ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

J. DIXMIER

Les idéaux dans l'ensemble des variétés J d'un espace hilbertien

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 10 (1946), p. 91-114

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1946_4_10__91_0>

LES IDÉAUX DANS L'ENSEMBLE DES VARIÉTÉS J D'UN ESPACE HILBERTIEN

INTRODUCTION

Dans un espace hilbertien H, les domaines d'existence des opérateurs linéaires fermés, que j'ai appelés variétés J [1], forment un réseau $\mathfrak{L}$ (ou lattice) pour les opérations $\dot{+}$ et $\frown$. Certains théorèmes de [2] et [3] prouvent déjà que certaines propriétés de l'algèbre $\mathfrak{B}$ des opérateurs linéaires bornés de H et certaines propriétés de $\mathfrak{L}$ sont en relations étroites. Le but de ce mémoire est de mettre ces relations en évidence dans la question des idéaux bilatères de $\mathfrak{B}$. Les idéaux bilatères de $\mathfrak{B}$ ont été étudiés par Calkin [1]. Nous retrouvons ici une partie de ses résultats, et nous les précisons sur quelques points.

Au chapitre I, on précise les notations. Au chapitre II sont rappelés les résultats de [2] et [3] qui sont indispensables pour la suite. Au chapitre III, certaines relations d'équivalence et certaines relations d'ordre entre variétés J ou opérateurs bornés, déjà approfondies dans [2] et [3], sont présentées sous une forme légèrement différente et plus satisfaisante, qui me paraît à peu près définitive. Au chapitre IV sont définis et étudiés les idéaux invariants de $\mathfrak{L}$. Au chapitre V, on considère brièvement les relations d'équivalence associées. Enfin, au chapitre VI, on relie les propriétés précédemment établies aux propriétés des idéaux bilatères de $\mathfrak{B}$.

---

1. C. [2] et [3] (Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie qui termine ce travail.)

CHAPITRE PREMIER

Notations.

1. Notations ensemblistes : Si A et B sont deux parties d'un ensemble, on désigne par $A \cup B$ leur réunion, par $A \cap B$ leur intersection; $A \subset B$ signifie l'inclusion au sens large de A dans B.

Dans un ensemble E, une relation $x \backsim y$ entre éléments x, y, est appelée relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive. Une relation $x \succ y$ est appelée relation d'ordre si elle est réflexive, transitive et si les relations $x \succ y$, $y \succ x$, entraînent $y = x$. Une relation $x \succ y$ est appelée relation d'ordre au sens large si elle est réflexive et transitive; alors, la relation « $x \succ y$, $y \succ x$ » est une relation d'équivalence, soit $x \backsim y$; soit $\dot{x}$ la classe d'équivalence de x : si $x \succ y$, $x \backsim x'$, $y \backsim y'$, on a $x' \succ y'$; écrivons alors : $\dot{x} \succ \dot{y}$; la relation $\dot{x} \succ \dot{y}$ est une relation d'ordre entre classes d'équivalence.

2. Notations relatives aux nombres : On désigne par $a \vee b$ (resp. $a \wedge b$) le plus grand (resp. le plus petit) de deux nombres réels a et b.

Dans ce travail il sera souvent question de « suites »; il sera toujours sous-entendu, pour abréger, qu'il s'agit de suites infinies non décroissantes de nombres réels strictement positifs, tendant vers $+\infty$. [On admet les suites de la forme $(a_1, a_2, \ldots, a_n, +\infty, +\infty, \ldots)$. où les a_i sont strictement positifs, avec $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$]. Une telle suite, $(a_1, a_2, \ldots)$, sera désignée en abrégé par (a_i).

Si a est un nombre fini strictement positif, on convient que :

$$\frac{+\infty}{a} = +\infty\,; \quad \frac{a}{+\infty} = 0\,; \quad \frac{+\infty}{+\infty} = 1.$$

Etant données deux suites (a_i). (b_i) on écrira : $(a_i) \succ (b_i)$ ou $(b_i) \prec (a_i)$ si les rapports $\frac{a_i}{b_i}$ sont bornés (si $a_i = +\infty$ pour $i \geqslant i_0$ ceci impose $b_i = +\infty$ pour $i \geqslant i_0$) On voit aussitôt que cette relation est une relation d'ordre au sens large La relation « $(a_i) \succ (b_i)$, $(b_i) \succ (a_i)$ », qu'on notera $(a_i) \backsim (b_i)$ est donc une relation d'équivalence qui signifie que les rapports $\frac{a_i}{b_i}$ et $\frac{b_i}{a_i}$ sont bornés.

La suite $(a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots)$ est appelée suite doublée de la suite $(a_1, a_2, \ldots)$. On définit de même les suites triplée, .., p-uplée de la suite (a_i). On notera σ^p la suite p-uplée d'une suite σ. Si $\sigma \backsim \sigma'$, on a $\sigma^p \backsim \sigma'^p$. Si $\sigma = (a_i)$, on a $\sigma \backsim \sigma^2$ si et seulement si les rapports $\frac{a_{2i}}{a_i}$ sont bornés; on a alors $\sigma \backsim \sigma^p$ pour tout p.

Etant données deux suites, $\sigma = (a_i)$, $\sigma' = (a'_i)$, on pose : $\sigma \wedge \sigma' = (a_i \wedge a'_i)$, $\sigma \vee \sigma' = (a_i \vee a'_i)$. Si $\sigma \backsim \sigma_1$, $\sigma' \backsim \sigma'_1$, on a : $\sigma \wedge \sigma' \backsim \sigma_1 \wedge \sigma'_1$, $\sigma \vee \sigma' \backsim \sigma_1 \vee \sigma'_1$. L'ensemble des a_i et des a'_i, ordonné en une suite non décroissante, est une suite du type considéré ici, que nous noterons $\sigma.\sigma'$. (Si le nombre λ est présent n fois dans σ et n' fois dans σ', il est présent $n + n'$ fois dans $\sigma.\sigma'$. D'autre part, si une seule des suites σ, σ' contient des termes infinis, ils sont exclus de $\sigma.\sigma'$). Si $\sigma \backsim \sigma_1$, $\sigma' \backsim \sigma'_1$, on a $\sigma.\sigma' \backsim \sigma_1.\sigma'_1$; (cela résulte par exemple aussitôt du lemme 5,4 de [2]). On a : $\sigma.\sigma = \sigma^2$.

3. Notations relatives à l'espace hilbertien H : On suppose une fois pour toutes H séparable et à ∞ dimensions (uniquement, d'ailleurs, pour éviter certaines classifications pénibles et sans intérêt).

On désigne par $\{\mathcal{M}\}$ et $[\mathcal{M}]$ la plus petite variété linéaire et la plus petite variété linéaire fermée contenant un ensemble $\mathcal{M} \subset H$. Si $x_1, x_2, \ldots$ est une suite d'éléments de H, on désigne aussi par $[x_1, x_2, \ldots]$ la plus petite variété linéaire fermée contenant les x_i. Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux variétés linéaires, on pose : $\mathcal{M} \dot{+} \mathcal{N} = \{\mathcal{M} \cup \mathcal{N}\}$. On désigne par 0 la variété linéaire réduite à l'élément 0. On dit que deux variétés linéaires $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont disjointes si $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = 0$. Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux variétés linéaires telles que $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, on appelle déficience de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{M}$ la dimension (finie ou infinie) de l'espace vectoriel $\mathcal{M}/\mathcal{N}$; la déficience de $\mathcal{N}$ dans H s'appelle déficience de $\mathcal{N}$. Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux variétés linéaires fermées telles que $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, on désigne par $\mathcal{M} \ominus \mathcal{N}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{M}$ orthogonaux à $\mathcal{N}$.

Si A est un opérateur, on désigne par D_A son domaine d'existence, par Δ_A son domaine des valeurs, par $\mathcal{N}_A$ l'ensemble de ses zéros, par A^* son adjoint; on a : $[\Delta_A] = H \ominus \mathcal{N}_{A^*}$. On désigne par $\mathcal{B}$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés B tels que $D_B = H$. Si $\mathcal{M}$ est une variété linéaire fermée, on désigne par $P_{\mathcal{M}}$ l'opérateur de projection sur $\mathcal{M}$. Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont deux variétés linéaires fermées, et si $W \in \mathcal{B}$ applique isométriquement $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}'$, avec $\mathcal{N}_W = H \ominus \mathcal{M}$, on dit que W est partiellement isométrique, que $\mathcal{M}$ est sa variété initiale et $\mathcal{M}'$ sa variété finale; W^* est alors partiellement isométrique, avec $\mathcal{M}'$ pour variété initiale et $\mathcal{M}$ pour variété finale.

Si $A \in \mathcal{B}$ est complètement continu, $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ est self-adjoint, non négatif, complètement continu. Ses valeurs propres non nulles peuvent être ordonnées en une suite finie ou infinie, non croissante, à termes strictement positifs, chaque valeur propre étant écrite un nombre de fois égal à sa multiplicité. Si cette suite est finie, nous la complétons par une suite infinie de zéros. Dans tous les cas, on obtient donc une suite infinie (μ_i). Nous désignons par S_A la suite (μ_i^{-1}), qui est bien du type considéré au § 2.

CHAPITRE II

Rappel de définitions et de résultats.

1. On appelle variété J de H toute variété (linéaire) qui est le domaine d'existence d'un opérateur linéaire fermé de H. Les variétés linéaires fermées sont des variétés J ([2], Chapitre II, § 1).

2. On appelle opérateur J(2) de H tout opérateur (linéaire) dont l'image au sens de von Neumann est une variété J. Les opérateurs linéaires fermés sont des opérateurs J. Le domaine d'existence et le domaine des valeurs d'un opérateur J sont des variétés J. Le produit et la somme de deux opérateurs J sont des opérateurs J. Un opérateur J dont le domaine d'existence est fermé est fermé borné. La transformée d'une variété J par un opérateur J est une variété J. ([2], chapitre II, § 6; chapitre III, § 1, 3, 8).

3. Si D est une variété J, il existe des opérateurs $A \in \mathcal{B}$ tels que $\Delta_A = D$. Il existe des opérateurs linéaires bornés B biunivoques tels que $D_B = [D]$, $\Delta_B = D$ ([2]. théorème 2, 1).

4. Soit $A \in \mathcal{B}$. Il existe une application linéaire isométrique de Δ_A sur Δ_{A^*} ([3], lemme 2.1).

5. Si D et D′ sont des variétés J, $D \cap D'$ et $D \dot{+} D'$ sont des variétés J. L'ensemble des variétés J de H, ordonné par la relation d'inclusion, forme donc un réseau $\mathcal{L}$. Si $D \in \mathcal{L}$ on désigne par $\mathcal{L}_D$ le sous-réseau de $\mathcal{L}$ formé des variétés J contenues dans D.

Si $D \in \mathcal{L}$, et si D′ est une variété linéaire fermée, il existe une $D_1 \in \mathcal{L}$ disjointe de D′ telle que $D = D_1 \dot{+} (D \cap D')$.

La notion de variété linéaire fermée peut être définie de façon purement algébrique dans $\mathcal{L}$: $D \in \mathcal{L}$ est fermée si et seulement si il existe une $D' \in \mathcal{L}$ telle que $D \cap D' = 0$, $D \dot{+} D' = H$. Par suite, si $D \in \mathcal{L}$, [D] peut être définie algébriquement : c'est la plus petite variété linéaire fermée contenant D ([2], chapitre III, § 4, 5).

