ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

HENRI ROURE

Sur une nouvelle classe de fonctions (Suite)

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 7 (1943), p. 99-122

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1943_4_7__99_0>

SUR UNE NOUVELLE CLASSE DE FONCTIONS

(*Suite*)

Par M. HENRI ROURE

(Observatoire de Marseille).

CHAPITRE PREMIER

1. — Dans un Mémoire antérieur (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1942), nous avons démontré l'existence de fonctions à un nombre quelconque de séries de variables, chaque série comprenant un nombre quelconque de variables, fonctions qui se reproduisent lorsque les variables de chaque série sont soumises aux substitutions d'un groupe linéaire qui transforme en elle-même une certaine forme quadratique à indéterminées conjuguées.

Nous avons fait la démonstration dans le cas de deux séries de variables, chacune d'elles comprenant deux variables. Les formes quadratiques transformées en elles-mêmes étaient :

$$F = aUU_0 + bVV_0 - cWW_0,$$
$$F' = a'U'U'_0 + b'V'V'_0 - c'W'W'_0,$$

les nombres a, b, c, a', b', c' étant réels et positifs.

Dans ses travaux sur les fonctions hyperfuchsiennes, Emile Picard a étudié la réduction des formes ternaires générales à indéterminées conjuguées indéfinies et il les a ramenées à la forme réduite :

$$uu_0 + vv_0 - ww_0.$$

Les formes F et F' peuvent être ramenées à cette forme par la substitution :

$$U^{(1)} = \sqrt{a}\,U, \qquad V^{(1)} = \sqrt{b}\,V, \qquad W^{(1)} = \sqrt{c}\,W,$$

et nous adopterons cette dernière forme réduite qui nous permettra d'utiliser les résultats obtenus par Emile Picard dans son Mémoire sur les fonctions hyperfuchsiennes (*Acta Mathematica*, tome V). Nous nous dispenserons donc de faire l'étude des groupes et de la réduction des formes en renvoyant pour cette étude au mémoire cité.

2 — Résumons seulement les recherches d'Emile Picard.

Il considère la forme indéfinie à indéterminées conjuguées :

$$F = axx_0 + a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + b'zx_0 + b'_0z_0x + b''xy_0 + b''_0x_0y,$$

de déterminant un et la forme réduite :

$$F = uu_0 + vv_0 - ww_0,$$

u, v, w, étant liés à x, y, z par les relations :

$$\begin{aligned} u &= \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ v &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ w &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z. \end{aligned}$$

Il cherche ensuite la transformation linéaire la plus générale transformant en elle-même cette forme réduite et pour cela il pose :

$$\begin{aligned} U &= Au + Bv + Cw, \\ V &= A'u + B'v + C'w, \\ W &= A''u + B''v + C''w, \end{aligned}$$

les $A, B, C, A', B', C', A'', B'', C''$, étant liés par les deux systèmes complètement équivalents de relations :

$$\begin{aligned} &AA_0 + BB_0 - CC_0 = 1, && A_0A' + B_0B' - C_0C' = 0, \\ &A'A'_0 + B'B'_0 - C'C'_0 = 1, && A_0A'' + B_0B'' - C_0C'' = 0, \\ &A''A''_0 + B''B''_0 - C''C''_0 = -1; && A'_0A'' + B'_0B'' - C'_0C'' = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &AA_0 + A'A'_0 - A''A''_0 = 1, && AB_0 + A'B'_0 - A''B''_0 = 0, \\ &BB_0 + B'B'_0 - B''B''_0 = 1, && AC_0 + A'C'_0 - A''C''_0 = 0, \\ &CC_0 + C'C'_0 - C''C''_0 = -1; && BC_0 + B'C'_0 - B''C''_0 = 0. \end{aligned}$$

Pour étudier ensuite les conditions de réduction de la forme donnée, il envisage, avec Hermite, la forme définie :

$$\Phi = UU_0 + VV_0 + WW_0,$$

qu'il écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi = &-(uu_0 + vv_0 - ww_0)(A''A''_0 + B''B''_0 - C''C''_0) \\ &- 2(A''u + B''v + C''w)(A''_0u_0 + B''_0v_0 + C''_0w_0). \end{aligned}$$

Il pose ensuite :

$$\xi = \frac{A''}{C''}, \qquad \eta = \frac{B''}{C''},$$

et considère les paramètres ξ et η comme les coordonnées d'un point. Comme la forme Φ peut alors être écrite de la manière suivante :

$$\Phi = -(uu_0 + vv_0 - ww_0)(\xi\xi_0 + \eta\eta_0 - 1) + 2(u\xi + v\eta + w)(u_0\xi_0 + v_0\eta_0 + w_0),$$

on voit qu'elle ne peut être définie que si les paramètres ξ et η satisfont à la condition :

(1) $$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 < 1.$$

L'ensemble des points ξ et η satisfaisant à l'inégalité (1) formera ce qu'Emile Picard appelle le domaine S et l'ensemble des points satisfaisant à l'équation :

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 = 1,$$

formera ce qu'il appelle la limite ou la surface du domaine S.

Les conditions de réduction de la forme Φ seront exprimées par un certain nombre d'inégalités compatibles entre ξ et η, inégalités définissant un domaine D qui correspondra à la forme réduite :

$$F = uu_0 + vv_0 - ww_0.$$

Emile Picard ne considère que les parties du domaine D intérieures à S. Il démontre alors le théorème fondamental suivant :

« Le domaine D ne peut avoir plus d'un point commun avec la surface de S ».

Il démontre ensuite que ce point est $\xi = 0$, $\eta = -1$.

3. — Les considérations suivantes amènent Emile Picard à la définition des substitutions qu'il faut employer pour réduire la forme Φ lorsque le point ξ et η sort du domaine D : en réduisant Φ on obtient certaines réduites adjacentes à F et auxquelles correspondent des domaines D′, D″, ... On continue à effectuer la réduction continuelle de Φ jusqu'à ce qu'on ne trouve plus de nouvelles réduites. On désigne par δ le domaine formé par l'ensemble des domaines D, D′, D″, ... Lorsque le point ξ et η sort du domaine δ on retombe sur une réduite déjà obtenue et à laquelle correspondra un nouveau domaine D_1. Si f est cette réduite, en faisant passer le point du domaine D dans le domaine D_1 on est conduit à une substitution S à coefficients entiers transformant f en elle-même. A une telle substitution correspond une substitution linéaire faite sur u, v, w, soit :

$$(u, v, w, Au + Bv + Cw, A'u + B'v + C'w, A''u + B''v + C''w),$$

et cette substitution transforme en elle-même la forme f. Si on effectue sur x, y, z, la substitution (S) qui correspond à S, la forme Φ devient :

$$(1-\xi\xi_0-\eta\eta_0)f+2\ \text{Norme}\,[(\mathrm{A}u+\mathrm{B}v+\mathrm{C}w)\xi + (\mathrm{A}'u+\mathrm{B}'v+\mathrm{C}'w)\eta+(\mathrm{A}''u+\mathrm{B}''v+\mathrm{C}''w)].$$

En divisant par le nombre positif :

$$\text{Norme}\,(\mathrm{C}\xi+\mathrm{C}'\eta+\mathrm{C}''),$$

ce qui ne modifie pas les conditions de réduction, et en posant :

$$(2) \qquad \xi'=\frac{\mathrm{A}\xi+\mathrm{A}'\eta+\mathrm{A}''}{\mathrm{C}\xi+\mathrm{C}'\eta+\mathrm{C}''}, \qquad \eta=\frac{\mathrm{B}\xi+\mathrm{B}'\eta+\mathrm{B}''}{\mathrm{C}\xi+\mathrm{C}'\eta+\mathrm{C}''},$$

cette forme peut s'écrire :

$$(1-\xi'\xi'_0-\eta'\eta'_0)f+2\ \text{Norme}\,(u\xi'+v\eta'+w).$$

On passe donc du domaine D au domaine D_1 en effectuant sur ξ et η la substitution (2).

