

ROGER DESQ

**Construction des demi-groupes ayant tous leurs sous-demi-groupes homomorphiques**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4<sup>e</sup> série*, tome 29 (1965), p. 35-52

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1965\\_4\\_29\\_35\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1965_4_29_35_0)

© Université Paul Sabatier, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Construction des demi-groupes ayant tous leurs sous-demi-groupes homomorphiques

par Roger DESQ

---

Un demi-groupe est appelé  $H_a$ -demi-groupe [resp. H-demi-groupe] si et seulement si tous ses sous-demi-groupes sont homomorphiques à droite [resp. homomorphiques]. Ces demi-groupes sont caractérisés dans [1]. Le but du présent travail est d'en donner une construction effective.

Les  $\rho$ -demi-groupes étudiés par KIMURA, TAMURA et MERKEL [2] sont évidemment des  $H_a$ -demi-groupes particuliers. Rappelons qu'un demi-groupe D est un  $\rho$ -demi-groupe si et seulement si tous les sous-demi-groupes de D sont des idéaux à droite. Il est donc naturel que les constructions de cette étude généralisent celles de [2].

## 1. $H_a$ -demi-groupes unipotents.

Soient F un demi-groupe unipotent,  $e$  son idempotent,  $\Gamma$  son sous-groupe maximum. D'après la propriété 3.1 et le théorème 3.6 de [1], F est un  $H_a$ -demi-groupe si et seulement si  $\Gamma$  est un groupe périodique et si le produit de deux éléments  $a, b$  de F est égal à  $a^2$  ou appartient à  $\Gamma$ ; dans ce dernier cas,  $ab = abe = ae . be$ .

Considérons les sous-ensembles suivants de F,

$$M = \{x \in F - \Gamma; x^2 \notin \Gamma\}, N = (F - \Gamma) \cap F^2, P = \{x \in F - \Gamma; x \notin F^2, x^2 \in \Gamma\}$$

D'après la remarque qui suit la propriété 3.1 de [1],  $F^3 = \Gamma$ , d'où

$$F = M + N + P + \Gamma.$$

Si  $x \in N$ ,  $x = yz$  et comme  $x \notin \Gamma$ ,  $yz = y^2$  et de plus  $y \in M$ . Si nous appelons  $\alpha$  l'application de M dans F définie par  $\alpha(x) = \alpha x = x^2$ ,  $\alpha$  est une surjection de M sur N.

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de F, supposons que le produit  $xy$  n'appartienne pas à  $\Gamma$ . On a alors  $xy = x^2 \notin \Gamma$ , d'où  $x \in M$ , d'autre part, comme  $F^3 = \Gamma$ , on en déduit  $y \in M + P$ .

Définissons les applications suivantes :

$$\beta : M \times (M + P) \rightarrow \{0,1\}, \beta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } xy \notin \Gamma \\ 0 & \text{si } xy \in \Gamma \end{cases}$$

$$\gamma : F \rightarrow \Gamma, \quad \gamma x = xe.$$

*Théorème 1.* — Soient  $F$  un  $H_a$ -demi-groupe,  $e$  son idempotent,  $\Gamma$  son sous-groupe maximum. Il existe une famille  $M, N, P$  de sous-ensembles disjoints de  $F$ , une application  $\gamma$  de  $F$  dans  $\Gamma$  et si  $M$  n'est pas vide deux applications,  $\alpha$  de  $M$  dans  $N$ ,  $\beta$  de  $M \times (M + P)$  dans  $\{0,1\}$  telles que :

- 1)  $F = M + N + P + \Gamma$ ;
- 2)  $\alpha$  soit une surjection;
- 3)  $\forall a \in M, \beta(a, a) = 1$ ;
- 4)  $\beta(x, y) = 1$  implique  $\gamma x = \gamma y$ ;
- 5)  $\gamma(\alpha x) = (\gamma x)^2$ ;
- 6)  $\forall x \in \Gamma, \gamma x = x$ .

Inversement, soient  $M, N, P, \Gamma$  des ensembles deux à deux disjoints tels que  $\Gamma$  soit un groupe périodique. Soit  $F = M + N + P + \Gamma$ , considérons  $\gamma : F \rightarrow \Gamma$ , et si  $M \neq \emptyset$ ,  $\alpha : M \rightarrow N$ ,  $\beta : M \times (M + P) \rightarrow \{0,1\}$  des applications vérifiant les propriétés 2, 3, 4, 5, 6. L'ensemble  $F$  muni de la loi interne suivante :

$$x, y \in F, \quad x * y = \begin{cases} \alpha x & \text{si } \beta(x, y) = 1, \\ \gamma x . \gamma y & \text{autrement,} \end{cases}$$

est un  $H_a$ -demi-groupe.

Pour la partie directe du théorème, il reste seulement à vérifier les propriétés 4 et 5.

$\beta(x, y) = 1$  implique  $xy = x^2$ , on en déduit  $xe . ye = (xe)^2$  ce qui dans  $\Gamma$  donne  $xe = ye$ .

$$\alpha x = x^2 \text{ implique } (\alpha x) e = (xe)^2.$$

Pour démontrer la partie réciproque, vérifions d'abord que  $F$  est un demi-groupe. Soient  $x, y, z$  trois éléments de  $F$ .

Si  $x * y = \gamma x . \gamma y$ , on en déduit  $(x * y) * z = (\gamma x \gamma y) \gamma z$ .

Si  $x * y = \alpha x$ , alors  $\beta(x, y) = 1$  et d'après 4,  $\gamma x = \gamma y$ ; en utilisant successivement 5 et 4, on en déduit

$$(x * y) * z = \alpha x * z = \gamma(\alpha x) \gamma z = (\gamma x)^2 \gamma z = (\gamma x \gamma y) \gamma z.$$

On vérifie de même que  $x * (y * z) = \gamma x(\gamma y \gamma z)$ .

$F$  est unipotent, en effet, supposons  $x * x = x$ , alors  $x = x * x * x = (\gamma x)^3$  est donc un idempotent de  $\Gamma$ , c'est-à-dire  $e$ .

D'après le théorème 3.6 de [1], pour vérifier que  $F$  est un  $H_a$ -demi-groupe, il suffit de montrer que l'on a  $x * y = x * x$  ou  $x * y = (x * e) * (y * e)$

Or si  $x * y = \alpha x$ ,  $x \in M$ ,  $\beta(x, x) = 1$ ,  $x * x = \alpha x$ ; de plus,  $x * e = \gamma x \gamma e = \gamma x$ , ceci complète la démonstration.

Précisons la construction des applications données. Il faut évidemment que la puissance de  $M$  soit égale ou supérieure à celle de  $N$ , on prend pour  $\alpha$  une surjection quelconque. De même, on définit une application  $\beta$  arbitraire en tenant compte seulement de la condition 3.

Dans  $M + P$ , considérons la relation  $\mathcal{R}$  suivante,  $a \mathcal{R} b$  s'il existe  $x_0, x_1, \dots, x_n \in M + P$  tels que

$$\alpha = x_0, b = x_n, \text{ pour } i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \beta(x_i, x_{i+1}) = 1 \text{ ou } \beta(x_{i+1}, x_i) = 1.$$

La restriction  $\mathcal{R}'$  de  $\mathcal{R}$  à  $M$  est une rélation d'équivalence, désignons par  $R$  l'ensemble  $M/\mathcal{R}'$  et par  $\varphi$  la surjection canonique de  $M$  sur  $R$ .

Dans  $R$  considérons la fermeture transitive  $\mathcal{S}$  de la relation  $\rho$ ,  $\bar{x}, \bar{y} \in R, \bar{x} \rho \bar{y} \iff \exists x \in \bar{x}, y \in \bar{y}$  tels que  $\alpha x = \alpha y$ . Désignons par  $S$  l'ensemble  $R/\mathcal{S}$  et par  $\psi$  l'application canonique de  $R$  sur  $S$ .

Soient  $\bar{\gamma}$  une application quelconque de  $S$  dans l'ensemble des carrés des éléments de  $\Gamma$ ,  $\gamma'$  une application de  $R$  dans  $\Gamma$  telle que,  $\forall \bar{x} \in R, [\gamma'(\bar{x})]^2 = \bar{\gamma}(\psi \bar{x})$ . L'application  $\gamma = \gamma' \circ \varphi$  de  $M$  dans  $\Gamma$  remplit la condition 4, les conditions 5 et 6 permettent de prolonger  $\gamma$  à  $N + \Gamma$  et ceci d'une manière unique puisque  $\alpha x = \alpha y$  implique  $(\gamma x)^2 = (\gamma y)^2$ . Si l'élément  $y$  de  $P$  est lié par la relation  $\mathcal{R}$  avec un élément  $x$  de  $M$ , on pose  $\gamma y = \gamma x$ , si  $y$  n'est lié avec aucun élément de  $M$  on peut choisir arbitrairement  $\gamma y$ . Les applications  $\alpha, \beta, \gamma$  ainsi construites vérifient les conditions du théorème.

*Corollaire 1.* — Si  $\Gamma = \{e\}$ , on obtient le théorème 2 de [2].

*Corollaire 2.* —  $F$  est un H-demi-groupe si et seulement si les hypothèses du théorème 1 sont précisées de la façon suivante :

- $\Gamma$  est un groupe abélien périodique ou un groupe hamiltonien;
- $\beta$  n'est définie que sur  $M \times M$  et  $\beta(x, y) = 1$  implique  $\gamma x = \gamma y$ ,  $\alpha x = \alpha y$ .

Au sujet de ce corollaire, remarquons qu'il y a une imprécision dans le théorème 3.7 de [1]. Pour la définition du produit on doit écrire :

$$\begin{aligned} \text{si } e = f \in B, ab = a^2 = b^2 \text{ ou } ab = ae.be, \\ \text{si } e \in B, f \in B, e \neq f, ab = ae.bf, \end{aligned}$$

le reste du théorème est inchangé. Cet oubli se répercute dans le corollaire 3.6, où l'on doit écrire :

$$\text{si } e = f = o, \text{ on a } ab = ao.ob \text{ ou } ab = a^2 = b^2.$$

Le corollaire 2 résulte alors du théorème 1 et du théorème 3.7 de [1]. La construction des applications  $\alpha, \beta, \gamma$  peut être modifiée de la façon suivante :  $\alpha$  est toujours une surjection quelconque,  $\beta$  application de  $M \times M$  dans  $\{0, 1\}$  est telle que, pour tout  $x$  de  $M$ ,  $\beta(x, x) = 1$ , et  $\beta(x, y) = 0$  si  $\alpha x \neq \alpha y$ . Rien n'est changé pour la construction de  $\gamma$ , la restriction de  $\gamma$  à  $P$  est arbitraire.