6. Soient D et D′ deux variétés J. Il existe un opérateur unitaire transformant D en D′ si et seulement si il existe un automorphisme $\mathfrak{A}$ du réseau $\mathcal{L}$ tel que $D' = \mathfrak{A}(D)$ ([3], proposition 4.1). Il existe une application isométrique de D sur D′ si et seulement si il existe un isomorphisme $\mathfrak{J}$ du réseau $\mathcal{L}_{[D]}$ sur le réseau $\mathcal{L}_{[D']}$ tel que $\mathfrak{J}(D) = D'$ ([3], proposition 4.2).

Supposons $[D] = [D'] = H$. Il existe un opérateur borné transformant biunivoquement D en D′ si et seulement si il existe une $D'' \in \mathcal{L}$, $D'' \supset D'$,

2. Ici, comme dans tout le travail, il n'est question que d'opérateurs uniformes (« single valued ») contrairement à ce qui se passe dans [2].

et un isomorphisme $\mathfrak{J}$ du réseau $\mathfrak{L}$ sur le réseau $\mathfrak{L}_{D''}$ tel que $\mathfrak{J}(D) = D'$ ([3], proposition 4.3).

Les propriétés envisagées précédemment peuvent être ainsi définies algébriquement dans $\mathfrak{L}$.

7. Si D est une variété J, on appelle noyau de D toute variété linéaire fermée à ∞ dimensions contenue dans D. Une variété J est dite de classe 1 si elle est fermée et à ∞ dimensions, de classe 2 si elle est non fermée et possède des noyaux, de classe 3 si elle ne contient aucun noyau (plus précisément, de classe 3_n si elle est à n dimensions; $n = 1, 2, \ldots, \infty$). ([2], chapitre V, § 2). Si D est de classe 3, tout $A \in \mathfrak{B}$ tel que $\Delta_A = D$ est complètement continu; si, réciproquement, $A \in \mathfrak{B}$ est complètement continu, Δ_A est de classe 3 ([2], théorème 1, 10).

8. Soit D une variété J, (e_i) un système orthonormal infini de vecteurs, (a_i) une suite du type considéré au chapitre I, § 2. On dit que (e_i) est une base orthonormale de D et (a_i) une suite de valeurs propres correspondantes si D est l'ensemble des vecteurs $x \in [e_1, e_2, \ldots]$ tels que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 |(e_i, x)|^2 < +\infty$ ([2], chapitre V, § 6). Ceci posé :

α. Toute variété J de classe 3 possède une infinité de bases orthonormales.

β. Soient (e_i), (a_i) et (e'_i), (a'_i) deux bases orthonormales et deux suites (non décroissantes) de valeurs propres correspondantes de D. On a : $(a_i) \backsim (a'_i)$. Réciproquement, si $(a_i) \backsim (a''_i)$, (a''_i) est une suite de valeurs propres correspondantes pour (e_i). A chaque variété J de classe 3, D, correspond ainsi une classe d'équivalence de suites bien déterminée. Nous désignons par σ un élément quelconque de cette classe. ([2], théorème 5, 6, proposition 5, 13, *b*, lemme 5, 4).

γ. Soient D, D', deux variétés J de classe 3. Il existe une application isométrique de D sur D' si et seulement si $\sigma_D \backsim \sigma_{D'}$ ([2], théorème 5, 7, proposition 5, 13, *b*, lemme 5, 4). Il existe un opérateur borné transformant D en D' si et seulement si $\sigma_D \succ \sigma_{D'}$ ([2], lemmes 6,1 et 6,3).

δ. Soient D une variété J de classe 3, et $A \in \mathfrak{B}$ tel que $\Delta_A = D$. On a : $S_A \backsim \sigma_D$ ([2], théorème 7,1)(3).

---

3. Certains de ces résultats s'étendent à toutes les variétés J, mais à condition de considérer des suites plus générales que celles du chapitre I, § 2 (Cf. [2]). Ceci entraînerait des complications de notations tout à fait inutiles pour le présent travail.

Les définitions données ici coïncident avec celles de [2] quand D est de classe 3∞. Ceci se produit si et seulement si tous les a_i sont finis, et on a alors : $[D] = [e_1, e_2, \ldots]$. Si D est de classe 3_n, avec $n < +\infty$, on a : $a_i = +\infty$ pour $i > n$, $a_i < +\infty$ pour $i \leqslant n$, et $D = [D] = [e_1, e_2, \ldots, e_n] \neq [e_1, e_2, \ldots]$, de sorte que les définitions diffèrent un peu de celles de [2]. Mais α, β, γ, δ établis dans [2] pour les variétés J de classe 3∞, sont évidents pour les variétés de dimensions finies.

9. Si D et D' sont des variétés J de classe 3, $D + D'$ est une variété J de classe 3, et $\sigma_D \wedge \sigma_{D'} \prec \sigma_{D \dotplus D'} \prec (\sigma_D \wedge \sigma_{D'})^2$. On a : $\sigma_{D \dotplus D'} \backsim \sigma_D \wedge \sigma_{D'}$ si (e_i) est une base orthonormale commune de D et D', telle que σ_D et $\sigma_{D'}$ soient des suites de valeurs propres correspondantes. On a : $\sigma_{D \dotplus D'} = \sigma_D^2$ si D et D' sont orthogonaux, et si $\sigma_D \backsim \sigma_{D'}$, c'est-à-dire s'il existe une application isométrique de D sur D' (4).

Si D et D', de classe 3, admettent la base orthonormale commune (e_i) avec les suites de valeurs propres correspondantes σ_D, $\sigma_{D'}$ on a : $\sigma_{D \cap D'} = \sigma_D \vee \sigma_{D'}$ ([3], théorème 3.1).

10. Soient D, D', deux variétés linéaires fermées. On écrit : $D \mathrel{\ddot{=}} D'$ si $D \cap D'$ est de déficience finie dans D et D' ou, ce qui revient au même, si D et D' sont de déficience finie dans $D \dotplus D'$; cette relation est une relation d'équivalence. On dit que D' est complètement asymptotique à D si, pour toute variété linéaire fermée D'' à ∞ dimensions contenue dans D', $D \dotplus D''$ est non fermée; il revient au même de dire que $P_{H \ominus D} D'$ est de classe 3. Si D' est complètement asymptotique à D et D complètement asymptotique à D' on dit que D et D' sont complètement asymptotiques : cette relation est une relation d'équivalence ([2], Notations, et chapitre I, § 6).

On fera désormais usage des propriétés rappelées dans ce chapitre sans s'y référer explicitement. En outre, nous supposons naturellement connus les résultats classiques concernant l'espace hilbertien.

---

4. Cf. [3], chapitre III, § 3, où sont envisagés successivement le cas où D est de classe 3_∞ et D' de classe 3_n, $n < +\infty$, et le cas où D et D' sont de classe 3_∞; le cas où D et D' sont de dimension finie est trivial.

CHAPITRE III

Relations d'équivalence et relations d'ordre entre variétés J et entre opérateurs bornés.

1. Relations d'équivalence et relations d'ordre entre variétés J :

Définition 3.1. Soient $D \in \mathfrak{L}$, $D' \in \mathfrak{L}$. *On écrit* $D \simeq D'$ *s'il existe un opérateur unitaire* U *tel que* $U(D) = D'$.

Définition 3.2. Soient $D \in \mathfrak{L}$, $D' \in \mathfrak{L}$. *On écrit* $D \approx D'$ *s'il existe une application isométrique de* D *sur* D'.

Théorème 3.1. α. Les relations $D \simeq D'$, $D \approx D'$ *sont des relations d'équivalence dans* $\mathfrak{L}$.

β. $D \simeq D'$ *entraîne* $D \approx D'$.

γ. $D \approx D'$ *entraîne* $D \simeq D'$ *si et seulement si* $H \ominus [D]$ *et* $H \ominus [D']$ *ont même dimension.*

Démonstration. α et β sont immédiats. Prouvons γ. Si $D' = U(D)$ pour un unitaire U, U applique $H \ominus [D]$ sur $H \ominus [D']$, donc $H \ominus [D]$ et $H \ominus [D']$ ont même dimension. Réciproquement, si $H \ominus [D]$ et $H \ominus [D']$ ont même dimension, avec $D \approx D'$, l'application isométrique de D sur D' peut se prolonger en une application isométrique de $[D]$ sur $[D']$; et il existe une application isométrique de $H \ominus [D]$ sur $H \ominus [D']$. Par linéarité, on obtient une application isométrique de H sur H, c'est-à-dire un opérateur unitaire, qui transforme D en D'.

Définition 3.3. Soient $D \in \mathfrak{L}$, $D' \in \mathfrak{L}$. *On écrit* $D \succ D'$ *ou* $D' \prec D$ *s'il existe un* $A \in \mathfrak{B}$ *tel que* $A(D) = D'$. (A *n'est pas forcément biunivoque.) On écrit* $D \precsim D'$ *si* $D \succ D'$ *et* $D' \succ D$.

Théorème 3.2. α. La relation $D \prec D'$ *est une relation d'ordre au sens large.*

β. *La relation* $D \precsim D'$ *est une relation d'équivalence.*

γ. *La relation* $D \approx D'$ *entraîne* $D \precsim D'$.

Démonstration. α est évident, et β résulte aussitôt de α. Pour prouver γ, il suffit de prouver que $D \approx D'$ entraîne $D \succ D'$. Or l'application isométrique de D sur D' se prolonge en une application isométrique I de $[D]$ sur $[D']$. On a : $IP_{[D]} \in \mathfrak{B}$ et $D' = IP_{[D]}(D)$.

Théorème 3.3. α. On a : $D \succ D'$ *si et seulement si il existe une* $D'' \in \mathfrak{L}$ avec $D'' \approx D'$, $D'' \subset D$.

β. *En particulier,* $D \supset D'$ *entraîne* $D \succ D'$.

Démonstration. 1. Supposons $D' = A(D)$ avec $A \in \mathfrak{B}$. Soit $B \in \mathfrak{B}$, avec $D = \Delta_B$. On a : $D' = \Delta_{AB}$, donc $D' = \Delta_{AB} \approx \Delta_{B^*A^*} \subset \Delta_{B^*} \approx \Delta_B = D$, donc $D' \approx D''$ avec $D'' \subset D$.

2. Supposons $D' \approx D''$ avec $D'' \subset D$. Soit $B'' \in \mathcal{B}$, avec $\Delta_{B''} = D''$. Soit B un opérateur linéaire fermé borné *biunivoque*, avec $D_B = [D]$, $\Delta_B = D$. On a : $BP_{[D]} = B_1 \in \mathcal{B}$. $B^{-1}B'' = R$ est un opérateur J, avec $D_R = H$, $\Delta_R \subset [D]$, donc $R \in \mathcal{B}$, et l'on a : $B'' = BR = B_1R$. Donc $D' \approx D'' = \Delta_{B''} \approx \Delta_{B''^*} = \Delta_{R^*B_1^*} = R^*(\Delta_{B_1^*})$. D'ailleurs, $\Delta_{B_1^*} \approx \Delta_{B_1} = \Delta_B = D$. Donc $D' = A(D)$, avec $A \in \mathcal{B}$.

2. Rapports entre les définitions précédentes et les valeurs propres.

Théorème 3.4. On a : $D \gg D'$ *seulement dans les cas suivants :*

α. D *est de classe 1 ou 2.*

β. D *et* D′ *sont de classe 3 et* $\sigma_D \succ \sigma_{D'}$.