4. — En continuant d'effectuer la réduction continuelle de la forme Φ on obtiendra un groupe discontinu G d'une infinité de substitutions telles que (2). Le domaine δ est un domaine fondamental du groupe, c'est-à-dire qu'à tout point (ξ, η) à l'intérieur de S correspond par une substitution du groupe, au moins un point (au plus un nombre limité de points) à l'intérieur de δ. De plus δ a un nombre limité de points communs avec la surface de S et il en a au moins un.

Si nous supposons que la forme qui a été réduite soit :

$$\mathrm{F}=axx_0+a'yy_0+a''zz_0+byz_0+b_0y_0z+b'xz_0+b'_0x_0z+b''xy_0+b''_0x_0y,$$

Emile Picard a démontré que les seules réduites pour lesquelles le domaine correspondant D peut avoir un point commun avec la surface de S sont celles pour lesquelles on a :

$$a=0, \qquad b''=0,$$

ce qui donne la forme :

$$\mathrm{F}=a'yy_0+a''zz_0+byz_0+b_0y_0z+b'xz_0+b'_0x_0z.$$

Il démontre ensuite que si l'on pose :

$$u=\frac{\xi}{1+\eta}, \qquad v=\frac{1}{1+\eta},$$

au groupe G relatif à ξ et η correspond un groupe relatif à u et v et que les substitutions de ce dernier groupe peuvent être obtenues par la composition des trois substitutions fondamentales :

$$\left(u,\, v,\, u,\, v - \frac{\alpha a' b'}{\delta}\right),$$
$$\left(u,\, v,\, u + \frac{\mu b'}{\sqrt{\delta}},\, v + \frac{a'\lambda}{\sqrt{\delta}}\, u + \frac{b'}{\delta}(\mu b_0 - \nu a')\right),$$
$$\left(u,\, v,\, u + \frac{\mu' b'}{\sqrt{\delta}},\, v + \frac{a'\lambda'}{\sqrt{\delta}}\, u + \frac{b'}{\delta}(\mu' b_0 - \nu' a')\right),$$

avec :

$$\delta = a'a'' - bb_0, \qquad \alpha = ib'_0,$$

et l'expression :

$$\frac{\alpha a' b'}{\delta}$$

étant purement imaginaire.

Revenant au groupe G sur ξ et η, nous nous rappelons qu'à tout point à l'intérieur de S correspondent par une substitution du groupe un nombre limité de points à l'intérieur de δ et au moins un. S'il y en a plus d'un, on pourra diviser ce domaine en plusieurs autres tels que dans chacun d'eux il y aura un point et un seul correspondant par une substitution du groupe à un point quelconque de S, et un tel domaine sera dorénavant appelé domaine fondamental R. Le domaine fondamental R a un ou un nombre limité de points communs avec la surface de S et il y a trois substitutions distinctes du groupe laissant invariable ce point A.

Emile Picard cherche ensuite quels sont les points (ξ, η) de S que laisse invariable une substitution du groupe et il trouve que dans certains cas particuliers il y a une infinité de points (ξ, η) qui restent invariables par la substitution (A, B, C) et qui satisfont à une équation du premier degré entre ξ et η. En revenant au domaine fondamental R, ces points ξ et η ne pourront être que des sommets ou des arêtes de ce domaine et, en particulier, d'un sommet A situé sur la surface de S pourront partir des arêtes dont tous les points resteront invariables pour une même substitution.

CHAPITRE II

5. — Nous pouvons aborder maintenant l'étude des fonctions dont nous avons démontré l'existence. Rappelons que, pour simplifier, nous avons considéré seulement deux séries de variables, chaque série ayant seulement deux variables. Nous aurons donc à étudier les propriétés des fonctions des variables x, y, z, t, les variables (x, y), d'une part, (z, t), d'autre part, étant soumises séparément aux substitutions des groupes :

$$\text{(G)} \qquad \left(x, y, X = \frac{Ax + By + C}{A''x + B''y + C''}, \; Y = \frac{A'x + B'y + C'}{A''x + B''y + C''}\right),$$

$$\text{(G')} \qquad \left(z, t, Z = \frac{Dz + Et + F}{D''z + E''t + F''}, \; T = \frac{D'z + E't + F'}{D''z + E''t + F''}\right),$$

et nous pouvons supposer que :

$$\begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} D & D' & D'' \\ E & E' & E'' \\ F & F' & F'' \end{vmatrix} = 1.$$

Dans un mémoire précédent (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, année 1942), nous avons montré qu'il existe des fonctions des variables x, y, z, t qui se reproduisent quand on effectue, sur les variables (x, y) d'une part et sur les variables (z, t) d'autre part, une substitution du groupe (G) et une du groupe (G'). $R(x, y, z, t)$ étant une fonction rationnelle à deux séries de variables (x, y) et (z, t), qui reste holomorphe à l'intérieur et sur la surface des domaines S et S' correspondants respectivement aux groupes (G) et (G'), nous avons considéré la série :

$$(3) \qquad \sum R(X, Y, Z, T) \frac{1}{(Cx + C'y + C'')^{3m}} \frac{1}{(Fz + F't + F'')^{3m}},$$

étendue à toutes les substitutions des deux groupes, m étant un entier supérieur à 2, et nous avons montré qu'elle était convergente.

Nous allons montrer ici que la série (3) ne sera pas identiquement nulle quelle que soit la fonction rationnelle R, au moins à partir d'une valeur suffisamment grande de l'entier m.

Considérons dans le domaine S le point $x=y=0$, et dans le domaine S′ le point $z=t=0$. Supposons d'abord que toute substitution des groupes (G) et (G′), autre que la substitution unité, donne comme transformé de o un point différent. On pourra trouver dans S et dans S′ des domaines s et s' autour de o et suffisamment petits pour qu'à tout point de ces domaines ne corresponde, par les substitutions des groupes (G) et (G′), que des points (x', y') et (z', t') pour lesquels on aura :

$$x'x'_0 + y'y'_0 > xx_0 + yy_0, \tag{4}$$

$$z'z'_0 + t't'_0 > zz_0 + tt_0. \tag{5}$$

Dans ces conditions, si :

$$x' = \frac{Ax + A'y + A''}{Cx + C'y + C''}, \qquad y' = \frac{Bx + B'y + B''}{Cx + C'y + C''},$$

$$z' = \frac{Dz + D't + D''}{Fz + F't + F''}, \qquad t' = \frac{Ez + E't + E''}{Fz + F't + F''},$$

on aura :

$$\text{Mod}\,(Cx + C'y + C'') > 1, \qquad \text{Mod}\,(Fz + F't + F'') > 1, \tag{5'}$$

comme conséquence des deux relations :

$$1 - x'x'_0 - y'y'_0 = \frac{1}{\text{Mod}^2\,(Cx + C'y + C'')}\,(1 - xx_0 - yy_0), \tag{6}$$

$$1 - z'z'_0 - t't'_0 = \frac{1}{\text{Mod}^2\,(Fz + F't + F'')}\,(1 - zz_0 - tt_0), \tag{7}$$

rapprochées des inégalités (4) et (5).