*Corollaire 3.* —  $F$  est un H-demi-groupe abélien si et seulement si les hypothèses du théorème 1 sont précisées de la façon suivante :

- $\Gamma$  est un groupe abélien périodique,
- $\beta$  n'est définie que sur  $M \times M$  et  $\beta(x, y) = 1$  implique
 
$$\beta(y, x) = 1, \quad \gamma x = \gamma y, \quad \alpha x = \alpha y.$$

En effet  $xy = x^2$  doit entraîner  $yx = x^2$ .

Le demi-groupe unipotent  $F$  est donc caractérisé par la suite  $(M, N, P, \Gamma, \alpha, \beta, \gamma)$  que nous appellerons suite caractéristique de  $F$ .

*Théorème 2.* — Soient  $(M, N, P, \Gamma, \alpha, \beta, \gamma)$  et  $(M', N', P', \Gamma', \alpha', \beta', \gamma')$  les suites caractéristiques de deux  $H_\alpha$ -demi-groupes unipotents  $F$  et  $F'$ . Une application  $\varphi$  de  $F$  dans  $F'$  est un homomorphisme si et seulement si,

- 1)  $\varphi^{-1}(M') \leq M$ ; <sup>(1)</sup>
- 2)  $\varphi^{-1}(N') \leq M + N + P$ ;
- 3)  $\varphi^{-1}(P') \leq M + P$ ;
- 4)  $\varphi(\gamma x \gamma y) = \gamma' \varphi x \cdot \gamma' \varphi y$ ;
- 5)  $\forall x \in \varphi^{-1}(M'), \varphi \alpha x = \alpha' \varphi x$ ;
- 6)  $\forall x \in M - \varphi^{-1}(M'), \varphi \alpha x \in \Gamma'$ ;
- 7)  $\forall x \in \varphi^{-1}(M')$  et  $\forall y \in \varphi^{-1}(M' + P'), \beta(x, y) = \beta'(\varphi x, \varphi y)$ ;
- 8)  $\forall x \in \varphi^{-1}(M')$  et  $\forall y \in (M + P) - \varphi^{-1}(M' + P'), \beta(x, y) = 0$ .

REMARQUE. — Les propriétés 1, 2, 3 sont équivalentes aux propriétés

- suivantes :
- 1')  $\varphi(\Gamma) \leq \Gamma'$ ;
  - 2')  $\varphi(N) \leq N' + \Gamma'$ ;
  - 3')  $\varphi(P) \leq N' + P' + \Gamma$ .

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. — Supposons que  $\varphi$  soit un homomorphisme, vérifions successivement les propriétés :

- 1')  $\varphi(\Gamma)$  est un sous-groupe du demi-groupe  $F'$  qui ne contient qu'un seul idempotent, donc  $\varphi(\Gamma) \leq \Gamma'$ .
- 2') si  $x \in N, \exists y \in F$  avec  $x = y^2$ , d'où  $\varphi x = (\varphi y)^2 \in N' + \Gamma'$ .
- 3') si  $x \in P, x^2 \in \Gamma$  donc  $\varphi(x^2) = (\varphi x)^2 \in \Gamma'$  et  $\varphi x \in N' + P' + \Gamma'$ .
- 4)  $\varphi(xe \cdot ye) = \varphi x \varphi e \varphi y \varphi e = \varphi x e' \varphi y e' = \gamma' \varphi x \gamma' \varphi y$ .
- 5) si  $x \in \varphi^{-1}(M') \leq M, \alpha x = x^2, \varphi(\alpha x) = (\varphi x)^2 = \alpha' \varphi x$  car  $\varphi x \in M'$ .
- 6) si  $x \in M - \varphi^{-1}(M'), \alpha x = x^2, \varphi(\alpha x) = (\varphi x)^2 \in N' + \Gamma'$ , mais  $(\varphi x)^2 \in N'$  implique  $\varphi x \in M'$  ce qui est impossible.
- 7)  $\varphi^{-1}(M' + P') = \varphi^{-1}(M') \cup \varphi^{-1}(P') \leq M + P, \beta(x, y)$  est donc défini.

Si  $\beta(x, y) = 1, xy = x^2, \varphi x \varphi y = (\varphi x)^2 \in N'$  car par hypothèse  $\varphi x \in M'$  et par suite  $\beta'(\varphi x, \varphi y) = 1$ . Si  $\beta(x, y) = 0, xy \in \Gamma$  d'où  $\varphi x \varphi y \in \Gamma'$  et  $\beta'(\varphi x, \varphi y) = 0$ .

- 8) Supposons, dans ces hypothèses,  $\beta(x, y) = 1$ , on en déduit  $\varphi x \varphi y = (\varphi x)^2 \in N'$ , ceci est impossible, car  $\varphi y \in N' + \Gamma'$  ce qui, d'après le théorème 1, implique  $\varphi x \varphi y \in \Gamma'$ .

Inversement, soit  $\varphi$  une application de  $F$  dans  $F'$  qui vérifie les conditions du théorème. Prenons deux éléments  $x, y$  de  $F$ . Nous avons les possibilités suivantes :

(1)  $\leq$  est le signe d'inclusion.

- a)  $x \notin \mathbf{M}$ , alors, d'après 1,  $\varphi x \notin \mathbf{M}'$ , le théorème 1 donne  $xy = \gamma x \cdot \gamma y$ ,  $\varphi x \varphi y = \gamma' \varphi x \gamma' \varphi y$ ; d'où  $\varphi(xy) = \varphi x \varphi y$  d'après 4.
- b)  $x \in \mathbf{M}$ ,  $y \notin \mathbf{M} + \mathbf{P}$ , d'après 1 et 3,  $\varphi y \in \mathbf{M}' + \mathbf{P}'$ . On a comme dans a)  $xy = \gamma x \gamma y$ ,  $\varphi x \varphi y = \gamma' \varphi x \gamma' \varphi y$ .
- c)  $x \in \mathbf{M}$ ,  $y \in \mathbf{M} + \mathbf{P}$ ,  $\beta(x, y) = 0$ , alors, d'après 7,  $\beta'(\varphi x, \varphi y) = 0$  ou n'est pas défini; il en résulte  $xy = \gamma x \gamma y$ ,  $\varphi x \varphi y = \gamma' \varphi x \gamma' \varphi y$ .
- d)  $x \in \mathbf{M}$ ,  $y \in \mathbf{M} + \mathbf{P}$ ,  $\beta(x, y) = 1$ , d'après 8, ceci n'est possible que dans les deux cas suivants :
- d')  $x \in \varphi^{-1}(\mathbf{M}')$ ,  $y \in \varphi^{-1}(\mathbf{M}' + \mathbf{P}')$ , alors, d'après 7,  $\beta'(\varphi x, \varphi y) = 1$ ; d'où  $xy = \alpha x$ ,  $\varphi x \varphi y = \alpha'(\varphi x)$  et, d'après 5,

$$\varphi(xy) = \varphi(\alpha x) = \alpha'(\varphi x) = \varphi x \varphi y;$$

- d'')  $x \in \mathbf{M} - \varphi^{-1}(\mathbf{M}')$ , alors  $xy = \alpha x$ ,  $\varphi x \varphi y = \gamma' \varphi x \gamma' \varphi y$ , d'où, d'après 6,  $\varphi(xy) = \varphi(\alpha x)$  et  $\varphi(xy) = \gamma' \varphi(\alpha x)$ .

L'étude du cas a montré que  $\varphi e$  est égal à l'idempotent  $e'$  de  $\mathbf{F}'$ , on déduit alors de 4,  $\varphi(\gamma \alpha x \gamma e) = \gamma' \varphi \alpha x \cdot \gamma' \varphi e$ , c'est-à-dire  $\varphi(\gamma \alpha x) = \gamma' \varphi \alpha x$ . D'autre part, d'après le théorème 1, la relation  $xy = \alpha x$  implique  $\gamma x = \gamma y$  et  $\gamma \alpha x = (\gamma x)^2 = \gamma x \gamma y$ . On a donc  $\varphi(xy) = \gamma' \varphi \alpha x = \varphi(\gamma \alpha x) = \varphi(\gamma x \gamma y) = \gamma' \varphi x \gamma' \varphi y = \varphi x \varphi y$ .

$\varphi$  est bien un homomorphisme.

*Corollaire 4.* — Soient  $(\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{P}, \Gamma, \alpha, \beta, \gamma)$  et  $(\mathbf{M}', \mathbf{N}', \mathbf{P}', \Gamma', \alpha', \beta', \gamma')$  les suites caractéristiques de deux  $H_s$ -demi-groupes unipotents  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{F}'$ . Une bijection  $\varphi$  de  $\mathbf{F}$  sur  $\mathbf{F}'$  est un isomorphisme si et seulement si :

- 1)  $\varphi(\Gamma) = \Gamma'$ ;
- 2)  $\varphi(\mathbf{M}) = \mathbf{M}'$ ;
- 3)  $\varphi(\mathbf{N}) = \mathbf{N}'$ ;
- 4)  $\varphi(\mathbf{P}) = \mathbf{P}'$ ;
- 5)  $\forall x, y \in \mathbf{F}$ ,  $\varphi(\gamma x \cdot \gamma y) = \gamma' \varphi x \cdot \gamma' \varphi y$ ;
- 6)  $\forall x \in \mathbf{M}$ ,  $\varphi \alpha x = \alpha' \varphi x$ ;
- 7)  $\forall x \in \mathbf{M}$ ,  $\forall y \in \mathbf{M} + \mathbf{P}$ ,  $\beta(x, y) = \beta'(\varphi x, \varphi y)$ .

Si  $\varphi$  est un isomorphisme, les conditions 1', 2', 3' de la remarque qui suit le théorème 2 appliquées à  $\varphi$  et les conditions 1, 2, 3, du théorème appliquées à l'homomorphisme réciproque  $\varphi^{-1}$  donnent respectivement :

$$\begin{aligned} \varphi(\Gamma) &\leq \Gamma', \quad \varphi(\mathbf{N}) \leq \mathbf{N}' + \Gamma', \\ \varphi(\mathbf{P}) &\leq \mathbf{N}' + \mathbf{P}' + \Gamma', \\ \varphi(\mathbf{M}) &\leq \mathbf{M}', \quad \varphi(\mathbf{N}) \leq \mathbf{M}' + \mathbf{N}' + \mathbf{P}', \quad \varphi(\mathbf{P}) \leq \mathbf{M}' + \mathbf{P}'. \end{aligned}$$

On en déduit  $\varphi(\Gamma) \leq \Gamma'$ ,  $\varphi(\mathbf{M}) \leq \mathbf{M}'$ ,  $\varphi(\mathbf{N}) \leq \mathbf{N}'$ ,  $\varphi(\mathbf{P}) \leq \mathbf{P}'$ , comme  $\varphi$  est surjective, les conditions 1, 2, 3, 4 du corollaire sont bien remplies. Les propositions 5, 6, 7 du corollaire résultent alors des conditions 4, 5, 7 du théorème.

