frac{\partial u}{\partial t}(t)) = E(u_o,v_o)$ *pour tout* $t\in[0,T]$, *où on a posé*

$$E(u,v) = \int_{R^3} \{|v|^2 + |\nabla u|^2 + m\,|u|^2 - k\,F(|u|^2)\}\,dx$$

Démonstration. On raisonne sur $[0,T^*]$. (T^* obtenu au Lemme 6.1.). On écrit la conservation de l'énergie pour u_ν pour

$$t\in[0,T^*]\ :\ \int_{R^3}\Big\{\Big|\frac{\partial u_\nu}{\partial t}(t)\Big|^2 + |\nabla u_\nu(t)|^2 + m\,|u_\nu(t)|^2 - kF_\nu\,|u_\nu(t)|^2)\Big\}dx$$

$$= \int_{R^3}\{|v_o|^2 + |\nabla u_o|^2 + m\,|u_o|^2 - kF_\nu(|u_o|^2)\}\ dx.$$

Le membre de droite converge vers $E(u_o,v_o)$ lorsque $\nu \to +\infty$. Par ailleurs

$$\int_{R^3} |F^+_\nu(|u_\nu|^2) - F^+(|u|^2)|\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^3} |F^+_\nu(|u_\nu|^2) - F^+_\nu(|u|^2)|\,dx$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^3} |F^+_\nu(|u|^2) - F^+(|u|^2)|\,dx$$

Or, on peut écrire que $|F^+_\nu(|u_\nu|^2) - F^+_\nu(|u|^2)| \leqslant C(|u_\nu|^2 + |u|^2)\,|u_\nu - u|$ où C ne dépend pas de ν . On déduit alors du Lemme 6.1. que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |F^+_\nu(|u_\nu|^2) - F^+_\nu(|u|^2)|\,dx \underset{\nu\to+\infty}{\to} 0$$

On extrait une sous-suite $u_{\nu_k}(t)$ vérifiant $u_{\nu_k}(t) \to u(t)$ pp dans R^3. (On sait déjà que $u_{\nu_k}(t) \rightharpoonup u(t)$ dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ et que

$$\frac{\partial u_{\nu_k}}{\partial t}(t) \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t}(t) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^3)).$$

On a alors : $|F^+_{\nu_k}(|u|^2) - F^+(|u|^2)| \underset{\nu_k \to +\infty}{\to} 0$ pp dans $\mathbb{R}^3$.

Par application du Théorème de Lebesgue, on a finalement :

$$\int_{R^3} F^+_{\nu_k}(|u_{\nu_k}(t)|^2\,dx \underset{\nu_k \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{R^3} F^+(|u(t)|^2)dx$$

On a aussi $F^-_{\nu_k}(|u_{\nu_k}(t)|^2) \to F^-(|u(t)|^2)$ pp dans $\mathbb{R}^3$.

Le lemme de Fatou assure alors que :

$$\int_{\mathbb{R}^3} F^-(|u(t)|^2)dx \leqslant \varliminf_{\nu_k \to +\infty} \int_{R^3} F^-_{\nu_k}(|u_{\nu_k}(t)|^2)dx$$

D'où, compte-tenu des résultats précédents :

$$E(u(t), \frac{\partial u}{\partial t}(t)) \leqslant \varliminf_{\nu_k \to +\infty} E(u_{\nu_k}(t), \frac{\partial u_{\nu_k}}{\partial t}(t)) = E(u_o, v_o).$$

En résolvant le problème rétrograde par la même méthode, à partir de $(u(t), \frac{\partial u}{\partial t}(t))$ et compte-tenu de l'unicité, on en déduit l'inégalité inverse, et donc la relation annoncée.

COROLLAIRE 6.3. *La solution* u *du problème* (Q) *est continue à valeurs* $H^1(\mathbb{R}^3)$ *et* $\frac{\partial u}{\partial t}$ *est continue à valeurs dans* $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Démonstration. Puisque $u \in C^o(0,T,L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty(0,T,H^1(\mathbb{R}^3))$, on vérifie aisément que $\int_{\mathbb{R}^3} F^+(|u|^2)dx$ est continue sur $[0,T]$, et donc

$$\int_{R^3} \left\{ |\frac{\partial u}{\partial t}|^2 + |\nabla u|^2 + m|u|^2 + kF^-(|u|^2) \right\} dx \quad \text{aussi.}$$

Cette dernière expression est la somme de quatre fonctions s.c.i. En appliquant II, Lemme 2.4.4., il en résulte que chacune d'entre elle est continue. Compte-tenu de la faible continuité de u et $\frac{\partial u}{\partial t}$, le corollaire s'en déduit.

REFERENCES

[1] J.B. BAILLON, T. CAZENAVE, M. FIGUEIRA. *«Equation de Schrödinger non linéaire»*. C.R. Acad. Sc. Paris, 284 (1977) p. 869-872.

[2] I. BIALYNICKI-BIRULA, J. MYCIELSKI. *«Wave Equations with Logarithmic Non-linearities»*. Bull. Acad. Pol. Sc., XXIII (1975) p. 461-466.

[3] I. BIALYNICKI-BIRULA, J. MYCIELSKI. *«Nonlinear Wave Mechanics»*. Annals of Physics, 100 (1976) p. 62-93.

[4] H. BREZIS. *«Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert»*. North-Holland Publish Co, Amsterdam, London (1973).

[5] H. BREZIS, T. KATO. *«Remarks on the Schrödinger Operator with Singular Complex Potentials»*. J. Math. Pures. Appl. 58 (1979) p. 137-151.

[6] F.E. BROWDER. *«On Non-Linear Wave Equations»*. Math. Zeitschr. 80 (1962) p. 249-264.

[7] T. CAZENAVE. *«Equations de Schrödinger Non Linéaires»*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh (1969) 84 (1979) p. 327-346.

[8] T. CAZENAVE, A. HARAUX. *«Equations de Schrödinger avec Non Linéarité Logarithmique»*. C.R. Acad. Sc. Paris, 288 (1979) p. 253-256.

[9] R. COURANT, D. HILBERT. *«Methods of Mathematical Physics»*. *Volume II*, Interscience Publish. New-York, London (1962).

[10] J. GINIBRE, G. VELO. *«On a class of Non Linear Schrödinger Equations»*. J. Funct. Anal. 32 (1979) p. 1-71.

[11] J.L. LIONS. *«Quelques Méthodes de Résolution de Problèmes aux Limites Non-Linéaires»*. Gauthier-Villars, Paris (1969).

(Manuscrit reçu le 19 juillet 1979)