

J. ANDRÉANI

## Sur une définition de cycliques planes à point double

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4<sup>e</sup> série*, tome 6 (1942), p. 7-14

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1942\\_4\\_6\\_\\_7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1942_4_6__7_0)

© Université Paul Sabatier, 1942, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE DÉFINITION  
DES  
CYCLIQUES PLANES A POINT DOUBLE

Par M. J. ANDRÉANI,

Professeur au Lycée Pasteur (Neuilly-sur-Seine).

---

Nous nous proposons, dans cet article, d'indiquer une construction simple des cycliques planes à point double (quartiques bicirculaires ou cubiques circulaires transformées par inversion des coniques) et d'en déduire quelques conséquences géométriques. Nous commencerons par exposer les généralités définissant la transformation qui conduit à notre construction géométrique. Les calculs étant très simples seront souvent indiqués brièvement.

*Définition de la transformation.* — Considérons deux points fixes  $O$  et  $A$ . Soit  $M$  un point quelconque du plan. Traçons le cercle de centre  $A$  passant par  $M$ . La sécante  $OM$  coupe ce cercle en un deuxième point  $M'$  que nous associons au point  $M$ . On obtient ainsi une correspondance  $(M, M')$  qui est évidemment réciproque. On peut noter tout de suite qu'un cercle de centre  $A$  se transforme en lui-même, la correspondance entre  $M$  et  $M'$  se réduisant alors à une inversion de pôle  $O$ .

La transformation possède une ligne de points doubles qu'il est aisé de déterminer.  $M$  et  $M'$  sont confondus, si la droite  $OMM'$  est tangente au cercle de centre  $A$  passant par  $M$ . L'angle en  $M$  (ou  $M'$ ) est alors droit et le lieu de  $M$  est le cercle de diamètre  $OA$ .

\* Il existe aussi une ligne singulière : c'est le cercle de centre  $A$  passant par  $O$ . Tout point  $M$  de ce cercle a pour correspondant le point  $O$  lui-même. Inversement le point  $O$  fournit à lui seul toute la ligne constituée par le cercle précédent. Nous étudierons plus loin géométriquement la transformée d'un cercle passant par  $O$ .

*Formules de la transformation.* — Prenons le point O comme origine, l'axe Ox dirigé de A vers O et l'axe Oy vers le haut. Soient  $x$  et  $y$  les coordonnées de M et  $x'$  et  $y'$  les coordonnées de M'. On a évidemment :

$$x^2 + y^2 + 2ax = x'^2 + y'^2 + 2ax',$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}.$$

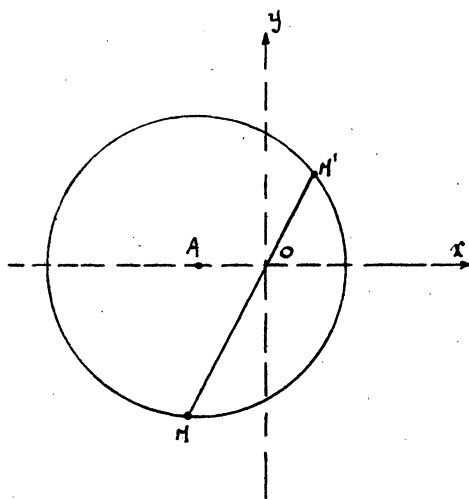


FIG. 1.

En résolvant le système par rapport à  $x'$  et  $y'$ , on trouve

$$x' = -x \frac{x^2 + y^2 + 2ax}{x^2 + y^2},$$

$$y' = -y \frac{x^2 + y^2 + 2ax}{x^2 + y^2}.$$

*Transformée d'une droite.* — Considérons une droite quelconque :

$$ux' + vy' + w = 0;$$

remplaçons  $x'$  et  $y'$  par les valeurs précédentes, il vient :

$$-(ux + vy) \frac{x^2 + y^2 + 2ax}{x^2 + y^2} + w = 0,$$

ou encore :

$$(ux + vy)(x^2 + y^2 + 2ax) - w(x^2 + y^2) = 0.$$

Groupons les termes d'après le degré

$$(ux + vy)(x^2 + y^2) + (2au - w)x^2 + 2avxy - wy^2 = 0.$$

La courbe obtenue est une cubique circulaire admettant O pour point double. Il est facile de vérifier que c'est la cubique circulaire la plus générale (de point double O). Il en résulte que toute courbe de cette famille peut être obtenue par la transformation étudiée. L'asymptote est la droite symétrique de la droite donnée :  $ux' + vy' + w = 0$  par rapport au point O.