Inversement, si  $\varphi$  est une bijection de  $F$  sur  $F'$  vérifiant les propriétés du corollaire 4, les conditions du théorème 2 sont remplies car les ensembles  $M - \varphi^{-1}(M')$  et  $(M + P) - \varphi^{-1}(M' + P')$  sont vides.

Remarque. — On obtient comme cas particuliers du théorème 2 et du corollaire 4 les théorèmes 3 et 4 de [2]. Dans le théorème 4 de [2], la condition 7 est superflue, en effet, avec les notations de [2], si  $\Sigma$  est une bijection qui vérifie  $1, x\Sigma \notin A'$  implique  $x \notin A$  d'où  $x^2 = e$  et  $x^2\Sigma = e'$  d'après 4.

## 2. $H_a$ -demi-groupes dont le demi-groupe des idempotents est rectangulaire.

Soit  $D$  un  $H_a$ -demi-groupe quelconque, l'ensemble  $E$  des idempotents de  $D$  à la structure indiquée par le théorème 2.2 de [1];  $E = B + \bigcup_{i \in I} B_i$ , où  $B$  est un demi-groupe rectangulaire et les  $B_i, i \in I$ , sont des zéro-demi-groupes à gauche. D'après le théorème 3.5 de [1], les ensembles  $\mathfrak{B} = \bigcup_{e \in B} F_e$ ,  $\mathfrak{B}_i = \bigcup_{e \in B_i} F_e$  sont des sous-demi-groupes de  $D$ . Nous allons d'abord indiquer le moyen de construire ces demi-groupes.

Considérons  $\mathfrak{B} = \bigcup_{e \in B} F_e$ . D'après les théorèmes 3.5 et 3.6 de [1], les fuseaux  $F_e$  sont des  $H_a$ -demi-groupes unipotents dont la structure est déterminée par les suites caractéristiques  $(M_e, N_e, P_e, \Gamma_e, \alpha_e, \beta_e, \gamma_e)$  (théorème 1). D'après un théorème de Miller-Clifford, rappelé dans [1],  $\bigcup_{e \in B} \Gamma_e$  est un sous-demi-groupe de  $\mathfrak{B}$  isomorphe au produit direct de  $B$  par un groupe  $\Gamma$ . Pour chaque  $e \in B$ , il existe un isomorphisme  $\delta_e$  de  $\Gamma_e$  sur  $\Gamma$ . L'ensemble des applications  $\delta_e \circ \gamma_e$  définit une application  $\gamma$  de  $\mathfrak{B}$  dans  $\Gamma$ .

Soient  $a, b$  deux éléments de  $\mathfrak{B}$ , d'après les propriétés déduites du théorème 3.5 dans [1], si  $a \in F_e$ , si  $b \in F_f$  et si  $ab \notin \Gamma_{ef}$ ,  $ab = a^2 = \alpha_e a$ . Ceci n'est possible que si  $\{e, f\}$  est un zéro-demi-groupe à gauche et si  $a \in M_e, b \in M_f + P_f$ . En effet, si  $a \notin M_e, a^2 \in \Gamma_e = \Gamma_{ef}$ , si  $b \notin M_f + P_f, b = cd, ab = (ac)d \in \Gamma_e$  car  $ac \notin M_e$ .

Si  $ef = e$ , nous pouvons définir une application

$$\beta_{e,f} \text{ de } M_e \times (M_f + P_f) \text{ dans } \{0, 1\} \text{ par } \beta_{e,f}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } ab \notin \Gamma_e \\ 0 & \text{si } ab \in \Gamma_e \end{cases}$$

On a  $\beta_{e,e} = \beta_e$ , si  $\beta_{e,f}(a, b) = 1$  on en déduit

$$ab = a^2, ae \cdot efb = (ae)^2 \text{ dans } \Gamma_e, \text{ d'où } efb = ea \text{ et } \gamma(b) = \gamma(a).$$

On obtient donc le théorème suivant :

**Théorème 3.** — Soit un  $H_a$ -demi-groupe ayant comme ensemble d'idempotens un demi-groupe rectangulaire  $B$ . Il existe des familles de sous-ensembles de  $\mathfrak{B}$  disjoints deux à deux, indexées par les éléments de  $B$ ,  $\{M_e, e \in B\}, \{N_e, e \in B\}, \{P_e, e \in B\}, \{\Gamma_e, e \in B\}$ ,

un groupe périodique  $\Gamma$  et des familles de fonctions :

$$\{\alpha_e, e \in B\}, \{\beta_{e,f}, e, f \in B, ef = e\}, \{\gamma_e, e \in B\}, \{\delta_e, e \in B\}$$

tels que, pour tout  $e \in B$ , tout  $f \in B$  avec  $ef = e$ ,  $\alpha_e$  soit une surjection de  $M_e$  sur  $N_e$ ,  $\beta_{e,f}$  envoie  $M_e \times (M_f + P_f)$  dans  $\{0, 1\}$ ,  $\gamma_e$  applique  $F_e = M_e + N_e + P_e + \Gamma_e$  sur  $\Gamma_e$ ,  $\delta_e$  soit un isomorphisme de  $\Gamma_e$  sur  $\Gamma$ . Soit  $\gamma$  l'application de  $\mathfrak{B}$  dans  $\Gamma$  définie par l'ensemble des  $\delta_e \circ \gamma_e$ . Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

- 1)  $\forall e \in B, \forall x \in M_e, \beta_{e,e}(x, x) = 1$ ;
- 2)  $\beta_{e,f}(x, y) = 1$  implique  $\gamma x = \gamma y$ ;
- 3)  $\gamma(\alpha_e x) = (\gamma x)^2$ ;
- 4)  $\forall e \in B, \forall x \in \Gamma_e, \gamma_e(x) = x$ .

Si  $x \in F_e, y \in F_f$ , le produit  $xy$  est égal à  $\alpha_e x$  si  $\beta_{e,f}(x, y) = 1$ , à  $\delta_e^{-1}(\gamma x \cdot \gamma y)$  autrement.

*Théorème 4.* — Soient  $B$  un demi-groupe rectangulaire,  $\Gamma$  un groupe périodique,  $\{M_e, e \in B\}, \{N_e, e \in B\}, \{P_e, e \in B\}$  des familles d'ensembles disjoints deux à deux et tels que, pour tout  $e \in B$ , la puissance de  $N_e$  soit inférieure ou égale à celle de  $M_e$ . Donnons-nous de plus, pour tout  $e \in B$ , une surjection  $\alpha_e$  de  $M_e$  sur  $N_e$ , pour tout couple  $e, f$  d'éléments de  $B$  tels que  $ef = e$  une application  $\beta_{e,f}$  de  $M_e \times (M_f + P_f)$  dans  $\{0, 1\}$ , et une application  $\gamma$  de  $A = \bigcup_{e \in B} M_e + \bigcup_{e \in B} N_e + \bigcup_{e \in B} P_e$  dans  $\Gamma$ . Imposons à ces applications les propriétés suivantes :

- 1)  $\forall x \in M_e, \beta_{e,e}(x, x) = 1$ ;
- 2)  $\beta_{e,f}(x, y) = 1$  entraîne  $\gamma x = \gamma y$ ;
- 3)  $\gamma(\alpha_e x) = (\gamma x)^2$ .

Considérons  $\mathfrak{B} = A + B \times \Gamma$ , prolongeons  $\gamma$  à  $\mathfrak{B}$  tout entier en posant  $\forall (e, x) \in B \times \Gamma, \gamma(e, x) = x$ ; désignons par  $F_e$  la somme  $M_e + N_e + P_e + \{e\} \times \Gamma$ .

L'ensemble  $\beta$  muni de la loi interne suivante :

$$x \in F_e, y \in F_f, x * y = \begin{cases} \alpha_e x & \text{si } \beta_{e,f}(x, y) = 1, \\ (ef, \gamma x \gamma y) & \text{autrement,} \end{cases}$$

est un  $H_a$ -demi-groupe.

Prenons trois éléments  $x, y, z$  de  $\beta$ ,  $x \in F_e, y \in F_f, z \in F_g$ .

Si  $x * y = (ef, \gamma x \gamma y)$ , on a  $(x * y) * z = (efg, \gamma x \gamma y \gamma z)$ .

Si  $x * y = \alpha_e x$ ,  $\beta_{e,f}(x, y) = 1$ ,  $ef = e$ ,  $\gamma x = \gamma y$ , alors on en déduit  $(x * y) * z = (\alpha_e x) * z = (eg, \gamma(\alpha_e x) \gamma z) = (efg, \gamma x \gamma y \gamma z)$ .

De même on a toujours  $x * (y * z) = (efg, \gamma x \gamma y \gamma z)$ .

On vérifie que  $\beta$  est un  $H_a$ -demi-groupe en utilisant le théorème 3.6 de [1] par une démonstration analogue à celle du théorème 1.

Les théorèmes 3 et 4 donnent la forme générale des  $H_a$ -demi-groupes ayant comme ensemble d'idempotents un sous-demi-groupe rectangulaire.

Dans le théorème 4, on a identifié tout élément  $x \in \Gamma_e$  avec son image  $(e, \delta_e x)$  dans  $B \times \Gamma$ . Les applications  $\alpha_e, \beta_{e,f}$  étant données,  $\gamma$  peut être construite par le procédé indiqué après le théorème 1.

*Corollaire 5.* — Si  $B$  est un zéro-demi-groupe à gauche et si  $\Gamma = \{1\}$ , le théorème 4 donne la construction des demi-groupes  $\mathfrak{B}_i$  définis au début du 2°. Dans ce cas on retrouve également les théorèmes 5 et 6 de [2].

On peut remarquer directement, d'après le théorème 3.6 de [1], que les  $\mathfrak{B}_i$  sont des  $\rho$ -demi-groupes [2] puisque le produit  $ab$  appartient à  $(a)$ . Dans  $\mathfrak{B}_i$  on identifie  $B_i \times \Gamma$  avec  $B_i$ , l'application constante  $\gamma$  ne joue plus aucun rôle.

*Corollaire 6.* —  $\mathfrak{B}$  est un H-demi-groupe si et seulement si les hypothèses des théorèmes 3 et 4 sont précisées de la manière suivante :

—  $\Gamma$  est un groupe abélien périodique ou un groupe hamiltonien.

$\beta_{e,f}$  n'est défini que pour  $e = f$ ,  $\beta_{e,e}$  envoie  $M_e \times M_e$  dans  $\{0, 1\}$ ,  $\beta_{e,e}(x, y) = 1$  entraîne  $\gamma x = \gamma y$ ,  $\alpha_e x = \alpha_e y$ .

