ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

GABRIEL VIGUIER

Canonisation géométrie spatiale de l'équation de Riccati

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 12 (1948), p. 77-82
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1948_4_12__77_0>

CANONISATION GÉOMÉTRIQUE SPATIALE DE L'ÉQUATION DE RICCATI

par M. Gabriel VIGUIER
Docteur ès-Sciences

Résumé. — Une généralisation spatiale de notions métriques classiques, telles que les courbes à paramétrisation isométrique, permet de se demander si la véritable canonisation géométrique de l'équation de Riccati n'est pas à prendre dans l'espace.

Soient deux courbes gauches données en coordonnées paramétriques :

$$(1)\qquad \begin{aligned} &(\mathrm{M})\quad x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z\ (t)\\ &(\mathrm{L})\quad \mathrm{F} = \mathrm{F}\ (t),\quad \mathrm{G} = \mathrm{G}\ (t),\quad \mathrm{H} = \mathrm{H}\ (t)\end{aligned}$$

la paramétrisation choisie étant la même pour les deux courbes, les points M et L correspondent à une même valeur du paramètre t. Sur la tangente en M à la courbe-base (M) nous portons la longueur :

$$\mathrm{MN} = \tau\ (t)$$

Nous déterminerons ainsi une courbe (N) à laquelle nous imposons la condition d'avoir sa tangente qui passe par le point L.

Désignant par σ l'élément d'arc de la courbe-base nous utilisons les notations :

$$(2)\qquad \alpha = \frac{dx}{d\sigma},\ \beta = \frac{dy}{d\sigma},\ \gamma = \frac{dz}{d\sigma}$$

Nous formons alors l'équation de la tangente à la courbe (N) et, exprimant qu'elle passe par le point L correspondant de la courbe-adjointe, nous mettons sous forme différentielle le problème géométrique précédemment défini.

Avec les notations vectorielles

$$(3)\qquad 0 = \frac{d\vec{\mathrm{M}}}{d\tau} \wedge \frac{d^2\vec{\mathrm{M}}}{d\sigma^2}\cdot\frac{d\sigma}{dt}\ ;\ \Omega = \vec{\mathrm{LM}}\wedge \frac{d^2\vec{\mathrm{M}}}{d\sigma^2}\cdot\frac{d\sigma}{dt};\ \omega = \vec{\mathrm{LM}}\wedge\frac{d\vec{\mathrm{M}}}{d\sigma}$$

l'équation du problème a la forme

$$(4)\qquad \frac{d\tau}{dt} + \frac{0}{\omega}\tau^2 + \frac{\Omega}{\omega}\tau + \sigma' = 0.$$

c'est donc une équation de Riccati.

Les ∞^1 courbes ainsi définies à partir de cette dernière équation pourront être regardées comme des « développantes gauches généralisées » de la courbe-base (M).

Nous les rapprochons des développantes projectives de M. Elie CARTAN car les courbes (N) peuvent en quelque sorte être considérées comme résultant d'un développement projectif de la courbe (M).

Pour compléter nos définitions, indiquons que le triangle spatial MNL sera appelé « triangle fondamental tangent ».

Il est intéressant de constater que l'équation (4) nous donne toute une famille de développantes à propriétés anharmoniques, donc projectivement égales, puisque les coordonnées du point N sont liées linéairement à la fonction $\tau\,(t)$, solution d'une équation de Riccati.

***

COURBES A PARAMÉTRISATION ISOMÉTRIQUE.

Nous considérons maintenant une équation de Riccati écrite sous sa forme la plus générale

$$\frac{d\rho}{dt} + P\rho^2 + Q\rho + R = 0 \tag{5}$$

où P, Q, R, sont trois fonctions absolument quelconques de la variable indépendante t.

