

ADIB A. FADLALLA

Les boules limites de Caratheodory dans un domaine pseudoconvexe

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 1, n° 1 (1979), p. 26-32

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1979_5_1_1_26_0

© Université Paul Sabatier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES BOULES LIMITES DE CARATHEODORY DANS UN DOMAINE PSEUDOCONVEXE (*)

Adib A. Fadlalla⁽¹⁾

(1) Department of mathematics, Faculty of Science, Cairo University, Giza, Egypt.

Résumé : Soient $G \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné, $P \in \partial G$ un M-point ordinaire et $\{P_m\}$ une suite conique de points convergente vers P . Si $A \in G$, l'auteur a démontré dans des articles antérieurs, l'existence de trois types de boules limites de Carathéodory (C.L.B.) : $\mathcal{B}_G(\{P_m\}, A), \mathcal{B}_G^{(i)}(P, A), i = 1, 2$. Il est bien connu que sous certaines conditions P est un point ordinaire d'un ensemble analytique $\mathcal{A}_P \subset \partial G$. Dans cet article on montre que si $Q \in \mathcal{A}_P$ est un point ordinaire alors les trois types de C.L.B. $\mathcal{B}_G(\{Q_m\}, A), \mathcal{B}_G^{(i)}(Q, A); i = 1, 2$ existent et $\mathcal{A}_P \subset \partial \mathcal{B}$ où $\partial \mathcal{B}$ est la frontière de l'un quelconque de ces ensembles.

Summary : Let $G \subset \mathbb{C}^n$ be a bounded domain, $P \in \partial G$ an M-ordinary boundary point and $\{P_m\}$ a conical sequence of points converging to P . If $A \in G$, the author proved in previous articles the existence of three types of (C.L.B.), Caratheodory limiting balls $\mathcal{B}_G(\{P_m\}, A), \mathcal{B}_G^{(i)}(P, A), i = 1, 2$. It is well known-that under certain conditions - P is an ordinary point of an analytic set $\mathcal{A}_P \subset \partial G$. In this article it is proved that if $Q \in \mathcal{A}_P$ is an ordinary point then the three types of C.L.B. $\mathcal{B}_G(\{Q_m\}, A), \mathcal{B}_G^{(i)}(Q, A); i = 1, 2$ exist and $\mathcal{A}_P \subset \partial \mathcal{B}$ where $\partial \mathcal{B}$ is the boundary of any one of them.

Introduction

Dans cet article nous poursuivons la généralisation des horicycles du cas classique commencée dans [3] sous le nom de sphères limites de Caratheodory.

Nous conservons les notations de [3], [4], [5] : G étant un domaine borné de \mathbb{C}^n , un point $P \in \partial G$

(*) J'ai pu préparer cette étude au cours d'un stage qui m'a été offert par le gouvernement français à Paris. Je tiens ici à remercier sincèrement M. le Professeur HERVE pour l'intérêt qu'il a bien voulu me témoigner.

est dit ordinaire si ∂G est de classe \mathcal{C}^2 dans un voisinage de P ([3], Déf. 1), M-ordinaire si en outre il existe Φ holomorphe sur un voisinage de $G \cup \{P\}$ telle que $|\Phi(P)| = \sup_G |\Phi|$ ([4], Déf. 3). Sous ces deux hypothèses, étant donné $A \in G$, on a défini : dans [4], une boule limite $\mathcal{B}_G(\{P_m\}, A)$ associée à toute suite conique ([3], Déf. 3) $\{P_m\} \subset G$ convergente vers P ; dans [5], d'autres boules limites $\mathcal{B}_G^{(i)}(P, A)$ ($i = 1, 2$) ne dépendant que de P .

Dans cet article, nous utilisons [1] et [6] pour étudier le cas, généralisant celui du polydisque, où dans un voisinage de P l'hypersurface ∂G est réunion d'ensembles analytiques complexes ; \mathcal{A}_P étant celui qui passe par P , Q un point de \mathcal{A}_P et $\{Q_m\}$ une suite conique convergente vers Q , nous montrons que les boules limites $\mathcal{B}_G(\{Q_m\}, A)$, $\mathcal{B}_G^{(i)}(Q, A)$ ($i = 1, 2$) existent et que leurs frontières contiennent \mathcal{A}_P .