Démonstration. 1. Si D est de classe 1 ou 2, soit N un noyau de D. On a : $D' \approx D''$ avec $D'' \subset N \subset D$. D'où (théorème 3.3): $D \gg D'$.

2. Si D et D′ sont de classe 3, on sait que $D \gg D'$ si et seulement si $\sigma_D \succ \sigma_{D'}$.

3. Si D est de classe 3 et D′ de classe 1 ou 2, il ne peut exister d'opérateur borné A tel que $A(D) = D'$, car, si N est un noyau de D′, $A^{-1}(N)$ serait un noyau de D.

Théorème 3.5. On a : $D \approx D'$ *seulement dans les cas suivants :*

α. D *et* D′ *sont de classe 1 ou 2.*

β. D *et* D′ *sont de classe 3, et* $D \approx D'$ *(c'est-à-dire* $\sigma_D \backsim \sigma_{D'}$*).*

Démonstration : immédiate.

Comparons les théorèmes 3.4 et 3.5 à [2], chapitre VI, § 4, où sont définies et étudiées les relations $\succ$ et $\backsim$ entre variétés J partout denses. Supposons $D \in \mathfrak{L}$, $D' \in \mathfrak{L}$, avec $[D] = [D'] = H$. Si $D \succ D'$, c'est-à-dire s'il existe un $A \in \mathcal{B}$ qui transforme biunivoquement D en D′, on a évidemment $D \gg D'$. Si réciproquement $D \gg D'$ on voit qu'on a, ou bien $D \succ D'$, ou bien D de classe 2 avec $D' = H$. De même, $D \backsim D'$ entraine $D \approx D'$, mais $D \approx D'$ entraîne $D \backsim D'$, ou D de classe 2 avec $D' = H$, ou $D = H$ avec D′ de classe 2.

3. Définitions algébriques des relations précédentes.

Théorème 3.6. On a : $D \simeq D'$ *si et seulement si il existe un automorphisme* $\mathcal{A}$ *de* $\mathfrak{L}$ *tel que* $D' = \mathcal{A}(D)$.

Théorème 3.7. On a : $D \approx D'$ *si et seulement si il existe un isomorphisme* $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{L}_{[D]}$ *sur* $\mathfrak{L}_{[D']}$ *tel que* $\mathfrak{J}(D) = D'$.

Le théorème 3.3 fournit alors une définition algébrique des relations $\gg$ et $\approx$. Mais voici une définition plus directe :

Théorème 3.8. On a: $D \gg D'$ *si et seulement si il existe des éléments* D_1, D'_1 *de* $\mathfrak{L}$, *avec* $D_1 \subset D$ *et* $D' \subset D'_1$, *et un isomorphisme* $\mathfrak{J}$ *de* $\mathfrak{L}_{[D_1]}$ *sur* $\mathfrak{L}_{D'_1}$ *tel que* $\mathfrak{J}(D_1) = D'$.

Démonstration. 1. Supposons $D' = A(D)$, avec $A \in \mathcal{B}$. On a : $D = (\mathcal{N}_A \cap D) \dotplus D_1$, avec $D_1 \in \mathcal{L}$, $D_1 \cap \mathcal{N}_A = 0$. A transforme biunivoquement D_1 en D', donc D_1 et D' ont même dimension. L'existence de $\mathcal{J}$ est immédiate (avec $D'_1 = D'$) si cette dimension est finie. Si cette dimension est infinie, on a : $D_1 \approx \overline{D}_1$, $D' \approx \overline{D}'$, avec $[\overline{D}_1] = [\overline{D}'] = H$, et il existe un $T \in \mathcal{B}$ qui transforme biunivoquement $\overline{D}_1$ en $\overline{D}'$. Donc il existe un élément $\overline{D}'_1$ de $\mathcal{L}$, avec $\overline{D}'_1 \supset \overline{D}'$, et un isomorphisme $\overline{\mathcal{J}}$ de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}_{\overline{D}'_1}$, tel que $\overline{\mathcal{J}}(\overline{D}_1) = \overline{D}'$. D'où immédiatement un élément D'_1 de $\mathcal{L}$, avec $\overline{D}'_1 \approx D'_1 \supset D'$, et un isomorphisme $\mathcal{J}$ de $\mathcal{L}_{[D_1]}$ sur $\mathcal{L}_{D'_1}$, tel que $\mathcal{J}(D_1) = D'$.

2. Supposons réciproquement $\mathcal{J}(D_1) = D'$, avec $D_1 \subset D$, $D'_1 \supset D'$, $\mathcal{J}$ étant un isomorphisme de $\mathcal{L}_{[D_1]}$ sur $\mathcal{L}_{D'_1}$. Alors, D_1 et D'_1 ont même dimension et $[D'] = [D'_1]$. Si cette dimension est finie, on a évidemment $D \gg D_1 \approx D'_1 \gg D'$. Si cette dimension est infinie, on a $D_1 \approx \overline{D}_1$, $D'_1 \approx \overline{D}'_1$, $D' \approx \overline{D}'$, avec $[\overline{D}_1] = [\overline{D}'_1] = [\overline{D}'] = H$, et il existe un isomorphisme $\overline{\mathcal{J}}$ de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}_{\overline{D}'_1}$ tel que $\mathcal{J}(\overline{D}_1) = \overline{D}'$. Donc, on a : $D \gg D_1 \approx \overline{D}_1 \gg \overline{D}' \approx D'$.

4. Relations d'équivalence et relations d'ordre entre opérateurs de $\mathcal{B}$.

Définition 3.4. Soient $A \in \mathcal{B}$, $A' \in \mathcal{B}$. *On écrit:* $A \approx A'$ *s'il existe un opérateur* L (*resp.* M) *dans* $\mathcal{B}$, *transformant biunivoquement et bicontinûment* $H \ominus \mathcal{N}_{A'}$ (*resp.* $[\Delta_A]$) *en* $H \ominus \mathcal{N}_A$ (*resp.* $[\Delta_{A'}]$) *et tels que :* $A' = MAL$.

Théorème 3.9. α. La relation $A \approx A'$ *est une relation d'équivalence.*

β. *On a :* $A \approx A'$ *si et seulement si* $\Delta_A \approx \Delta_{A'}$.

γ. *Si* $A \approx A'$, *il existe un opérateur* L_1 *dans* $\mathcal{B}$, *transformant biunivoquement et bicontinûment* $H \ominus \mathcal{N}_{A'}$ *en* $H \ominus \mathcal{N}_A$, *avec* $\mathcal{N}_{L_1} = \mathcal{N}_{A'}$, *et un opérateur partiellement isométrique* W_1 *dont les variétés initiale et finale sont* $[\Delta_A]$ *et* $[\Delta_{A'}]$, *tels que :* $A' = W_1 A L_1$.

δ. *Si* $A \approx A'$, *il existe un opérateur* L_2 *dans* $\mathcal{B}$, *transformant biunivoquement et bicontinûment* $[\Delta_A]$ *en* $[\Delta_{A'}]$, *avec* $\mathcal{N}_{L_2} = \mathcal{N}_{A'}$, *et un opérateur partiellement isométrique* W_2 *dont les variétés initiale et finale sont* $H \ominus \mathcal{N}_{A'}$ *et* $H \ominus \mathcal{N}_A$, *tels que* $A' = L_2 A W_2$.

Démonstration. 1. α résultera aussitôt de β. Prouvons β. Supposons $A' \approx A$, c'est-à-dire $A' = MAL$, L et M ayant les propriétés de la définition 3.4. avec de plus : $Lx = 0$ pour $x \in \mathcal{N}_{A'}$ et $My = 0$ pour $y \in H \ominus [\Delta_A]$ (ce qu'on peut évidemment supposer). On a aussitôt : $\Delta_A = \Delta_{AL}$, donc : $\Delta_{A'} = \Delta_{MA} \approx \Delta_{A^*M^*}$. Or, M^* transforme biunivoquement et bicontinûment $[\Delta_{A'}] = H \ominus \mathcal{N}_{A'^*}$ en $[\Delta_A] = H \ominus \mathcal{N}_{A^*}$. D'où : $\Delta_{A^*M^*} = \Delta_{A^*}$. Donc : $\Delta_{A'} \approx \Delta_{A^*} \approx \Delta_A$.

Supposons maintenant $\Delta_{A'} \approx \Delta_A$. Il existe donc un opérateur partiellement isométrique W_1 dont les variétés initiale et finale sont $[\Delta_A]$ et $[\Delta_{A'}]$, qui transforme Δ_A en $\Delta_{A'}$. Soient $\overline{A}$ et $\overline{A}'$ les restrictions de A et A' à $H \ominus \mathcal{N}_A$ et $H \ominus \mathcal{N}_{A'}$. $\overline{L}_1 = (W_1\overline{A})^{-1}\overline{A}'$ est un opérateur J qui transforme biunivoquement $H \ominus \mathcal{N}_{A'}$ en $H \ominus \mathcal{N}_A$, de sorte que $\overline{L}_1$ est bicontinu. Et l'on a : $\overline{A}' = W_1 \overline{A}\, \overline{L}_1 = W_1 A \overline{L}_1$. Prolongeons $\overline{L}_1$ en un opérateur $L_1 \in \mathcal{B}$ en posant $L_1 x = 0$ si $x \in \mathcal{N}_{A'}$. On a alors $A' = W_1 A L_1$. Donc : $A' \approx A$.

2. γ résulte de la démonstration précédente. Prouvons δ. Si $A \approx A'$, c'est-à-dire si $A' = M A L$ (notations de la définition 3.4), on a : $A'^* = L^* A^* M^*$, et l'examen des propriétés de L^*, M^* montre que $A'^* \approx A$. Donc, on a : $A'^* = W_3 A^* L_3$, $L_3 \in \mathcal{B}$ transformant biunivoquement et bicontinûment $H \ominus \mathcal{N}_{A'^*}$ en $H \ominus \mathcal{N}_{A^*}$, avec $\mathcal{N}_{L_3} = \mathcal{N}_{A'^*}$, et W_3 étant un opérateur partiellement isométrique dont les variétés initiale et finale sont $[\Delta_{A^*}]$ et $[\Delta_{A'^*}]$. D'où : $A' = L_3^* A W_3^*$. Posant : $L_3^* = L_2$, $W_3^* = W_2$, on voit que L_2 et W_2 ont les propriétés de δ.

Définition 3.5. Soient $A \in \mathcal{B}$, $A' \in \mathcal{B}$. *On écrit* $A \succ A'$, *ou* $A' \prec A$, *s'il existe des éléments* S, T *de* $\mathcal{B}$ *tels que* $A' = SAT$. *On écrit* $A' \precsim A$ *si* $A' \succ A$ *et* $A \succ A'$.

Théorème 3.10. α. *La relation* $A \succ A'$ *est une relation d'ordre au sens large.*

β. *La relation* $A \precsim A'$ *est une relation d'équivalence.*

γ. *On a :* $A \succ A'$ *si et seulement si* $\Delta_A \succ \Delta_{A'}$. *En particulier,* $\Delta_{A'} \subset \Delta_A$ *entraine* $A \succ A'$.

δ. *On a :* $A \precsim A'$ *si et seulement si* $\Delta_A \precsim \Delta_{A'}$.

