Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Gabriel Viguier

Les développantes généralisées du second ordre d'une courbe plane

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 12 (1948), p. 83-89

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1948_4_12__83_0>

LES DÉVELOPPANTES GÉNÉRALISÉES DU SECOND ORDRE D'UNE COURBE PLANE

par M. Gabriel VIGUIER

Docteur ès-Sciences

Résumé. — *Il s'agit de lier à l'équation différentielle du second ordre des notions géométriques simples telles que des développantes particulières attachées à une courbe plane. Le problème permet en outre de retrouver les équations du premier ordre de Riccati et d'Abel.*

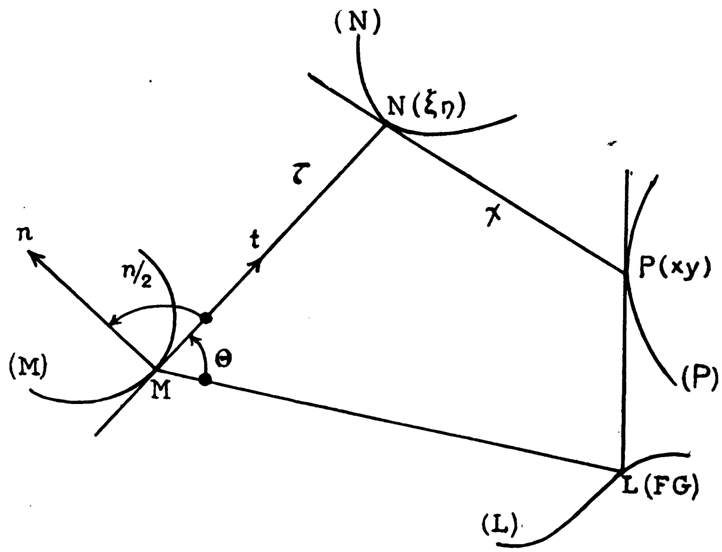
Nous considérons la courbe-plane (M) donnée en coordonnées paramétriques

(1) $$x = x\ (t)\ ; \qquad y = y\ (t).$$

Nous lui associons la courbe (L)

(2) $$\mathrm{F} = \mathrm{F}\ (t)\ ; \qquad \mathrm{G} = \mathrm{G}\ (t).$$

Sur la *tangente* en M à la courbe-base (M) nous portons le segment $\overline{\mathrm{MN}} = \tau\ (t)$, d'où une courbe (N) dite « *développante généralisée ordinaire* »,



puis, sur la tangente en N à cette dernière, le segment $\overline{\mathrm{NP}} = \chi\ (t)$. Nous obtenons une courbe (P) dont la tangente doit passer par le point L correspondant de la courbe-adjointe (L) ; (P) est alors appelée *développante généralisée du second ordre* de la courbe-base (M).

Utilisant pour la tangente MN les notations

(3) $$\sigma'^2 = x'^2 + y'^2 ;\ \cos\alpha = \frac{x'}{\sigma'}\ ;\ \ \sin\alpha = \frac{y'}{\sigma'}$$

nous avons pour le point N

(4) $$\xi = x + \tau \cos \alpha; \quad \eta = y + \tau \sin \alpha$$

de là les notations

(5) $$\cos \beta = \frac{\xi'}{\sigma_1'}; \sin \beta = \frac{\eta'}{\sigma_1'}$$

avec

(6) $$\sigma_1'^2 = (\sigma' + \tau')^2 + \alpha'^2 \tau^2$$

donnent pour le point P :

(7) $$X = x + \tau \cos \alpha + \chi \cos \beta; \quad \mathcal{Y} = y + \tau \sin \alpha + \chi \sin \beta$$

Nous posons :

(8) $$\left| \begin{array}{l} (F - x) \sin \alpha - (G - y) \cos \alpha = \dfrac{\omega_1}{\sigma'} = \overline{ML}. \sin \theta \\ (F - x) \cos \alpha + (G - y) \sin \alpha = \dfrac{\omega_2}{\sigma'} = \overline{ML}. \cos \theta \end{array} \right.$$

la mise en équation de ce problème géométrique conduit à la relation différentielle

