LOUIS ROY

Sur les actions magnétiques, électriques, électrodynamiques et électromagnétiques dans les corps rigides ou déformables

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 3 (1939), p. 1-69
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1939_4_3__1_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

SUR LES ACTIONS

MAGNÉTIQUES, ÉLECTRIQUES, ÉLECTRODYNAMIQUES, ET ÉLECTROMAGNÉTIQUES

DANS LES CORPS RIGIDES OU DÉFORMABLES

Par Louis ROY

CHAPITRE PREMIER

Préliminaires.

1. Introduction. — Dans une publication déjà lointaine(¹), nous avions consacré un court chapitre à la théorie des actions électrodynamiques et électromagnétiques, telle que Pierre Duhem l'avait autrefois développée ici-même(²) d'après Helmholtz, en se limitant aux courants de conduction. Nous l'avions alors étendue aux courants de polarisation (courants de déplacement de Maxwell), sans nous douter que cette extension avait été faite vingt-trois ans plus tôt par Duhem lui-même dans son enseignement à la Faculté des Sciences de Bordeaux(³). Le corps aimanté considéré

(¹) L. Roy, *L'Électrodynamique des milieux isotropes en repos d'après Helmholtz et Duhem*, Collection Scientia n° 40, Gauthier-Villars éd., Paris, 1923.

(²) P. Duhem, *Les actions électrodynamiques et électromagnétiques*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1^re^ série, t. VII, 1893; t. VIII, 1894.

(³) P. Duhem, *Propagation des actions électriques, magnétiques et diélectriques*, cours professé en 1899-1900 à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Nous n'avons eu connaissance de ce cours qu'en 1936, par un abrégé, réduit aux énoncés et formules, qu'a bien voulu nous offrir M^lle^ Hélène Duhem, à qui nous sommes heureux de renouveler ici nos bien sincères remerciments.

par Duhem, puis par nous-même, était un aimant permanent rigide, pour lequel seulement il était possible de calculer avec certitude la variation $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ de l'intensité d'aimantation dans un déplacement virtuel du système. En même temps que nous rédigions notre opuscule, M. Alfred Liénard préparait un important mémoire sur ce même sujet(1). Après avoir montré, contrairement à ce que pensait Duhem, que la notion de potentiel thermodynamique interne, à la condition d'être suffisamment élargie, continue de s'appliquer à des systèmes parcourus par des courants, M. Liénard l'utilisait au calcul du travail, avec ou sans déformation, d'un système de courants et d'aimants parfaitement doux, dans l'hypothèse que ces courants sont uniformes.

La difficulté d'étendre la méthode de M. Liénard au cas général de courants quelconques nous fit revenir à celle de Duhem. Comment celle-ci pouvait-elle s'étendre à des aimants parfaitement doux déformables? Pour tâcher de répondre à cette question, nous eûmes l'idée de développer, en même temps que les termes électrodynamiques et électromagnétiques, les termes magnétiques et électriques qui figurent aussi dans l'expression générale du travail des forces intérieures, fournie par le principe de la conservation de l'énergie et l'équation des forces vives. On reconnaît alors que, dans le développement des termes d'apparence purement magnétique, apparaissent certains termes électromagnétiques qui, par une heureuse coïncidence, sont égaux en valeur absolue et de signes contraires aux termes gênants en $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ qu'introduit, dans la partie électromagnétique du travail, la considération d'aimants parfaitement doux. Les termes en $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ qui subsistent sont donc relatifs aux seuls aimants permanents, pour lesquels le calcul de ces variations ne présente aucune difficulté. Dès lors, il n'y avait plus lieu de faire sur ces variations les diverses hypothèses auxquelles M. Liénard avait été conduit.

La partie électrique du travail fait évidemment apparaître les variations analogues $\delta(A, B, C)$ relatives à l'intensité de polarisation des diélectriques parfaitement doux. Mais ces variations ne sont pas gênantes, car elles s'expriment en fonction du courant de polarisation. Certains termes résiduels font apparaître des actions élémentaires exercées sur chaque diélectrique par la force électromotrice d'induction, c'est-à-dire par la partie non électrostatique du champ électrique. L'ensemble de ces actions constitue d'ailleurs un système nul; aussi n'interviennent-elles que pour les corps déformables.

Un autre résultat curieux est le suivant : dans les actions magnétiques élémentaires qui s'exercent sur un aimant parfaitement doux déformable, il est impossible de séparer complètement ce qui est purement magnétique de ce qui est électromagnétique. La séparation complète n'apparaît qu'en calculant la résultante et le

(1) A. Liénard, *Équilibre et déformation de systèmes de conducteurs traversés par des courants et de corps magnétiques sans hystérésis*, Annales de Physique, 9e série, t. XX, 1923, p. 249.

moment résultant des forces élémentaires. Il en est de même des actions électriques élémentaires, qui s'exercent sur un diélectrique parfaitement doux déformable et dans lesquelles se trouve incluse une partie des actions exercées par la force électromotrice d'induction. La séparation complète ne se fait encore que par le calcul de la résultante et du moment résultant.

Les forces magnétiques ou électriques ainsi calculées concernent un système en mouvement, au sens large de l'Énergétique. Sont-elles les mêmes que pour un système en repos et en équilibre magnétique ou électrique? La réponse est entièrement affirmative pour les premières, incomplètement pour les secondes et la présence des courants dans l'état de mouvement explique cette différence.

A côté de l'aimant parfaitement doux déformable ou rigide, du diélectrique parfaitement doux déformable ou rigide et de l'aimant permanent rigide, nous avons cru devoir considérer aussi le diélectrique permanent rigide. La considération d'un tel corps paraît en effet se justifier par l'hystérésis considérable qui a été récemment observée par Eguchi sur l'*électret* (mélange fondu de résine et de cire de Carnauba) et par Kourtschatov sur le sel de seignette(1).

Dans l'expression du travail élémentaire des forces intérieures intervient la variation des énergies magnétique et électrique du système. Le calcul de la variation de l'énergie d'un corps déformable polarisé a fait l'objet principal d'un important mémoire de Duhem(2). Certaines formules sur la déformation des milieux continus nous ont permis de simplifier notablement l'analyse de cet illustre savant(3).

2. Équation fondamentale. — Considérons un système en mouvement au sens large de l'Énergétique. En même temps que ce système se meut et se déforme, les paramètres qui définissent son état physique en chaque point, notamment son état électrique et magnétique, varient aussi d'une manière continue. Imaginons alors qu'à l'instant t, on imprime au système une modification virtuelle de durée dt; parmi ces modifications figure, en particulier, la modification réelle éprouvée par le

---

(1) *Le Magnétisme* (Rapports et discussions du sixième Conseil de l'Institut international de Physique Solvay), Gauthier-Villars éd., Paris, 1932, p. 386. — I. V. Kourtschatov, *Le champ moléculaire dans les diélectriques*, Hermann éd., Paris, 1936, p. 45. — Nous devons ces précieuses indications à l'obligeance de M. Gaston Dupouy, à qui nous renouvelons nos bien vifs remercîments.

(2) P. Duhem, *Sur la pression dans les milieux diélectriques ou magnétiques*, American Journal of Mathematics, t. XVII, 1895, p. 117.