ε. *Si* $A \succ A'$, *il existe un* $S_1 \in \mathcal{B}$, *et un opérateur partiellement isométrique* W_1, *dont les variétés initiale et finale sont* $H \ominus \mathcal{N}_{A'}$ *et* $H \ominus \mathcal{N}_{S_1 A}$ *tels que :* $A' = S_1 A W_1$.

ζ. *Si* $A \succ A'$ *il existe un* $S_2 \in \mathcal{B}$, *et un opérateur partiellement isométrique* W_2 *dont les variétés initiale et finale sont* $[\Delta_{AS_2}]$ *et* $[\Delta_{A'}]$, *tels que* $A' = W_2 A S_2$.

η. $A \approx A'$ *entraîne* $A \precsim A'$.

Démonstration. 1. β et δ résultent respectivement de α et γ ; α résulte de γ. Prouvons γ. Supposons $A \succ A'$, c'est-à-dire $A' = SAT$, avec $S \in \mathcal{B}$, $T \in \mathcal{B}$. On a : $\Delta_{A'} = S(\Delta_{AT}) \prec \Delta_{AT} \subset \Delta_A$, donc $\Delta_A \succ \Delta_{A'}$.

Supposons maintenant $\Delta_A \succ \Delta_{A'}$, c'est-à-dire $\Delta_{A'} = S(\Delta_A)$, avec $S \in \mathcal{B}$. On a : $\Delta_{A'} = \Delta_{SA}$. Donc (théorème 3.9 δ) il existe un opérateur L dans $\mathcal{B}$, transformant biunivoquement et bicontinûment $[\Delta_{A'}]$ en $[\Delta_{SA}] = [\Delta_{A'}]$ et s'annulant dans $H \ominus [\Delta_{A'}]$, et un opérateur partiellement isométrique W_1 dont les variétés initiale et finale sont $H \ominus \mathcal{N}_{A'}$ et $H \ominus \mathcal{N}_{SA} = H \ominus \mathcal{N}_{LSA}$, tels que : $A' = LSAW_1$. Posant $LS = S_1$, on a prouvé que $A \succ A'$, et en même temps ε.

2. Prouvons ζ. Si $A \gg A'$, c'est-à-dire si $A' = SAT$, avec $S \in \mathcal{B}$, $T \in \mathcal{B}$, on a : $A'^* = T^* A^* S^*$, donc $A^* \gg A'^*$. Donc on a : $A'^* = S_3 A^* W_3$, avec $S_3 \in \mathcal{B}$, W_3 étant un opérateur partiellement isométrique dont les variétés initiale et finale sont $H \ominus \mathfrak{N}_{A'^*} = [\Delta_{A'}]$, et $H \ominus \mathfrak{N}_{S_3 A^*} = [\Delta_{AS_3^*}]$. D'où : $A' = W_3^* A S_3^*$. Posant $S_3^* = S_2$ $W_3^* = W_2$, on voit que S_2 et W_2 ont les propriétés de ζ.

3. η résulte aussitôt de ce que $\Delta_A \approx \Delta_{A'}$ entraîne $\Delta_A \precsim \Delta_{A'}$.

Théorème 3.11. On a : $A \gg A'$ *seulement dans les cas suivants :*

α. A *n'est pas complètement continu.*

β. A *et* A' *sont complètement continus, et* $S_A \succ S_{A'}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer les théorèmes 3.10 et 3.4.

Théorème 3 12. On a : $A \precsim A'$ *seulement dans les cas suivants :*

α. *Ni* A, *ni* A' *ne sont complètement continus.*

β. A *et* A' *sont complètement continus, et* $S_A \backsim S_{A'}$ *(d'où* $\Delta_A \approx \Delta_{A'}$, $A \approx A'$.)

Démonstration. Il suffit d'appliquer les théorèmes 3 10 et 3 5.

De même qu'on a comparé les relations $\succ$ et $\gg$ pour les variétés J, on peut comparer, pour les éléments de $\mathcal{B}$, la relation $\gg$ à la relation $\succ$, définie dans [3], chapitre II, § 4, pour les opérateurs de $\mathcal{B}$ dans le cas p. Les résultats sont analogues.

CHAPITRE IV

Idéaux dans $\mathfrak{L}$.

1. Idéaux invariants. *Définition 4. 1. : Soit $\mathfrak{D}$ un sous-ensemble non vide de $\mathfrak{L}$. $\mathfrak{D}$ est appelé un idéal s'il possède les propriétés suivantes :*

I_1: $D \in \mathfrak{D}$, $D' \in \mathfrak{D}$ *entraînent* $D \dotplus D' \in \mathfrak{D}$.

I_2: $D \in \mathfrak{D}$, $D' \subset D$ *entraînent* $D \in \mathfrak{D}$. [5]

Définition 4. 2. Un idéal $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{L}$ est appelé un idéal invariant s'il possède la propriété suivante :

I_3: *Pour tout automorphisme $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{L}$ on a : $\mathcal{A}(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D}$ (ce qui entraîne aussitôt : $\mathcal{A}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}$)*

I_3 *est équivalente (théorème 3. 6) à :*

I'_3: $D \in \mathfrak{D}$, $D' \simeq D$ *entraînent* $D' \in \mathfrak{D}$.

Théorème 4. 1. Soit $\mathfrak{D}$ un idéal invariant de $\mathfrak{L}$. Soient $D \in \mathfrak{D}$ et $D' \approx D$. On a : $D' \in \mathfrak{D}$.

Démonstration. Si $H \ominus [D]$ et $H \ominus [D']$ ont même dimension, on a $D' \simeq D$ (théorème 3.1. γ), donc $D' \in \mathfrak{D}$ d'après I'_3. Si les dimensions de $H \ominus [D]$ et de $H \ominus [D']$ sont distinctes, c'est que l'une des variétés D, D' est de dimension infinie : alors D et D' sont de dimension infinie. Soient V_1, V_2 deux variétés linéaires fermées, à ∞ dimensions, orthogonales complémentaires dans [D], telles que $D = D_1 \dotplus D_2$ en posant : $D_1 = V_1 \cap D, D_2 = V_2 \cap D$ (on obtient aisément de telles variétés en partant d'une base orthonormale de D). Puisque $D \approx D'$, on a aussi : $D' = D'_1 \dotplus D'_2$, avec D'_1 et D'_2 orthogonales, $D_1 \approx D'_1$, $D_2 \approx D'_2$. Comme $[D_1]$, $[D'_1]$, $[D_2]$, $[D'_2]$, sont de déficience infinie, on a même : $D_1 \simeq D'_1$, $D_2 \simeq D'_2$. Ceci posé, $D \in \mathfrak{D}$ entraîne $D_1 \in \mathfrak{D}$ et $D_2 \in \mathfrak{D}$ d'après I_2, donc $D'_1 \in \mathfrak{D}$ et $D'_2 \in \mathfrak{D}$ d'après I'_3, donc $D' \in \mathfrak{D}$ d'après I_1.

Théorème 4.2. Soit $\mathfrak{D}$ un sous-ensemble non vide de $\mathfrak{L}$. $\mathfrak{D}$ est un idéal invariant si et seulement si il possède les deux propriétés suivantes :

I_1 : $D \in \mathfrak{D}$, $D' \in \mathfrak{D}$ *entraînent* $D \dotplus D' \in \mathfrak{D}$.

I'_2 : $D \in \mathfrak{D}$, $D \gg D'$ *entraînent* $D' \in \mathfrak{D}$.

Démonstration. 1. Si $\mathfrak{D}$ est un idéal invariant, $\mathfrak{D}$ vérifie I_1. Montrons que $\mathfrak{D}$ vérifie I'_2. Soient $D \in \mathfrak{D}$ et $D \gg D'$. On a (théorème 3.3α) : $D' \approx D''$ avec $D'' \subset D$. Ceci posé, on a $D'' \in \mathfrak{D}$ d'après I_2, donc $D' \in \mathfrak{D}$ (théorème 4.1).

---

5. Moyennant I_3, on peut se contenter de faire l'hypothèse I_1 pour $D \cap D' = 0$, d'après le théorème 5,13 de [2].

2. Si $\mathfrak{D}$ vérifie I_1 et I'_1, montrons qu'il vérifie I_2 et I'_3. Il suffit de remarquer que les relations $D' \subset D$ ou $D' \simeq D$ entraînent $D \gg D'$ (théorème 3.3).

Théorème 4 3. Soient $\mathfrak{L}'$ l'ensemble des variétés J de classe 3, $\mathfrak{L}''$ l'ensemble des variétés J de dimension finie, 0 *l'ensemble réduit à la variété* 0.

α. *0, $\mathfrak{L}''$, $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}$ sont des idéaux invariants de $\mathfrak{L}$.*

β. *Pour tout idéal invariant $\mathfrak{D}$ distinct de* 0 *et $\mathfrak{L}$, on a : $\mathfrak{L}'' \subset \mathfrak{D} \subset \mathfrak{L}'$.*

Démonstration. 1. α est immédiat pour $0, \mathfrak{L}'', \mathfrak{L}$. Pour $\mathfrak{L}'$, I_2 et I'_2 sont immédiats, I_1 est connue.

2. Soit $\mathfrak{D}$ un idéal invariant. Si $D \in \mathfrak{D}$, avec D de classe 1 ou 2, soit N un noyau de D. On a : $\bar{N} \in \mathfrak{D}$ d'après I_2, donc $H \in \mathfrak{D}$ d'après le théorème 4.1, donc $\mathfrak{D} = \mathfrak{L}$ d'après I_2. Donc, si $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{L}$, on a $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{L}'$. Si $\mathfrak{D} \neq 0$, $\mathfrak{D}$ contient une $D \in \mathfrak{L}$, $D \neq 0$, donc contient une variété à une dimension d'après I_1, donc toutes les variétés a 1 dimension d'après I'_2, donc $\mathfrak{L}''$ d'après I_1.

2. Idéaux de suites. Il s'agit de suites au sens du chapitre I § 2.

Définition 4.3. Soit Δ un ensemble non vide de suites. Δ est appelé un idéal s'il possède les propriétés suivantes :

J_1 : *$\sigma \in \Delta$ et $\sigma \succ \sigma'$ entraînent $\sigma' \in \Delta$ (donc toute suite $\sigma'' \backsim \sigma$ est dans Δ.)*

J_2 : *$\sigma \in \Delta$ et $\sigma' \in \Delta$ entraînent $(\sigma \wedge \sigma')^2 \in \Delta$.*

Théorème 4.4. Il y a une correspondance biunivoque entre les idéaux invariants $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{L}$ tels que $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{L}$ et les idéaux de suites. Cette correspondance est définie de la manière suivante :

α. *Si $\mathfrak{D}$ est un idéal invariant de $\mathfrak{L}$, avec $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{L}'$, l'ensemble des σ_D où $D \in \mathfrak{D}$ est est un idéal de suites.*

β. *Si Δ est un idéal de suites, l'ensemble des $D \in \mathfrak{L}'$ telles que $\sigma_D \in \Delta$ est un idéal invariant $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{L}$ tel que $D \subset \mathfrak{L}'$.*

Démonstration. 1. Soit $\mathfrak{D}$ un idéal invariant de $\mathfrak{L}$, avec $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{L}'$. Soit Δ l'ensemble des σ_D où $D \in \mathfrak{D}$. Montrons que Δ vérifie J_1 Soit $\sigma \in \Delta$ et σ' telle que $\sigma \succ \sigma'$. Il existe une $D \in \mathfrak{D}$, avec $\sigma_D = \sigma$. Soit $D' \in \mathfrak{L}'$, telle que $\sigma_{D'} = \sigma'$. On a : $D \gg D'$ (théorème 3.4), donc $D' \in \mathfrak{D}$ d'après I'_2, donc $\sigma' \in \Delta$.