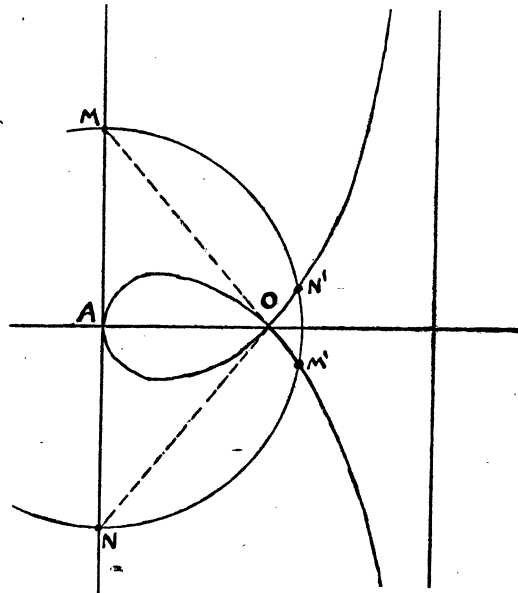


FIG. 2.

*Cas particuliers remarquables.* 1° *Strophoïde.* — Pour obtenir une strophoïde, il suffit d'écrire que les tangentes en O sont rectangulaires. On obtient ainsi

$$2au - w = w;$$

$$\text{d'où l'on tire : } w = au.$$

La droite donnée a alors pour équation

$$ux + vy + au = 0,$$

et l'on voit qu'elle passe par le point A.

La strophoïde droite correspond évidemment à la droite menée par A perpendiculairement à Ox. La figure a été faite dans ce cas particulier classique.

2° *Cissoïde*. — La cubique doit présenter un rebroussement. Ecrivons qu'il y a une tangente double :

$$a^2 v^2 + w(2au - w) = 0,$$

ou encore

$$a^2(u^2 + v^2) = (w - au)^2.$$

Cette relation exprime que la droite donnée doit être tangente au cercle de centre A passant par O. En effet la distance du point A ( $-a, 0$ ) à la droite  $ux + vy + w = 0$  est donnée par

$$d = \frac{(ux + vy + w)^2}{u^2 + v^2}.$$

Ici on a

$$d = a \quad x = -a \quad y = 0,$$

et par suite

$$a^2(u^2 + v^2) = (w - au)^2.$$

Pour la cissoïde droite il faut évidemment choisir la tangente qui est perpendiculaire à Ox au point ( $-2a, 0$ ).

*Transformée d'un cercle*. — Donnons-nous un cercle quelconque

$$x'^2 + y'^2 - 2\alpha x' - 2\beta y' + \gamma = 0.$$

Remplaçons  $x'$  et  $y'$  par leurs valeurs :

$$\frac{(x^2 + y^2 + 2ax)^2}{x^2 + y^2} + 2(\alpha x + \beta y) \frac{x^2 + y^2 + 2ax}{x^2 + y^2} + \gamma = 0;$$

Chassons le dénominateur

$$(x^2 + y^2 + 2ax)^2 + 2(\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2 + 2ax) + \gamma(x^2 + y^2) = 0;$$

Ordonnons suivant le degré :

$$(x^2 + y^2)^2 + 2(\alpha x + \beta y + 2ax)(x^2 + y^2) + (4a^2 + 4a\alpha + \gamma)x^2 + 4a\beta xy + \gamma y^2 = 0.$$

On reconnaît une quartique bicirculaire ayant O pour point double. La présence du facteur  $(x^2 + y^2)$  dans le troisième degré indique en outre que l'on a affaire à une quartique inverse d'une conique dans une inversion de pôle O. On peut dire aussi que c'est une podaire de conique, c'est-à-dire une cyclique du 4<sup>e</sup> ordre. Il est facile de vérifier que c'est la cyclique la plus générale.

*Cas particuliers remarquables. — Limaçon de Pascal.* — L'identification de l'équation précédente avec celle d'un limaçon de Pascal donne :

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -R^2.$$

Il faut donc prendre un cercle de centre O.

L'équation devient :

$$(x^2 + y^2)^2 + 4ax(x^2 + y^2) + (4a^2 - R^2)x^2 - R^2y^2 = 0;$$

et l'on a bien là l'équation d'un limaçon de Pascal.