Ce corollaire est une conséquence directe du théorème précédent et du corollaire 3.

*Théorème 5.* — Soient  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{B}'$  deux demi-groupes ayant une structure décrite par le théorème 4 (on utilise pour  $\mathfrak{B}'$  les notations de  $\mathfrak{B}$  accentuées). Une application  $\varphi$  de  $\mathfrak{B}$  dans  $\mathfrak{B}'$  est un homomorphisme si et seulement si,

1) la restriction de  $\varphi$  à  $B \times \Gamma$  est de la forme  $\psi \times \xi$ , où  $\psi$  est un homomorphisme de  $B$  dans  $B'$ ,  $\xi$  une application de  $\Gamma$  dans  $\Gamma'$ ;

$$2) \forall x, y \in \mathfrak{B}, \xi(\gamma x \gamma y) = \gamma' \varphi x \cdot \gamma' \varphi y;$$

$$3) \forall e \in B, \varphi(F_e) \leq F'_{\psi e};$$

$$4) \forall e \in B, \varphi(N_e) \leq N'_{\psi e} + \{\psi e\} \times \Gamma;$$

$$5) \forall e \in B, \varphi(P_e) \leq F'_{\psi e} - M'_{\psi e};$$

$$6) \forall x \in M_e \cap \varphi^{-1}(M'_{\psi e}), \varphi \alpha_e x = \alpha'_{\psi e}(\varphi x);$$

$$7) \forall x \in M_e \cap \varphi^{-1}(M'_{\psi e}), \varphi \alpha_e x \in \{\psi e\} \times \Gamma';$$

$$8) \text{ si } ef = e, \forall x \in M_e \cap \varphi^{-1}(M'_{\psi e}), \forall y \in (M_f + P_f) \cap \varphi^{-1}(M'_{\psi f} + P'_{\psi f})$$

$$\beta_{e,f}(x, y) = \beta_{\psi e, \psi f}(\varphi x, \varphi y);$$

$$9) \text{ si } ef = e, \forall x \in M_e \cap \varphi^{-1}(M'_{\psi e}), \forall y \in (M_f + P_f) \cap \varphi^{-1}(M'_{\psi f} + P'_{\psi f})$$

$$\beta_{e,f}(x, y) = 0.$$

Supposons que  $\varphi$  soit un homomorphisme,  $\varphi(e, 1)$  est un idempotent de  $\mathfrak{B}'$  dont  $\varphi(e, 1) = (\psi e, 1)$ ; la restriction de  $\varphi$  à  $B \times \{1\}$  définit un homomorphisme  $\psi$  de  $B$  dans  $B'$ . L'image par  $\varphi$  de  $\{e\} \times \Gamma$  est un sous-groupe de  $\mathfrak{B}'$  ayant  $\varphi(e, 1)$  comme élément unité,  $\varphi(\{e\} \times \Gamma) \leq \{\psi e\} \times \Gamma'$ . On peut poser  $\varphi(e, x) = (\psi e, \xi_e x)$ ,  $\xi_e$  est un homomorphisme de  $\Gamma$  dans  $\Gamma'$ . Si  $ef = e$ , on a  $\varphi[(e, x)(f, y)] = \varphi(e, xy)$ ,  $(\psi e, \xi_e x)(\psi f, \xi_f y) = (\psi e, \xi_e(xy))$ ,  $(\psi e, \xi_e x \cdot \xi_f y) = (\psi e, \xi_e x \cdot \xi_e y)$  d'où  $\xi_f y = \xi_e y$ .

De même, si  $eg = g$ , on en déduit  $\xi_e x = \xi_e x$ ,  $B$  étant un demi-groupe rectangulaire, il en résulte,  $\forall x \in \Gamma, \forall e \in B, \forall f \in B, \xi_e x = \xi_f x = \xi x$ .

Pour  $a = (e, x)$ ,  $b = (f, y)$  on a  $\gamma a = x$ ,  $\gamma b = y$ , on en déduit  $\xi(\gamma a \cdot \gamma b) = \xi(xy) = \xi x \xi y = \gamma' \varphi a \cdot \gamma' \varphi b$ . Pour  $a \in F_e$ ,  $b \in F_f$ , on a  $(e, 1) a = (e, \gamma a)$ ,  $(f, 1) b = (f, \gamma b)$ ,  $(\varphi e, 1) \varphi a = (\psi e, \gamma' \varphi a)$   
 $(\psi f, 1) \varphi b = (\psi f, \gamma' \varphi b)$ , on en déduit  
 $\varphi [(e, 1) a (f, 1) b] = (\psi e, 1) \varphi a (\psi f, 1) \varphi b$ , d'où  $\xi(\gamma a \gamma b) = \gamma' \varphi a \cdot \gamma' \varphi b$ .

Si  $x$  est un élément de  $F_e$ , il existe un entier  $n$  tel que  $x^n = (e, 1)$  ce qui donne  $(\varphi x)^n = (\psi e, 1)$  et  $\varphi x \in F'_{\psi e}$ .

On vérifie les autres propriétés de la partie directe et la réciproque de ce théorème par une démonstration analogue à celle du théorème 2.

Précisions l'homomorphisme  $\psi$  de  $B$  dans  $B'$ , si on écrit  $B = L \times R$ ,  $B' = L' \times R'$  où  $L, L'$  sont des zéro-demi-groupes à gauche,  $R$  et  $R'$  des zéro-demi-groupes à droite,  $\psi$  est de la forme  $\psi_1 \times \psi_2$ ,  $\psi_1$  [resp.  $\psi_2$ ] étant une application quelconque de  $L$  dans  $L'$  [resp. de  $R$  dans  $R'$ ]. En effet, posons  $\psi(l, r) = (l', r')$ ,  $\psi(l_1, r) = (l'_1, r'_1)$ , on obtient  $\psi(l_1, r) = \psi[(l_1, r) (l, r)] = (l'_1, r'_1) (l', r') = l'_1, r'_1$ ;  $\psi(L \times \{r\}) \leq L' \times \{r'\}$ , on peut écrire  $r' = \psi_2 r$ ,  $\psi_2$  est une application de  $R$  dans  $R'$ . On a de même  $\psi(\{l\} \times R) \leq \{l'\} \times R'$ , d'où une application  $\psi_1$  de  $L$  dans  $L'$ ,  $\psi_1(l) = l'$ . En définitive,  $\psi(l, r) = (\psi_1 l, \psi_2 r)$ .

Inversement, considérons deux applications quelconques,  $\psi_1$  de  $L$  dans  $L'$ ,  $\psi_2$  de  $R$  dans  $R'$ ,  $\psi = \psi_1 \times \psi_2$  est un homomorphisme de  $L \times R$  dans  $L' \times R'$ . En effet,  $\psi(l, r) \psi(l_1, r_1) = (\psi_1 l, \psi_2 r) (\psi_1 l_1, \psi_2 r_1) = \psi_2 l, \psi_2 r_1 = \psi(l, r_1)$   
 $= \psi[(l, r) (l_1, r_1)]$ .

*Corollaire 7.* — Soient  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{B}'$  deux demi-groupes ayant une structure décrite par le théorème 4. Une bijection  $\varphi$  de  $\mathfrak{B}$  sur  $\mathfrak{B}'$  est un isomorphisme si et seulement si,

- 1) la restriction de  $\varphi$  à  $B \times \Gamma$  est de la forme  $\psi \times \xi$  où  $\psi$  [resp.  $\xi$ ] est un isomorphisme de  $B$  sur  $B'$  [resp.  $\Gamma$  sur  $\Gamma'$ ];
- 2)  $\forall x, y \in B, \xi(\gamma x \gamma y) = \gamma' \varphi x \cdot \gamma' \varphi y$ ;
- 3)  $\forall e \in B, \varphi(M_e) = M'_{\psi e}$ ;
- 4)  $\forall e \in B, \varphi(N_e) = N'_{\psi e}$ ;
- 5)  $\forall e \in B, \varphi(P_e) = P'_{\psi e}$ ;
- 6)  $\forall e \in B, \forall x \in M_e, \varphi \alpha_e x = \alpha'_{\psi e} \varphi x$ ;
- 7) si  $ef = e, \forall x \in M_e, \forall y \in M_f + P_f, \beta_{e, f}(x, y) = \beta'_{\psi e, \psi f}(\varphi x, \varphi y)$

Ce corollaire est une conséquence du théorème précédent et du corollaire 4 si l'on remarque que la troisième condition du théorème jointe au fait que  $\varphi$  est surjectif montre que la restriction de  $\varphi$  à  $F_e$  est un isomorphisme de  $F_e$  sur  $F'_{\psi e}$ .

### 3. $H_e$ -demi-groupes quelconques.

Soit  $D$  un  $H_e$ -demi-groupe quelconque,  $D = \mathfrak{B} + \bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ , notations du début du 2. La structure de  $\mathfrak{B}$  est définie par le théorème 3, celle des  $\mathfrak{B}_i$  par le par le corollaire 5. Dans la suite de cet exposé, on identifiera  $B$  avec  $B \times \{1\}$ ,

on écrira donc arbitrairement  $e$  ou  $(e, 1)$  pour désigner le même idempotent de  $\mathfrak{B}$ . D'après le théorème 3.5 de [1], le produit de deux éléments de  $D$  est bien déterminé, sauf dans le cas où  $a \in F_e$ ,  $b \in F_f$ ,  $e \in B$ ,  $f \in B_i$ ,  $ef = e$ ; on a alors  $ab \in (a)$ . En particulier,  $eb \in (e) = \{e\}$ ; si  $ab \in \Gamma_e$ ,  $ab = eab = aeb = ae$ .

Supposons  $af = a \notin \Gamma_e$ , soit  $g$  un élément de  $B_i$ ,  $c$  un élément de  $F_e$ , on a  $fg = f$ ,  $ac = af \cdot c = af \cdot gc = af \cdot g = af = a$  car  $gc \in \Gamma_e = \{g\}$ . Inversement, la relation  $ac = a$  donne  $ac^n = a$  d'où  $ag = a$  et  $af = a$ . De  $af = a$ , on déduit  $a^2 = af \cdot a = a \cdot fa$ , mais  $fa = ea$ , d'où  $a^2 = a \cdot ea = ea^2$ ,  $a^2 \in \Gamma_e$ ,  $a \in N_e + P_e$ . Si  $a \in N_e$ ,  $a = a'^2$  avec  $a' \in M_e$ , mais alors  $a'f = a'^2$  ou  $a'f \in \Gamma_e$  ce qui dans les deux cas donne  $af = a'^2f \in \Gamma_e$ . La relation  $af = a \notin \Gamma_e$  n'est possible que si  $a$  appartient à  $P_e$ . Pour un couple  $(e, i)$ ,  $e \in B$ ,  $i \in I$ , tel que  $e \cdot B_i = e$ , on peut définir une application  $\mu_{e,i}$  de  $P_e$  dans  $\{0, 1\}$  par

$$\begin{aligned} \mu_{e,i}(a) &= 1 && \text{si } af \notin \Gamma_e \text{ pour un élément } f \text{ de } B_i, \\ \mu_{e,i}(a) &= 0 && \text{si } af \in \Gamma_e \text{ pour un élément } f \text{ de } B_i. \end{aligned}$$

Si  $b \in \mathfrak{B}_i$ ,  $ab = a$  si  $\mu_{e,i}(a) = 1$ ,  $ab = ae$  si  $\mu_{e,i}(a) = 0$ .