(3) Le présent travail a été résumé en quatre Notes insérées aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences : *Actions totales exercées sur l'aimantation d'un système de corps isotropes*, séance du 17 octobre 1938; *Analogie entre les actions exercées sur les courants et les actions magnétiques*, séance du 24 octore 1938; *Sur les actions électriques dans un système de corps isotropes*, séance du 2 novembre 1938; *Sur les actions électrostatiques dans un système de corps isotropes*, séance du 7 novembre 1938.

système entre les instants t et $t+dt$ si, comme nous le supposerons, les liaisons sont indépendantes du temps. D'après le principe de la conservation de l'énergie appliqué à cette modification, on a

$$\delta \mathfrak{T}_e = -\delta J + \delta U + \mathfrak{E}\delta Q,$$

$\delta \mathfrak{T}_e$ désignant le travail élémentaire correspondant des forces extérieures, δJ celui des forces d'inertie, δU l'accroissement de l'énergie interne du système, δQ la quantité de chaleur dégagée, $\mathfrak{E}$ l'équivalent mécanique de la chaleur.

D'autre part, l'équation des forces vives appliquée à la même modification donne

$$-\delta J = \delta \mathfrak{T}_e + \delta \mathfrak{T}_i,$$

$\delta \mathfrak{T}_i$ désignant le travail élémentaire correspondant des forces intérieures et $-\delta J$ devenant égal à l'accroissement de la force vive dans le cas d'une modification réelle.

En ajoutant membre à membre ces deux égalités, il vient

$$\delta \mathfrak{T}_i + \delta U + \mathfrak{E}\delta Q = 0, \tag{1}$$

équation fondamentale qui nous fera connaître, en dernière analyse, les forces intérieures du système, moyennant le calcul préalable de la variation de l'énergie interne et de la quantité de chaleur dégagée. Tel est le point de départ de la méthode de Duhem que nous allons reprendre.

3. Définition du système étudié. — Nous supposerons le système rapporté à un trièdre fixe trirectangle $Oxyz$ et constitué par trois corps distincts continus et isotropes. Soient ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3; S_1, S_2, S_3 les volumes et les surfaces terminales de chacun d'eux. Ces corps peuvent n'avoir aucun point commun ou être en contact par une portion de leur surface. Par hypothèse ils sont électrisés et le siège de courants de conduction, si, comme nous le supposerons en toute généralité, leur conductibilité n'est pas nulle. En outre, le corps 1 est déformable et parfaitement doux au double point de vue magnétique et diélectrique. Les deux autres sont indéformables, c'est-à-dire sont des solides parfaitement rigides, le corps 2 étant le siège d'une double polarisation magnétique et diélectrique invariablement liée à ce corps, qui constitue ainsi un aimant permanent en même temps qu'un diélectrique permanent rigide, et le corps 3 étant parfaitement doux au double point de vue magnétique et diélectrique. Enfin le milieu dans lequel ces trois corps sont plongés est, par hypothèse, parfaitement isolant, non électrisé, non diélectrique et non magnétique.

Cela posé, la variation de l'intensité de polarisation diélectrique dans les corps 1 et 3 engendre dans ceux-ci des courants de polarisation qui, ajoutés aux courants de conduction, donnent le courant total, dont la densité en chaque point (x, y, z) a pour composantes

$$(2) \qquad f = u + \mathfrak{u}, \qquad g = v + \mathrm{v}, \qquad h = w + \mathrm{w},$$

(u, v, w) désignant la densité du courant de conduction, $(\mathfrak{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w})$ la densité du courant de polarisation au même point[1].

4. Énergie interne et quantité de chaleur. — L'énergie interne d'un système en repos a pour expression[2]

$$(3) \qquad \mathrm{U} = \mathrm{U}_0 + \mathfrak{W} + \int \left(\mathcal{F} - \mathrm{T} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathrm{T}} \right) d\varpi + \mathrm{M} + \mathrm{W} + \int \left(\mathrm{F} - \mathrm{T} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{T}} \right) d\varpi + \Pi,$$

U_0 désignant ce que serait l'énergie interne si le système était à l'état neutre, c'est-à-dire s'il n'était ni électrisé, ni aimanté et s'il n'était le siège d'aucun courant, $\mathfrak{W}$ l'*énergie magnétique* du système, W son *énergie électrostatique*[3], $\mathcal{F}$ une fonction donnée de l'intensité d'aimantation $\mathfrak{J}$, de la densité cubique ρ et de la température absolue T en un point de l'élément de volume $d\varpi$ d'un des corps du système, F une fonction donnée de l'intensité de polarisation diélectrique J, de ρ et de T au même point et les intégrales s'étendant au système entier[4]. On a d'autre part

$$(4) \qquad \mathrm{M} = \int \mathfrak{z} e \, d\varpi + \int \mathfrak{z} \sigma \, d\mathrm{S},$$

avec

$$(5) \qquad \mathfrak{z} = \Theta - \mathrm{T} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}},$$

e désignant la densité cubique de l'électricité en un point de l'élément de volume $d\varpi$; σ la densité superficielle de l'électricité en un point de l'élément de surface $d\mathrm{S}$ d'une surface terminale et Θ une fonction dépendant de l'état de la matière, notamment de ρ, T, au point considéré.

---

(1) Nous faisons donc abstraction ici des courants de convection dûs au mouvement du système, parce que ces courants ne deviennent sensibles qu'aux grandes vitesses (de l'ordre du *km : s*), très au-dessous desquelles nous conviendrons de nous tenir.

(2) L. Roy, *loc. cit.*, p. 52. Conformément aux notations de Duhem, nous avions, dans notre opuscule, désigné par $\mathfrak{E}$U l'énergie interne.

(3) Les fonctions $\mathfrak{W}$ et W sont respectivement appelées par Duhem *potentiel magnétique* et *potentiel électrostatique* du système.

(4) Afin d'abréger les notations, nous ne mettrons généralement pas d'indice au bas des intégrales étendues au volume total $\varpi = \varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3$ ou à la surface totale $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 + \mathrm{S}_3$ du système.

Enfin, le dernier terme Π de (3), que nous déterminerons plus loin (n° 19), est celui qu'il faut ajouter aux précédents, c'est-à-dire à l'énergie interne du système simplement aimanté et électrisé, pour que l'expression (3) reste valable lorsque le système est, en outre, parcouru par des courants.

Si nous admettons, comme très vraisemblable, que l'énergie interne d'un système en mouvement, électrisé, aimanté et parcouru par des courants ne dépend pas explicitement des vitesses, l'expression (3) établie pour un système en repos reste valable pour un système en mouvement; la seule différence étant que le courant total, qui intervient dans la fonction Π, aura une expression analytique plus complexe du fait des nouveaux termes qui s'ajouteront dans l'expression du courant de polarisation.

On a d'autre part[1]

$$(6)\qquad \mathfrak{E}\delta Q = dt\int\left|u\left(E_x - T\frac{\partial E_x}{\partial T} + \frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right|d\varpi + \delta\int T\frac{\partial(\mathcal{F}+F)}{\partial T}d\varpi,$$

(E_x, E_y, E_z) désignant la force électromotrice totale en un point (x, y, z) de l'élément $d\varpi$, soit

$$(7)\qquad E_x = -\frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial x} + \varphi_x + \mathcal{E}_x, \ldots\ldots,$$

ε étant la constante fondamentale des actions électrostatiques, V le potentiel électrique[2] au point (x, y, z), $(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$ la force électromotrice hydro-électrique et $(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z)$ la force électromotrice d'induction au même point.

Dès lors, il résulte des égalités (3) et (6) que l'équation fondamentale (1) devient

$$(8)\qquad \begin{aligned}\delta\mathcal{T}_i = &-\delta U_0 - \delta\left(\mathcal{W} + \int\mathcal{F}d\varpi\right) - \delta M - \delta\left(W + \int F d\varpi\right) - \delta\Pi\\ &- dt\int\left|u\left(E_x - T\frac{\partial E_x}{\partial T} + \frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right|d\varpi,\end{aligned}$$

de sorte qu'il nous faut tout d'abord expliciter les différents termes du second membre.