Montrons que Δ vérifie J_2. Soient $\sigma \in \Delta$ et $\sigma' \in \Delta$. Soient V_1, V_2, deux variétés linéaires fermées orthogonales, à ∞ dimensions. Soit $(e^i_1, e^i_2, \ldots)$ une base orthogonale de V_i $(i = 1,2)$. Considérons les variétés J définies de la manière suivante :

	Base orthonormale	Suite de valeurs propres correspondantes
D_1	(e^1_i)	σ
D'_1	(e^1_i)	σ'
D_2	(e^2_i)	σ
D'_2	(e^2_i)	σ'

Par définition de Δ, et d'après le théorème 4.1, on a : $D_i \in \mathfrak{D}$, $D'_i \in \mathfrak{D}$ $(i = 1,2)$ donc $D_1 \dot{+} D'_1 \dot{+} D_2 \dot{+} D'_2 \in \mathfrak{D}$ d'après I_1. Or : $\sigma_{D_1 \dot{+} D'_1} = \sigma_{D_2 \dot{+} D'_2} = \sigma \wedge \sigma'$. Donc : $\sigma_{D_1 \dot{+} D'_1 \dot{+} D_2 \dot{+} D'_2} = (\sigma \wedge \sigma')^2$; $(\sigma \wedge \sigma')^2$ est donc dans Δ.

2. Montrons que la correspondance $\mathfrak{D} \to \Delta$ ainsi définie est biunivoque en montrant que l'ensemble des $D \in \mathfrak{L}'$ telles que $\sigma_D \in \Delta$ est précisément $\mathfrak{D}$. Soit donc $D \in \mathfrak{L}'$, avec $\sigma_D \in \Delta$. Il existe une $D' \in \mathfrak{D}$, avec $\sigma_{D'} = \sigma_D$, d'où $D \approx D'$, donc $D \in \mathfrak{D}$ (théorème 4.1).

3. Soit enfin Δ un idéal de suites. Soit $\mathfrak{D}$ l'ensemble des $D \in \mathfrak{L}'$ telles que $\sigma_D \in \Delta$. Montrons que $\mathfrak{D}$ vérifie I'_2. Soit $D \in \mathfrak{D}$ et $D' \in \mathfrak{L}$ avec $D \gg D'$. On a : $D' \in \mathfrak{L}'$. D'autre part, $\sigma_D \succ \sigma_{D'}$, $\sigma_D \in \Delta$, donc $\sigma_{D'} \in \Delta$ d'après J_1, donc $D' \in \mathfrak{D}$. Montrons que $\mathfrak{D}$ vérifie I_1. Soient $D \in \mathfrak{D}$, $D' \in \mathfrak{D}$. On a : $(\sigma_D \wedge \sigma_{D'})^2 \in \Delta$ d'après J_2, et $\sigma_{D \dot{+} D'} \prec (\sigma_{D'} \wedge \sigma_D)^2$, donc $\sigma_{D \dot{+} D'} \in \Delta$ d'après J_1. Donc $D \dot{+} D' \in \mathfrak{D}$.

Théorème 4.5. Dans la c rrespondance du théorème 4.4 :

α. *A l'idéal 0 de $\mathfrak{L}$ correspond l'idéal de suites formé de la seule suite* $(+\infty, +\infty, ..)$

β. *A l'idéal $\mathfrak{L}''$ de $\mathfrak{L}$ correspond l'idéal des suites infinies à partir d'un certain rang.*

γ. *A l'idéal $\mathfrak{L}'$ de $\mathfrak{L}$ correspond l'idéal formé de toutes les suites.*

Démonstration : immédiate.

Remarque. Ceci montre que tout idéal de suites non réduit à la suite $(+\infty, +\infty, ...)$ contient toutes les suites infinies à partir d'un certain rang — ce qui est facile à voir directement.

3. Idéaux principaux *Théorème 4.6.* α. *Toute intersection non vide d'idéaux invariants de $\mathfrak{L}$ est un idéal invariant de $\mathfrak{L}$.*

β. *Étant donné un sous-ensemble non vide* A *de $\mathfrak{L}$, il existe, parmi les idéaux invariants contenant* A, *un idéal plus petit que tous les autres, à savoir l'intersection de tous les idéaux invariants contenant* A.

Démonstration : immédiate.

Définition 4.4. Soit $D \in \mathfrak{L}$. On désigne par $\mathfrak{D}(D)$ le plus petit idéal invariant contenant D. *Tout idéal $\mathfrak{D}$ de la forme $\mathfrak{D}(D)$ est dit principal.* D *est dite alors élément générateur de $\mathfrak{D}$.*

Théorème 4.7. α. *Si $D \in \mathfrak{L}$ est de classe 1 ou 2, $\mathfrak{D}(D) = \mathfrak{L}$.*

β *Si $D = 0$, $\mathfrak{D}(D) = 0$.*

γ. *Si* D *est de dimension finie, $\mathfrak{D}(D) = \mathfrak{L}''$.*

δ. *Si* D *est de classe 3_∞, soit $(D^1, D^2, ...)$ une suite infinie de variétés* J *orthogonales deux à deux, avec $D^i \approx D$ pour tout i. Posons, pour tout entier n, $D_n = D^1 \dot{+} D^2 \dot{+} ... \dot{+} D^n$. $\mathfrak{D}(D)$ est l'ensemble des $D' \in \mathfrak{L}$ tels que $D_n \gg D$ pour un certain n.*

Démonstration. α, β, γ sont immédiats. Prouvons δ. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des $D' \in \mathcal{L}$ telles que $D_n \gg D'$ pour un certain n. Il est immédiat que $D \in \mathcal{E} \subset \mathfrak{D}(D)$. Pour prouver que $\mathcal{E} = \mathfrak{D}(D)$, il suffit donc de prouver que $\mathcal{E}$ est un idéal invariant. Or, $\mathcal{E}$ vérifie évidemment I'_2. Montrons que $\mathcal{E}$ vérifie I_1. Soient $\overline{D}_1 \in \mathcal{E}$, $\overline{D}_2 \in \mathcal{E}$. On a : $D_p \gg \overline{D}_1$, $D_p \gg \overline{D}_2$ pour un p bien choisi. Donc : $\sigma_{D_p} \succ \sigma_{\overline{D}_1}$, $\sigma_{D_p} \succ \sigma_{\overline{D}_2}$. En remarquant que la suite doublée de σ_{D_p} n'est autre que $\sigma_{D_{2p}}$, on voit que : $\sigma_{D_{2p}} \succ \sigma_{\overline{D}_1 \dot{+} \overline{D}_2}$. Donc : $D_{2p} \gg \overline{D}_1 \dot{+} \overline{D}_2$, $\overline{D}_1 \dot{+} \overline{D}_2 \in \mathcal{E}$.

Théorème 4.8. Soient $D_1, D_2, \ldots, D_n$ *des éléments de* $\mathcal{L}$. *Le plus petit idéal invariant* $\mathfrak{D}$ *contenant les* D_i *est principal, et* $D_1 \dot{+} D_2 \dot{+} \ldots \dot{+} D_n$ *est élément générateur de* $\mathfrak{D}$.

Démonstration. Soit $D = D_1 \dot{+} D_2 \dot{+} \ldots \dot{+} D_n$. $\mathfrak{D}(D)$ contient les D_i d'après I_2, donc contient $\mathfrak{D}$. D'autre part, $D \in \mathfrak{D}$ d'après I_1, donc $\mathfrak{D}(D) \subset \mathfrak{D}$. D'où : $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(D)$.

4. Idéaux hyperprincipaux. *Définition 4.5. Soit* $\mathfrak{D}$ *un idéal invariant de* $\mathcal{L}$. *Une* $D \in \mathcal{L}$ *est dite élément hypergénérateur de* $\mathfrak{D}$ *si* $\mathfrak{D}$ *est l'ensemble des* $D' \in \mathcal{L}$ *telles que* $D \gg D'$. *Un idéal qui possède un élément hypergénérateur est dit hyperprincipal.*

Théorème 4.9. α. *Tout idéal hyperprincipal est principal.*

β. *Tout élément hypergénérateur d'un idéal est aussi générateur de cet idéal.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{D}$ un idéal admettant l'élément hypergénérateur D. On a évidemment : $D \in \mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}(D)$, d'où $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(D)$.

Théorème 4.10. Soit $D \in \mathcal{L}$. D *est élément hypergénérateur de* $\mathfrak{D}(D)$ *seulement dans les cas suivants :*

α. D *est de classe 1 ou 2 (alors,* $\mathfrak{D}(D) = \mathcal{L}$)

β. $D = 0$ *(alors,* $\mathfrak{D}(D) = 0$)

γ. D *est de classe* 3_∞, *et* $\sigma_D \sim \sigma_D^2$.

Démonstration. 1. β est immédiat, α résulte du théorème 3.4. α.

2. Si D a un nombre fini de dimensions, $\mathfrak{D}(D) = \mathcal{L}''$, mais on n'a pas $D \gg D'$ dès que la dimension de D' est strictement supérieure à celle de D. Donc $\mathcal{L}''$ n'est pas hyperprincipal.

3. Supposons D de classe 3_∞. Le théorème 4.7, dont nous reprenons les notations, entraîne aussitôt que D est hypergénérateur de $\mathfrak{D}(D)$ si et seulement si $D \gg D_n$ pour tout entier n, donc si et seulement si $\sigma_D \succ \sigma_D^n$. Il suffit que $\sigma_D \succ \sigma_D^2$ et, comme $\sigma_D^2 \succ \sigma_D$ est évident, le théorème est démontré.

Théorème 4.11. α. *Soit* $\mathfrak{D} \neq \mathcal{L}$ *un idéal hyperprincipal,* D *un élément hypergénérateur de* $\mathfrak{D}$. *Pour tout élément générateur* D' *de* $\mathfrak{D}$ *on a :* $D' \approx D$ *(donc tout élément générateur est hypergénérateur.)*

β. *Soit $\mathfrak{D}$ un idéal principal non hyperprincipal Aucun élément générateur de $\mathfrak{D}$ n'est hypergénérateur*

γ. *Si* D *ne vérifie pas l'une des conditions du théorème 4.10,* $\mathfrak{D}$ (D) *n'est pas hyperprincipal.*

Démonstration. β. résulte de la définition des idéaux hyperprincipaux, et γ résulte aussitôt de α. Prouvons α. Soit D un élément hypergénérateur de $\mathfrak{D}$, et D' un élément générateur. Le cas $\mathfrak{D} = 0$ est immédiat Supposons donc D de classe 3_∞, avec $\sigma_D \infty \sigma_D{}^2$. Comme D est hypergénérateur, on voit, en appliquant le théorème 4 7, que D' ne peut être générateur que si $\sigma_D \prec \sigma_{D'}{}^p$, donc $\sigma_D \infty \sigma_{D'}{}^p$: D' est hypergénérateur, et de plus $\sigma_D \infty \sigma_{D'}{}^p \infty \sigma_{D'}$, donc $D' \approx D$.