Si  $j$  est un indice différent de  $i$  et tel que  $e \cdot B_j = e$ , prenons  $f \in B_i$ ,  $g \in B_j$ , le produit  $fg$  appartient à  $B$ ; les relations  $af = a$  et  $ag = a$  ne peuvent avoir lieu simultanément pour le même élément  $a$  de  $P_e$ , en effet, on en déduirait  $afg = a$ , alors que  $a \cdot fg = ae \cdot fg \in \Gamma_{ef}$ . Donc, si  $i \neq j$ ,  $\mu_{e,i}^{-1}(1) \cap \mu_{e,j}^{-1}(1)$  est vide.

Soient  $a$  un élément de  $F_e$ ,  $b$  un élément de  $F_f$ , supposons  $ab = a^2 \notin \Gamma_e$ , ceci n'est possible que si  $a \in M_e$ ,  $b \in M_f + P_f$ ; en effet, si  $b \in N_f + \Gamma_f$ ,  $b = cd$ , or  $ac = a^2$  ou  $ac \in \Gamma_e$  ce qui donne  $ab \in \Gamma_e$ . En particulier,  $af = ae$ , la relation  $ab = a^2$  donne alors  $abf = a^2f = a^2e = (ae)^2$ , d'autre part  $abf = a \cdot bf = af = ae$ , d'où  $ae = (ae)^2$  et  $ae = e$ .

On peut définir pour  $e \in B$ ,  $f \in B_i$  tels que  $ef = e$ , une application  $\beta_{e,f}$  de  $M_e \cap \gamma_e^{-1}(e) \times (M_f + P_f)$  dans  $\{0, 1\}$  par

$$\beta_{e,f}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } ab \notin \Gamma_e, \\ 0 & \text{si } ab \in \Gamma_e. \end{cases}$$

Si  $a \in M_e$ ,  $b \in M_f + P_f$ ,  $ab = a^2$  si  $\beta_{e,f}(a, b) = 1$ ,  $ab = ae$  dans les autres cas.

Des remarques précédentes et du théorème 3.6 de [1] on déduit le :

*Théorème 7.* — Soient  $D$  un  $H_e$ -demi-groupe,  $E = B + \bigcup_{i \in I} B_i$  l'ensemble de ses idempotents,  $\mathfrak{B} = \bigcup_{e \in B} F_e$ ,  $\mathfrak{B}_i = \bigcup_{e \in B_i} F_e$  ( $F_e$  est le fuseau contenant l'idempotent  $e$ ). Le demi-groupe  $D$  est la réunion de  $\mathfrak{B}$  et des  $\mathfrak{B}_i$  ( $i \in I$ ),  $\mathfrak{B}$  et les  $\mathfrak{B}_i$  sont des  $H_e$ -demi-groupes dont la structure est décrite par le théorème 3. Pour chaque couple  $(e, i) \in B \times I$ , tel que  $e \cdot B_i = e$ , il existe une application  $\mu_{e,i}$  de  $P_e$  dans  $\{0, 1\}$ , si  $i \neq j$ ,  $\mu_{e,i}^{-1}(1) \cap \mu_{e,j}^{-1}(1) = \emptyset$ . Pour chaque couple  $(e, f) \in B \times \bigcup_{i \in I} B_i$ , tel que  $ef = e$ , il existe une application  $\beta_{e,f}$  de  $M_e \cap \gamma_e^{-1}(e) \times (M_f + P_f)$  dans  $\{0, 1\}$ .

Soient  $a \in F_e$ ,  $b \in F_f$  deux éléments de  $D$ , leur produit est donné par les règles suivantes :

- si  $e$  et  $f$  appartiennent à  $B$  ou au même  $B_i$ ,  $ab$  est défini par le théorème 3;
- si  $e \in B_i$ ,  $f \in B_j$ ,  $i \neq j$ ,  $ab = ef$ ;
- si  $e \in B$ ,  $f \in B_i$  et si  $ef \neq e$ ,  $ab = \gamma_a \cdot fef$ ,  $ba = fef \cdot \gamma_a$ ;
- si  $e \in B$ ,  $f \in B_i$  et si  $ef = e$ ,
  - si  $\mu_{e,i}(a) = 1$ ,  $ab = a$ ,
  - si  $\beta_{e,i}(a, b) = 1$ ,  $ab = \alpha_a$ ,
  - $ab = \gamma_a$  dans les autres cas,
  - $ba = fe \cdot \gamma_a$  dans tous les cas.

*Théorème 8.* — Considérons un demi-groupe  $\mathfrak{B}$  décrit par le théorème 4 (on identifie  $B \times \{1\}$  avec  $B$ ) et une collection  $\mathfrak{B}_i$ ,  $i \in I$ , de demi-groupes disjoints décrits par le corollaire 5. Soit  $D = \mathfrak{B} + \bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ . Désignons par 1 un indice de  $I$ , munissons  $E = B + B_1 + \bigcup_{i \in -1\} B_i$ , d'une structure de demi-groupes d'idempotents décrite par le théorème 2.2  $b$  de [1]. Donnons-nous de plus :

- pour tout couple  $(e, i) \in B \times I$ , tel que  $e \cdot B_i = e$ , une application  $\mu_{e,i}$  de  $P_e$  dans  $\{0, 1\}$ , imposons à ces applications la relation suivante :  
 $i \neq j$  implique  $\mu_{e,i}^{-1}(1) \cap \mu_{e,j}^{-1}(1) = \emptyset$ ;
  - pour tout couple  $(e, f) \in B \times \bigcup_{i \in I} B_i$ , tel que  $ef = e$ , une application  $\beta_{e,i}$  de  $M_e \cap \gamma^{-1}(1) \times (M_f + P_f)$  dans  $\{0, 1\}$ .
- Soient  $a, b$  deux éléments de  $D$ ,  $a \in F_e$ ,  $b \in F_f$ ,
- si  $e \in B$ ,  $f \in B$ , ou si  $e \in B_i$ ,  $f \in B_i$ ,  $a * b$  est défini par le théorème 4 ;
  - si  $e \in B_i$ ,  $f \in B_j$ ,  $i \neq j$ , posons  $a * b = ef$  (calculé dans  $E$ ) ;
  - si  $e \in B$ ,  $f \in B_i$ ,  $ef \neq e$ , posons  $a * b = (ef, \gamma a)$ ,  $b * a = (fe, \gamma a)$  ;
  - si  $e \in B$ ,  $f \in B_i$ ,  $ef = e$ , posons  $b * a = (fe, \gamma a)$ , et

$$\begin{aligned} a * b &= a \text{ si } \mu_{e,i}(a) = 1, \\ a * b &= \alpha_a \text{ si } \beta_{e,i}(a, b) = 1, \\ a * b &= (e, \gamma a) \text{ dans les autres cas.} \end{aligned}$$

L'ensemble  $D$  muni de cette loi interne est un  $H_a$ -demi-groupe.

D'après le théorème 3.6 de [1], il suffit de vérifier que  $D$  est un demi-groupe. Soient  $a, b, c$  trois éléments de  $D$ , appartenant respectivement aux fuseaux  $F_e, F_f, F_g$ , seuls les cas suivants sont à envisager :

- $e \in B$ ,  $f \in B$ ,  $g \in B_i$ .

$$\begin{aligned} a * b &= \begin{cases} (ef, \gamma a \gamma b) \\ \alpha_a a, \gamma a = \gamma b, \gamma(\alpha_a a) = (\gamma a)^2 \end{cases} & (a * b) * c &= \begin{cases} (efg, \gamma a \gamma b) \\ (eg, \gamma(\alpha_a a)) = (efg, \gamma a \gamma b) \end{cases} \\ b * c &= \begin{cases} b, \text{ si } \mu_{f,i}(b) = 1, \\ \alpha_f b, \text{ si } \beta_{f,i}(b, c) = 1, \\ (fg, \gamma b) \end{cases} & a * (b * c) &= \begin{cases} (ef, \gamma a \gamma b) = (efg, \gamma a \gamma b) \text{ car } fg = g \\ (ef, \gamma a (\gamma b)^2) = (efg, \gamma a \gamma b) \text{ car } \gamma b = 1 \\ (efg, \gamma a \gamma b) \end{cases} \end{aligned}$$

—  $e \in B, f \in B_i, g \in B.$

$$a * b = \begin{cases} a & \text{si } \mu_{e,i}(a) = 1 \\ \alpha_e a, & \text{si } \beta_{e,i}(a, b) = 1, \\ (ef, \gamma a) \end{cases} \quad (a * b) * c = \begin{cases} (eg, \gamma a \gamma c) = (efg, \gamma a \gamma c) \\ (eg, \gamma c) = (efg, \gamma a \gamma c) & \text{car } \gamma a = 1 \\ (efg, \gamma a \gamma c) \end{cases}$$

$$b * c = (fg, \gamma c), \quad a * (b * c) = (efg, \gamma a \gamma c).$$

—  $e \in B, f \in B_i, g \in B_j.$

$$a * b = \begin{cases} a & \text{si } \mu_{e,i}(a) = 1 \\ \alpha_e a & \text{si } \beta_{e,i}(a, b) = 1, \\ (ef, \gamma a) \end{cases} \quad (a * b) * c = \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ (eg, \gamma a) & \text{si } i \neq j \text{ car } \mu_{e,i}^{-1}(1) \cap \mu_{e,j}^{-1}(1) = \emptyset \\ (eg, \gamma \alpha_e a) = (efg, \gamma a) \\ (efg, \gamma a) \end{cases}$$

$$b * c = fg \text{ et } a * (b * c) = (efg, \gamma a) \text{ ou}$$

$$b * c = \alpha_i b \text{ si } i = j \text{ et si } \beta_{i,j}(b, c) = 1,$$

$$a * (b * c) = a * \alpha_i b = \begin{cases} a & \text{si } \mu_{e,i}(a) = 1 \\ (ef, \gamma a) = (efg, \gamma a) & \text{autrement.} \end{cases}$$