Pour obtenir la cardioïde, il suffit de choisir  $R = 2a$ ; il vient :

$$(x^2 + y^2)^2 + 4ax(x^2 + y^2) - 4a^2y^2 = 0.$$

*Cycliques planes à point double.* — L'inverse d'une conique par rapport à un point O est une cyclique plane admettant O pour point double. Si le point O est quelconque, la cyclique est du 4<sup>e</sup> degré et si le point O est sur la conique la cyclique est du 3<sup>e</sup> degré. On retrouve donc les courbes précédentes et on peut énoncer le résultat suivant :

Les cycliques à point double du 4<sup>e</sup> et du 3<sup>e</sup> degré peuvent s'obtenir par la même construction simple qui découle de la transformation précédente. La cubique s'obtient à partir d'une droite et la quartique à partir d'un cercle. Le tracé ne comporte que des cercles de centre A et des sécantes passant par O. Il est donc plus simple que la construction résultant de l'inversion d'une conique (ou de la podaire d'une conique).

*Cercle passant par l'origine.* — En reprenant le calcul fait plus haut dans le cas général et en posant :  $\gamma = 0$ , il reste

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2\alpha x + 2\beta y = 0.$$

C'est là l'équation d'un autre cercle passant par O. Le centre a pour coordonnées

$$-(a + \alpha) \quad \text{et} \quad -\beta,$$

C'est le symétrique du point  $(\alpha, \beta)$  par rapport au point I, milieu de OA. Le résultat se retrouve aisément par la géométrie.

Considérons un cercle de centre  $\omega$  passant par O. Soit I le milieu de OA et  $\omega'$  le symétrique de  $\omega$  par rapport à O. Soit M un point du cercle  $(\omega)$  et M' son transformé. Il faut démontrer que M' est sur le cercle de centre  $\omega'$  qui passe par O, c'est-à-dire que

$$\omega' M' = \omega' O;$$

Or, on a :  $\omega' O = A\omega$ ; il faut donc prouver que  $\omega' M' = A\omega$ .

Considérons les deux triangles  $A\omega'M'$  et  $A\omega M$ . On a :

$$AM' = AM \quad \text{et} \quad A\omega' = O\omega = \omega M.$$

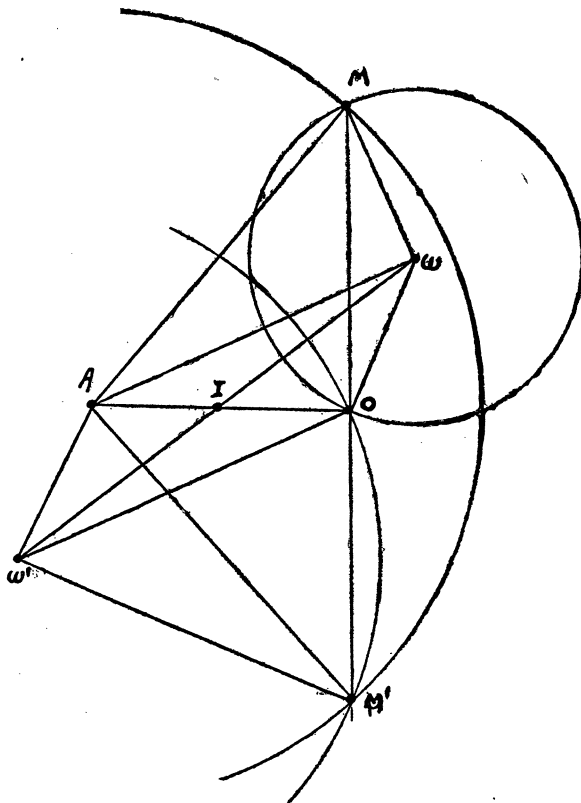


FIG. 3.

De plus, les angles  $\omega'AM'$  et  $AM\omega$  sont égaux. En effet :

$$\begin{aligned} \omega'AM' &= \omega'AO - M'AO \\ &= \omega OA - M'AO \\ &= \omega OM + MOA - M'AO \\ &= \omega OM + AM'O \\ &= \omega MO + AMO = AM\omega; \end{aligned}$$

Les deux triangles sont donc égaux, et l'on a bien :

$$\omega'M' = \omega'O.$$

*Nouvelle définition de la transformation.* — Cette propriété va nous permettre de présenter la transformation sous une autre forme utilisant la notion d'enveloppe.