1. LES BOULES LIMITES DE CARATHEODORY DANS UN DOMAINE PSEUDOCONVEXE :

DEFINITION

Soit $P \in \partial G$ et supposons que ∂G est lisse en P (cf. déf. 1 dans [3]). Dans la définition 2 dans [3], si (z_1, \dots, z_n) est un système local de coordonnées dans U , (Z_1, \dots, Z_n) défini par (2.2) dans [3] sera appelé un système local et normal de coordonnées de ∂G en P .

On peut voir dans la démonstration du théorème 4 dans [3] que l'équation (2.9) reste valable si (z_1, \dots, z_n) est un système local et normal de coordonnées de ∂G en P .

Soient $P \in \mathbb{C}^n$ l'origine, U un voisinage de P et φ une fonction réelle de classe (C^4) dans U , tels que :

- (i) $P \in H$ où H est l'hypersurface

$$H = \{z / z \in U, \varphi(z) = 0\} \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial z_n} \neq 0 \text{ dans } U.$$

- (ii) $\forall z \in H$, la forme Hermitienne $\sum_{k, \ell=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k \partial \bar{z}_\ell}(z) u_k \bar{u}_\ell$ est positive semi-définie de rang constant $n-m-1$ ($1 \leq m \leq n-1$) les vecteurs $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n$ satisfaisant aux conditions

$$(1.0) \quad \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial z_k} u_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_k} \bar{u}_k = 0 \quad \text{où } \bar{z} \text{ est la conjuguée complexe de } z.$$

Dans [1] et [6] il est démontré que, sous ces conditions, H peut être paramétrisé dans U , d'une certaine manière (c.f. [1] et [6]). Dans ce paragraphe, nous allons démontrer que cette paramétrisation est en fait une paramétrisation de U , un résultat que nous allons utiliser dans tout ce qui suit.

D'abord, nous pouvons supposer : d'après [6] (pages 395-396) que la condition (ii) est valable dans U ;

d'après [1] (page 370) que $\forall z \in U$, la forme hermitienne $\sum_{k,\ell=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k \partial \bar{z}_\ell} (z) u_k \bar{u}_\ell$ est définie positive pour les vecteurs $u = (u_1, \dots, u_n)$ vérifiant (1.0) et $u_{n-m} = \dots = u_{n-1} = 0$.

Utilisant les mêmes notations que dans [1], nous introduisons dans U , m paramètres complexes τ_1, \dots, τ_m définis par

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = z_{n-m}, \tau_2 = z_{n-m+1}, \dots, \tau_m = z_{n-1} \\ \bar{\tau}_1 = \bar{z}_{n-m}, \bar{\tau}_2 = \bar{z}_{n-m+1}, \dots, \bar{\tau}_m = \bar{z}_{n-1} \end{array} \right.$$

et nous choisissons $z_1, \dots, z_{n-m-1}, z_n$ dépendant de $\tau_1 \dots \tau_m$ tels que

$$(1.2) \quad \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial z_\ell} \frac{\partial z_\ell}{\partial \bar{\tau}_\nu} = 0, \quad \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_\ell} \frac{\partial z_\ell}{\partial \tau_\nu} = 0, \quad \sum_{k,\ell=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k \partial \bar{z}_\ell} \frac{\partial z_k}{\partial \tau_\nu} \frac{\partial z_\ell}{\partial \bar{\tau}_\nu} = 0, \quad \nu = 1, \dots, m$$

(c.f. [1] pages 370-371).

Suivant la même démonstration que dans [1] mot à mot nous obtenons

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z_\ell}{\partial \bar{\tau}_\nu} = 0 \\ \frac{\partial z_\ell}{\partial \tau_\nu} = u_{\ell\nu} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z_\ell}{\partial \tau_\nu} = 0 \\ \frac{\partial z_\ell}{\partial \bar{\tau}_\nu} = \bar{u}_{\ell\nu} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \nu = 1, \dots, m \\ \ell = 1, \dots, n-m-1, n \end{array}$$