---

(1) L. Roy, *loc. cit.*, p. 32, avec la notation abrégée | | pour désigner, non pas une valeur absolue, mais une somme de trois termes analogues à celui qui est écrit, les deux autres s'en déduisant par permutation tournante de certaines lettres évidentes (ici u, v, w; x, y, z). C'est ainsi que nous représenterions par $|X dx|$ le travail élémentaire de la force (X, Y, Z). Nous préférons cette notation, dont nous avons fait un constant usage dans nos publications antérieures, à celle (F, ds) du calcul vectoriel classique, comme se prêtant mieux aux transformations algébriques. Duhem l'avait d'ailleurs employée dans ses *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, mais en remplaçant chacun des deux traits par un trait double, afin d'éviter la confusion avec le symbole usuel de la valeur absolue.

(2) Duhem appelle V la *fonction potentielle* électrique du système.

CHAPITRE II

Variation de $\mathfrak{W} + \int \mathfrak{F}\,d\varpi$.

5. Énergie magnétique. — Soient ε' la constante fondamentale des actions magnétiques; $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les composantes de l'intensité d'aimantation $\mathfrak{J}$ en un point (x, y, z) du système; $\mathfrak{V}$ le potentiel magnétique en ce point(¹); l'énergie magnétique du système a pour expression

$$\mathfrak{W} = \frac{\varepsilon'}{2}\int \left| \mathcal{A}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right| d\varpi.$$

Écrivons

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_3,$$

$\mathfrak{V}_i$ désignant le potentiel magnétique du seul corps i; il vient

$$\mathfrak{W} = \frac{\varepsilon'}{2}\int_{\varpi_1+\varpi_2+\varpi_3} \left| \mathcal{A}\frac{\partial(\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_3)}{\partial x} \right| d\varpi,$$

de sorte qu'en posant

$$\text{(9)} \qquad \mathrm{I}_{ij} = \int_{\varpi_i} \left| \mathcal{A}\frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial x} \right| d\varpi$$

et en tenant compte de ce que $\mathrm{I}_{ij} = \mathrm{I}_{ji}$, on a

$$\frac{2}{\varepsilon'}\mathfrak{W} = \mathrm{I}_{11} + \mathrm{I}_{22} + \mathrm{I}_{33} + 2(\mathrm{I}_{12} + \mathrm{I}_{23} + \mathrm{I}_{31}).$$

Le corps 2 étant un aimant permanent rigide, I_{22} est une constante, d'où

$$\text{(10)} \qquad \frac{2}{\varepsilon'}\delta\mathfrak{W} = \delta\mathrm{I}_{11} + \delta\mathrm{I}_{33} + 2(\delta\mathrm{I}_{12} + \delta\mathrm{I}_{23} + \delta\mathrm{I}_{31}).$$

Nous avons donc à calculer la variation de cinq intégrales de la forme (9).

(¹) Duhem appelle $\mathfrak{V}$ la *fonction potentielle* magnétique du système.

6. Calcul de δI_{11}. — Ce calcul, de beaucoup le plus compliqué de ce fait que le corps 1 est déformable, fait l'objet principal du mémoire précité de Duhem. Nous allons reprendre l'analyse de cet illustre savant, en lui apportant toutefois de notables simplifications.

En effaçant dans la formule (9) les indices inutiles ici, nous avons à considérer l'intégrale

$$I = \int_{\varpi} \left| \mathfrak{A} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right| d\varpi = \int_{\varpi} \mathfrak{V} \mathcal{E} \, d\varpi + \int_{S} \mathfrak{V} \mathcal{G} \, dS \tag{11}$$

étendue à un corps déformable unique, le troisième membre de cette égalité résultant d'une intégration par parties et

$$\mathcal{E}(x, y, z, t) = -\left| \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} \right|, \qquad \mathcal{G}(x, y, z, t) = -|\mathfrak{A}\alpha| \tag{12}$$

désignant respectivement les densités cubique et superficielle de la distribution fictive équivalente de l'aimant considéré; α, β, γ les cosinus directeurs de la demi-normale intérieure en un point de la surface S. Mais

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{U} + \mathfrak{W},$$

en posant[1]

$$\mathfrak{U}(x, y, z, t) = \int_{\varpi} \frac{\mathcal{E}'}{r} d\varpi', \qquad \mathfrak{W}(x, y, z, t) = \int_{S} \frac{\mathcal{G}'}{r} dS', \tag{13}$$

avec

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}(x', y', z', t), \qquad \mathcal{G}' = \mathcal{G}(x', y', z', t)$$

et r désignant la distance du point $M(x, y, z)$ des éléments $d\varpi$ ou dS des intégrales (11) au point $M'(x', y', z')$ des éléments $d\varpi'$ ou dS' des intégrales (13); l'égalité (11) devient ainsi

$$I = \int_{\varpi} (\mathfrak{U} + \mathfrak{W}) \mathcal{E} \, d\varpi + \int_{S} (\mathfrak{U} + \mathfrak{W}) \mathcal{G} \, dS.$$

Mais on a

$$\int_{\varpi} \mathfrak{W} \mathcal{E} \, d\varpi = \int_{\varpi} \int_{S} \frac{\mathcal{G}'}{r} \mathcal{E} \, d\varpi \, dS' = \int_{S} \left(\int_{\varpi} \frac{\mathcal{E}}{r} d\varpi \right) \mathcal{G}' dS' = \int_{S} \mathfrak{U}' \mathcal{G}' dS',$$

---

[1] Les notations étant multiples, il est difficile d'éviter les doubles emplois; mais aucune confusion n'est possible entre le potentiel de surface $\mathfrak{W}$ introduit ici et l'énergie magnétique $\mathfrak{W}$ du système.

avec

$$\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}(x', y', z', t) = \int_{\varpi} \frac{\mathcal{E}}{r}\, d\varpi; \tag{14}$$

d'où

$$\int_{\varpi} \mathfrak{U}^{\gamma} \mathcal{E}\, d\varpi = \int_{S} \mathfrak{U}\, \mathcal{G}\, dS$$

et par suite

$$I = \int_{\varpi} \mathfrak{U}\, \mathcal{E}\, d\varpi + 2\int_{S} \mathfrak{U}\, \mathcal{G}\, dS + \int_{S} \mathfrak{U}^{\gamma} \mathcal{G}\, dS. \tag{15}$$

Nous sommes ainsi ramenés à calculer les variations de ces trois dernières intégrales.

A. *Calcul de* $\delta \int_{\varpi} \mathfrak{U}\, \mathcal{E}\, d\varpi$. — En effaçant l'indice ϖ devenu inutile dans les calculs qui suivent, on a

$$\delta \int \mathfrak{U}\, \mathcal{E}\, d\varpi = \int \left[(\mathcal{E}\, \delta \mathfrak{U} + \mathfrak{U}\, \delta \mathcal{E})\, d\varpi + \mathfrak{U}\, \mathcal{E}\, \delta\, d\varpi\right].$$

Or, d'après la première (13),

$$\delta \mathfrak{U} = \int \left[\left(\frac{\delta \mathcal{E}'}{r} + \mathcal{E}' \delta \frac{1}{r}\right) d\varpi' + \frac{\mathcal{E}'}{r}\, \delta\, d\varpi'\right],$$

d'où

$$\int \mathcal{E}\, \delta \mathfrak{U}\, d\varpi = \int\!\!\int \mathcal{E} \left[\left(\frac{\delta \mathcal{E}'}{r} + \mathcal{E}' \delta \frac{1}{r}\right) d\varpi' + \frac{\mathcal{E}'}{r}\, \delta\, d\varpi'\right] d\varpi.$$