Nous allons essayer de lui associer un problème de développantes généralisées; pour cela, l'identification des équations (4) et (5) conduit aux relations :

$$P\,(t) = \frac{0}{\omega}\,;\; Q\,(t) = \frac{\Omega}{\omega}\,;\; R\,(t) = \sigma' \tag{6}$$

La dernière de ces égalités fournit des courbes (M) à paramétrisation isométrique, c'est-à-dire telles que, pour une paramétrisation choisie, les arcs limités à des points correspondants égaux ont une même longueur :

$$\sigma' = \frac{d\sigma}{dt}$$

Enfin la courbe-base étant choisie, les deux premières égalités de (6) définissent la courbe-adjointe associée

$$\begin{aligned} F &= x + \frac{1}{P}(\alpha' - Q\,\alpha) \\ G &= y + \frac{1}{P}(\beta' - Q\,\beta) \\ H &= z + \frac{1}{P}(\gamma' - Q\,\gamma) \end{aligned} \tag{7}$$

Ces dernières montrent d'ailleurs que l'adjointe à la courbe gauche (M) perce le plan osculateur en M, en un point L unique dans un intervalle régulier; cette condition qui s'exprime par le fait que les vecteurs

$$\overrightarrow{LM},\; \frac{d\overrightarrow{M}}{d\sigma},\; \frac{d^2\overrightarrow{M}}{d\sigma^2}$$

sont coplanaires, justifie l'existence de l'équation (4) écrite sous sa forme vectorielle.

Tout ceci coïncide fort heureusement avec les résultats précédemment obtenus pour le cas plan. Il y a là une généralisation spatiale de notions métriques classiques, telles que les courbes à paramétrisation isométrique, associées à une même équation de Riccati.

M. VALIRON, s'attachant à la forme vectorielle (4), constate fort justement que la torsion ne figure pas dans notre équation; cela permet alors de dire que l'équation est la même pour toutes les courbes déduites d'une courbe plane, d'équation intrinsèque donnée, lorsque l'on tord arbitrairement cette courbe.

Malgré cela, l'intérêt des relations (6) semble indiscutable, ce qui permet alors de se demander si la véritable canonisation géométrique de l'équation de Riccati n'est pas à prendre dans l'espace.

Cela n'a d'ailleurs rien d'étonnant, car d'éminents auteurs, parmi lesquels nous retenons M. Elie CARTAN et M. Adolphe BUHL, ont toujours pensé qu'une équation, aussi ancienne que l'équation de Riccati, pouvait rester, même de nos jours, un sujet plein de surprises et de nouveautés.

Si maintenant nous reprenons l'équation (4) et si nous introduisons les projections L′ et L″ du point L sur la tangente et la normale à la courbe-base, nous pouvons lui donner la forme

$$\text{ML}''\left(\frac{\tau'}{\sigma'}+1\right)+\tau.\,\overline{\text{NL}'}=0 \tag{8}$$

qui permet de mettre en évidence certains cas simples de dégénérescence.

⁂

UN CAS D'INTÉGRABILITÉ.

Nous reprenons l'équation générale (4) que nous allons écrire sous une forme canonique particulière; pour cela nous utiliserons les transformations classiques de L. RAFFY et de M. René LAGRANGE, et nous faisons choix de certaines notations appropriées.

Posant :

$$g=-\frac{1}{2}\left(\frac{\Omega}{\omega}+\frac{\sigma''}{\sigma'}\right) \tag{9}$$

la transformation

$$\tau\,(u-g)+\sigma'=0 \tag{10}$$

permet d'écrire l'équation (4) sous la forme

$$u'+u^2=g'+g^2-\frac{0}{\omega}\,\sigma' \tag{11}$$

Nous voyons apparaître la solution particulière :

$$u = g + \frac{0\,\sigma'^2}{\Omega\,\sigma' + \omega\,\sigma''} \tag{12}$$

lorsque la courbe-adjointe est telle que l'on a la relation

$$0\,\sigma'^2 (t - t_0) = \Omega\,\sigma' + \omega\,\sigma'' \tag{13}$$

Cette dernière s'écrit vectoriellement :

$$\frac{d\vec{M}}{d\sigma} \wedge \frac{d^2\vec{M}}{d\,\sigma^2} \cdot \sigma'^3 \quad (t - t_0) = \vec{LM} \wedge \frac{d^2\vec{M}}{d\,\sigma^2} \cdot \sigma'^2 + \vec{LM} \wedge \frac{d\vec{M}}{d\sigma} \cdot \sigma'' \tag{14}$$

soit, si nous posons : $\frac{d\vec{M}}{d\sigma} \cdot \sigma' = \vec{U}$

$$\vec{U} \wedge \frac{d\vec{U}}{dt} (t - t_0) = \vec{LM} \wedge \frac{d\vec{U}}{dt} \tag{15}$$

d'où la surface développable $\left(\sum_{\mathrm{NoL}}\right)$

$$\vec{L} = \vec{M} - (t - t_0)\left(\vec{U} + \lambda \frac{d\vec{U}}{dt}\right) \tag{16}$$

sur laquelle se trouve la courbe-adjointe associée.