Revenons maintenant à la série (3) que nous pouvons écrire sous la forme :

$$R(x, y, z, t) + \sum R(x', y', z', t') \frac{1}{(Cx + C'y + C'')^{3m}} \frac{1}{(Fz + F't + F'')^{3m}},$$

la sommation s'étendant à toutes les substitutions des groupes (G) et (G′) sauf la substitution unité. Sous cette forme nous voyons que, si m est suffisamment grand, cette expression différera peu de $R(x, y, z, t)$ et on pourra faire en sorte qu'elle ne soit pas nulle.

Dans le cas où il y aurait, dans le groupe (G), N substitutions transformant le point $x=y=0$ en lui-même et, dans le groupe (G′), N′ substitutions transformant le point $z=t=0$ en lui-même, on écrira la série en prenant d'abord les termes qui correspondent aux $N+N'$ substitutions précédentes. Cette somme pourra s'écrire :

$$\sum R(x', y'\, z'\, t') \frac{1}{(Cx + C'y + C'')^{3m}} \frac{1}{(Fz + F't + F'')^{3m}}.$$

D'après les inégalités (6) et (7), pour $x = y = 0$, $z = t = 0$, on a :

$$\text{Mod } C'' = 1, \qquad \text{Mod } F'' = 1,$$

et cette somme se réduit à :

$$R(0, 0, 0, 0) \sum \frac{1}{C''^{3m}} \frac{1}{F''^{3m}}.$$

Comme m et $R(0, 0, 0, 0)$ sont arbitraires, cette somme ne sera pas nulle.

Nous avons désigné par $P(x, y, z, t)$ la fonction des quatre variables x, y, z, t dont l'existence se trouve établie complètement. Comme la série qui la définit est uniformément convergente, c'est une fonction analytique holomorphe de x, y, z, t pour tous les points des domaines S et S'. Nous rappelons que les domaines S et S' sont les domaines (D) et (D') du mémoire précédent qui correspondent aux valeurs de a, b, l, a', b', l' :

$$a = b = l = a' = b' = l' = 1.$$

6. — Nous allons montrer maintenant que si m est suffisamment grand on peut trouver deux fonctions P qui ne soient pas dans un rapport constant.

En effet, soient deux fonctions P_1 et P_2 relatives aux mêmes groupes (G) et (G') et au même entier m, et aux fonctions rationnelles R_1 et R_2. Formons l'expression :

$$P_1(x, y, z, t)\, P_2(x', y', z', t') - P_1(x', y', z', t')\, P_2(x, y, z, t),$$

(x, y) et (z, t) étant des points arbitraires.

Plaçons-nous dans le cas général examiné au paragraphe précédent et soient, dans les domaines S et S', les domaines s et s' autour des points $(0, 0)$ et $(0, 0)$. Les points (x, y), (x', y') étant dans le domaine s et les points (z, t), (z', t') étant dans le domaine s', l'expression précédente différera peu de :

$$R_1(x, y, z, t)\, R_2(x', y', z', t') - R_1(x', y', z', t')\, R_2(x, y, z, t),$$

si m est suffisamment grand; elle n'est donc pas identiquement nulle si les fonctions R_1 et R_2 sont arbitraires comme il est supposé. Donc le quotient :

$$\frac{P_1(x, y, z, t)}{P_2(x, y, z, t)},$$

ne se réduit pas à un facteur constant.

Ce résultat complète la démonstration de l'existence d'une fonction qui ne change pas quand on fait sur les séries de variables (x, y), (z, t) une substitution des groupes (G) et (G'). Si on pose, en effet :

$$Q(x, y, z, t) = \frac{P_1(x, y, z, t)}{P_2(x, y, z, t)},$$

la fonction Q satisfera à l'équation :

$$Q(X, Y, Z, T) = Q(x, y, z, t).$$

7. — La fonction $P(x, y, z, t)$ est une fonction holomorphe de x, y dans le domaine S défini par l'inégalité :

$$xx_0 + yy_0 < 1,$$

et de z, t dans le domaine S' défini par l'inégalité :

$$zz_0 + tt_0 < 1.$$

Considérons pour chaque groupe (G) et (G') un domaine fondamental R (paragraphe 4). Soit A un point commun à R et à la surface de S et A' un point commun à R' et à la surface de S'. Nous allons rechercher la valeur de la fonction P aux points A et A'. Nous allons admettre que le point A est le point $x = 0$, $y = -1$ et que le point A' est le point $z = 0$, $t = -1$. On peut supposer aussi que le point A existe seulement pour une des séries de variables.

Soit une substitution du groupe (G) :

$$X_i = \frac{A_i x + A_i' y + A_i''}{C_i x + C_i' y + C_i''}, \qquad Y_i = \frac{B_i x + B_i' y + B_i''}{C_i x + C_i' y + C_i''},$$

et une substitution du groupe (G') :

$$Z_i = \frac{D_i z + D_i' t + D_i''}{F_i z + F_i' t + F_i''}, \qquad T_i = \frac{E_i z + E_i' t + E_i''}{F_i z + F_i' t + F_i''},$$

posons :

$$u = \frac{x}{y+1}, \qquad v = \frac{1}{y+1},$$

$$u' = \frac{z}{t+1}, \qquad v' = \frac{1}{t+1}.$$

Au groupe (G) relatif à x, y correspondra un groupe (G_1) relatif à u et v et au groupe (G') relatif à z, t correspondra un groupe (G'_1) relatif à u' et v'. Nous poserons :

$$f_i(u, v) = \frac{X_i}{Y_i+1}, \qquad F_i(u, v) = \frac{1}{Y_i+1},$$

$$f'_i(u', v') = \frac{Z_i}{T_i+1}, \qquad F'_i(u', v') = \frac{1}{T_i+1}.$$

Soit maintenant la fonction P définie par la série :

$$P(x, y, z, t) = \sum R(X_i, Y_i, Z_i, T_i)\left[\frac{D(X_i, Y_i)}{D(x, y)}\right]^{3m}\left[\frac{D(Z_i, T_i)}{D(z, t)}\right]^{3m}.$$

Or, nous avons :

$$\frac{D(X_i, Y_i)}{D(x, y)} = \frac{D(X_i, Y_i)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{D(X_i, Y_i)}{D(f_i, F_i)} \cdot \frac{D(f_i, F_i)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)},$$

nous aurons donc :

$$\frac{D(X_i, Y_i)}{D(x, y)} = v^3 \cdot \frac{1}{F_i^3} \cdot \frac{D(f_i, F_i)}{D(u, v)}.$$

Nous aurons de même :

$$\frac{D(Z_i, T_i)}{D(z, t)} = v'^3 \cdot \frac{1}{F_i'^3} \cdot \frac{D(f'_i, F'_i)}{D(u', v')},$$

et nous pourrons écrire :

$$P(x, y, z, t) = v^{3m} v'^{3m} \sum R(X_i, Y_i, Z_i, T_i) \cdot \frac{1}{F_i^{3m}} \cdot \frac{1}{F_i'^{3m}} \cdot \left[\frac{D(f_i, F_i)}{D(u, v)}\right]^{3m}\left[\frac{D(f'_i, F'_i)}{D(u', v')}\right]^{3m}.$$

Posons maintenant :

$$P(x, y, z, t) = v^{3m} v'^{3m} P_1(u, v, u', v').$$

Nous voyons que, d'après sa forme même, la fonction $P_1(u, v, u', v')$ est analogue à la fonction $P(x, y, z, t)$; elle se reproduira donc multipliée par :

$$\left[\frac{D(f_i, F_i)}{D(u, v)}\right]^{3m}\left[\frac{D(f'_i, F'_i)}{D(u', v')}\right]^{3m},$$

quand on remplacera u, v d'une part, $u'\ v'$ d'autre part, respectivement par :

$$(f_i, F_i), \qquad (f'_i, F'_i).$$

D'autre part, comme on a, pour $P_1(u, v, u', v')$:

$$\sum R(X_i, Y_i, Z_i, T_i)\frac{1}{(Cx+C'y+C'')^{2m}}\cdot\frac{1}{(Fz+F't+F'')^{2m}}\cdot\frac{1}{v^{2m}}\cdot\frac{1}{v'^{2m}},$$

on voit que P_1 tend vers zéro quand x et y tendent respectivement vers 0 et -1 et que z et t tendent respectivement vers 0 et -1, puisque la série est convergente et que chacun de ses termes tend vers zéro.