5. Réseau des Idéaux. *Théorème 4.12.* α. *L'ensemble des idéaux invariants de $\mathfrak{L}$ forme un réseau $\mathfrak{R}$ quand on l'ordonne par la relation d'inclusion.*

β. *La borne inférieure des deux idéaux $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ est $\mathfrak{D} \frown \mathfrak{D}'$.*

γ. *La borne supérieure de $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ est l'ensemble $\mathfrak{D} \dot{+} \mathfrak{D}'$ des variétés* $D \dot{+} D'$, *où* $D \in \mathfrak{D}$, $D' \in \mathfrak{D}'$.

Démonstration. α et β résultent aussitôt du théorème 4.6. α. Pour prouver γ, il suffit évidemment de prouver que $\mathfrak{D} \dot{+} \mathfrak{D}'$ (qui contient $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$) est un idéal invariant. Ceci est évident si $\mathfrak{D} \supset \mathfrak{D}'$ ou si $\mathfrak{D}' \supset \mathfrak{D}$; on peut donc se borner désormais au cas où $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{L}'$, $\mathfrak{D}' \subset \mathfrak{L}'$.

Montrons que $\mathfrak{D} + \mathfrak{D}'$ vérifie I_1. Soient $D_1 \in \mathfrak{D} \dot{+} \mathfrak{D}'$, $D_2 \in \mathfrak{D} \dot{+} \mathfrak{D}'$. On a : $D_1 = d_1 \dot{+} d'_1$, $D_2 = d_2 \dot{+} d'_2$, avec $d_i \in \mathfrak{D}$, $d'_i \in \mathfrak{D}'$ $(i = 1, 2)$. Donc : $D_1 \dot{+} D_2 = (d_1 \dot{+} d_2) \dot{+} (d'_1 \dot{+} d'_2)$, et $d_1 \dot{+} d_2 \in \mathfrak{D}$, $d'_1 \dot{+} d'_2 \in \mathfrak{D}'$. Donc: $D_1 \dot{+} D_2 \in \mathfrak{D} \dot{+} \mathfrak{D}'$.

Montrons que $\mathfrak{D} \dot{+} \mathfrak{D}'$ vérifie I'_2. Soient $D \in \mathfrak{D}$, $D' \in \mathfrak{D}'$ et $D'' \in \mathfrak{L}$ avec $D \dot{+} D' \gg D''$. Il faut montrer que $D'' \in \mathfrak{D} \dot{+} \mathfrak{D}'$.

On a : $\sigma_{D''} \prec (\sigma_D \wedge \sigma_{D'})^2 \prec \sigma_D{}^2 . \sigma_{D'}{}^2$, d'où on déduit aussitôt : $\sigma_{D''} = \sigma_1 . \sigma_2$ avec $\sigma_D{}^2 \succ \sigma_1$, $\sigma_{D'}{}^2 \succ \sigma_2$. Considérant une base orthonormale de D'', on voit alors que : $D'' = D_1 \dot{+} D_2$, avec $\sigma_{D_1} = \sigma_1$, $\sigma_{D_2} = \sigma_2$. Or $\sigma_D{}^2 \succ \sigma_{D_1}$ entraîne $D_1 \in \mathfrak{D}$, $\sigma_{D'}{}^2 \succ \sigma_{D_2}$ entraîne $D_2 \in \mathfrak{D}'$. Donc : $D'' \in \mathfrak{D} \dot{+} \mathfrak{D}'$.

Théorème 4.13. α *Si $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ sont des idéaux principaux, $\mathfrak{D} \frown \mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{D} \dot{+} \mathfrak{D}'$ sont des idéaux principaux. L'ensemble des idéaux principaux est donc un sous-réseau $\mathfrak{R}_1$ de $\mathfrak{R}$.*

β. *Soient* D et D' *des éléments générateurs de $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ respectivement.* $D \dot{+} D'$ *est élément générateur de $\mathfrak{D} \dot{+} \mathfrak{D}'$.*

γ *Soit (e_i) un système orthonormal de vecteurs Soient* D_1 (*resp.* D'_1) *défini par la base orthonormale (e_i) et la suite de valeurs propres correspondantes* σ_D (*resp* $\sigma_{D'}$) $D_1 \frown D'_1$ *est élément générateur de $\mathfrak{D} \frown \mathfrak{D}'$.*

Démonstration. Pour $\mathfrak{D} \dot{+} \mathfrak{D}'$, α et β résultent aussitôt du théorème 4 8.
Pour $\mathfrak{D} \frown \mathfrak{D}'$, α résultera de γ. Prouvons donc γ. On a : $D_1 \approx D$, $D'_1 \approx D'$, donc $D_1 \in \mathfrak{D}$, $D'_1 \in \mathfrak{D}'$, donc $D_1 \frown D'_1 \in \mathfrak{D}$, $D_1 \frown D'_1 \in \mathfrak{D}'$, donc $\mathfrak{D}(D_1 \frown D'_1) \subset \mathfrak{D} \frown \mathfrak{D}'$. Montrons réciproquement que $\mathfrak{D} \frown \mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}(D_1 \frown D'_1)$.
Soit donc $d \in \mathfrak{D} \frown \mathfrak{D}'$. D'aprés le théorème 4.7, on a : $\sigma_{D_1}{}^p \succ \sigma_d$, $\sigma_{D'_1}{}^p \succ \sigma_d$ pour un entier p bien choisi. D'où aussitôt :

$\sigma_{D_1 \frown D'_1}{}^p = (\sigma_{D_1} \bigvee \sigma_{D'_1})^p = \sigma_{D_1}{}^p \bigvee \sigma_{D'_1}{}^p \succ \sigma_d$, d'où : $d \in \mathfrak{D}(D_1 \frown D'_1)$.

Théorème 4.14. α. *Si* $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ *sont des idéaux hyperprincipaux,* $\mathfrak{D} \frown \mathfrak{D}'$ *et* $\mathfrak{D} \dot{+} \mathfrak{D}'$ *sont des idéaux hyperprincipaux. L'ensemble des idéaux hyperprincipaux est donc un sous-réseau* $\mathfrak{R}_2$ *de* $\mathfrak{R}$.

β. *Soient* D *et* D' *des éléments hypergénérateurs de* $\mathfrak{D}$ *et* $\mathfrak{D}'$ *respectivement.* $D \dot{+} D'$ *est élément hypergénérateur de* $\mathfrak{D} \dot{+} \mathfrak{D}'$.

γ. *Soient* D_1 *et* D'_1 *construits comme dans le théorème 4.13.* $D_1 \frown D'_1$ *est élément hypergénérateur de* $\mathfrak{D} \frown \mathfrak{D}'$.

Démonstration. Le théorème est à peu près évident si $\mathfrak{D} = \mathfrak{L}$ ou si $\mathfrak{D}' = \mathfrak{L}$. Il suffit donc, appliquant le théoréme 3.13, de prouver que $D \dot{+} D'$ et et $D_1 \frown D'_1$ vérifient la condition γ du théorème 4.10 si D et D' la vérifient. Or, ceci résulte facilement de : $\sigma_{D_1 \frown D'_1} \backsim \sigma_D \bigvee \sigma_{D'}$, $(\sigma_D \bigwedge \sigma_{D'})^2 \succ \sigma_{D \dot{+} D'} \succ \sigma_D \bigwedge \sigma_{D'}$

Théorème 4.16 α. *On a :* $\mathfrak{R}_2 \subset \mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_2 \neq \mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_1 \neq \mathfrak{R}$.

β. $\mathfrak{L}'$ *n'est pas un idéal principal.*

γ. $\mathfrak{R}_2$ *(donc à fortiori* $\mathfrak{R}_1$ *et* $\mathfrak{R}$) *ne sont pas totalement ordonnés par inclusion.*

Démonstration. $\mathfrak{R}_2 \neq \mathfrak{R}_1$ résulte du théorème 4.11. γ. Prouvons β (ce qui démontrera que $\mathfrak{R}_1 \neq \mathfrak{R}$) Il suffit de prouver que, pour toute suite σ, il existe une suite σ' telle qu'on n'ait $\sigma^p \succ \sigma'$ pour aucun entier p Si $(a_i) = \sigma \backsim \sigma^2$, on peut prendre : $\sigma' = (\sqrt{a_i}$; si $\sigma \backsim \sigma^2$ n'est pas vrai, on peut prendre : $\sigma' = (a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, a_3, a_4, \ldots)$.

Pour prouver γ, il suffit de construire deux suites $(a_i) = \sigma$, $(a_i') = \sigma'$ telles que $\sigma \backsim \sigma^2$, $\sigma' \backsim \sigma'^2$, les relations $\sigma \succ \sigma'$, $\sigma' \succ \sigma$ n'étant pas vérifiées; on peut pour cela prendre :

$a_1 = a'_1 = a_2 = a'_2 = 1$

$a_{i+1} = a_i$, $a'_{i+1} = a'_i + 1$ pour : $(2n)\,! \leq i < (2n+1)\,!$

$a_{i+1} = a_i + 1$, $a'_{i+1} = a'_i$ pour : $(2n+1)\,! \leq i < (2n+2)\,!$

CHAPITRE V

Congruences associées aux idéaux de $\mathfrak{L}$.

Définition 5.1. Soit $\mathfrak{D}$ un idéal (non nécessairement invariant) de $\mathfrak{L}$. Soient $D \in \mathfrak{L}$, $D' \in \mathfrak{L}$. *On écrit :* $D \equiv D'$ *(mod. $\mathfrak{D}$) s'il existe des éléments d, d' de $\mathfrak{D}$ tels que* $D \dotplus d = D' \dotplus d'$.

Théorème 5 1. α. *La relation* $D \equiv D'$ *(mod. $\mathfrak{D}$) est une relation d'équivalence.*

β. *La relation* $D \equiv 0$ *(mod. $\mathfrak{D}$) équivaut à* $D \in \mathfrak{D}$.

Démonstration. 1. Il est évident que la relation $D \equiv D'$ (mod $\mathfrak{D}$) est réflexive et symétrique. Montrons qu'elle est transitive. Supposons $D \equiv D'$ (mod. $\mathfrak{D}$) et $D' \equiv D''$ (mod $\mathfrak{D}$). Il existe des éléments d, d', d'_1, d''_1 de $\mathfrak{D}$ tels que $D \dotplus d = D' \dotplus d'$, $D' \dotplus d'_1 = D'' \dotplus d''_1$. Alors :
$D \dotplus (d \dotplus d'_1) = D' \dotplus d' \dotplus d'_1 = D'' \dotplus (d''_1 \dotplus d')$ et $d \dotplus d'_1 \in \mathfrak{D}$, $d''_1 \dotplus d' \in \mathfrak{D}$.
Donc : $D \equiv D''$ (mod. $\mathfrak{D}$).

2. Si $D \in \mathfrak{D}$, la relation : $D \dotplus 0 = 0 \dotplus D$ entraîne $D \equiv 0$ (mod. $\mathfrak{D}$). Si $D \equiv 0$ (mod. $\mathfrak{D}$), on a : $D \dotplus d = d'$, avec $d \in \mathfrak{D}$, $d' \in \mathfrak{D}$, d'où $D \subset d' \in \mathfrak{D}$, $D \in \mathfrak{D}$.

Théorème 5.2. α. $D \equiv D'$ *(mod. 0) équivaut à* $D = D'$.

β. $D \equiv D'$ *(mod. $\mathfrak{L}$) quels que soient* $D \in \mathfrak{L}$, $D' \in \mathfrak{L}$.