Le système d'équations est complètement intégrable, donnant (cf. [1])

$$z_\ell = \varphi_\ell(\tau_1, \dots, \tau_n), \quad \bar{z}_\ell = \bar{\varphi}_\ell(\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_n), \quad \ell = 1, \dots, n-m-1, n,$$

où $\varphi_\ell(\tau_1, \dots, \tau_n)$ sont des fonctions analytiques des variables complexes τ_1, \dots, τ_n et $\tau_{m+1}, \dots, \tau_n$ sont des paramètres d'intégration, à savoir les valeurs prises par les z_ℓ pour $\tau_1 = \dots = \tau_m = 0$, ce qui montre avec (1.1) que (τ_1, \dots, τ_n) est un système de coordonnées complexes dans U et que φ , à cause de (1.2), sera une fonction réelle de $\tau_{m+1}, \dots, \tau_n, \bar{\tau}_{m+1}, \dots, \bar{\tau}_n$ seulement

Ceci veut dire que si $G \subset \mathbb{C}^n$ est un domaine tel que $P \in \partial G, H = \partial G \cap U$ et $G \cap U = \{z : \varphi(z) < 0, z \in U\}$, il existe alors un système de coordonnées local (z_1, \dots, z_n) dans U tel que :

$$H = H' \times V_2, \quad G' = G \cap U = V_1 \times V_2$$

$H' \subset \partial V_1$ est une hypersurface strictement pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^k(z_1, \dots, z_k)$, où $k = n - m$,
 V_2 est un domaine dans $\mathbb{C}^{n-k}(z_{k+1}, \dots, z_n)$ et V_1 est un domaine dans $\mathbb{C}^k(z_1, \dots, z_k)$.

Il s'ensuit donc que la frontière ∂G dans U est décomposable en des ensembles analytiques ayant la forme

$$\{P'\} \times V_2 \text{ où } P' \in H'.$$

On désigne l'ensemble analytique qui contient P par \mathcal{A}_P . Dans ce qui suit, on peut remplacer \mathcal{A}_P par $\mathcal{A}'_P \subset \partial G$; le prolongement analytique possible de \mathcal{A}_P de façon que \mathcal{A}'_P soit connexe et la forme Hermitienne (ii) a le même rang dans un voisinage de chaque point $Q \in \mathcal{A}'_P$, mais il suffit de donner la démonstration pour \mathcal{A}_P .

2. Maintenant soient $P, Q \in \mathcal{A}_P$, alors $P = P' \times P''$, $Q = P' \times Q''$ où $P' \in H'$, P'' , $Q'' \in V_2$. Si $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ est un système de coordonnées local et normal de ∂V_1 en P' , on peut choisir un système $\zeta = (\zeta_{k+1}, \dots, \zeta_n)$ tel que $z = (\xi, \zeta)$ et $Z = (\xi, \zeta - \zeta_{Q''})$ soient deux systèmes locaux et normaux de coordonnées de ∂G en P et Q respectivement. On définit

$$\mathcal{I}_P = \{\{\alpha_m\} : \{\alpha_m\} \subset G \text{ est une suite de points conique convergente vers } P\}.$$

Soient $\{\alpha_m\} \in \mathcal{I}_P$, $\{\alpha_m\} \subset G \cap U$, $\alpha_m = (\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn}) = \alpha'_m \times \alpha''_m$, $\alpha'_m \in V_1$, $\alpha''_m \in V_2$: on peut trouver une suite de points $\{\beta''_m\} \subset V_2$ convergente vers Q'' , telle que $\{\beta_m = \alpha'_m \times \beta''_m\} \in \mathcal{I}_Q$. Par exemple il suffit de choisir β''_m tel que $\|\beta''_m - Q''\| < \|\alpha''_m\|$ où

$$\|\alpha''_m\|^2 = |\alpha_{m,k+1}|^2 + \dots + |\alpha_{m,n}|^2$$

mais je préfère prendre β''_m tel que $\beta'_m - Q'' = \alpha''_m$, ce qui est possible toujours si m est assez grand, et ce qui simplifie les démonstrations de ce théorème et du suivant. Maintenant il est évident que les normales N_P et N_Q de dimension réelle 1 à ∂G en P et Q respectivement sont parallèles et comme $\beta_m - Q = \alpha_m - P$, $\{\beta_m\} \in \mathcal{I}_Q$. On remarque que

$$(2.1) \quad r_{1m} = |\xi_1(\alpha_m)| = |\xi_1(\beta_m)|$$

Maintenant soient $U_{P''} \subset V_2$, $U_{Q''} \subset V_2$ deux voisinages de P'' et Q'' respectivement, $U_P \subset \mathbb{C}^k(z_1, \dots, z_k)$ un voisinage de P' et $V_P = U_P \times U_{P''}$, $V_Q = U_P \times U_{Q''}$. Enfin soit $K = \text{Max} \{D_{V_2}(p'', q'') : p'' \in U_{P''}, q'' \in U_{Q''}\}$.