Soit une courbe  $\Gamma$ . On peut la considérer comme l'enveloppe d'une famille de cercles (C) passant par O. Chaque cercle (C) donne un cercle (C') passant par O. L'enveloppe des cercles (C') est la courbe  $\Gamma'$  transformée de  $\Gamma$ . Or les centres de C et C' sont symétriques par rapport au point I. Donc les lieux des centres pour  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont aussi symétriques, autrement dit on a affaire à la même courbe géométrique. On retrouve alors les résultats connus concernant les cycliques du 3<sup>e</sup> et du 4<sup>e</sup> degré :

Si  $\Gamma$  est une droite, le lieu des centres est une parabole (foyer O). Donc pour  $\Gamma'$  (cyclique du 3<sup>e</sup> degré) on a aussi une parabole (foyer A). Si  $\Gamma$  est un cercle, le lieu est une conique à centre (un foyer est O). Donc pour  $\Gamma'$  cyclique du 4<sup>e</sup> ordre on a une conique également (un foyer est A). (Comme il y a deux foyers A et A' il y a donc deux cercles  $\Gamma$  possibles.) Ces deux résultats dérivent d'ailleurs de la définition des cycliques comme inverses (ou podaires) de coniques. Il nous a paru intéressant de les rattacher à notre construction géométrique.

*Remarque 1.* — Utilisons également ceci pour retrouver la lemniscate. C'est une podaire d'hyperbole équilatère lorsque le point O est au centre. Il faut donc avoir pour lieu des centres l'hyperbole équilatère de centre O dont l'un des foyers est A. La figure symétrique par rapport au point I est l'hyperbole équilatère de centre A dont un foyer est O. L'autre foyer est le point A' ( $-2a, 0$ ). Il faut donc partir d'un cercle qui est précisément le cercle directeur. Le centre est A' et le rayon  $a\sqrt{2}$ . Le calcul est d'ailleurs immédiat.

*Remarque 2.* — On peut également utiliser la génération par cercles pour la construction des tangentes. Le cas de la strophoïde est relativement simple.

*Cyclique à point double globalement conservée.* — Donnons-nous une conique C quelconque comme lieu des centres. L'enveloppe des cercles est une cyclique  $\Gamma$ . Appliquons la transformation. On obtient une courbe  $\Gamma'$  dont le lieu des centres est la conique C' symétrique de C par rapport au point I. Donc  $\Gamma'$  est aussi une cyclique à point double. Si l'on veut que  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  soient confondues, il suffit de choisir la conique C de façon qu'elle ait pour centre I. On a alors une cyclique globalement inchangée. Géométriquement le point O occupe une position quelconque par rapport à la conique. Donc la cyclique envisagée est la plus générale du 4<sup>e</sup> ordre. Si M est un point quelconque de la cyclique, son correspondant M' est aussi sur la cyclique. Or M et M' sont sur le cercle de centre A; donc la médiatrice de MM' passe par le point fixe A. D'où le résultat : soit une cyclique à



point double  $O$  du 4<sup>e</sup> ordre et une sécante variable  $MN$  qui pivote autour de  $O$  : la médiatrice de  $MN$  passe par un point fixe  $A$ .

*Remarque 1.* — Ce résultat est d'ailleurs une conséquence de la définition des cycliques du 4<sup>e</sup> ordre à point double comme inverses de coniques. Soient  $C$  une conique quelconque,  $O$  le pôle d'inversion (non situé sur  $C$ ),  $\Gamma$  la cyclique inverse de  $C$ ,  $m$  et  $n$  deux points de  $C$  alignés avec  $O$ ,  $M$  et  $N$  leurs inverses sur  $\Gamma$ .

L'inverse du milieu  $I$  de  $MN$  est le point  $i$  conjugué harmonique de  $O$  par rapport à  $m$  et  $n$ . Lorsque la sécante  $OMN$  tourne,  $i$  décrit la polaire  $\Delta$  du point  $O$ . Donc le cercle de diamètre  $Oi$  passe par un point fixe  $a$ , pied de la perpendiculaire abaissée de  $O$  sur  $\Delta$ . L'inverse de ce cercle est précisément la médiatrice de  $MN$ . Donc celle-ci passe par le point fixe  $A$  inverse  $a$ .

*Remarque 2.* — Il n'est pas sans intérêt de noter que la construction géométrique du début, suivie d'une inversion de pôle  $O$ , fournit un moyen pour transformer un cercle quelconque (ou une droite) en une conique : le cercle (ou la droite) est d'abord transformé en une cyclique et cette dernière est transformée en une conique par l'inversion.

*Remarque 3.* — Si, dans la construction du début, on remplace le cercle de centre  $O$  par une sphère de centre  $O$ , on obtient une transformation de l'espace transformant les sphères ou les plans en surfaces cyclides à point double (du 4<sup>e</sup> ou du 3<sup>e</sup> ordre).

Il est bien connu que la correspondance des sphères ou des plans, et des cycliques à point double, peut être réalisée d'une infinité de façons. La simplicité du point de départ nous semble cependant justifier les développements qui précèdent.