γ. *Lorsque* D *et* D' *sont fermées, on a :* $D \equiv D'$ *(mod. $\mathfrak{L}''$) si et seulement si* $D \doteqdot D'$.

δ. *Lorsque* D *et* D' *sont fermées, on a :* $D \equiv D'$ *(mod. $\mathfrak{L}'$) si et seulement si* D *et* D' *sont complètement asymptotiques.*

Démonstration. 1. α et β sont immédiats.

2. Prouvons γ. Soient D, D' deux variétés linéaires fermées. Si $D \doteqdot D'$, D et D' sont de déficience finie dans $D \dotplus D' = D''$ (qui est fermée); donc $d = D'' \ominus D$ et $d' = D'' \ominus D'$ sont dans $\mathfrak{L}''$, et l'on a : $D \dotplus d = D' \dotplus d'$; d'où $D \equiv D'$ (mod. $\mathfrak{L}''$). Réciproquement, si $D \equiv D'$ (mod. $\mathfrak{L}''$), on a : $D \dotplus d = D' \dotplus d' = D'''$ avec $d \in \mathfrak{L}''$, $d' \in \mathfrak{L}''$; donc D et D' sont de déficience finie dans D''' et *a fortiori* dans $D \dotplus D' \subset D'''$; donc $D \doteqdot D'$.

3. Prouvons δ. Soient D, D', deux variétés linéaires fermées. Supposons D et D' complètement symptotiques; on a :
$D \dotplus D' = D \dotplus P_{H \ominus D} D' = D' \dotplus P_{H \ominus D'} D$, et $P_{H \ominus D} D' \in \mathfrak{L}'$, $P_{H \ominus D'} D \in \mathfrak{L}'$; donc $D \equiv D'$ (mod. $\mathfrak{L}'$). Réciproquement, si $D \dotplus d = D' \dotplus d'$, avec $d \in \mathfrak{L}'$, $d' \in \mathfrak{L}'$, on a $D' \subset D \dotplus d$, donc $P_{H \ominus D} D' \subset P_{H \ominus D} d \in \mathfrak{L}'$; donc D' est complètement asymptotique à D. De même, D est complètement asymptotique à D' Donc D et D' sont complètement asymptotiques.

Définition 5.2. Soit $\mathfrak{D}$ *un idéal de* $\mathfrak{L}$. *Soient* $D \in \mathfrak{L}$, $D' \in \mathfrak{L}$. *On écrit* $D \subset D'$ *(mod.* $\mathfrak{D}$*) s'il existe une* $d \in \mathfrak{D}$ *telle que* $D \subset D' \dot{+} d$.

Théorème 5.3. α. *La relation* $D \subset D'$ *(mod.* $\mathfrak{D}$*) est une relation d'ordre au sens large.*

β. *On a :* $D \equiv D'$ *(mod.* $\mathfrak{D}$*) si et seulement si* $D \subset D'$ *(mod.* $\mathfrak{D}$*) et* $D' \subset D$ *(mod.* $\mathfrak{D}$*).*

γ. *La relation* $D \subset D'$ *(mod.* $\mathfrak{D}$*) engendre donc une relation d'ordre entre classes d'équivalence modulo* $\mathfrak{D}$.

Démonstration. 1. La relation $D \subset D'$ (mod $\mathfrak{D}$) est évidemment réflexive, montrons qu'elle est transitive. Si $D \subset D' \dot{+} d$, et $D' \subset D'' \dot{+} d'$, avec $d \in \mathfrak{D}$, $d' \in \mathfrak{D}$, on a : $D \subset D'' \dot{+} (d \dot{+} d')$, et $d \dot{+} d' \in \mathfrak{D}$, donc $D \subset D''$ (mod. $\mathfrak{D}$).

2. Supposons $D \subset D' \dot{+} d$ et $D' \subset D \dot{+} d'$, avec $d \in \mathfrak{D}$, $d' \in \mathfrak{D}$.
On a : $D \dot{+} (d \dot{+} d') \subset D' \dot{+} d \dot{+} (d \dot{+} d') = D' \dot{+} (d \dot{+} d')$. De même, $D' \dot{+} (d \dot{+} d') \subset D \dot{+} (d \dot{+} d')$. Donc : $D \dot{+} (d \dot{+} d') = D' \dot{+} (d \dot{+} d')$, et $d \dot{+} d' \in \mathfrak{D}$, donc $D \equiv D'$ (mod. $\mathfrak{D}$).

3. γ résulte aussitôt de α et β.

Théorème 5.4. Soit $\mathfrak{D}$ *un idéal de* $\mathfrak{L}$. *Dans la relation d'ordre du théorème 5.3, les classes d'équivalence de deux éléments* D, D', *quelconques de* $\mathfrak{L}$ *admettent une borne supérieure, à savoir la classe de* $D + D'$.

Démonstration. On a évidemment : $D \subset D \dot{+} D'$ (mod. $\mathfrak{D}$), et $D' \subset D \dot{+} D'$ (mod. $\mathfrak{D}$). Soit maintenant $D'' \in \mathfrak{L}$ telle que $D \subset D''$ (mod. $\mathfrak{D}$) et $D' \subset D''$ (mod. $\mathfrak{D}$). On a : $D \subset D'' \dot{+} d$, $D' \subset D'' \dot{+} d'$, avec $d \in \mathfrak{D}$, $d' \in \mathfrak{D}$.
Donc : $D \dot{+} D' \subset D'' \dot{+} (d \dot{+} d')$, et $d \dot{+} d' \in \mathfrak{D}$.
Donc : $D + D' \subset D''$ (mod. $\mathfrak{D}$).

Le résultat analogue concernant la borne inférieure est inexact.

CHAPITRE VI

Idéaux bilatères dans $\mathfrak{B}$.

1. Théorème fondamental.

Définition 6.1. On appelle idéal bilatère dans $\mathfrak{B}$ un sous-ensemble non vide $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{B}$ vérifiant les conditions suivantes :

J_1 : $A \in \mathfrak{J}$, $B \in \mathfrak{J}$ *entraînent* $A + B \in \mathfrak{J}$.

J_2 : $A \in \mathfrak{J}$, $B \in \mathfrak{B}$ *entraînent* $AB \in \mathfrak{J}$ *et* $BA \in \mathfrak{J}$.

J_2 *est immédiatement équivalente à* J'_2 : $A \in \mathfrak{J}$, $A \succ A'$ *entraînent* $A' \in \mathfrak{J}$

Théorème 6.1. L'ensemble des idéaux bilatères de $\mathfrak{B}$ forme un réseau $\mathcal{J}$ quand on l'ordonne par la relation d'inclusion.

Démonstration. C'est une propriété très connue des algèbres.

Théorème 6.2. Soit $\mathfrak{J}$ un idéal bilatère de $\mathfrak{B}$.

α. *L'ensemble $\mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$ des Δ_A où A parcourt $\mathfrak{J}$ est un idéal invariant de $\mathcal{L}$.*

β. *$\mathfrak{J}$ est l'ensemble des $A \in \mathfrak{B}$ tels que $\Delta_A \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$.*

γ. *L'application $\mathfrak{J} \to \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$ est un isomorphisme du réseau $\mathcal{J}$ sur le réseau $\mathfrak{R}$.*

Démonstration. 1. Prouvons α. Montrons d'abord que $\mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$ vérifie I_1. Soient $D \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$, $D' \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$. On a : $D = \Delta_A$, $D' = \Delta_{A'}$ avec $A \in \mathfrak{J}$, $A' \in \mathfrak{J}$. Soient N, N' deux variétés linéaires fermées à ∞ dimensions, orthogonales complémentaires dans H. Soit J (resp. J') un opérateur partiellement isométrique admettant N (resp. N') et H comme variétés initiale et finale. Soit $B = AJ + A'J'$. On a : $B \in \mathfrak{J}$, et $\Delta_B = \Delta_A \dotplus \Delta_{A'}$. Donc $D + D' \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$.

Montrons que $\mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$ vérifie I'_2. Soient $D \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$, $D' \in \mathcal{L}$, avec $D \succ D'$. On a : $D = \Delta_A$, avec $A \in \mathfrak{J}$, et $D' = B(D)$, avec $B \in \mathfrak{B}$. Donc : $D' = \Delta_{BA}$. On a $BA \in \mathfrak{J}$, donc $D' \in D_{\mathfrak{J}}$.

2. Prouvons β. Par définition de $\mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$, pour tout $A \in \mathfrak{J}$, on a : $\Delta_A \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$. Soit réciproquement un $A \in \mathfrak{B}$ tel que $\Delta_A \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$. On a : $\Delta_A = \Delta_B$ pour un $B \in \mathfrak{J}$. D'après le théorème 3.9, $A = SBT$, avec $S \in \mathfrak{B}$, $T \in \mathfrak{B}$, donc $A \in \mathfrak{J}$.

3. Prouvons γ. D'après β, l'application $\mathfrak{J} \to \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$ est une application biunivoque de $\mathcal{J}$ *dans* $\mathfrak{R}$. Montrons que c'est une application *sur* $\mathfrak{R}$. Soit $\mathfrak{D} \in \mathfrak{R}$. Il suffit de montrer que l'ensemble $\mathfrak{J}$ des $A \in \mathfrak{B}$ tels que $\Delta_A \in \mathfrak{D}$ est un idéal bilatére dans $\mathfrak{B}$ (on aura évidemment $\mathfrak{D}_{\mathfrak{J}} \subset \mathfrak{D}$ et même $\mathfrak{D}_{\mathfrak{J}} = \mathfrak{D}$ puisque, pour toute $D \in \mathcal{L}$, il existe des $A \in \mathfrak{B}$ tels que $\Delta_A = D$).

Montrons que $\mathfrak{J}$ vérifie J_1. Soient $A \in \mathfrak{J}$, $B \in \mathfrak{J}$. On a : $\Delta_A \in \mathfrak{D}$, $\Delta_B \in \mathfrak{D}$, donc $\Delta_A \dotplus \Delta_B \in \mathfrak{D}$. Or : $\Delta_{A+B} \subset \Delta_A \dotplus \Delta_B$, donc $\Delta_{A+B} \in \mathfrak{D}$: $A + B \in \mathfrak{J}$.

Montrons que $\mathfrak{J}$ vérifie J_2. Soient $A \in \mathfrak{J}$, $B \in \mathfrak{B}$. On a : $\Delta_A \in \mathfrak{D}$. D'ailleurs, $\Delta_{BA} = B(\Delta_A)$, donc $\Delta_A \gg \Delta_{BA}$, et $\Delta_{AB} \subset \Delta_A$. Donc $\Delta_{BA} \in \mathfrak{D}$, $\Delta_{AB} \in \mathfrak{D}$, d'où $AB \in \mathfrak{J}$, $BA \in \mathfrak{J}$.

Enfin, comme l'application $\mathfrak{J} \to \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$ et son inverse respectent la relation d'inclusion, c'est un isomorphisme de $\mathcal{G}$ sur $\mathfrak{R}$.

Le théorème 6.2, les résultats du chapitre IV et les résultats connus sur les opérateurs donnent aussitôt les théorèmes suivants :

Théorème 6.3. Soit $\mathfrak{B}'$ *l'ensemble des opérateurs complètement continus de* $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}''$ *l'ensemble des opérateurs de rang fini de* $\mathfrak{B}$, 0 *l'ensemble réduit à l'opérateur* 0. $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$, 0 *sont des idéaux bilatères de* $\mathfrak{B}$ *(correspondant à* $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$, 0 *dans l'isomorphisme du théorème 6.2). Pour tout idéal bilatère* $\mathfrak{J}$ *distinct de* 0 *et* $\mathfrak{B}$, *on a :* $\mathfrak{B}'' \subset \mathfrak{J} \subset \mathfrak{B}'$.