On peut supposer que $\{\alpha_m\} \subset V_P$, alors $\{\beta_m\} \subset V_Q$; d'après [2]:

$$D_G(\alpha_m, \beta_m) \leq D_G(\alpha_m, \beta_m) = D_{V_2}(\alpha''_m, \beta''_m) \leq K.$$

Alors, au moyen de P, nous obtenons :

THEOREME 1. Si $Q, Q' \in \mathcal{A}_P$, alors il existe deux voisinages U_Q et $U_{Q'}$, de Q et Q' respectivement et un nombre $0 < k < \infty$ tels que :

- (i) Pour chaque point $q \in G \cap U_Q$ il existe un point $q' \in G \cap U_{Q'}$, tel que $D_G(q, q') < k$.
- (ii) Pour chaque $\{\alpha_m\} \in \mathcal{I}_Q$ il existe $\{\alpha'_m\} \in \mathcal{I}_{Q'}$, telle que $D_G(\alpha_m, \alpha'_m) < k$ si m est assez grand.
- (iii) Si P est M -ordinaire, l'équation (2.1) montre que le théorème (2) dans [4] est valable pour chaque $\{\alpha_m\} \in \mathcal{I}_Q$

Alors nous avons

(iii-a) $\mathcal{B}_G(\{Q_m\}, A)$ existe pour chaque $\{Q_m\} \in \mathcal{I}_Q$.

Maintenant nous allons démontrer que le théorème (4) de [5] est valable en chaque point $Q \in \mathcal{A}_P$:

THEOREME 2. Soient P M -ordinaire et $Q \in \mathcal{A}_P$ et $A \in G$. Il existe une boule X tangente à ∂G en Q et un nombre $k > 0$ ne dépendant que de A et X , tels que : si $\{\beta_m\}$ est une suite de points conique convergente vers Q , il existe alors un nombre $m_0 > 0$ (qui dépend aussi de $\{\beta_m\}$) tel que

$$D_X(z^{(0)}, \beta_m) < k + D_G(A, \beta_m) \quad \forall m \geq m_0$$

où $z^{(0)}$ est le centre de X .

Démonstration : Nous choisissons la boule X telle qu'il existe une boule X_1 tangente à ∂G en P , qui a le même rayon que X . Soit $\{\alpha_m\} \in \mathcal{I}_P$ tel que $\alpha_m - P = \beta_m - Q$: il existe alors un nombre k_1 tel que $D_G(\alpha_m, \beta_m) < k_1$.

Il est évident que $D_X(z^{(0)}, \beta_m) = D_{X_1}(z^{(1)}, \alpha_m)$ où $z^{(1)}$ est le centre de X_1 .

Maintenant $D_G(\alpha_m, \beta_m) < k_1$, $\forall m$. D'après le théorème (4) dans [5] :

$$\begin{aligned} D_{X_1}(z^{(1)}, \alpha_m) &< D_G(A, \alpha_m) + k', \text{ où } \infty > k' \geq 0 \\ &< D_G(A, \beta_m) + k_1 + k' \end{aligned}$$

c.à.d.
$$D_X(z^{(0)}, \beta_m) < D_G(A, \beta_m) + k \text{ où } k = k_1 + k',$$

Ce qui montre que le théorème (4) de [5] est aussi valable pour chaque point $Q \in \mathcal{A}_P$. Nous avons alors :

THEOREME 3. Si P est M -ordinaire, $\mathcal{B}_G^{(i)}(Q, A)$, ($i = 1, 2$), existe pour chaque $Q \in \mathcal{A}_P$.