—  $e \in B_i, f \in B, g \in B.$

$$a * b = (ef, \gamma b), \quad (a * b) * c = (efg, \gamma b \gamma c),$$

$$b * c = \begin{cases} \alpha_i b & \text{si } \beta_{i,j}(b, c) = 1 \\ (fg, \gamma b \gamma c) \end{cases}, \quad a * (b * c) = \begin{cases} (efg, (\gamma b)^2) = (efg, \gamma b \gamma c) \\ (efg, \gamma b \gamma c) \end{cases}$$

—  $e \in B_i, f \in B, g \in B_j.$

$$a * b = (ef, \gamma b), \quad (a * b) * c = (efg, \gamma b)$$

$$b * c = \begin{cases} b & \text{si } \mu_{f,j}(b) = 1 \\ \alpha_f b & \text{si } \beta_{f,j}(b, c) = 1, \\ (fg, c) \end{cases} \quad a * (b * c) = \begin{cases} (ef, \gamma b) = (efg, \gamma b) \\ (ef, 1) = (efg, \gamma b) \\ (efg, \gamma b) \end{cases}$$

—  $e \in B_i, f \in B_j, g \in B.$

$$a * b = \begin{cases} \alpha_e a, & \text{si } i = j \text{ et } \beta_{e,i}(a, b) = 1, \\ ef \end{cases} \quad (a * b) * c = (efg, \gamma c)$$

$$b * c = (fg, \gamma c), \quad a * (b * c) = (efg, \gamma c)$$

—  $e \in B_i, f \in B_j, g \in B_k.$

$$a * b = \begin{cases} \alpha_e a, & \text{si } i = j \text{ et } \beta_{e,i}(a, b) = 1, \\ ef \end{cases} \quad (a * b) * c = efg$$

$$b * c = \begin{cases} \alpha_f b, & \text{si } j = k \text{ et } \beta_{f,j}(b, c) = 1, \\ gf \end{cases} \quad a * (b * c) = efg.$$

*Corollaire 8.* — Considérons un demi-groupe  $\mathfrak{B}$  décrit par le corollaire 6, une collection  $\mathfrak{B}_i, i \in I$ , de demi-groupe disjoints décrits par le corollaire 2 dans lequel on prend  $\Gamma_i = \{e_i\}$ . Soit  $D = \mathfrak{B} + \bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ . Posons  $C = \bigcup_{i \in I} e_i$ , munissons  $E = B + C$  d'une structure de demi-groupe d'idempotents décrite par le corollaire 2.1 de [1].

Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $D$ ,

- si  $a, b \in \mathfrak{B}$  ou si  $a, b \in \mathfrak{B}_i, a * b$  est défini;
- si  $a \in F_e \leq \mathfrak{B}, b \in \mathfrak{B}_i$ , posons  $a * b = (e e_i, \gamma a), b * a = (e_i e, \gamma a)$ ;
- si  $a \in \mathfrak{B}_i, b \in \mathfrak{B}_j, i \neq j$ , posons  $a * b = e_i e_j$ .

L'ensemble  $D$  muni de cette loi est un H-demi-groupe.

Inversement, ceci décrit la structure d'un H-demi-groupe quelconque. En effet, si  $D$  vérifie les conditions du corollaire, d'après le théorème 8,  $D$  est un demi-groupe. Le théorème 3.7 de [1] complète la démonstration.

#### 4. Homomorphismes entre $H_a$ -demi-groupe.

Soit  $\varphi$  un homomorphisme d'un  $H_a$ -demi-groupe  $D$  dans un demi-groupe quelconque  $D', \varphi(D)$  est un  $H_a$ -demi-groupe, nous supposons donc que  $D'$  est un  $H_a$ -demi-groupe. Soit  $E$  [resp.  $E'$ ] l'ensemble des idempotents de  $D$  [resp.  $D'$ ],  $E = B + \bigcup_{i \in I} B_i, E' = B' + \bigcup_{i' \in I'} B'_{i'}$ , la structure de ces demi-groupe est déterminée par le théorème 2.2 de [1] dont nous conservons les notations;  $\varphi(E) \leq E'$ .

*Lemme 1.* — Une application  $\varphi$  de  $E$  dans  $E'$ , telle que  $\varphi(B)$  rencontre  $B'$ , est un homomorphisme si et seulement si,

- 1) Il existe deux applications  $\varphi'$  de  $L$  dans  $L', \varphi''$  de  $R$  dans  $R'$ , telles que,  $\forall (l, r) \in B, \varphi(l, r) = (\varphi' l, \varphi'' r)$ ;
- 2) Il existe une injection  $\xi$  d'une partie  $J$  de  $I$  dans  $I'$ , telle que, — si  $\varphi''$  n'est pas constante,  $1 \in J, \xi 1 = 1; \forall i \in J - \{1\}, r'_{\xi i} = \varphi'' r_i$ ;
- $\varphi''(R) = \{r'\}, \forall i \in J, \xi i = 1$  ou  $r'_{\xi i} = r'$ .

On a,  $\forall i \in J, \varphi(B_i) \leq B'_{\xi i}$ ,

$\forall i \in I - J, i \neq 1, \varphi(B_i) \leq L' \times \{\varphi'' r_i\} \leq B'$ ,

si  $1 \notin J, \varphi''(R) = \{r'\}, \varphi(B_1) \leq L' \times \{r'\} \leq B'$ .

3) Pour tout élément  $e$  de  $E, l'_{\varphi e} = \varphi' l_e$ .

Soit  $\varphi$  un homomorphisme, si  $\varphi(B_i)$  rencontre  $B'$ , prenons  $e \in B_i$  avec  $\varphi e \in B'$ , pour un autre élément  $f$  de  $B_i$ , on a  $f = f e f$ , d'où  $\varphi f = \varphi f \varphi e \varphi f \in B'$  et par suite  $\varphi(B_i) \leq B'$ . Le même calcul est valable pour  $B$ , donc  $\varphi(B) \leq B'$ , les précisions qui suivent le théorème 5 démontrent la première condition du lemme.

Si  $\varphi(B_i)$  ne rencontre pas  $B'$ , il existe  $i' \in I'$  tel que,  $\varphi(B_i) \leq B'_{i'}$ ; en effet, si  $e \in B_i$  et si  $\varphi e \in B'_{i'}$ , pour un élément  $f$  de  $B_i$ , on ne peut avoir  $\varphi f \in B'_{i'}$  car on en déduirait  $\varphi(e f) = \varphi e \varphi f \in \varphi(B_i) \cap B'$ . Posons  $i' = \xi i, \xi$

est une application définie sur une partie  $J$  de  $I$ . Soient  $i \in J$ ,  $j \in J$ ,  $i \neq j$ ,  $e \in B_i$ ,  $f \in B_j$ , on a  $ef \in B$ , donc  $\xi i \neq \xi j$ ,  $\xi$  est une injection.

Soit  $e$  un élément de  $B_i$ ,  $i \neq 1$ , pour tout  $(l, r) \in B$ , on a  $(l, r) e = (l, r_i)$ , d'où il résulte  $(\varphi' l, \varphi'' r) \varphi e = (\varphi' l, \varphi'' r_i)$ , donc si  $i \in J$ ,  $r'_{\xi i} = \varphi'' r_i$ , si  $i \notin J$ ,  $\varphi(B_i) \leq L' \times \{\varphi'' r_i\}$ .

Soit  $e$  un élément de  $B_1$ , pour tout  $(l, r) \in B$ , on a  $(l, r) e = (l, r)$ , d'où il résulte  $(\varphi' l, \varphi'' r) \varphi e = (\varphi' l, \varphi'' r)$ , donc si  $\varphi''$  n'est pas constante  $\varphi e \in B'_1$ ,  $1 \in J$ ,  $\xi 1 = 1$ , si  $\varphi''(R) = \{r'\}$ , on peut avoir  $\varphi(B_1) \leq L' \times \{r'\} \leq B'$ .

Soit  $e$  un élément quelconque de  $E$ , pour tout  $(l, r) \in B$ , on a  $e \cdot (l, r) = (l_e, r)$ , d'où il résulte  $\varphi e \cdot (\varphi' l, \varphi'' r) = (\varphi' l_e, \varphi'' r)$  et  $l'_{\varphi e} = \varphi' l_e$ .

Inversement, soient deux applications quelconques  $\varphi'$  de  $L$  dans  $L'$ ,  $\varphi''$  de  $R$  dans  $R'$ ,  $J$  une partie de  $I$ ,  $\xi$  une injection de  $J$  dans  $I'$ , supposons ces éléments liés par les conditions du lemme où ils interviennent. Pour  $i \in J$ , soit  $\psi_i$  une application de  $B_i$  dans  $B'_{\xi i}$  telle que,  $\forall e \in B_i$ ,  $l' \psi_i e = \varphi' l_e$ . On vérifie que l'application  $\varphi$  de  $E$  dans  $E'$  définie par :

$$\forall (l, r) \in B, \varphi(l, r) = (\varphi' l, \varphi'' r),$$

$$\forall i \in J, \forall e \in B_i, \varphi e = \psi_i e,$$

$$\forall i \in I - J, i \neq 1, \forall e \in B_i, \varphi e = (\varphi' l_e, \varphi'' r_i),$$

si  $1 \notin J$ ,  $\varphi''(R) = \{r'\}$ ,  $\forall e \in B_1$ ,  $\varphi e = (\varphi' l_e, r')$ , est un homomorphisme.

*Lemme 1'.* — Une application  $\varphi$  de  $E$  dans  $E'$ , telle que  $\varphi(B)$  ne rencontre pas  $B'$ , est un homomorphisme, si et seulement si, il existe un indice  $i' \in I'$  et une application  $\varphi'$  de  $L$  dans  $B'_{i'}$ , telle que,

$$\forall e \in E, \varphi e = \varphi' l_e.$$

En effet, le début de la démonstration du lemme 1 montre que  $\varphi(B)$  est contenu dans un  $B'_{i'}$ ;  $\varphi(l, r)$  ne dépend pas de  $r$ , on peut poser  $\varphi(l, r) = \varphi' l$ . Supposons qu'il existe un élément  $f$  de  $E$  tel que  $\varphi f$  n'appartienne pas à  $B'_{i'}$ , prenons  $e \in B$ , on a  $ef \in B$ ,  $\varphi(ef) = \varphi e \cdot \varphi f \in B'$ ,  $\varphi(B)$  rencontre  $B'$ , ce qui contredit l'hypothèse, donc  $\varphi(E) \leq B'_{i'}$ . Pour un élément quelconque  $e$  de  $E$ , on a  $e(l, r) = (l_e, r)$ , d'où  $\varphi e \varphi(l, r) = \varphi e = \varphi' l_e$ .

Inversement, pour une application quelconque  $\varphi'$  de  $L$  dans  $B'_{i'}$ , la relation  $\varphi e = \varphi' l_e$  définit un homomorphisme  $\varphi$  de  $E$  dans  $B'_{i'}$ .