Calculons donc les différents termes de cette dernière intégrale; on a

$$\int\!\!\int \mathcal{E} \frac{\delta \mathcal{E}'}{r}\, d\varpi'\, d\varpi = \int \left(\int \frac{\mathcal{E}}{r}\, d\varpi\right) \delta \mathcal{E}'\, d\varpi' = \int \mathfrak{U}'\, \delta \mathcal{E}'\, d\varpi' = \int \mathfrak{U}\, \delta \mathcal{E}\, d\varpi,$$

$$\int\!\!\int \mathcal{E}\mathcal{E}' \delta \frac{1}{r}\, d\varpi'\, d\varpi = \int\!\!\int \mathcal{E}\mathcal{E}' \left| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, \delta x + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\, \delta x' \right| d\varpi'\, d\varpi$$

$$= \int \mathcal{E} \left| \delta x \int \mathcal{E}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, d\varpi' \right| d\varpi + \int \mathcal{E}' \left| \delta x' \int \mathcal{E} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\, d\varpi \right| d\varpi'.$$

Nous voyons ainsi apparaître les champs $(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1)$ en **M** et $(\mathcal{X}'_1, \mathcal{Y}'_1, \mathcal{Z}'_1)$ en **M**$'$ dûs à la seule densité cubique, soit

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{X}_1(x, y, z, t) &= -\varepsilon' \int \mathcal{E}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\varpi', \ldots\ldots, \\ \mathcal{X}'_1(x', y', z', t) &= -\varepsilon' \int \mathcal{E} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} d\varpi, \ldots\ldots, \end{aligned} \right.$$

d'après (13) et (14); d'où

$$\begin{aligned} \varepsilon' \int\int \mathcal{E}\mathcal{E}' \delta \frac{1}{r} d\varpi' d\varpi &= -\int \mathcal{E} |\mathcal{X}_1 \delta x| d\varpi - \int \mathcal{E}' |\mathcal{X}'_1 \delta x'| d\varpi' \\ &= -2 \int \mathcal{E} |\mathcal{X}_1 \delta x| d\varpi. \end{aligned}$$

On a d'autre part

$$\int\int \mathcal{E} \frac{\mathcal{E}'}{r} \delta d\varpi' d\varpi = \int \left(\int \frac{\mathcal{E}}{r} d\varpi \right) \mathcal{E}' \delta d\varpi' = \int \mathcal{U}' \mathcal{E}' \delta d\varpi' = \int \mathcal{U} \mathcal{E} \delta d\varpi,$$

d'où finalement

$$(17) \qquad \delta \int_{\varpi} \mathcal{U} \mathcal{E} d\varpi = 2 \int_{\varpi} \left[\left(\mathcal{U} \delta \mathcal{E} - \frac{1}{\varepsilon'} \mathcal{E} |\mathcal{X}_1 \delta x| \right) d\varpi + \mathcal{U} \mathcal{E} \delta d\varpi \right].$$

B. *Calcul de* $\delta \int \mathcal{U} \mathcal{S} d\mathrm{S}$. — Ce calcul, analogue au précédent, va introduire le potentiel de surface au point $\mathrm{M}'(x', y', z')$, soit

$$\mathcal{W}' = \mathcal{W}(x', y', z', t) = \int_{\mathrm{S}} \frac{\mathcal{S}}{r} d\mathrm{S}$$

et les champs $(\mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Z}_2)$ en **M** et $(\mathcal{X}'_2, \mathcal{Y}'_2, \mathcal{Z}'_2)$ en **M**$'$ dûs à la seule densité superficielle, soit

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{X}_2(x, y, z, t) &= -\varepsilon' \int_{\mathrm{S}} \mathcal{S}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\mathrm{S}', \ldots\ldots, \\ \mathcal{X}'_2(x', y', z', t) &= -\varepsilon' \int_{\mathrm{S}} \mathcal{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} d\mathrm{S}, \ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

On a comme précédemment

$$\delta \int_S \mathfrak{U}\mathcal{G}\, dS = \int_S [(\mathcal{G}\delta\mathfrak{U} + \mathfrak{U}\delta\mathcal{G})dS + \mathfrak{U}\mathcal{G}\delta dS],$$

d'où la suite d'égalités

$$\int_S \mathcal{G}\delta\mathfrak{U}\, dS = \int_S \int_\varpi \mathcal{G}\left[\left(\frac{\delta \mathcal{E}'}{r} + \mathcal{E}'\delta \frac{1}{r}\right)d\varpi' + \frac{\mathcal{E}'}{r}\delta d\varpi'\right] dS,$$

$$\int_S \int_\varpi \mathcal{G}\frac{\delta\mathcal{E}'}{r}\, d\varpi' dS = \int_\varpi \left(\int_S \frac{\mathcal{G}}{r}\, dS\right)\delta\mathcal{E}' d\varpi' = \int_\varpi \mathfrak{W}'\delta\mathcal{E}' d\varpi' = \int_\varpi \mathfrak{W}\delta\mathcal{E} d\varpi,$$

$$\int_S \int_\varpi \mathcal{G}\mathcal{E}'\delta\frac{1}{r}\, d\varpi' dS = \int_S \int_\varpi \mathcal{G}\mathcal{E}' \left| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\delta x' \right| d\varpi' dS$$

$$= \int_S \mathcal{G}\left|\delta x \int_\varpi \mathcal{E}'\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, d\varpi'\right| dS + \int_\varpi \mathcal{E}'\left|\delta x' \int_S \mathcal{G}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\, dS\right| d\varpi'$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon'}\int_S \mathcal{G}\,|\mathfrak{X}_1\delta x|\, dS - \frac{1}{\varepsilon'}\int_\varpi \mathcal{E}'\,|\mathfrak{X}'_2\delta x'|\, d\varpi'$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon'}\int_S \mathcal{G}\,|\mathfrak{X}_1\delta x|\, dS - \frac{1}{\varepsilon'}\int_\varpi \mathcal{E}\,|\mathfrak{X}_2\delta x|\, d\varpi,$$

$$\int_S \int_\varpi \mathcal{G}\frac{\mathcal{E}'}{r}\delta d\varpi' dS = \int_\varpi \left(\int_S \frac{\mathcal{G}}{r}\, dS\right)\mathcal{E}'\delta d\varpi' = \int_\varpi \mathfrak{W}'\mathcal{E}'\delta d\varpi' = \int_\varpi \mathfrak{W}\mathcal{E}\delta d\varpi.$$

On a donc finalement

$$(19) \qquad \delta \int_S \mathfrak{U}\mathcal{G}\, dS = \int_\varpi \left[\left(\mathfrak{W}\delta\mathcal{E} - \frac{1}{\varepsilon'}\mathcal{E}\,|\mathfrak{X}_2\delta x|\right)d\varpi + \mathfrak{W}\mathcal{E}\delta d\varpi\right]$$
$$+ \int_S \left[\left(\mathfrak{U}\delta\mathcal{G} - \frac{1}{\varepsilon'}\mathcal{G}\,|\mathfrak{X}_1\delta x|\right)dS + \mathfrak{U}\mathcal{G}\delta dS\right].$$

C. *Calcul de* $\delta \int \mathfrak{W}\mathcal{G}\, dS$. — Ce calcul est identique à celui de $\delta \int_\varpi \mathfrak{U}\mathcal{E}\, d\varpi$ et donne

$$(20) \qquad \delta \int_S \mathfrak{W}\mathcal{G}\, dS = 2\int_S \left[\left(\mathfrak{W}\delta\mathcal{G} - \frac{1}{\varepsilon'}\mathcal{G}\,|\mathfrak{X}_2\delta x|\right)dS + \mathfrak{W}\mathcal{G}\delta dS\right].$$