3. THEOREME 4. Si $Q, R \in \mathcal{A}_P$ et P est M -ordinaire, il existe une boule euclidienne tangente à ∂G en R et contenue dans $\mathcal{B}_G^{(i)}(Q, A)$, $i = 1, 2$. Donc $\mathcal{A}_P \subset \partial \mathcal{B}_G^{(i)}(Q, A)$.

Démonstration : Soit $\{\beta_m\} \in \mathcal{I}_Q$; d'après le Théorème 1 il existe $\{\gamma_m\} \in \mathcal{I}_R$ et un nombre $k > 0$ (indépendant de $\{\beta_m\}$ et $\{\gamma_m\}$) tels que

$$(3.1) \quad D_G(\beta_m, \gamma_m) \leq k \quad \forall m \geq m_0.$$

Reprenant la démonstration du Théorème 3 dans [4], nous choisissons d'abord une boule euclidienne X de centre $z^{(0)}$, contenue dans G et tangente à ∂G en R : d'après le Théorème 2 ci-dessus, il existe un nombre $k_1 > 0$ (indépendant de $\{\gamma_m\}$) tel que

$$(3.2) \quad D_X(z^{(0)}, \gamma_m) \leq k_1 + D_G(A, \gamma_m) \quad \forall m \geq m_1 ;$$

puis nous choisissons une boule X' concentrique à X et strictement plus petite, telle que $\forall z \in \partial X'$ on ait

$$(3.3) \quad D_X(z^{(0)}, z) = k_2 \geq 2k + k_1 + \epsilon, \quad \epsilon > 0.$$

Alors, pour m assez grand, le segment de droite joignant $z^{(0)}$ et γ_m rencontre $\partial X'$ en γ'_m tel que

$$(3.4) \quad D_X(z^{(0)}, \gamma'_m) + D_X(\gamma'_m, \gamma_m) = D_X(z^{(0)}, \gamma_m).$$

Si R' est l'intersection de $\partial X'$ avec le segment de droite joignant $z^{(0)}$ et R , en réunissant (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) nous avons :

$$\begin{aligned} D_X(\gamma_m, R') &\leq D_X(\gamma_m, \gamma'_m) + D_X(\gamma'_m, R') \leq k_1 - k_2 + D_G(A, \gamma_m) + \epsilon \\ &\leq D_G(A, \gamma_m) - 2k \leq D_G(A, \beta_m) - k \quad \forall m \geq m_2. \end{aligned}$$

$z \in \mathcal{B}_X(\gamma_m, R')$ signifie $D_X(\gamma_m, z) < D_X(\gamma_m, R')$, donc entraîne

$$D_G(\beta_m, z) \leq k + D_G(\gamma_m, z) \leq k + D_X(\gamma_m, z) < D_G(\beta_m, A) \quad \forall m \geq m_2.$$

Ainsi $\mathcal{B}_X(\gamma_m, R') \subset \mathcal{B}_G(\beta_m, A) \quad \forall m \geq m_2$ et la boule-limite $\mathcal{B}_X(R, R')$ est contenue dans chaque $\mathcal{B}_G^{(i)}(Q, A)$.

REFERENCES

- [1] H. BEHNKE and F. SOMMER. «*Analytische Funktionen mehrerer Komplexer Veränderlichen. Über die Voraussetzungen des Kontinuitätssatzes*», Math. Ann. 121, 356(1950).
- [2] A.A. FADLALLA. «*The Caratheodory metric near boundaries of pseudoconvex domains*». Boll. U.M.I. (4) 8 (1973), p. 412-418.
- [3] A.A. FADLALLA. «*Le principe du module maximum et la sphère limite de Carathéodory dans un domaine strictement pseudoconvexe, I*», Bull. Sc. Math., 2e série, T. 97, 1973, p. 193-205.
- [4] A.A. FADLALLA. «*La boule limite de Carathéodory, II*», Bull, Sc. Math., 2e série, T. 97, 1973, p. 207-215.
- [5] A.A. FADLALLA. «*La boule limite de Carathéodory, III*», Bull. Sc. Math., 2e série, T. 97, 1973, p. 217-224.
- [6] F. SOMMER. «*Komplex-analytische Blätterung reeller Hyperflächen in C^n* ». Math, Ann., 137 (1959), p. 392-411.

(Manuscrit reçu le 7 janvier 1978)