L'étude de cette fonction P_1 va nous conduire à un théorème important.

Nous voyons d'abord qu'elle n'est définie que pour des valeurs de u, v, u', v' qui correspondent aux domaines S et S', de sorte que si nous posons :

$$u = u_1 + iu_2, \qquad v = v_1 + iv_2,$$
$$u' = u'_1 + iu'_2, \qquad v' = v'_1 + iv'_2,$$

la fonction sera définie dans les domaines :

$$u_1^2 + u_2^2 - 2v_1 + 1 < 0,$$
$$u_1'^2 + u_2'^2 - 2v'_1 + 1 < 0.$$

Rappelons que parmi les substitutions du groupe (G_1) nous en avons signalé trois qui sont particulières, ce sont :

$$(9)\qquad \begin{gathered}\left(u,\ v,\ u,\ v - \frac{\alpha a' b'}{\delta}\right),\\ \left(u,\ v,\ u + \frac{\mu b'}{\sqrt{\delta}},\ v - \frac{a'\lambda}{\sqrt{\delta}}u + \frac{b'}{\delta}(\mu\, b_0 - \nu\, a')\right),\\ \left(u,\ v,\ u + \frac{\mu' b'}{\sqrt{\delta}},\ v - \frac{a'\lambda'}{\sqrt{\delta}}u + \frac{b'}{\delta}(\mu' b_0 - \nu' a')\right),\end{gathered}$$

avec :

$$\alpha = ib'_0, \qquad \delta = a'a'' - bb_0,$$

dans lesquelles μ et μ' ont un rapport imaginaire, le rapport :

$$\frac{\alpha a' b'}{\delta}$$

étant purement imaginaire.

Le groupe (G'_1) aura trois substitutions analogues aux précédentes, dans lesquelles les a, a', b, b' seront remplacés par les quantités analogues relative à la seconde forme quadratique. Si une quelconque de ces substitutions est désignée par :

$$(u,\ v,\ u + M,\ v + Nu + P)$$

pour le groupe (G_1) et par :

$$(u', v', u' + M', v' + N'u' + P')$$

pour le groupe (G'_1), d'après ce qui a été dit de la fonction P_1, nous aurons :

$$\text{(10)} \qquad P(u + M, v + Nu + P, u' + M', v' + N'u' + P') = P_1(u, v, u', v').$$

Si nous donnons à u et u' des valeurs fixes, P_1 sera une fonction de v et de v', uniforme et continue pour toutes les valeurs telles que :

$$u_1^2 + u_2^2 - 2v_1 + 1 < 0,$$
$$u_1'^2 + u_2'^2 - 2v_1' + 1 < 0.$$

D'après l'équation (10), et si nous utilisons la première des substitutions (9), nous aurons :

$$P_1\left(u, v - \frac{\alpha a' b'}{\delta}, u', v' - \frac{\alpha_1 a_1' b_1'}{\delta_1}\right) = P_1(u, v, u', v').$$

Ceci indique que la fonction P_1 est développable en série ordonnée suivant les puissances des deux quantités :

$$e^{-\frac{2\pi i\delta}{\alpha a'b'}}, \qquad e^{-\frac{2\pi i\delta_1}{\alpha_1 a'_1 b'_1}},$$

si les quantités réelles :

$$\frac{2\pi i\delta}{\alpha a'b'}, \qquad \frac{2\pi i\delta_1}{\alpha_1 a_1' b_1'},$$

sont positives, et de :

$$e^{+\frac{2\pi i\delta}{\alpha a'b'}}, \qquad e^{+\frac{2\pi i\delta_1}{\alpha_1 a'_1 b'_1}},$$

dans le cas contraire. Si donc nous posons :

$$\frac{2\pi i\delta}{\alpha a'b'} = h, \qquad \frac{2\pi i\delta_1}{\alpha_1 a_1' b_1'} = h',$$

nous pourrons écrire :

$$P_1(u, v, u', v') = \sum p_{n+n'}(u, u') e^{-nhv} e^{-n'h'v'},$$

les termes indépendants de v et de v' étant nuls puisque la fonction doit s'annuler pour $y = -1$, $t = -1$, ce qui donne $v = \infty$, $v' = \infty$, et, par suite :

$$e^{-v} = 0, \qquad e^{-v'} = 0.$$

Les fonctions $p_{n+n'}$ sont des fonctions holomorphes de u et de u' dont nous trouverons les propriétés fondamentales en utilisant les deux autres substitutions (9). Nous savons que nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} &P_1\left(u+\frac{\mu b'}{\sqrt{\delta}},\, v-\frac{a'\lambda}{\sqrt{\delta}}u+\frac{b'}{\delta}(\mu b_0-\nu a'),\, u'+\frac{\mu_1 b'_1}{\sqrt{\delta_1}},\right.\\ &\qquad\qquad \left. v'-\frac{a'_1\lambda_1}{\sqrt{\delta_1}}u'+\frac{b'_1}{\delta_1}[\mu_1(b_1)_0-\quad a'_1]\right)=P_1(u,v,u',v'),\\ &P_1\left(u+\frac{\mu' b'}{\sqrt{\delta}},\, v-\frac{a'\lambda'}{\sqrt{\delta}}u+\frac{b'}{\delta}(\mu' b_0-\nu' a'),\, u'+\frac{\mu'_1 b'_1}{\sqrt{\delta_1}},\right.\\ &\qquad\qquad \left. v'-\frac{a'_1\lambda'_1}{\sqrt{\delta_1}}u'+\frac{b'_1}{\delta_1}[\mu'_1(b_1)_0-\nu'_1 a'_1]\right)=P_1(u,v,u',v').\end{aligned}$$

En identifiant avec le développement trouvé plus haut, nous obtiendrons les relations :

$$(10\,bis)\quad \begin{aligned} &p_{n+n'}\left(u+\frac{\mu b'}{\sqrt{\delta}},\, u'+\frac{\mu_1 b'_1}{\sqrt{\delta_1}}\right)=e^{-\frac{na'\lambda h}{\sqrt{\delta}}u-\frac{n'a'_1\lambda_1 h'}{\sqrt{\delta_1}}u'+\frac{nhb'}{\delta}(\mu b_0-\nu a')+\frac{n'h'b'_1}{\delta_1}[\mu_1(b_1)_0-\nu_1 a'_1]}\, p_{n+n'}(n,n'),\\ &p_{n+n'}\left(u+\frac{\mu' b'}{\sqrt{\delta}},\, u'+\frac{\mu'_1 b'_1}{\sqrt{\delta_1}}\right)=e^{-\frac{na'\lambda' h}{\sqrt{\delta}}u-\frac{n'a'_1\lambda'_1 h'}{\sqrt{\delta_1}}u'+\frac{nhb'}{\delta}(\mu' b_0-\nu' a')+\frac{n'h'b'_1}{\delta_1}[\mu'_1(b_1)_0-\nu'_1 a'_1]}\, p_{n+n'}(n,n').\end{aligned}$$

Ces relations nous montrent que ces fonctions $p_{n+n'}$ sont, pour deux variables, les analogues des fonctions intermédiaires de la théorie des fonctions elliptiques. En fait, elles sont les analogues des fonctions θ à plusieurs variables. Nous avons donc le théorème suivant très important :

Dans le voisinage des valeurs $x=0$, $y=-1$, $z=0$, $t=-1$, la fonction $P(x, y, z, t)$ peut se mettre sous la forme :

$$P(x,y,z,t)=v^{sm}v'^{sm}\sum p_{n+n'}(u,u')\,e^{-nhv}\,e^{-n'h'v'},$$

où :

$$u=\frac{x}{y+1},\qquad v=\frac{1}{y+1},\qquad u'=\frac{z}{t+1},\qquad v'=\frac{1}{t+1}.$$

Les fonctions $p_{n+n'}(u, u')$ sont des fonctions holomorphes de u et de u' analogues aux fonctions θ à deux variables et qui satisfont aux équations (10 *bis*).