*Lemme 2.* — Une bijection  $\varphi$  de  $E$  sur  $E'$  est un isomorphisme si et seulement si,

1) Il existe deux bijections  $\varphi'$  de  $L$  dans  $L'$ ,  $\varphi''$  de  $R$  dans  $R'$ , telles que,  $\forall (l, r) \in B$ ,  $\varphi(l, r) = (\varphi' l, \varphi'' r)$ .

2) Il existe une bijection  $\xi$  de  $I$  sur  $I'$ , telle que,

$$\xi 1 = 1, \forall i \in I - \{1\}, r'_{\xi i} = \varphi'' r_i, \varphi(B_i) = B'_{\xi i}.$$

3) Pour tout élément  $e$  de  $E$ ,  $l'_{\varphi e} = \varphi' l_e$ .

Si une bijection  $\varphi$  vérifie ces propriétés, d'après le lemme 1,  $\varphi$  est un homomorphisme. Inversement, supposons que  $\varphi$  soit un isomorphisme.

D'après les lemmes 1 et 1',  $\varphi$  étant surjectif,  $\varphi(B)$  est contenu dans  $B'$ . Si  $J \neq I$ , prenons  $i \in I - J$ ,  $\varphi(B_i) \leq L' \times \{r'\}$ , avec  $r' = \varphi''r_i$  ou  $r' = \varphi''(R)$  si  $i = 1$ , soit  $e$  un élément de  $B_i$ , on a  $\varphi e = (\varphi'l_e, r') = (\varphi'l_e, \varphi''r_i) = \varphi(l_e, r_i)$ , ce qui est impossible puisque l'application  $\varphi$  est injective. Donc  $J = I$ ,  $\forall i \in I$ ,  $\varphi(B_i) \leq B'_{\xi_i}$ , de plus comme  $\varphi$  est surjective,  $\xi$  est une surjection,  $\varphi(B) = B'$ ,  $\forall i \in I$ ,  $\varphi(B_i) = B'_{\xi_i}$ . Les autres propriétés résultent alors du lemme 1.

Considérons à nouveau un homomorphisme  $\varphi$  de  $D$  dans  $D'$ , supposons  $\varphi(B) \leq B'$ . D'après les propriétés de la décomposition en fuseaux,  $\varphi(\mathcal{B}) \leq \mathcal{B}'$ ; si  $\varphi(B_i) \leq B'_{\xi_i}$ ,  $\varphi(\mathcal{B}_i) \leq \mathcal{B}'_{\xi_i}$ ; si  $\varphi(B_i) \leq B'$ ,  $\varphi(\mathcal{B}_i) \leq \mathcal{B}'$ . La restriction de  $\varphi$  à  $\mathcal{B}$  ou à  $\mathcal{B}_i$  est un homomorphisme et vérifie donc les conditions du théorème 5. Soit  $a$  un élément d'un  $\mathcal{B}_i$  qui est envoyé dans  $\mathcal{B}'$ , on a  $a \in F_e$ ,  $ae = e$ , d'où  $\varphi a \varphi e = (\varphi e, \gamma' \varphi a) = \varphi e$  et  $\gamma' \varphi a = 1$ .

Prenons deux éléments  $a, b$  de  $D$ ,  $a \in F_e$ ,  $b \in F_r$ , considérons les divers cas qui peuvent se présenter.

*Premier cas* :  $e \in B$ ,  $f \in B_i$ ,  $ef \neq e$ .

$ab = ef$  ou  $(ef, \gamma a)$ ,  $\varphi(ab) = \varphi e \varphi f$  ou  $\varphi(ab) = (\varphi e \varphi f, \gamma' \varphi a)$ . Si  $\varphi e \in B'$ ,  $\varphi(B_i) \leq B'_{\xi_j}$ , on ne peut avoir  $\mu'_{\varphi e, \xi_j}(\varphi a) = 1$  ni  $\beta'_{\varphi e, \varphi f}(\varphi a, \varphi b) = 1$ . En effet,  $\mu'_{\varphi e, \xi_j}(\varphi a) = 1$  implique  $\varphi a \in P'_{\varphi e}$ ,  $\varphi a \varphi b = \varphi a$ ,  $\varphi e \varphi f = \varphi e$ , d'où l'on déduit  $\varphi(ab) = \varphi a \in \Gamma'_{\varphi e}$  ce qui est impossible;  $\beta'_{\varphi e, \varphi f}(\varphi a, \varphi b) = 1$  implique  $\varphi a \in M'_{\varphi e}$ ,  $\varphi a \varphi b = (\varphi a)^2$ ,  $\varphi e \varphi f = \varphi e$  d'où l'on déduit  $\varphi(ab) = (\varphi a)^2 \in \Gamma'_{\varphi e}$ , ce qui est encore une contradiction. On vérifie de même que si  $\varphi(e) \in B'$ ,  $\varphi(B_i) \leq B'$ , on ne peut avoir  $\beta'_{\varphi e, \varphi f}(\varphi a, \varphi b) = 1$ .

*Deuxième cas* :  $e \in B$ ,  $f \in B_i$ ,  $ef = e$ , d'où  $\varphi e \varphi f = \varphi e$ .

a)  $\mu_{e, i}(a) = 1$ ,  $ab = a$ ,  $\varphi(ab) = \varphi a$ .

Si  $\varphi(B_i) \leq B'_{\xi_i}$ , on a  $\mu'_{\varphi e, \xi_i}(\varphi a) = 1$  ou  $\varphi a \in \Gamma'_{\varphi e}$  : en effet,  $\varphi a \varphi b = (\varphi a)^2$  implique  $\varphi a = (\varphi a)^2$  et  $\varphi a \in \Gamma'_{\varphi e}$ . Si  $\varphi(B_i) \leq B'$ , on a  $\varphi a \in \Gamma'_{\varphi e}$ , en effet,  $\varphi a \varphi b = (\varphi a)^2$  ou  $\varphi a \varphi b = (\varphi e, \gamma' \varphi a \gamma' \varphi b)$ , d'où le résultat.

b)  $\beta_{e, i}(a, b) = 1$ ,  $ab = a^2$ ,  $\varphi(ab) = \varphi(a)^2 = (\varphi a)^2$ ,  $\gamma a = 1$ .

Si  $\varphi(B_i) \leq B'_{\xi_i}$ , on ne peut avoir  $\mu'_{\varphi e, \xi_i}(\varphi a) = 1$ , car il en résulterait  $\varphi(ab) = \varphi a \varphi b = \varphi a$  et  $\varphi a \in \Gamma'_{\varphi e}$ . D'autre part, si  $\varphi a \varphi b = (\varphi e, \gamma' \varphi a)$ , on a  $\varphi a \varphi b = \varphi e$  car  $\gamma' \varphi a = 1$  et  $(\varphi a)^2 = e$ .

Si  $\varphi(B_i) \leq B'$  et si  $\beta'_{\varphi e, \varphi f}(\varphi a, \varphi b)$  est égal à 0 ou n'est pas défini, on a  $\varphi a \varphi b = (\varphi e, \gamma' \varphi a) = \varphi e$ , d'où  $(\varphi a)^2 = \varphi e$ .

c)  $ab = (e, \gamma a)$ ,  $\varphi(ab) = (\varphi e, \gamma' \varphi a)$ .

Si  $\varphi(B_i) \leq B'_{\xi_i}$ , on ne peut avoir  $\mu'_{\varphi e, \xi_i}(\varphi a) = 1$  car il en résulterait  $\varphi a \varphi b = \varphi a = (\varphi e, \gamma' \varphi a)$ . De même la condition  $\beta'_{\varphi e, \varphi f}(\varphi a, \varphi b) = 1$  entraîne  $\varphi a \in M'_{\varphi e}$  et  $(\varphi a)^2 \in \Gamma'_{\varphi e} \cap N'_{\varphi e}$ , ce qui est impossible.

Ces considérations démontrent la partie directe du théorème suivant.

**Théorème 9.** — Une application  $\varphi$  d'un  $H_e$ -demi-groupe  $D$  dans un  $H_e$ -demi-groupe  $D'$ , telle que  $\varphi(B)$  rencontre  $B'$ , est un homomorphisme, si et seulement si, elle vérifie les conditions suivantes :

- 1)  $\varphi(\mathbf{E}) \leq \mathbf{E}'$ , la restriction de  $\varphi$  à  $\mathbf{E}$  vérifie le lemme 1.
- 2)  $\varphi(\mathfrak{B}) \leq \mathfrak{B}$ ; si  $i \in \mathbf{J}$ ,  $\varphi(\mathfrak{B}_i) \leq \mathfrak{B}'_{\xi_i}$ ; si  $i \notin \mathbf{I}$ ,  $\varphi(\mathfrak{B}_i) \leq \mathfrak{B}'$ ; les restrictions de  $\varphi$  à  $\mathfrak{B}$  ou  $\mathfrak{B}_i$  vérifient le théorème 5.
- 3) Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $\mathbf{D}$  appartenant respectivement aux fuseaux  $\mathbf{F}_e$ ,  $\mathbf{F}_f$ , avec  $e \in \mathbf{B}$ ,  $f \in \mathbf{B}_i$  ou  $e \in \mathbf{B}_i$ ,  $f \in \mathbf{B}$ , ou  $e \in \mathbf{B}_i$ ,  $f \in \mathbf{B}_j$ ,  $i \neq j$ ;
  - a) si  $\mu_{e,i}(a) = 1$ ,  $\mu'_{ze,\xi_i}(\varphi a) = 1$  ou  $\varphi a \in \Gamma'_{ze}$ ;
  - b) si  $\beta_{e,f}(a, b) = 1$ ,  $\beta'_{ze,\xi_f}(\varphi a, \varphi b) = 1$  ou  $(\varphi a)^2 = \varphi e$ ;
  - c) dans les autres cas, les fonctions  $\mu'_{ze,\xi_i}(\varphi a)$ ,  $\beta'_{ze,\xi_f}(\varphi a, \varphi b)$  ne sont pas définies ou sont différentes de 1.

Soit  $\varphi$  une application vérifiant les conditions du théorème, d'après 1 et 2 la restriction de  $\varphi$  à  $\mathbf{E}$ , à  $\mathfrak{B}$  et à  $\mathfrak{B}_i$  est un homomorphisme. Soient  $a, b$  deux éléments de  $\mathbf{D}$ ,  $a \in \mathbf{F}_e$ ,  $b \in \mathbf{F}_f$ , posons  $\varphi a = a'$ ,  $\varphi b = b'$ ,  $\varphi e = e'$ ,  $\varphi f = f'$ ; on a  $\varphi(e f) = e' f'$ . Considérons les divers cas qui peuvent se présenter.