D. *Expression de* δI. — D'après (15), l'expression de δI résulte de l'addition des résultats partiels (17), (19) et (20). Cette addition fait apparaître, en chaque point de ϖ ou de S, le potentiel magnétique total $\mathcal{V}$ et le champ magnétique total ($\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$) résultant des densités cubique et superficielle, soit

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2, \ldots\ldots$$

et il vient

$$(21) \qquad \frac{1}{2}\delta I = \int_{\varpi} \left[\left(\mathcal{V}\delta\mathcal{E} - \frac{1}{\varepsilon'}\mathcal{E}\,|\mathcal{X}\delta x| \right) d\varpi + \mathcal{V}\mathcal{E}\delta d\varpi \right] + \int_{S} \left[\left(\mathcal{V}\delta\mathcal{G} - \frac{1}{\varepsilon'}\mathcal{G}\,|\mathcal{X}\delta x| \right) dS + \mathcal{V}\mathcal{G}\delta dS \right].$$

C'est, aux différences de notations près, la formule préliminaire (28), p. 129, donnée par Duhem dans son mémoire précité. Nous pouvons l'écrire encore

$$(22) \qquad \frac{1}{2}\delta I = \int_{\varpi} \mathcal{V}\delta(\mathcal{E}d\varpi) + \int_{S} \mathcal{V}\delta(\mathcal{G}dS) - \frac{1}{\varepsilon'}\int_{\varpi} |\mathcal{X}\delta x|\,\mathcal{E}d\varpi - \frac{1}{\varepsilon'}\int_{S} |\mathcal{X}\delta x|\,\mathcal{G}dS$$

et nous devons y faire : en chaque point du volume ϖ

$$(23) \qquad \mathcal{X} = -\varepsilon'\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}, \ldots\ldots$$

et, en chaque point de la surface S et indifféremment,

$$(24) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X} = -\varepsilon'\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} - 2\pi\varepsilon'\mathcal{G}\alpha, \ldots\ldots; \qquad \mathcal{X} = -\varepsilon'\dfrac{\partial\mathcal{V}'}{\partial x} - 2\pi\varepsilon'\mathcal{G}\alpha', \ldots\ldots; \\ \qquad\qquad \mathcal{X} = -\dfrac{\varepsilon'}{2}\left(\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + \dfrac{\partial\mathcal{V}'}{\partial x}\right), \ldots\ldots, \end{array} \right.$$

avec $\alpha' = -\alpha$, $\beta' = -\beta$, $\gamma' = -\gamma$, ainsi qu'il résulte de la théorie des potentiels de surfaces.

Chaque dérivée partielle $\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}, \ldots$ de (24) désigne la limite vers laquelle tend cette dérivée, calculée en un point M′ *intérieur* au volume ϖ, lorsque M′ tend vers le point M considéré de la surface S; de même, chaque dérivée partielle $\dfrac{\partial\mathcal{V}'}{\partial x}, \ldots$ désigne la limite vers laquelle tend cette même dérivée, calculée en un point M″ *extérieur* au volume ϖ, lorsque M″ tend vers le même point M de S. Nous conviendrons d'appeler les premières $\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}, \ldots$ *dérivées intérieures*, les secondes $\dfrac{\partial\mathcal{V}'}{\partial x}, \ldots$ *dérivées extérieures* à la surface fermée S considérée.

Pour achever le calcul de δI, il nous reste à développer les deux premières intégrales de (22), en tenant compte des expressions (12) de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{F}$.

E. *Calcul de* $\int_{\varpi} \mathcal{V}\delta(\mathcal{E}\,d\varpi)$. — On a d'après (12)

$$\int \mathcal{V}\delta\mathcal{E}\,d\varpi = -\int \mathcal{V}\delta\left|\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}\right| d\varpi. \tag{25}$$

Calculons donc $\delta\dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}$. Dans la modification virtuelle ou réelle considérée de durée dt, le point matériel, qui est en $M(x, y, z)$ à l'instant t, est venu, à l'instant $t' = t + dt$, en un point infiniment voisin $M'(x', y', z')$, en même temps que la fonction $\mathcal{A}(x, y, z, t)$ en M est devenue $\mathcal{A}'(x', y', z', t')$ en M' et l'on a par définition

$$\delta\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial x'} - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}, \tag{26}$$

avec

$$x' = x + \delta x, \qquad y' = y + \delta y, \qquad z' = z + \delta z,$$

δx, δy, δz étant des fonctions infiniment petites de x, y, z. On a ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial x} &= \frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial x'}\left(1 + \frac{\partial \delta x}{\partial x}\right) + \frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial y'}\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial z'}\frac{\partial \delta z}{\partial x},\\
\frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial y} &= \frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial x'}\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial y'}\left(1 + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\right) + \frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial z'}\frac{\partial \delta z}{\partial y},\\
\frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial z} &= \frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial x'}\frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial y'}\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial z'}\left(1 + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

En résolvant et en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, il vient

$$\frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial x'} = \frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial x} - \left(\frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial x}\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial y}\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial z}\frac{\partial \delta z}{\partial x}\right)$$

et comme par définition

$$\mathcal{A}'(x', y', z', t') = \mathcal{A}(x, y, z, t) + \delta\mathcal{A},$$

on a en définitive d'après (26)

$$\delta\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} = \frac{\partial \delta\mathcal{A}}{\partial x} - \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y}\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z}\frac{\partial \delta z}{\partial x}\right). \tag{27}$$

C'est la première des formules (5), p. 138, du mémoire de Duhem.

Une intégration par parties donne alors d'après (27)

$$\int_{\varpi}\mathcal{V}\delta\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}\,d\varpi=-\int_{S}\alpha\mathcal{V}\left(\delta\mathcal{A}-\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}\delta x-\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y}\delta y-\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z}\delta z\right)dS$$
$$-\int_{\varpi}\left[\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\delta\mathcal{A}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{V}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}\right)\delta x-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{V}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y}\right)\delta y-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{V}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z}\right)\delta z\right]d\varpi,$$

d'où, en posant pour abréger

$$d\mathcal{A}=\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z}\delta z \tag{28}$$

et d'après (25)

$$\int_{\varpi}\mathcal{V}\delta\mathcal{E}\,d\varpi=\int_{S}\mathcal{V}\,|\,\alpha(\delta\mathcal{A}-d\mathcal{A})\,|\,dS$$
$$+\int_{\varpi}\left|\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\delta\mathcal{A}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{V}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}\right)\delta x-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{V}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y}\right)\delta y-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{V}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z}\right)\delta z\right|d\varpi,$$

soit encore

$$\int_{\varpi}\mathcal{V}\delta\mathcal{E}\,d\varpi=\int_{S}\mathcal{V}\,|\,\alpha(\delta\mathcal{A}-d\mathcal{A})\,|\,dS+\int_{\varpi}\left|(\delta\mathcal{A}-d\mathcal{A})\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}+\mathcal{V}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x}\delta x\right|d\varpi. \tag{29}$$