Théorème 6.4. Il y a une correspondance biunivoque entre les idéaux bilatères $\mathfrak{J}$ *de* $\mathfrak{B}$ *tels que* $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{B}'$ *et les idéaux de suites. Cette correspondance est définie de la manière suivante :*

α. *Si* $\mathfrak{J}$ *est un idéal bilatère de* $\mathfrak{B}$, *avec* $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{B}'$, *l'ensemble des* S_A *où* $A \in \mathfrak{J}$ *est un idéal de suites.*

β. *Si* Δ *est un idéal de suites, l'ensemble des* $A \in \mathfrak{B}'$ *tels que* $S_A \in \Delta$ *est un idéal bilatère* $\mathfrak{J}$ *de* $\mathfrak{B}$ *tel que* $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{B}'$ (cf. [1], héorème 1.6; le résultat est dû à J. von Neumann).

2. Idéaux principaux.

Définition 6.2. Soit $A \in \mathfrak{B}$. *On désigne par* $\mathfrak{J}(A)$ *le plus petit idéal bilatère contenant* A. *Tout idéal* $\mathfrak{J}$ *de la forme* $\mathfrak{J}(A)$ *est dit principal.* A *est dit alors élément générateur de* $\mathfrak{J}$.

Théorème 6.5. Soit $A \in \mathfrak{B}$. $\mathfrak{J}(A)$ *est l'ensemble des opérateurs de la forme* $S_1AT_1 + S_2AT_2 + \ldots + S_nAT_n$, *où* $S_i \in \mathfrak{B}$, $T_i \in \mathfrak{B}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Démonstration immédiate.

Théorème 6.6. α. *Pour qu'un idéal bilatère* $\mathfrak{J}$ *de* $\mathfrak{B}$ *soit principal, il faut et il suffit que* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$ *soit un idéal invariant principal de* $\mathfrak{L}$.

β. *Si* A *est élément générateur de* $\mathfrak{J}$, Δ_A *est élément générateur de* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$.

Démonstration. Soient $A \in \mathfrak{B}$ et $D \in \mathfrak{L}$ tels que $D = \Delta_A$. Aux idéaux bilatères de $\mathfrak{B}$ contenant A correspondent, dans l'isomorphisme $\mathfrak{J} \to \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$, les idéaux invariants de $\mathfrak{L}$ contenant D. Donc, à $\mathfrak{J}(A)$ correspond $\mathfrak{D}(D)$.

Théorème 6.7. α. *Si* A *n'est pas complètement continu,* $\mathfrak{J}(A) = \mathfrak{B}$.

β. *Si* $A = 0$, $\mathfrak{J}(A) = 0$.

γ. *Si* A *est de rang fini,* $\mathfrak{J}(A) = \mathfrak{B}''$.

δ. *Si* A *est complètement continu de rang infini, soit* $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots)$ *une suite infinie de variétés linéaires fermées deux à deux orthogonales, à* ∞ *dimensions. Soit* W_i *un opérateur partiellement isométrique dont les variétés initiale et finale soient* $\mathfrak{M}_i$ *et* H. *Soient* $A^i = W_i^* A W_i$, $A_i = A^1 + A^2 + \ldots + A^i$.

$\mathfrak{J}(A)$ *est l'ensemble des* $B \in \mathfrak{B}$ *tels que* $A_n \gg B$ *pour un certain* n *(qui dépend de* B).

Démonstration. Ce théorème résulte aussitôt du théorème 4.7.

Théorème 5.8. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *des éléments de* $\mathfrak{B}$. *Le plus petit idéal contenant les* A_i *est principal.*

Démonstration. Ce théorème résulte aussitôt du théorème 4.8.

3. Idéaux hyperprincipaux.

Définition 6.3. Soit $\mathfrak{J}$ *un idéal bilatère de* $\mathfrak{B}$. *Un* $A \in \mathfrak{B}$ *est dit élément hypergénérateur de* $\mathfrak{J}$ *si* $\mathfrak{J}$ *est l'ensemble des* $A' \in \mathfrak{B}$ *tels que* $A \gg A'$. *Un idéal bilatère qui possède un élément hypergénérateur est dit hyperprincipal.*

Théorème 6.9. α. *Tout idéal hyperprincipal est principal.*

β. *Tout élément hypergénérateur d'un idéal est aussi générateur de cet idéal.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{J}$ un idéal admettant l'élément hypergénérateur A. On a évidemment : $A \in \mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}(A)$, d'où $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(A)$.

Théorème 6.10. Soit $\mathfrak{J}$ *un idéal admettant l'élément hypergénérateur* A. $\mathfrak{J}$ *est l'ensemble des opérateurs* SAW, *où* $S \in \mathfrak{B}$ *et où* W *est un opérateur partiellement isométrique dont* $H \ominus \mathfrak{N}_{SA}$ *est la variété finale.* $\mathfrak{J}$ *est aussi l'ensemble des opérateurs* $W_1 A S_1$, *où* $S_1 \in \mathfrak{B}$, *et où* W_1 *est un opérateur partiellement isométrique dont* $[\Delta_{AS_1}]$ *est la variété initiale.*

Démonstration. Le théorème résulte aussitôt du théorème 3.10. ε, ζ.

Théorème 6.11. α. *Un idéal bilatère* $\mathfrak{J}$ *de* $\mathfrak{B}$ *est hyperprincipal si et seulement si* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$ *est un idéal hyperprincipal de* $\mathfrak{L}$.

β. *Si* A *est élément hypergénérateur de* $\mathfrak{J}$, Δ_A *est élément hypergénérateur de* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{J}$ un idéal bilatère de $\mathfrak{B}$. $A \in \mathfrak{J}$ est élément hypergénérateur de $\mathfrak{J}$ si et seulement si $A \gg A'$ pour tout $A' \in \mathfrak{J}$, donc si et seulement si $\Delta_A \gg \Delta_{A'}$ pour tout $A' \in \mathfrak{J}$ (théorème 3.10), donc si et seulement si Δ_A est élément hypergénérateur de $\mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$.

Théorème 6.12. Soit $A \in \mathfrak{B}$. A *est élément hypergénérateur de* $\mathfrak{J}(A)$ *seulement dans les cas suivants :*

α. A *n'est pas complètement continu (alors,* $\mathfrak{J}(A) = \mathfrak{B}$).

β. $A = 0$ *(alors,* $\mathfrak{J}(A) = 0$).

γ. A *est complètement continu de rang infini, et* $S_A \sim S^*_A$.

Démonstration. Le théorème résulte aussitôt du théorème 4.10.

Théorème 6.13. α. *Soit* $\mathfrak{J} \neq \mathfrak{B}$ *un idéal hyperprincipal.* A *un élément hypergénérateur de* $\mathfrak{J}$. *Pour tout élément générateur* A' *de* $\mathfrak{J}$, *on a :* $A' \approx A$ *(donc tout élément générateur est hypergénérateur).*

β. *Soit $\mathfrak{J}$ un idéal principal non hyperprincipal. Aucun élément générateur de $\mathfrak{J}$ n'est hypergénérateur.*

γ. *Si A ne vérifie pas l'une des conditions du théorème 6.12, $\mathfrak{J}(A)$ n'est pas hyperprincipal.*

Démonstration. Le théorème résulte aussitôt du théorème 4.11.

4. Réseau des idéaux. — A chaque résultat du chapitre IV, § 5, correspond un résultat concernant les opérateurs. Contentons-nous d'énoncer :

Théorème 6.14. α. Si $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}'$ sont deux idéaux bilatères principaux de $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}'$ et $\mathfrak{J} + \mathfrak{J}'$ sont des idéaux principaux (6).

β. *Si $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{J}'$ sont hyperprincipaux, $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}'$ et $\mathfrak{J} + \mathfrak{J}'$ sont hyperprincipaux.*

γ. *$\mathfrak{B}'$ n'est pas principal. Il existe des idéaux principaux non hyperprincipaux.*

5. Congruences dans $\mathfrak{L}$. — *Théorème 6.15. Soit $\mathfrak{J}$ un idéal bilatère de $\mathfrak{B}$. Soient $D \in \mathfrak{L}$, $D' \in \mathfrak{L}$. S'il existe un $A \in \mathfrak{J}$ tel que $D' = (1 + A)(D)$, on a $D \equiv D'$ (mod. $\mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$) (mais pas réciproquement).*

Démonstration. Les cas $\mathfrak{J} = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{J} = 0$ étant immédiats, nous supposons désormais $\mathfrak{B}'' \subset \mathfrak{J} \subset \mathfrak{B}'$. Supposons $D' = (1 + A)(D)$, avec $A \in \mathfrak{J}$. D'après le théorème 5.3. β, il suffit de prouver que $D' \subset D$ (mod. $\mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$) et que $D \subset D'$ (mod. $\mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$).

1. On a : $D' \subset D \dotplus A(D)$, et $A(D) \subset \Delta_A \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$, donc $D' \subset D$ (mod. $\mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$).
2. Soit $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{1+A}$. Si $x \in \mathfrak{N}$, $Ax = -x$, donc, comme $A \in \mathfrak{B}'$, la dimension de $\mathfrak{N}$ est finie. $1 + A$ transforme biunivoquement $H \ominus \mathfrak{N}$ en Δ_{1+A}, et il est classique que Δ_{1+A} est fermé. Donc il existe un $A' \in \mathfrak{B}$ tel que : $(1 + A')(1 + A) = P_{H \ominus \mathfrak{N}}$.

   D'où : $A' = -A - A'A - (1 - P_{H \ominus \mathfrak{N}}) = -A - A'A - P_{\mathfrak{N}}$.
   On a : $A \in \mathfrak{J}$, donc $A'A \in \mathfrak{J}$ et $P_{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{B}'' \subset \mathfrak{J}$, donc $A' \in \mathfrak{J}$.
   D'ailleurs : $(1 + A')(D') = (1 + A')(1 + A)(D) = P_{H \ominus \mathfrak{N}}(D)$.
   D'où : $P_{H \ominus \mathfrak{N}}(D) \subset D'$ (mod. $\mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$).

   D'ailleurs : $D = P_{H \ominus \mathfrak{N}}(D) \dotplus d$, où $d \in \mathfrak{L}'' \subset \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$.
   Donc : $D \subset D'$ (mod. $\mathfrak{B}_{\mathfrak{J}}$).

Pour voir que la réciproque est fausse, il suffit de considérer le cas où $D' \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$, $D' \neq 0$, et où $D = 0$.

---

6. Rappelons que, conformément aux notations usuelles, $\mathfrak{J} + \mathfrak{J}'$ est l'ensemble des $A + A'$, où $A \in \mathfrak{J}$, $A' \in \mathfrak{J}'$.

BIBLIOGRAPHIE

(1) J.-W. Calkin. *Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space.* (Ann. of Math., 42 (1941), pp. 839-873.)

(2) J. Dixmier. *Etude sur les variétés et les opérateurs de Julia, avec quelques applications.* (Bull. Soc. Math. de France 1949.)

(3) J. Dixmier. *Sur les variétés* J *d'un espace de Hilbert.* (Journ. de Math. 1949.)