On conclut de là également que la fonction $P(x, y, z, t)$ tend vers zéro quand les points (x, y) et (z, t) tendent respectivement vers les points $x=0$, $y=-1$, $z=0$, $t=-1$.

8. — Quelle que soit la fonction rationnelle R, la fonction $P(x, y, z, t)$ peut s'annuler pour certaines valeurs de (x, y) et de (z, t). Ce sont des points qui restent invariables pour certaines substitutions des groupes (G) et (G') (paragraphe 4). Ces points sont situés sur les limites des domaines fondamentaux R et R'. S'ils sont en nombre limité, ce sont des sommets ; s'il y en a une succession continue, ils forment des arêtes de ces domaines. Soient (x, y) et (z, t) deux tels points, et (A, B, C) et (D, E, F) les substitutions qui les laissent invariables, l'équation générale :

$$P\left[\frac{Ax+A'y+A''}{Cx+C'y+C''}, \frac{Bx+B'y+B''}{Cx+C'y+C''}, \frac{Dz+D't+D''}{Fz+F't+F''}, \frac{Ez+E't+E''}{Fz+F't+F''}\right] = (Cx+C'y+C'')^{3m}(Fz+F't+F'')^{3m}P(x, y, z, t)$$

montre que l'on a dans ce cas :

$$P(x, y, z, t) = (Cx+C'y+C'')^{3m}(Fz+F't+F'')^{3m}P(x, y, z, t).$$

Si nous posons :

$$Cx+C'y+C'' = k, \qquad Fz+F't+F'' = k',$$

cette dernière équation nous montre que, si k et k' ne satisfont pas à l'équation :

$$k^{3m}k'^{3m} = 1,$$

on aura :

$$P(x, y, z, t) = 0.$$

Il pourra donc y avoir certains sommets ou certaines arêtes des domaines fondamentaux pour les points desquels la fonction P s'annulera quelle que soit la fonction rationnelle R qui figure dans la fonction.

En dehors de ces points, qui sont sur les limites des domaines fondamentaux, il n'y aura dans ces domaines aucun point pour lequel la fonction P s'annulera quelle que soit la fonction rationnelle R.

Cela étant, considérons maintenant quatre fonctions P_1, P_2, P_3, P_4, relatives aux mêmes groupes (G) et (G') et au même entier m et soient R_1, R_2, R_3, R_4, les quatre fonctions rationnelles qui leur correspondent. Envisageons les quatre équations :

$$(11) \qquad \begin{aligned} &P_1(x, y, z, t) = 0, \qquad &P_2(x, y, z, t) = 0, \\ &P_3(x, y, z, t) = 0, \qquad &P_4(x, y, z, t) = 0. \end{aligned}$$

Les R étant quelconques, elles n'auront dans les domaines fondamentaux correspondants d'autres points racines formant une succession continue que les arêtes particulières que nous avons signalées plus haut, s'il en existe. Abstraction faite de ces points, nous allons montrer que le nombre des racines communes à ces quatre équations dans l'intérieur des domaines fondamentaux est fini.

Il ne peut y avoir de difficulté que pour les points communs aux domaines fondamentaux et aux surfaces des domaines S et S'; car c'est seulement dans le voisinage de ces points qu'il pourrait y avoir dans les domaines fondamentaux un nombre infini de racines. Or, soient de tels points que nous supposerons être les points $x = 0$, $y = -1$, $z = 0$, $t = -1$. Nous aurons :

$$P_1(x, y, z, t) = v^{2m} v'^{2m} \sum p^{(1)}_{n+n'}(u, u') e^{-nhv} e^{-n'h'v'},$$

$$P_2(x, y, z, t) = v^{2m} v'^{2m} \sum p^{(2)}_{n+n'}(u, u') e^{-nhv} e^{-n'h'v'},$$

$$P_3(x, y, z, t) = v^{2m} v'^{2m} \sum p^{(3)}_{n+n'}(u, u') e^{-nhv} e^{-n'h'v'},$$

$$P_4(x, y, z, t) = v^{2m} v'^{2m} \sum p^{(4)}_{n+n'}(u, u') e^{-nhv} e^{-n'h'v'}.$$

Supprimant le facteur commun $v^{2m} v'^{2m}$ les équations (11) s'écriront :

$$(12)\quad \begin{cases} e^{-hv} e^{-h'v'} \sum p^{(1)}_{n+n'}(u, u') e^{-(n-1)hv} e^{-(n'-1)h'v'} = 0, \\ e^{-hv} e^{-h'v'} \sum p^{(2)}_{n+n'}(u, u') e^{-(n-1)hv} e^{-(n'-1)h'v'} = 0, \\ e^{-hv} e^{-h'v'} \sum p^{(3)}_{n+n'}(u, u') e^{-(n-1)hv} e^{-(n'-1)h'v'} = 0, \\ e^{-hv} e^{-h'v'} \sum p^{(4)}_{n+n'}(u, u') e^{-(n-1)hv} e^{-(n'-1)h'v'} = 0. \end{cases}$$

Quand le point (x, y), à l'intérieur du domaine fondamental R, et le point (z, t) à l'intérieur du domaine fondamental R', se rapprochent respectivement des points $x = 0$, $y = -1$, $z = 0$, $t = -1$, les quantités $v_1 (v = v_1 + iv_2)$ et $v'_1 (v' = v'_1 + iv'_2)$ sont positives et grandissent indéfiniment. Les équations (12) ont donc en commun les racines :

$$e^{-hv} = 0, \qquad e^{-h'v'} = 0,$$

ce qui donne :

$$x = 0, \qquad y = -1; \qquad z = 0, \qquad t = -1.$$

Il peut arriver que tous les cœfficients :

$$p^{(1)}_{n+n'}, \qquad p^{(2)}_{n+n'}, \qquad p^{(3)}_{n+n'}, \qquad p^{(4)}_{n+n'},$$

aient une ou plusieurs solutions communes en u et u'; v et v' seraient alors arbitraires et on aurait une succession de points qui correspondrait à des arêtes issues des points communs, d'une part au domaine fondamental R et à la surface S, et d'autre part au domaine fondamental R′ et à la surface S′. A l'exception de ces valeurs, il y aura seulement un nombre fini de racines communes aux équations (12) pour lesquelles :

$$e^{-hv}, \qquad e^{-h'v'}$$

seront moindres respectivement que deux quantités ε et η aussi petites que l'on voudra. Les quatre équations (11) ont donc un nombre limité de racines communes à l'intérieur des domaines fondamentaux.