On a d'autre part

$$\int_{\varpi}\mathcal{V}\mathcal{E}\,\delta d\varpi=\int_{\varpi}\mathcal{V}\mathcal{E}\left|\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}\right|d\varpi$$

et comme

$$\int_{\varpi}\mathcal{V}\mathcal{E}\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}\,d\varpi=-\int_{S}\alpha\mathcal{V}\mathcal{E}\,\delta x\,dS-\int_{\varpi}\frac{\partial\mathcal{V}\mathcal{E}}{\partial x}\,\delta x\,d\varpi,$$

il vient

$$\int_{\varpi}\mathcal{V}\mathcal{E}\,\delta d\varpi=-\int_{S}\mathcal{V}\mathcal{E}\,|\,\alpha\,\delta x\,|\,dS-\int_{\varpi}\left|\frac{\partial\mathcal{V}\mathcal{E}}{\partial x}\delta x\right|d\varpi, \tag{30}$$

soit encore d'après (23)

$$\int_{\varpi}\mathcal{V}\mathcal{E}\,\delta d\varpi=-\int_{S}\mathcal{V}\mathcal{E}\,|\,\alpha\,\delta x\,|\,dS-\int_{\varpi}\left|\left(\mathcal{V}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x}-\frac{1}{\varepsilon'}\mathcal{E}\mathcal{X}\right)\delta x\right|d\varpi. \tag{30'}$$

En additionnant (29) et (30), nous avons donc

$$(31)\qquad \int_{\varpi} \mathfrak{V}\delta(\mathcal{E}d\varpi) = \int_{S} \mathfrak{V}\,|\,\alpha(\delta\mathcal{A} - d\mathcal{A} - \mathcal{E}\delta x)\,|\,dS + \int_{\varpi} \left|(\delta\mathcal{A} - d\mathcal{A} - \mathcal{E}\delta x)\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\right| d\varpi,$$

ou, en développant les parenthèses de l'intégrale de surface et d'après (23),

$$(31')\qquad \int_{\varpi} \mathfrak{V}\delta(\mathcal{E}d\varpi) = \int_{S} \mathfrak{V}\left|\alpha\left[\delta\mathcal{A} + \left(\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right)\delta x - \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y}\delta y - \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z}\delta z\right]\right| dS + \int_{\varpi}\left|(\delta\mathcal{A} - d\mathcal{A})\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon'}\mathcal{E}\mathcal{X}\delta x\right| d\varpi.$$

F. *Calcul de* $\int_{S} \mathfrak{V}\delta(\mathcal{J}dS)$. — C'est surtout ici que nous allons grandement simplifier l'analyse de Duhem. On a d'après (12)

$$(32)\qquad \delta\mathcal{J} = -\,|\,\mathcal{A}\delta\alpha + \alpha\delta\mathcal{A}\,|,$$

avec

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta\alpha &= -\left(\mathfrak{D} - \frac{\partial\delta y}{\partial y} - \frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)\alpha - \frac{\partial\delta y}{\partial x}\beta - \frac{\partial\delta z}{\partial x}\gamma,\\ \delta\beta &= -\frac{\partial\delta x}{\partial y}\alpha - \left(\mathfrak{D} - \frac{\partial\delta z}{\partial z} - \frac{\partial\delta x}{\partial x}\right)\beta - \frac{\partial\delta z}{\partial y}\gamma,\\ \delta\gamma &= -\frac{\partial\delta x}{\partial z}\alpha - \frac{\partial\delta y}{\partial z}\beta - \left(\mathfrak{D} - \frac{\partial\delta x}{\partial x} - \frac{\partial\delta y}{\partial y}\right)\gamma, \end{aligned}\right.$$

en posant

$$(34)\qquad \mathfrak{D} = \left|\frac{\partial\delta x}{\partial x}\right| - \frac{\partial\delta x}{\partial x}\alpha^2 - \frac{\partial\delta y}{\partial y}\beta^2 - \frac{\partial\delta z}{\partial z}\gamma^2 - \left(\frac{\partial\delta z}{\partial y} + \frac{\partial\delta y}{\partial z}\right)\beta\gamma - \left(\frac{\partial\delta x}{\partial z} + \frac{\partial\delta z}{\partial x}\right)\gamma\alpha - \left(\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \frac{\partial\delta x}{\partial y}\right)\alpha\beta$$

et cette fonction $\mathfrak{D}$ représentant la dilatation superficielle en un point de l'élément dS[1]; d'où, d'après (32) et (33),

$$\delta\mathcal{J} = -\mathcal{J}\mathfrak{D} - \left|\alpha\left[\delta\mathcal{A} + \mathcal{A}\left(\frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\right) - \mathcal{B}\frac{\partial\delta x}{\partial y} - \mathcal{C}\frac{\partial\delta x}{\partial z}\right]\right|.$$

---

(1) L. Roy, *Sur l'Électrodynamique des milieux en mouvement*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3e série, t. XV, 1923, p. 205.

Comme d'autre part $\delta d\mathrm{S} = \mathfrak{D} d\mathrm{S}$, il vient simplement

$$(35)\quad \int_{\mathrm{S}} \mathcal{V}\delta(\mathcal{G} d\mathrm{S}) = -\int_{\mathrm{S}} \mathcal{V}\left|\alpha\left[\delta\mathcal{A} + \mathcal{A}\left(\frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\right) - \mathcal{B}\frac{\partial\delta x}{\partial y} - \mathcal{C}\frac{\partial\delta x}{\partial z}\right]\right| d\mathrm{S}.$$

Or, si l'on pose pour un instant[1]

$$\mathfrak{L} = \mathcal{V}(\mathcal{B}\delta z - \mathcal{C}\delta y), \qquad \mathfrak{Q} = \mathcal{V}(\mathcal{C}\delta x - \mathcal{A}\delta z), \qquad \mathfrak{R} = \mathcal{V}(\mathcal{A}\delta y - \mathcal{B}\delta x),$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial z} = \mathcal{V}\Big[&\mathcal{A}\left(\frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\right) - \mathcal{B}\frac{\partial\delta x}{\partial y} - \mathcal{C}\frac{\partial\delta x}{\partial z}\\ &-\left(\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right)\delta x + \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z}\delta z\Big]\\ &+ (\mathcal{A}\delta y - \mathcal{B}\delta x)\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} - (\mathcal{C}\delta x - \mathcal{A}\delta z)\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}.\end{aligned}$$

Mais

$$\int_{\mathrm{S}} \left|\alpha\left(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial z}\right)\right| d\mathrm{S} = 0,$$

puisque la surface S est fermée; on a donc

$$\begin{aligned}&\int_{\mathrm{S}} \mathcal{V}\left|\alpha\left[\mathcal{A}\left(\frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\right) - \mathcal{B}\frac{\partial\delta x}{\partial y} - \mathcal{C}\frac{\partial\delta x}{\partial z}\right]\right| d\mathrm{S}\\ &= \int_{\mathrm{S}} \mathcal{V}\left|\alpha\left[\left(\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right)\delta x - \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y}\delta y - \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z}\delta z\right]\right| d\mathrm{S}\\ &- \int_{\mathrm{S}} \left|\alpha\left[(\mathcal{A}\delta y - \mathcal{B}\delta x)\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} - (\mathcal{C}\delta x - \mathcal{A}\delta z)\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right]\right| d\mathrm{S}.\end{aligned}$$

L'égalité (35), comme la précédente, est valable quelle que soit la fonction $\mathcal{V}$. Avec la signification actuelle de cette fonction, cette dernière égalité est valable aussi bien avec les dérivées intérieures qui y figurent qu'avec les dérivées extérieures $\frac{\partial\mathcal{V}'}{\partial x}, \ldots$ Considérons donc, en outre, cette même égalité écrite avec les

[1] Nous désignerons en effet plus loin par $-\sqrt{\varepsilon'}(\mathfrak{L}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R})$ le champ magnétique des courants.

dérivées extérieures et ajoutons-les membre à membre; d'après les troisièmes (24), on obtient

$$\int_S \mathcal{V}\left|\alpha\left[\mathcal{A}\left(\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)-\mathcal{B}\frac{\partial\delta x}{\partial y}-\mathcal{C}\frac{\partial\delta x}{\partial z}\right]\right|dS$$

$$=\int_S \mathcal{V}\left|\alpha\left[\left(\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right)\delta x-\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y}\delta y-\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z}\delta z\right]\right|dS$$

$$+\frac{1}{\varepsilon'}\int_S |\alpha[(\mathcal{A}\delta y-\mathcal{B}\delta x)\mathfrak{Y}-(\mathcal{C}\delta x-\mathcal{A}\delta z)\mathfrak{Z}]|\,dS.$$