La solution particulière (12) fournit la valeur

$$\tau_0 = \sigma' (t_0 - t)$$

d'où la développante généralisée spatiale (N*o*)

$$\vec{N}_0 = \vec{M} - \vec{U} (+ - t_0) \tag{17}$$

qui est arête de rebroussement de la surface développable $\left(\sum_{\mathrm{NoL}}\right)$

La génératrice (NoL) est donc l'intersection des plans osculateurs à la courbe-base en M et à la développante spatiale (N*o*) en N*o*.

Remarquons en outre que la solution générale de (4), compte tenu de la solution particulière (12), s'écrit :

$$\tau = \frac{-\,\sigma'\,t}{1 + \dfrac{V}{t\left(K + \displaystyle\int \frac{dV}{t} - V\right.}} = -\,\Lambda\,\sigma' \tag{18}$$

avec : $dv = e \int_{\omega}^{0} \sigma'\,t\,dt$

la discussion de cette expression peut présenter quelque intérêt, mais nous la réservons car elle nous éloignerait du caractère géométrique de la présente étude.

L'équation (18) nous fournit la développante spatiale (N)

$$\vec{N} = \vec{M} - \Lambda\,\vec{U} \tag{19}$$

qui est arête de rebroussement de la surface développable $\left(\sum_{NL}\right)$.

(20) $$\vec{L} = \vec{M} + (\mu - \Lambda)\,\vec{U} - \mu\,\Lambda\,\frac{d\vec{V}}{dt}$$

sur laquelle se trouve évidemment la courbe-adjointe (L) associée.

La génératrice NL se trouve par suite à l'intersection des plans osculateurs à la courbe-base en (M) et à la développante spatiale (N) en N.

Le point L est à l'intersection des deux droites N_oL et NL, définies par les équations (16) et (20), toutes deux dans le plan osculateur en M.

On obtient donc la valeur :

(21) $$\vec{L} = \vec{M} - (t - t_0)\,\vec{U} + \frac{t - t_0 - \Lambda}{1 - \Lambda'}\,\Lambda.\,\frac{d\vec{U}}{dt}$$

Conclusion.

Il y a dans ce problème, nous venons de le voir d'ailleurs très succinctement, un nouveau domaine géométrique, à exploiter, extrêmement fécond, tant pour l'équation de Riccati, que pour ses généralisations ou pour ses dégénérescences.

Le domaine plan, lié directement à l'équation de Riccati, l'équation d'Abel dont l'équation de Riccati elle-même devient une forme particulière, et maintenant le domaine spatial lié lui aussi à l'équation de Riccati, voilà trois problèmes à peine, abordés, dont l'extrême fécondité vient d'être mise à jour.

La quatrième étape de cette vaste étude, dont l'idée maîtresse est, d'une part, l'existence de courbes planes ou gauches dites développantes ou développées généralisées d'une même courbe-base et, d'autre part, le rattachement à des notions métriques classiques telles que les courbes à paramétrisation isométrique ou isorad ue, pourrait être le problème de la canonisation géométrique spatiale de l'équation d'Abel qui contiendrait ainsi, en lui, tous les résultats partiels précédemment acquis.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

N. H. Abel : *Œuvres complètes,* t. 2; n° 5. Oslo, 1881.

E. Cartan : *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective* (Paris, Gauthier-Villars, 1937).

L. Raffy : *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1902.

R. Lagrange : *Bulletin de la Société Mathématique de France,* t. LXVI; fasc. 3-4, 1938).

G. Viguier : C. R. Acad. Sc. Paris, t. 227; n° 21, 22-11-48. *Algèbre et géométrie de l'équation de Riccati* (Annales Fac. Sc. Toulouse, 1945; t. 9, p. 1).
— *Canonisation géométrique de l'équation d'Abel* (mémoire à publier).