9. — Ce nombre de racines, fini, pour une valeur donnée de m et des groupes (G) et (G′) donnés, est indépendant des fonctions rationnelles R qui figurent dans les fonctions P. On peut envisager, en effet, des fonctions rationnelles R qui dépendent de certains paramètres, qui, pour des valeurs particulières de ceux-ci coïncident d'abord avec les fonctions R. Pour une variation infiniment petite de ces paramètres, le nombre des racines communes reste le même; d'ailleurs, si pour des valeurs spéciales de ces paramètres certaines racines sortent des domaines fondamentaux par une certaine face, on est certain que des racines en nombre égal entreront dans les domaines fondamentaux par la face opposée. Le nombre des racines est donc constant.

En prenant le quotient de deux fonctions P, relatives aux mêmes groupes (G) et (G′) et au même nombre m, on obtient une fonction Q qui reste invariable pour toutes les substitutions des groupes (G) et (G′), fonction que nous avons proposé d'appeler hyperautomorphe. Il résulte immédiatement de ce qui a été dit plus haut qu'entre cinq fonctions Q appartenant aux mêmes groupes (G) et (G′) et au même nombre m, il existe une relation algébrique.

On peut montrer aussi qu'on peut trouver cinq fonctions Q, relatives aux mêmes groupes (G) et (G′) et au même nombre m, telles que toute autre fonction Q, relative aux groupes (G) et (G′) et au même nombre m soit une fonction rationnelle des cinq premières.

Considérons, dans ces conditions, quatre fonctions Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, et, n_1, n_2, n_3, n_4, étant arbitraires, soient les équations :

$$Q_1(x, y, z, t) = n_1, \qquad Q_2(x, y, z, t) = n_2,$$
$$Q_3(x, y, z, t) = n_3, \qquad Q_4(x, y, z, t) = n_4,$$

et soit μ le nombre de leurs solutions communes à l'intérieur des domaines fondamentaux, solutions que nous désignerons par :

$$(13) \qquad (x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2), \ldots\ldots (x_\mu, y_\mu, z_\mu, t_\mu).$$

Les n_i étant arbitraires, on peut supposer que ces systèmes de points sont à l'intérieur et non sur les limites des domaines fondamentaux, c'est-à-dire que pour chacun d'eux la substitution unité est la seule qui le laisse invariable.

En raisonnant comme plus haut, on montre que P_1 et P_2 étant deux fonctions P relatives aux fonctions rationnelles R_1 et R_2, aux groupes (G) et (G') et à un entier m, le quotient :

$$Q_5(x, y, z, t) = \frac{P_1(x, y, z, t)}{P_2(x, y, z, t)}$$

aura, si m est pris assez grand et si R_1 et R_2 sont quelconques, des valeurs distinctes pour les points de la suite (13).

On en conclut que toute fonction Q est une fonction rationnelle de Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5; entre ces cinq fonctions appartenant aux mêmes groupes (G) et (G') et au même entier m, il existe d'ailleurs une relation algébrique :

$$f(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5) = 0.$$

10. — Il nous reste à montrer maintenant que les fonctions Q peuvent s'obtenir par l'inversion des quotients de solutions communes d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles.

Reprenons les fonctions Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, du paragraphe précédent et posons :

$$\xi = Q_1(x, y, z, t), \qquad \eta = Q_2(x, y, z, t),$$
$$\xi' = Q_3(x, y, z, t), \qquad \eta' = Q_4(x, y, z, t).$$

Soit u une fonction liée à ces quatre fonctions par la relation algébrique trouvée plus haut :

$$f(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, u) = 0$$

et considérons les cinq expressions :

$$(14) \qquad u_1 = \sqrt[3]{\frac{D(\xi, \eta, \xi', \eta')}{D(x, y, z, t)}},$$
$$u_2 = xu_1, \qquad u_3 = yu_1, \qquad u_4 = zu_1, \qquad u_5 = tu_1.$$

Les u sont des fonctions de x, y, z, t et, en vertu des relations (14), peuvent être regardées comme des fonctions de ξ, η, ξ', η'. Avant de continuer, examinons de plus près ces relations (14) et voyons ce qu'elles deviennent quand on effectue sur les variables une substitution de l'un des groupes (G) ou (G'), séparément ou simultanément. Prenons d'abord le groupe (G).

Dans ce cas, les variables z et t restent inaltérées et l'on a :

$$\frac{D(\xi,\eta,\xi',\eta')}{D(X,Y,z,t)} = \frac{D(\xi,\eta,\xi',\eta')}{D(x,y,z,t)} \cdot \frac{D(x,y,z,t)}{D(X,Y,z,t)} = \frac{D(\xi,\eta,\xi',\eta')}{D(x,y,z,t)} \cdot \frac{D(x,y)}{D(X,Y)}.$$

Comme :

$$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)} = \frac{1}{(Cx+C'y+C'')^3}.$$

Nous obtenons :

$$u_1(X,Y,z,t) = (Cx+C'y+C'')\,u_1(x,y,z,t).$$

Prenons le groupe (G'). Dans ce cas, les variables x et y restent inaltérées et l'on voit, comme précédemment que l'on aura :

$$u_1(x,y,Z,T) = (Fz+F't+F'')\,u_1(x,y,z,t).$$

En faisant simultanément une substitution du groupe (G) et une du groupe (G'), nous pourrons écrire :

$$\begin{aligned}\frac{D(\xi,\eta,\xi',\eta')}{D(X,Y,Z,T)} &= \frac{D(\xi,\eta,\xi',\eta')}{D(x,y,z,t)} \cdot \frac{D(x,y,z,t)}{D(X,Y,Z,T)} \\ &= \frac{D(\xi,\eta,\xi',\eta')}{D(x,y,z,t)} \cdot \frac{D(x,y)}{D(X,Y)} \cdot \frac{D(z,t)}{D(Z,T)} \\ &= (Cx+C'y+C'')^3(Fz+F't+F'')^3,\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$u_1(X,Y,Z,T) = (Cx+C'y+C'')(Fz+F't+F'')\,u_1(x,y,z,t).$$

Etudions maintenant les autres relations. Faisons une substitution du groupe (G). Nous voyons que nous aurons :

$$\begin{aligned}u_3(X,Y,z,t) &= \frac{Ax+A'y+A''}{Cx+C'y+C''}(Cx+C'y+C'')\,u_1(x,y,z,t) \\ &= (Ax+A'y+A'')\,u_1(x,y,z,t) = Au_3+A'u_2+A''u_1.\end{aligned}$$

Nous aurons de même :

$$u_2(X,Y,z,t) = Bu_3+B'u_2+B''u_1,$$
$$u_1(X,Y,z,t) = Cu_3+C'u_2+C''u_1.$$

Nous aurons ensuite :

$$u_4(X, Y, z, t) = z u_1(X, Y, z, t) = z(Cx + C'y + C'')u_1(x, y, z, t),$$

d'où :

$$u_4(X, Y, z, t) = (Cx + C'y + C'')u_4(x, y, z, t).$$

Nous aurons de même :

$$u_5(X, Y, z, t) = (Cx + C'y + C'')u_5(x, y, z, t),$$
$$u_1(X, Y, z, t) = (Cx + C'y + C'')u_1(x, y, z, t).$$