Substituons ce résultat dans (35), en remarquant que la dernière ligne s'écrit encore

$$-\frac{1}{\varepsilon'}\int_S |(\mathcal{G}\mathfrak{X}+\alpha|\mathcal{A}\mathfrak{X}|)\delta x|\,dS:$$

il vient

$$(36)\qquad \int_S \mathcal{V}\delta(\mathcal{G}\,dS)=-\int_S \mathcal{V}\left|\alpha\left[\delta\mathcal{A}+\left(\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right)\delta x-\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y}\delta y-\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z}\delta z\right]\right|dS$$

$$+\frac{1}{\varepsilon'}\int_S |(\mathcal{G}\mathfrak{X}+\alpha|\mathcal{A}\mathfrak{X}|)\delta x|\,dS,$$

d'où, en ajoutant (31′) et (36) membre à membre,

$$(37)\qquad \int_\varpi \mathcal{V}\delta(\mathcal{E}\,d\varpi)+\int_S \mathcal{V}\delta(\mathcal{G}\,dS)=\int_\varpi\left|(\delta\mathcal{A}-d\mathcal{A})\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon'}\mathcal{E}\mathfrak{X}\delta x\right|d\varpi$$

$$+\frac{1}{\varepsilon'}\int_S |(\mathcal{G}\mathfrak{X}+\alpha|\mathcal{A}\mathfrak{X}|)\delta x|\,dS,$$

égalité où il est facile de vérifier, d'après (24), qu'on a

$$\frac{1}{\varepsilon'}(\mathcal{G}\mathfrak{X}+\alpha|\mathcal{A}\mathfrak{X}|)=-\mathcal{G}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}-\alpha\left|\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right|=-\mathcal{G}\frac{\partial\mathcal{V}'}{\partial x}-\alpha\left|\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}'}{\partial x}\right|.$$

On peut donc écrire encore

$$(37')\qquad \int_\varpi \mathcal{V}\delta(\mathcal{E}\,d\varpi)+\int_S \mathcal{V}\delta(\mathcal{G}\,dS)=\int_\varpi\left|(\delta\mathcal{A}-d\mathcal{A}-\mathcal{E}\delta x)\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right|d\varpi$$

$$-\int_S\left|\left(\mathcal{G}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}+\alpha\left|\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right|\right)\delta x\right|dS,$$

où les dérivées intérieures peuvent être remplacées par les dérivées extérieures. Cette égalité nous sera utile plus loin; remarquons qu'elle est indépendante de la nature de la fonction $\mathcal{V}$.

G. *Expression de* δI_{11}. — En additionnant les égalités (22) et (37), on a

$$\frac{1}{2}\delta I = \int_{\varpi} \left|(\delta\mathcal{A} - d\mathcal{A})\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right| d\varpi + \frac{1}{\varepsilon'}\int_{S} |\mathcal{A}\mathcal{X}|\,|\alpha\delta x|\,dS.$$

Si nous remplaçons $\mathcal{X}$ par sa première valeur (24), il vient en définitive et en rétablissant les indices

$$(38)\qquad \frac{1}{2}\delta I_{11} = \int_{\varpi_1} \left|(\delta\mathcal{A} - d\mathcal{A})\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x}\right| d\varpi + \int_{S_1}\left(2\pi\mathcal{G}^2 - \left|\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x}\right|\right)|\alpha\delta x|\,dS,$$

où les dérivées $\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x}, \ldots$ figurant dans l'intégrale de surface désignent les dérivées intérieures à la surface S_1. C'est, aux différences de notations près, la formule (35), p. 152, du mémoire de Duhem.

7. Calcul de δI_{33}. — On est amené à reprendre le calcul précédent de δI dans l'hypothèse de la rigidité

$$\left(\delta d\varpi,\ \delta dS,\ \delta\frac{1}{r}\right) = 0.$$

Les champs $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ de (21) s'étant introduits du seul fait de la variation de r, il reste

$$(39)\qquad \frac{1}{2}\delta I = \int_{\varpi} \mathcal{V}\delta\mathcal{E}\,d\varpi + \int_{S}\mathcal{V}\delta\mathcal{G}\,dS.$$

La formule (27) étant indépendante de la nature de la déformation, l'expression (29) reste valable; mais, par suite de la rigidité du corps, les formules générales (33) se réduisent à

$$\delta\alpha = \gamma\omega' - \beta\omega'', \qquad \delta\beta = \alpha\omega'' - \gamma\omega, \qquad \delta\gamma = \beta\omega - \alpha\omega',$$

$(\omega, \omega', \omega'')$ étant la rotation élémentaire du solide considéré; il vient ainsi d'après (32)

$$\delta\mathcal{G} = -|(\mathcal{C}\beta - \mathcal{B}\gamma)\omega + \alpha\delta\mathcal{A}|,$$

d'où

$$\int_{S}\mathcal{V}\delta\mathcal{G}\,dS = -\int_{S}\mathcal{V}|(\mathcal{C}\beta - \mathcal{B}\gamma)\omega + \alpha\delta\mathcal{A}|\,dS$$

et, d'après (29) et (39),

$$(40)\qquad \frac{1}{2}\delta I = \int_{\varpi} \left| (\delta \mathcal{A} - d\mathcal{A}) \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \mathfrak{V} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \delta x \right| d\varpi - \int_{S} \mathfrak{V} \left| \alpha d\mathcal{A} + (\mathcal{C}\beta - \mathcal{B}\gamma)\omega \right| dS,$$

soit finalement en rétablissant les indices

$$(41)\qquad \frac{1}{2}\delta I_{33} = \int_{\varpi_3} \left| (\delta \mathcal{A} - d\mathcal{A}) \frac{\partial \mathfrak{V}_3}{\partial x} + \mathfrak{V}_3 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \delta x \right| d\varpi - \int_{S_3} \mathfrak{V}_3 \left| \alpha d\mathcal{A} + (\mathcal{C}\beta - \mathcal{B}\gamma)\omega_3 \right| dS.$$

8. Calcul de δI_{12}. — On a

$$I_{12} = I_{21} = \int_{\varpi_2} \left| \mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x} \right| d\varpi = \int_{\varpi_2} \mathfrak{V}_1 \mathcal{E} d\varpi + \int_{S_2} \mathfrak{V}_1 \mathcal{G} dS = \int_2 \mathfrak{V}_1 dm_2,$$

dm_2 représentant, pour abréger, l'élément de masse $\mathcal{E} d\varpi$ ou $\mathcal{G} dS$ du corps 2 et l'indice 2 de la dernière intégrale indiquant qu'elle est étendue à $\varpi_2 + S_2$. Comme ici $\delta dm_2 = 0$, puisque le corps 2 est rigide ainsi que sa polarisation, on a simplement

$$\delta I_{12} = \int_2 \delta \mathfrak{V}_1 dm_2.$$

Soit alors r la distance d'un point (x_1, y_1, z_1) du corps 1 à un point (x_2, y_2, z_2) du corps 2; on a

$$\mathfrak{V}_1(x_2, y_2, z_2, t) = \int_1 \frac{dm_1}{r},$$

dm_1 étant l'élément de masse $\mathcal{E} d\varpi$ ou $\mathcal{G} dS$ du corps 1; d'où

$$\delta \mathfrak{V}_1 = \int_1 \left(\left| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} \delta x_2 \right| dm_1 + \frac{\delta dm_1}{r} \right),$$

$$\delta I_{12} = \int_1 \left| \delta x_1 \int_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} dm_2 \right| dm_1 + \int_2 \left| \delta x_2 \int_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} dm_1 \right| dm_2 + \int_1 \left(\int_2 \frac{dm_2}{r} \right) \delta dm_1$$

et comme

$$\mathfrak{V}_2(x_1, y_1, z_1, t) = \int_2 \frac{dm_2}{r},$$

il vient

$$(42)\qquad \delta I_{12} = \int_1 \left| \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x_1} \delta x_1 \right| dm_1 + \int_2 \left| \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x_2} \delta x_2 \right| dm_2 + \int_1 \mathfrak{V}_2 \delta dm_1.$$