$e \in \mathbf{B}_i$ ,  $f \in \mathbf{B}_j$ ,  $i \neq j$ ,  $ab = ef$ ,  $\varphi(ab) = e' f'$ .

Si  $\varphi(\mathbf{B}_i) \leq \mathbf{B}'_{\xi_i}$ ,  $\varphi(\mathbf{B}_j) \leq \mathbf{B}'_{\xi_j}$ , d'après le lemme 1,  $a' b' = e' f'$

Si  $\varphi(\mathbf{B}_i) \leq \mathbf{B}$ ,  $\varphi(\mathbf{B}_j) \leq \mathbf{B}'_{\xi_j}$  ou  $\varphi(\mathbf{B}_j) \leq \mathbf{B}'$ , d'après 3c,  $a' b' = (e' f', \gamma' a')$  ou  $a' b' = (e' f', \gamma' a' \cdot \gamma' b')$ . Comme la restriction de  $\varphi$  à  $\mathfrak{B}_i$  ou  $\mathfrak{B}_j$  est un homomorphisme, on a  $\gamma' a' = \gamma' b' = 1$  et  $a' b' = e' f'$ .

$e \in \mathbf{B}$ ,  $f \in \mathbf{B}_i$ ,  $ef \neq e$ ,  $ab = (ef, \gamma a)$ ,  $\varphi(ab) = (e' f', \gamma' a')$ .

D'après la condition 3c, on a  $a' b' = (e' f', \gamma' a')$  ou  $a' b' = (e' f', \gamma' a' \gamma' b')$ , mais dans ce cas  $\gamma' b' = 1$ . On vérifie de même la relation  $\varphi(ba) = b' a'$ .  
 $e \in \mathbf{B}$ ,  $f \in \mathbf{B}_i$ ,  $ef = e$ .

— Si  $\mu_{e,i}(a) = 1$ ,  $ab = a$ , la condition 3a entraîne  $\mu'_{e',\xi_i}(a') = 1$  et alors  $a' b' = a'$ , ou  $a' \in \Gamma'_{e'}$ , ce qui donne  $a' = (e', \gamma' a')$ ,  $a' b' = (e' f', \gamma' a' \cdot \gamma' b') = (e', \gamma' a') = a'$ , car  $e' f' = e'$ ,  $\gamma' b' = 1$ .

— Si  $\beta_{e,f}(a, b) = 1$ ,  $ab = a^2$ , la condition 3.b entraîne  $\beta'_{e',\xi_f}(a', b') = 1$  et alors  $a' b' = a'^2 = \varphi(a^2)$ , ou  $a'^2 = e'$  ce qui donne  $a' b' = (e' f', \gamma' a' \gamma' b') = e'$  car  $\beta_{e,f}(a, b) = 1$  implique  $ef = e$ ,  $\gamma a = 1$ ,  $\gamma' a' = 1$ .

Pour les autres cas et pour le produit  $ba$ , la démonstration est identique à celle donnée pour  $ef \neq e$ .

*Théorème 9'.* — Une application  $\varphi$  d'un  $\mathbf{H}_a$ -demi-groupe  $\mathbf{D}$  dans un  $\mathbf{H}_a$ -demi-groupe  $\mathbf{D}'$ , telle que  $\varphi(\mathbf{B})$  ne rencontre pas  $\mathbf{B}'$ , est un homomorphisme, si et seulement si, elle vérifie les conditions suivantes :

1) Il existe un indice  $i' \in \mathbf{I}'$  et une application  $\varphi'$  de  $\mathbf{L}$  dans  $\mathbf{B}'_{i'}$ , telle que,  $\forall e \in \mathbf{E}$ , on ait  $\varphi e = \varphi' l_e$ .

2)  $\varphi(\mathbf{D}) \leq \mathfrak{B}'_{i'}$ , les restrictions de  $\varphi$  à  $\mathfrak{B}$  et aux  $\mathfrak{B}_i$  vérifient le théorème 5.

3) Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $D$  appartenant respectivement aux fuseaux  $F_e, F_j$ , avec  $e \in B, f \in B_i$ , ou  $e \in B_i, f \in B$ , ou  $e \in B_i, f \in B_j, i \neq j$ ,

a) si  $\mu_{e,i}(a) = 1, \varphi a = \varphi e$ ,

b) si  $\beta_{e,f}(a, b) = 1, \beta'_{ze, zf}(\varphi a, \varphi b) = 1$  ou  $(\varphi a)^2 = \varphi e$ ;

c) dans les autres cas, la fonctions  $\beta'_{ze, zf}(\varphi a, \varphi b)$  n'est pas définie ou est différente de 1.

Ce théorème est une conséquence du lemme 1', de la structure de  $\mathcal{B}'_{\gamma'}$ , et du théorème précédent.

*Corollaire 9.* — Une bijection  $\varphi$  d'un  $H_a$ -demi-groupe  $D$  sur un  $H_a$ -demi-groupe  $D'$  est un isomorphisme, si et seulement si, elle vérifie les conditions suivantes :

1)  $\varphi(E) = E'$ , la restriction de  $\varphi$  à  $E$  vérifie le lemme 2;

2)  $\varphi(\mathcal{B}) = \mathcal{B}', \varphi(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}'_{\xi_i}$ , les restrictions de  $\varphi$  à  $\mathcal{B}$  et aux  $\mathcal{B}_i$  vérifient le corollaire 7;

3) a) les relations  $\mu_{e,i}(a) = 1, \mu'_{ze, zi}(\varphi a, \varphi b) = 1$  sont équivalentes.

b) les relations  $\beta_{e,f}(a, b) = 1, \beta'_{ze, zf}(\varphi a, \varphi b) = 1$  sont équivalentes.

Si  $\varphi$  est un isomorphisme, la restriction de  $\varphi$  à  $E$  est un isomorphisme de  $E$  sur l'ensemble  $E'$  des idempotents de  $D'$  et vérifie donc le lemme 2. On en déduit  $\varphi(\mathcal{B}) \leq \mathcal{B}'$  et  $\forall i \in I, \varphi(\mathcal{B}_i) \leq \mathcal{B}'_{\xi_i}$ , ces inclusions sont des égalités puisque  $\varphi$  est surjectif; la restriction de  $\varphi$  à  $\mathcal{B}$  ou à  $\mathcal{B}_i$  est un isomorphisme et vérifie le corollaire 7. D'après le théorème 9, la relation  $\mu_{e,i}(a) = 1$  entraîne  $\mu'_{ze, zi}(\varphi a) = 1$  ou  $\varphi a \in \Gamma'_{ze}$ , mais  $\Gamma'_{ze} = \varphi(\Gamma_e)$  et comme  $\varphi$  est une application injective  $\varphi a$  ne peut appartenir à  $\Gamma'_{ze}$ . De même, puisque  $\varphi^{-1}$  est un homomorphisme injectif, la relation  $\mu'_{ze, zi}(\varphi b) = 1$  implique  $\mu_{e,i}(a) = 1$ . On vérifie la condition 3b d'une manière analogue.

Inversement, si une bijection  $\varphi$  vérifie les conditions du corollaire, le théorème 9 montre que  $\varphi$  est un homomorphisme.

Soient  $D$  un  $H$  demi-groupe,  $E = B + C$  l'ensemble de ses idempotents.

La structure de  $D$  est décrite par le corollaire 8. Pour  $c \in C$ , on désigne par  $\mathcal{B}_c$  le plus grand sous-demi-groupe unipotent de  $D$  contenant  $c$ .

*Théorème 10.* — Une application  $\varphi$  d'un  $H$ -demi-groupe  $D$  dans un  $H$ -demi-groupe  $D'$ , telle que  $\varphi(E)$  contienne plusieurs éléments, est un homomorphisme, si et seulement si,

1) Il existe une application  $\varphi'$  de  $L$  dans  $L'$ , une application  $\varphi''$  de  $R$  dans  $R'$ , une injection  $\xi$  d'une partie  $C_1$  de  $C$  dans  $C'$ , telles que, pour tout élément  $c$  de  $C_1$ , on ait  $(\varphi' l_c, \varphi'' r_c) = (l'_{\xi c}, r'_{\xi c})$ .

On a,  $\forall (l, r) \in B, \varphi(l, r) = (\varphi' l, \varphi'' r)$ ,

$$\forall c \in C_1, \varphi c = \xi c,$$

$$\forall c \in C - C_1, \varphi c = \varphi(l_c, r_c).$$

2)  $\varphi(\mathcal{B}) \leq \mathcal{B}'; \forall c \in C_1, \varphi(\mathcal{B}_c) \leq \mathcal{B}'_{\xi c}; \forall c \in C - C_1, \varphi(\mathcal{B}_c) \leq \mathcal{B}'$ ; les restrictions de  $\varphi$  à  $\mathcal{B}$  et aux  $\mathcal{B}_c$  vérifient le théorème 5.

3) Pour  $e, f \in E$ ,  $e \neq f$ ,  $a \in F_e$ ,  $b \in F_f$ ,  $\beta'_{e,f}(\varphi a, \varphi b)$  n'est pas défini ou est différent de 1.

Comme  $\varphi(E)$  contient plusieurs éléments,  $\varphi(E) \cap B'$  n'est pas vide. Le corollaire 8 montre alors que les hypothèses du théorème 9 sont remplies,  $\varphi$  est bien un homomorphisme. On déduit de ce théorème le résultat suivant :

*Corollaire 10.* — Une bijection  $\varphi$  d'un H-demi-groupe D sur un H-demi-groupe D' est un isomorphisme si et seulement si,

1) Il existe des bijections  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ ,  $\xi$  respectivement de L, R, C sur L', R', C', telles que,  $\forall c \in C$ ,  $(\varphi' l_c, \varphi'' r_c) = (l'_{\xi c}, r'_{\xi c})$ .

On a,  $\forall (l, r) \in B$ ,  $\varphi(l, r) = (\varphi' l, \varphi'' r)$ ;  $\forall c \in C$ ,  $\varphi c = \xi c$ .

2)  $\varphi(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}'$ ;  $\forall c \in C$ ;  $\varphi(\mathfrak{B}_c) = \mathfrak{B}'_{\xi c}$ ; les restrictions de  $\varphi$  à  $\mathfrak{B}$  et et aux  $\mathfrak{B}_c$  vérifient le corollaire 7.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] DESQ (Roger). Structure des demi-groupes ayant tous les sous-demi-groupes homomorphiques, J. Math. pures et appliquées, 45, 1966, p. 119 à 142. Voir aussi Séminaire DUBREIL-PISOT (Algèbre et Théorie des nombres), 1<sup>re</sup> année, 1964-65, n° 3 (23 novembre 1964).
- [2] KIMURA, TAMURA, MERKEL. Semigroups in wich all semigroups are left ideals. Canad. J. Math., 17 (1965), p. 52-62.