(9) $$A(\chi' + \sigma_1') - \beta' \chi (\sigma_1' \chi - B) = 0$$

avec

(10) $$\left| \begin{array}{l} A \equiv \omega_1 (\tau' + \sigma') - \alpha' \tau (\sigma' \tau - \omega_2) \\ B \equiv (\omega_2 - \sigma' \tau)(\tau' + \sigma') - \alpha' \omega_1 \tau \end{array} \right.$$

Nous pouvons remarquer que le cas $A = o$, qui fournit une équation de Riccati en $\tau(t)$, correspond au cas où la tangente $\overline{N't_1}$ à la développante (N′) passe par le point L; nous avons en outre

$$\chi = 0 \quad \text{et} \quad \chi = -\frac{\omega_1}{\alpha' \tau} \sigma_1'$$

Le cas $B = o$, qui donne une équation du type Abel en $\tau(t)$, correspond au cas où la normale en N″ à la développante (N″) passe par le point L.

Nous avons, dans des études antérieures, montré l'existence de ces deux cas particuliers; nous avions alors appelé :

— la développante (N′) : « développante généralisée ordinaire associée à la courbe-base (M) et à la courbe-adjointe (L) ».

— la développante (N″) : « développante-orthogonale généralisée associée à la courbe-base (M) et à la courbe-adjointe (L) ».

Ce qu'il y a de remarquable dans le problème général c'est que, connaissant la fonction $\tau(t)$ c'est-à-dire une développante (N), la détermination de la développante (P) se ramène à l'étude de l'équation de Riccati (9). On n'a donc pas une seule courbe (P) mais toute une famille de courbes projectivement égales, parce que dépendant homographiquement d'une même constante d'intégration.

Etude de cas particuliers.

La courbe (P) *est une développante classique de la développante généralisée* (N).

La forme de l'équation différentielle (9) nous suggère comme étude de cas particulier, celui qui correspond à la valeur

$$\chi(t) = -\sigma_1(t) \tag{11}$$

C'est, nous le voyons, le cas où la développante généralisée de second ordre (P) se réduit à une développante classique de la courbe (N).

La condition (11) associée à la relation (9) nous fournit l'équation

$$\sigma_1 (B' + \sigma_1'^2) - B\,\sigma_1'' = 0 \tag{12}$$

équation differentielle du second ordre en τ (t) qui doit nous donner la développante (N) associée à la courbe-base (M).

Faisons le changement de fonction

$$y(t) = \tau(t) + \sigma(t) \tag{13}$$

la relation (12) développée prend la forme

$$\begin{aligned} & y'' y' y + y''(by' + cy^3 + dy^2 + ey + f) \\ & + g y'^4 + (hy + i) y'^3 + (jy^2 + ky + l) y'^2 + (my^3 + ny^2 + oy + p) y' \\ & + q y^4 + ry^3 + sy^2 + ty + u = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

où les vingt coefficients $b, c, d \ldots t, u$, sont des fonctions du paramètre t et ont les valeurs

$$\begin{aligned}
& b = -\sigma\,; \quad c = -\frac{\sigma'\alpha'}{\omega_1}; \quad d = \frac{\alpha'}{\omega_1}(\omega_2 + 3\,\sigma\sigma'); \\
& e = -\frac{\alpha'\sigma}{\omega_1}\left(3\,\sigma\sigma' - 2\,\omega_2\right) + \frac{\omega'_1}{\omega_1} + \frac{\alpha''}{\alpha'}\,; \quad g = \frac{1-\sigma'}{\omega_1\,\alpha'}\,; \\
& f = \frac{\sigma^2\alpha'}{\omega_1}\left(\sigma\sigma' + \omega_2\right) + \sigma\left(\frac{\omega'_1}{\omega_1} + \frac{\alpha''}{\alpha'}\right); \quad h = -\frac{\sigma''}{\omega_1\,\alpha'}\,; \\
& i = \frac{\sigma\sigma'' - \sigma'^2 - \omega'_2}{\omega_1\,\alpha'} + 1\,; \quad j = \frac{2\,\alpha'}{\omega_1}; \quad k = -\frac{\alpha'}{\omega_1}\left(4\,\sigma + \omega_2\right); \\
& l = \frac{\alpha'}{\omega_1}\left(2\,\sigma^2 + \omega_2\,\sigma + \omega_1\,\rho\right); \quad m = -\frac{\alpha'^2\rho}{\omega_1}; \quad q = \frac{\alpha'^3}{\omega_1}\,; \\
& n = \frac{\alpha'^2}{\omega_1}\left[3\,\sigma\rho' + \left(\frac{\omega_2}{\alpha'}\right)'\right]; \quad 0 = -\frac{\alpha'^2}{\omega_1}\left[3\,\rho'\,\sigma^2 - 2\sigma\left(\frac{\sigma_2}{\alpha'}\right)' - \rho\,\omega_2\right]; \\
& p = -\frac{\sigma\,\alpha'^2}{\omega_1}\left[\sigma\left(\frac{\omega_2}{\alpha'}\right)' - \sigma^2\rho' + \omega_2\,\rho\right]; \quad r = -\frac{\alpha'^2}{\omega_1}\left(4\,\sigma\,\alpha' + \omega'_1\right); \\
& s = \frac{3\,\sigma\,\alpha'^2}{\omega_1}\left(2\,\sigma\,\alpha' - \omega'_1\right); \quad t = -\frac{\sigma^2\alpha'^2}{\omega_1}\left(4\,\sigma\,\alpha' + 3\,\omega'_1\right); \\
& u = \frac{\alpha'^2\,\sigma^3}{\omega_1}\left(\sigma\,\alpha' + \omega'_1\right).
\end{aligned} \tag{15}$$