Faisons maintenant une substitution du groupe (G′). En opérant de la même manière, nous voyons que nous obtiendrons :

$$u_2(x, y, Z, T) = x(Fz + F't + F'')u_1(x, y, z, t) = (Fz + F't + F'')u_2(x, y, z, t),$$
$$u_3(x, y, Z, T) = y(Fz + F't + F'')u_1(x, y, z, t) = (Fz + F't + F'')u_3(x, y, z, t),$$

puis, comme plus haut :

$$u_4(x, y, Z, T) = \frac{Dz + D't + D''}{Fz + F't + F''}(Fz + F't + F'')u_1(x, y, z, t)$$

ou bien :

$$u_4(x, y, Z, T) = (Dz + D't + D'')u_1(x, y, z, t) = Du_4 + D'u_5 + D''u_1.$$

Nous aurons de même :

$$u_5(x, y, Z, T) = (Ez + E't + E'')u_1(x, y, z, t) = Eu_4 + E'u_5 + E''u_1,$$
$$u_1(x, y, Z, T) = (Fz + F't + F'')u_1(x, y, z, t) = Fu_4 + F'u_5 + F''u_1.$$

Faisons simultanément une substitution du groupe (G) et une du groupe (G′). Nous voyons facilement que nous obtiendrons :

$$u_2(X, Y, Z, T) = (Au_2 + A'u_3 + A''u_1)(Fz + F't + F'') = U_2,$$
$$u_3(X, Y, Z, T) = (Bu_2 + B'u_3 + B''u_1)(Fz + F't + F'') = U_3,$$
$$u_1(X, Y, Z, T) = (Cu_2 + C'u_3 + C''u_1)(Fz + F't + F'') = U_1;$$
$$u_4(X, Y, Z, T) = (Cx + C'y + C'')(Du_4 + D'u_5 + D''u_1) = U_4,$$
$$u_5(X, Y, Z, T) = (Cx + C'y + C'')(Eu_4 + E'u_5 + E''u_1) = U_5,$$
$$u_1(X, Y, Z, T) = (Cx + C'y + C'')(Fu_4 + F'u_5 + F''u_1) = U_1.$$

A l'inspection de toutes les formules que nous avons obtenues, nous voyons que nous avons :

Pour le groupe (G) seul :

$$\frac{u_2(X, Y, z, t)}{u_1(X, Y, z, t)} = X, \qquad \frac{u_4(X, Y, z, t)}{u_1(X, Y, z, t)} = z,$$

$$\frac{u_3(X, Y, z, t)}{u_1(X, Y, z, t)} = Y, \qquad \frac{u_5(X, Y, z, t)}{u_1(X, Y, z, t)} = t.$$

Pour le groupe (G′) seul :

$$\frac{u_2(x, y, Z, T)}{u_1(x, y, Z, T)} = x, \qquad \frac{u_4(x, y, Z, T)}{u_1(x, y, Z, T)} = Z,$$

$$\frac{u_3(x, y, Z, T)}{u_1(x, y, Z, T)} = y, \qquad \frac{u_5(x, y, Z, T)}{u_1(x, y, Z, T)} = T$$

et enfin, pour les deux groupes, simultanément :

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{u_2(X, Y, Z, T)}{u_1(X, Y, Z, T)} = \dfrac{Au_2 + A'u_3 + A''u_1}{Cu_2 + C'u_3 + C''u_1} = \dfrac{Ax + A'y + A''}{Cx + C'y + C''} = X, \\[2ex] \dfrac{U_3}{U_1} = \dfrac{u_3(X, Y, Z, T)}{u_1(X, Y, Z, T)} = \dfrac{Bu_2 + B'u_3 + B''u_1}{Cu_2 + C'u_3 + C''u_1} = \dfrac{Bx + B'y + B''}{Cx + C'y + C''} = Y, \\[2ex] \dfrac{U_4}{U_1} = \dfrac{u_4(X, Y, Z, T)}{u_1(X, Y, Z, T)} = \dfrac{Du_4 + D'u_5 + D''u_1}{Fu_4 + F'u_5 + F''u_1} = \dfrac{Dz + D't + D''}{Fz + F't + F''} = Z, \\[2ex] \dfrac{U_5}{U_1} = \dfrac{u_5(X, Y, Z, T)}{u_1(X, Y, Z, T)} = \dfrac{Eu_4 + E'u_5 + E''u_1}{Fu_4 + F'u_5 + F''u_1} = \dfrac{Ez + E't + E''}{Fz + F't + F''} = T. \end{cases}$$

Toutes ces formules nous montrent que, sous l'influence des substitutions des groupes (G) et (G′), les fonctions u se partagent en deux systèmes qui correspondent chacun à un des groupes, quand les substitutions sont appliquées séparément.

Ceci fait, passons aux équations différentielles. Nous savons que lorsque l'on a cinq fonctions de quatre variables indépendantes on peut former un système de dix équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre auxquelles satisfont ces fonctions. Si nous résolvons ces équations par rapport aux coefficients différentiels du second ordre, elles se présenteront sous la forme :

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = a\,\frac{du}{d\xi} + b\,\frac{du}{d\eta} + c\,\frac{du}{d\xi'} + d\,\frac{du}{d\eta'} + eu,$$

$$\frac{d^2u}{d\xi\, d\eta} = a_1\frac{du}{d\xi} + b_1\frac{du}{d\eta} + c_1\frac{du}{d\xi'} + d_1\frac{du}{d\eta'} + e_1 u,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Pour déterminer les coefficients $a, b, c, d, e, a_1, b_1, \ldots$ nous remplacerons u dans chaque équation successivement par u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, et nous obtiendrons, pour chaque équation du système, cinq équations linéaires qui permettront de calculer les coefficients correspondants.

D'après la façon dont ils auront été calculés, les cinquante coefficients des équations du système différentiel sont des fonctions uniformes de x, y, z, t et, d'après les équations :

$$
(16)\qquad \begin{aligned}
\xi &= Q_1(x, y, z, t), & \eta &= Q_2(x, y, z, t),\\
\xi' &= Q_3(x, y, z, t), & \eta' &= Q_4(x, y, z, t),
\end{aligned}
$$

on voit facilement que ce sont des fonctions de ξ, η, ξ', η'. De plus on voit facilement que ce sont des fonctions uniformes de ξ, η, ξ', η'. Nous allons montrer que ce sont des fonctions Q.

Considérons, par exemple, la première équation et ses coefficients a, b, c, d, e. Ils seront déterminés par les équations :

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2u_1}{d\xi^2} &= a\frac{du_1}{d\xi} + b\frac{du_1}{d\eta} + c\frac{du_1}{d\xi'} + d\frac{du_1}{d\eta'} + eu_1,\\
\frac{d^2u_2}{d\xi^2} &= a\frac{du_2}{d\xi} + b\frac{du_2}{d\eta} + c\frac{du_2}{d\xi'} + d\frac{du_2}{d\eta'} + eu_2,\\
\frac{d^2u_3}{d\xi^2} &= a\frac{du_3}{d\xi} + b\frac{du_3}{d\eta} + c\frac{du_3}{d\xi'} + d\frac{du_3}{d\eta'} + eu_3,\\
\frac{d^2u_4}{d\xi^2} &= a\frac{du_4}{d\xi} + b\frac{du_4}{d\eta} + c\frac{du_4}{d\xi'} + d\frac{du_4}{d\eta'} + eu_4,\\
\frac{d^2u_5}{d\xi^2} &= a\frac{du_5}{d\xi} + b\frac{du_5}{d\eta} + c\frac{du_5}{d\xi'} + d\frac{du_5}{d\eta'} + eu_5.
\end{aligned}
$$

Les coefficients a, b, c, d, e seront des quotients de deux déterminants. Le dénominateur a pour expression :