Le problème ne dépendant en fait que de quatre inconnues qui sont : les coordonnées (x, y) de M et (F, G) de L, nous pouvons prévoir qu'il existera seize relations liant les vingt coefficients : $b, c, d, \ldots\ t, u$.

De (15) nous tirons les valeurs :

$$(16)\qquad \alpha' = \sqrt{\frac{c\,(1+b)}{g b'}}\ ;\ \sigma = -\,b\ ;\ \omega_1 = \sqrt{\frac{b'\,(1+b)}{cg}}\ ;$$

$$\omega_2 = \frac{b'}{c}\left(d - 3\,b\,c\right)\ ;\ \rho = -\,b'\sqrt{\frac{b'\,g}{c\,(1+b)}}$$

Il en résulte entre les coefficients (15) les relations

$$(17)\qquad e = b\,(9\,bc - 2d) + \frac{gb' - g'\,(1+b)}{g\,(1+b)}\ ;\ f = b^2\,(d - 2\,bc) + b.\ \frac{g'\,(1+b) - b'g}{g\,(1+b)}$$

$$h = g.\,\frac{b''}{1+b}\ ;\ i = 1 + \frac{(bb'' - b'^2 - \omega'_2)\,g}{1+b}\ ;\ j = \frac{2\,c}{b'}\ ;$$

$$k = bc\left(3 + \frac{4}{b'}\right) - d\ ;\ l = \frac{b^2 c}{b'}\,(2 + 3\,b') - bd - b'\ ;\quad m = c\ ;$$

$$n = \sqrt{\frac{c^3}{b'^3}}\left[3\,bb'\sqrt{\frac{gb'}{c\,(1+b)}} + \left(\frac{\omega_2}{\alpha'}\right)'\right]\ ;\ q = \frac{c^2}{g}\,.\ \frac{1+b}{b'^2}$$

$$o = \frac{c}{b'}\sqrt{\frac{c\,(1+b)}{b'}}\,.\ \left[3\,b^2\rho' + 2\,b\left(\frac{\omega_2}{\alpha'}\right)' + \frac{b^2}{c}\left(d - 3\,bc\right)\sqrt{\frac{b'g}{c\,(1+b)}}\right]\ ;$$

$$p = \frac{bc}{b'}\sqrt{\frac{c\,1(+b)}{gb'}}\,.\ \left[\omega_2\rho - b^2\rho' - b\left(\frac{\omega_2}{\alpha'}\right)'\right]\ ;$$

$$r = -\,\frac{c}{b'}\sqrt{\frac{c\,(1+b)}{gb'}}\,.\left[\omega'_1 - 4\,b\sqrt{\frac{c\,(1+b)}{gb'}}\right]\ ;$$

$$s = \frac{3\,bc}{b'}\sqrt{\frac{c\,(1+b)}{gb'}}\,.\ \left[\omega'_1 + 2\,b\sqrt{\frac{c\,(1+b)}{gb'}}\right]\ ;$$

$$t = -\,\frac{b^2\,c}{b'}\sqrt{\frac{c\,(1+b)}{gb'}}\,.\left[3\,\omega'_1 - 4\,b\sqrt{\frac{c\,(1+b)}{gb'}}\right]\ ;$$

$$u = -\,\frac{cb^3}{b'}\sqrt{\frac{c\,(1+b)}{gb'}}\,.\left[\omega'_1 - b\sqrt{\frac{c\,(1+b)}{gb'}}\right].$$

Réciproquement nous partons d'une équation du second ordre du type (14) ; s'il existe entre ses vingt coefficients les seize relations (17) il est possible de faire correspondre à l'équation différentielle (14) un problème géométrique des « développantes généralisées du second ordre d'une courbe-plane ».

La courbe-base et la courbe-adjointe, pour ce problème, sont alors déterminées par les quatre premières égalités de (16).

LA NORMALE EN N A LA DÉVELOPPANTE GÉNÉRALISÉE (N) PASSE PAR LE POINT L.

L'existence de ce cas particulier a déjà été signalée.

Reprenant les relations (10), la condition $B = o$ s'écrit :

(18) $$\tau' + \sigma' = \frac{\omega_1 \alpha' \tau}{\omega^2 - \sigma' \tau}$$

Nous utilisons la notation

(19) $$\lambda^2 = \omega_1^2 + (\omega_2 - \sigma' \tau)^2$$

ce qui, géométriquement, correspond à

(20) $$\overline{NL}^2 = \left(\frac{\lambda}{\sigma'}\right)^2$$

Nous avons :

(21) $$A = \lambda^2 \frac{\alpha' \tau}{\omega_2 - \sigma' \tau} ; \quad \sigma'_1 = \frac{A}{\lambda} .$$

Il en résulte que la développante généralisée (P) est déterminée par l'équation de Riccati réduite

(22) $$\chi' - \frac{\beta'}{\lambda} \chi^2 + \sigma'_1 = 0$$

équation que nous avons déjà rencontrée dans une précédente étude.

Il est par exemple intéressant de la rapprocher de la forme réduite de M. E. CARTAN

(23) $$\chi' + P \chi^2 + 1 = 0.$$

Nous avons, en identifiant les égalités (22) et (23),

(24) $$\sigma'_1 = 1 ; \quad P = - \frac{\sigma'_1}{\rho_1 \lambda} , \text{ avec } \rho_1 = \frac{\sigma'_1}{\beta'}$$

Il en résulte :

(25) $$\overline{NL} = - \frac{1}{\rho_1 P \sigma'}$$

Ainsi, pour deux développantes (N) à paramétrisation isométrique, nous obtenons, entre les distances NL et N*L* correspondantes, la relation

(26) $$\frac{\overline{NL}}{\overline{N^*L^*}} = \frac{\rho^*_1}{\rho_1} \cdot \frac{\sigma'^*}{\sigma'} \quad (\sigma'_1 = \sigma'^*_1 = 1)$$

Les Points N, L et P sont portés par une même droite.

Le point L de la courbe-adjointe est sur la tangente en N à la développante généralisée (N), c'est-à-dire, d'après les égalités (10)

$$A = 0 \qquad \text{et} \qquad B = -\lambda^2 \frac{\alpha' \tau}{\omega_1} \tag{27}$$

La développante (P) dégénère alors en

$$\chi_0 = 0\,, \qquad \chi_1 = \frac{B}{\sigma'_1}$$

Remarquons que ce problème, intéressant pour l'étude de certaines courbes (N) répondant à la condition (27), est à rejeter en ce qui concerne les développantes généralisées de second ordre (P) : il a totalement changé de nature et n'est plus différentiel.

OUVRAGES CONSULTÉS

Adolphe Buhl : *Nouveaux éléments d'Analyse,* t. 1 et 3 (Paris, Gauthier-Villars).

Élie Cartan : *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective* (Paris, Gauthier-Villars).

Gaston Darboux : *Théorie générale des surfaces,* t. 2 (Paris, Gauthier-Villars).

Gabriel Viguier : *Annales Fac. Sc. Toulouse,* 1945; t. 9, IX, p. 1 (Toulouse, Édouard Privat).

— *C. R. Acad. Sc. Paris,* t. 229; n° 8, 22-8-49.