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
\frac{du_1}{d\xi} & \frac{du_1}{d\eta} & \frac{du_1}{d\xi'} & \frac{du_1}{d\eta'} & u_1\\
\frac{du_2}{d\xi} & \frac{du_2}{d\eta} & \frac{du_2}{d\xi'} & \frac{du_2}{d\eta'} & u_2\\
\frac{du_3}{d\xi} & \frac{du_3}{d\eta} & \frac{du_3}{d\xi'} & \frac{du_3}{d\eta'} & u_3\\
\frac{du_4}{d\xi} & \frac{du_4}{d\eta} & \frac{du_4}{d\xi'} & \frac{du_4}{d\eta'} & u_4\\
\frac{du_5}{d\xi} & \frac{du_5}{d\eta} & \frac{du_5}{d\xi'} & \frac{du_5}{d\eta'} & u_5
\end{vmatrix}
$$

et, après avoir remplacé respectivement u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, par les expressions (14), nous trouverons, toutes réductions faites :

$$
\Delta = u_1^2\frac{D(\xi, \eta, \xi', \eta')}{D(x, y, z, t)}\cdot\frac{D(x, y, z, t)}{D(\xi, \eta, \xi', \eta')} = u_1^2.
$$

Considérons maintenant le numérateur de a, par exemple, c'est-à-dire le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2u_1}{d\xi^2} & \frac{du_1}{d\eta} & \frac{du_1}{d\xi'} & \frac{du_1}{d\eta'} & u_1 \\ \frac{d^2u_2}{d\xi^2} & \frac{du_2}{d\eta} & \frac{du_2}{d\xi'} & \frac{du_2}{d\eta'} & u_2 \\ \frac{d^2u_3}{d\xi^2} & \frac{du_3}{d\eta} & \frac{du_3}{d\xi'} & \frac{du_3}{d\eta'} & u_3 \\ \frac{d^2u_4}{d\xi^2} & \frac{du_4}{d\eta} & \frac{du_4}{d\xi'} & \frac{du_4}{d\eta'} & u_4 \\ \frac{d^2u_5}{d\xi^2} & \frac{du_5}{d\eta} & \frac{du_5}{d\xi'} & \frac{du_5}{d\eta'} & u_5 \end{vmatrix},$$

nous verrons, toutes réductions faites, qu'il peut s'écrire :

$$2u_1^4\frac{du_1}{d\xi}\cdot\frac{\mathrm{D}(x, y, z, t)}{\mathrm{D}(\xi, \eta, \xi', \eta')}+u_1^5\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{d\xi^2} & \frac{dx}{d\eta} & \frac{dx}{d\xi'} & \frac{dx}{d\eta'} \\ \frac{d^2y}{d\xi^2} & \frac{dy}{d\eta} & \frac{dy}{d\xi'} & \frac{dy}{d\eta'} \\ \frac{d^2z}{d\xi^2} & \frac{dz}{d\eta} & \frac{dz}{d\xi'} & \frac{dz}{d\eta'} \\ \frac{d^2t}{d\xi^2} & \frac{dt}{d\eta} & \frac{dt}{d\xi'} & \frac{dt}{d\eta'} \end{vmatrix};$$

le coefficient a aura donc pour expression :

$$a = 2u_1^2\frac{du_1}{d\xi}\cdot\frac{\mathrm{D}(x, y, z, t)}{\mathrm{D}(\xi, \eta, \xi', \eta')}+u_1^3\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{d\xi^2} & \frac{dx}{d\eta} & \frac{dx}{d\xi'} & \frac{dx}{d\eta'} \\ \frac{d^2y}{d\xi^2} & \frac{dy}{d\eta} & \frac{dy}{d\xi'} & \frac{dy}{d\eta'} \\ \frac{d^2z}{d\xi^2} & \frac{dz}{d\eta} & \frac{dz}{d\xi'} & \frac{dz}{d\eta'} \\ \frac{d^2t}{d\xi^2} & \frac{dt}{d\eta} & \frac{dt}{d\xi'} & \frac{dt}{d\eta'} \end{vmatrix}.$$

Les dérivées de x, y, z, t par rapport aux ξ, η, ξ', η', étant des fonctions uniformes [on peut en effet les tirer des équations (16) par différentiation], u^3 étant également une fonction uniforme des mêmes variables, ainsi que :

$$u_1^2\frac{du_1}{d\xi} = \frac{1}{3}\frac{du_1^3}{d\xi},$$

il en résulte que a est une fonction uniforme des mêmes variables. Pour reconnaître que c'est une fonction Q, nous n'avons qu'à faire simultanément une substitution du groupe (G) et une du groupe (G'). Nous savons que dans ce cas, les u se transformeront d'après les formules (15), les nouveaux U étant liés aux nouveaux X, Y, Z, T par les mêmes formules que les u aux x, y, z, t. D'autre part, les ξ, η, ξ', η', reprennent les mêmes valeurs quand x, y, z, t, partant de deux systèmes (x, y), (z, t) de valeurs arbitraires aboutissent à des systèmes de valeurs équivalentes [c'est-à-dire qui leur correspondent par une substitution de (G) et une substitution de (G')]. Par suite, pour déterminer les transformés de a, b, c, d, e nous avons les mêmes équations que pour déterminer a, b, c, d, e. Ces coefficients sont donc des fonctions Q.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Soient cinq fonctions, liées par une relation algébrique :

$$\text{(A)} \qquad f(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5) = 0,$$
$$\xi = Q_1(x, y, z, t), \qquad \eta = Q_2(x, y, z, t),$$
$$\xi' = Q_3(x, y, z, t), \qquad \eta' = Q_4(x, y, z, t),$$
$$u = Q_5(x, y, z, t),$$

on peut former un système de dix équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre de la forme :

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} = a\frac{du}{d\xi} + b\frac{du}{d\eta} + c\frac{du}{d\xi'} + d\frac{du}{d\eta'} + eu,$$
$$\frac{d^2 u}{d\xi\, d\eta} = a'\frac{du}{d\xi} + b'\frac{du}{d\eta} + c'\frac{du}{d\xi'} + d'\frac{du}{d\eta'} + e'u,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

où les $a, b, c, d, e, a', b', c', d', e', \dots$ sont des fonctions rationnelles de ξ, η, ξ', η', u étant définie par l'équation (A). Ces dix équations ont cinq solutions communes linéairement indépendantes, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, et si l'on pose :

$$\frac{u_2}{u_1} = x, \qquad \frac{u_3}{u_1} = y, \qquad \frac{u_4}{u_1} = z, \qquad \frac{u_5}{u_1} = t,$$

ces équations, résolues par rapport à ξ, η, ξ', η', donneront précisément :

$$\xi = Q_1(x, y, z, t), \qquad \eta = Q_2(x, y, z, t),$$
$$\xi' = Q_3(x, y, z, t), \qquad \eta' = Q_4(x, y, z, t).$$

11. — Jusqu'à maintenant, et pour la facilité des raisonnements, nous nous sommes bornés à l'étude des fonctions Q à deux séries de variables, (x, y) et (z, t), chaque série étant soumise à toutes les substitutions d'un groupe linéaire portant sur les mêmes variables, et nous nous sommes inspiré des travaux d'Emile Picard sur les formes à indéterminées conjuguées.

Tout ce que nous avons dit s'applique à l'étude des fonctions à un nombre quelconque de séries de variables, chaque série comprenant un nombre quelconque de variables. Chaque série de variables devant être soumise à toutes les substitutions d'un groupe linéaire portant sur les mêmes variables.

Nous nous serions inspiré alors des travaux de M. Fubini et nous aurions obtenu des théorèmes très généraux, généralisation de ceux que nous avons énoncé.

Nous nous arrêterons là pour le moment.