Cette dernière intégrale se déduit de (37'), où $\mathfrak{V}$ est remplacé par $\mathfrak{V}_2$, d'où

$$\int_1 \mathfrak{V}_2 \delta\, dm_1 = \int_{\varpi_1} \left| (\delta\mathcal{A} - d\mathcal{A}) \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x} \right| d\varpi - \int_1 \left| \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x_1} \delta x_1 \right| dm_1 - \int_{S_1} \left| \mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x} \right| |\alpha \delta x| \, dS.$$

En substituant, effaçant les indices devenus inutiles et explicitant la deuxième intégrale de (42), il vient finalement

$$\begin{aligned}(43) \qquad \delta I_{12} = &\int_{\varpi_1} \left| (\delta\mathcal{A} - d\mathcal{A}) \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x} \right| d\varpi - \int_{S_1} \left| \mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x} \right| |\alpha \delta x| \, dS \\ &+ \int_{\varpi_2} \left| \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x} \delta x \right| \mathcal{E}\, d\varpi + \int_{S_2} \left| \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x} \delta x \right| \mathcal{G}\, dS.\end{aligned}$$

9. Calcul de δI_{23}. — Ce calcul est analogue au précédent, l'indice 3 remplaçant l'indice 1 ; d'où d'après (42)

$$\delta I_{23} = \int_3 \left| \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x_3} \delta x_3 \right| dm_3 + \int_2 \left| \frac{\partial \mathfrak{V}_3}{\partial x_2} \delta x_2 \right| dm_2 + \int_3 \mathfrak{V}_2 \delta\, dm_3.$$

Le corps 3 étant rigide, la dernière intégrale est de la forme (39), c'est-à-dire est donnée par (41), où $\mathfrak{V}_3$ est simplement remplacé par $\mathfrak{V}_2$; d'où, après réduction,

$$\begin{aligned}(44) \qquad \delta I_{23} = &\int_{\varpi_2} \left| \frac{\partial \mathfrak{V}_3}{\partial x} \delta x \right| \mathcal{E}\, d\varpi + \int_{S_2} \left| \frac{\partial \mathfrak{V}_3}{\partial x} \delta x \right| \mathcal{G}\, dS \\ &+ \int_{\varpi_3} \left| (\delta\mathcal{A} - d\mathcal{A}) \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}_2 \mathcal{E}}{\partial x} \delta x \right| d\varpi + \int_{S_3} \left| \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x} \delta x \right| \mathcal{G}\, dS \\ &- \int_{S_3} \mathfrak{V}_2 \, |\alpha\, d\mathcal{A} + (\mathcal{C}\beta - \mathcal{B}\gamma)\omega_3| \, dS.\end{aligned}$$

10. Calcul de δI_{31}. — Ce calcul est analogue à celui de δI_{21}, sauf que l'aimantation du corps 3 est variable au lieu d'être permanente. On a ainsi

$$\delta I_{31} = \int_3 \delta \mathfrak{V}_1 \, dm_3 + \int_{\varpi_3} \mathfrak{V}_1 \delta \mathcal{E}\, d\varpi + \int_{S_3} \mathfrak{V}_1 \delta \mathcal{G}\, dS.$$

La première intégrale est donnée par (43), où l'indice 2 est remplacé par l'indice 3; la somme des deux autres est ensuite donnée par (41) où $\mathfrak{V}_3$ est remplacé par $\mathfrak{V}_1$; d'où

$$\delta \mathrm{I}_{31} = \int_{\varpi_3} \left| (\delta \mathfrak{A} - d_e \mathfrak{A}) \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}_1 \mathcal{E}}{\partial x} \delta x \right| d\varpi + \int_{S_3} \left| \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x} \delta x \right| \mathcal{J} dS \tag{45}$$
$$- \int_{S_3} \mathfrak{V}_1 \,|\, \varkappa d_e \mathfrak{A} + (\mathcal{C}\beta - \mathcal{B}\gamma)\omega_3 \,|\, dS$$
$$+ \int_{\varpi_1} \left| (\delta \mathfrak{A} - d_e \mathfrak{A}) \frac{\partial \mathfrak{V}_3}{\partial x} \right| d\varpi - \int_{S_1} \left| \mathfrak{A} \frac{\partial \mathfrak{V}_3}{\partial x} \right| \,|\, \varkappa \delta x \,|\, dS.$$

11. Calcul de $\delta \int \mathcal{F} d\varpi$. — La fonction $\mathcal{F}$ dépendant de l'intensité d'aimantation $\mathfrak{J}$, de la densité cubique ρ de la matière et de la température absolue T au point considéré, la variation isothermique de l'intégrale étendue à l'aimant permanent rigide 2 est nulle; nous avons donc

$$\delta \int \mathcal{F} d\varpi = \int \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathrm{T}} \delta \mathrm{T} \, d\varpi + \delta_{\mathrm{T}} \int_{\varpi_3 + \varpi_1} \mathcal{F} d\varpi,$$

l'indice T indiquant que la dernière variation doit être calculée en laissant la température constante.

Le corps 3 étant rigide, on a simplement

$$\delta_{\mathrm{T}} \int_{\varpi_3} \mathcal{F} d\varpi = \int_{\varpi_3} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{J}} \delta \mathfrak{J} \, d\varpi,$$

avec

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{J}} = \frac{\mathfrak{J}}{\varkappa}, \qquad \mathfrak{J}^2 = |\mathfrak{A}^2|, \qquad \mathfrak{J}\delta\mathfrak{J} = |\mathfrak{A}\delta\mathfrak{A}|,$$

$\varkappa$ désignant la susceptibilité magnétique; d'où

$$\delta_{\mathrm{T}} \int_{\varpi_3} \mathcal{F} d\varpi = \int_{\varpi_3} \left| \frac{\mathfrak{A}}{\varkappa} \delta \mathfrak{A} \right| d\varpi.$$

Le corps 1 étant déformable, on a

$$\delta_{\mathrm{T}} \int_{\varpi_1} \mathcal{F} d\varpi = \int_{\varpi_1} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{J}} \delta \mathfrak{J} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho} \delta \rho \right) d\varpi + \mathcal{F} \delta d\varpi \right]$$

et comme

$$\delta\rho\, d\varpi + \rho\, \delta d\varpi = 0, \qquad \delta d\varpi = \left|\frac{\partial \delta x}{\partial x}\right| d\varpi,$$

il vient

$$\delta_T \int_{\varpi_1} \mathcal{F}\, d\varpi = \int_{\varpi_1} \left[\left|\frac{\mathcal{A}}{\varkappa}\,\delta\mathcal{A}\right| + \left(\mathcal{F} - \rho\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho}\right)\left|\frac{\partial \delta x}{\partial x}\right| \right] d\varpi.$$

Posons donc pour abréger

$$\mathcal{G}(\mathfrak{J}, \rho, T) = \mathcal{F} - \rho\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho}; \tag{46}$$

on a

$$\int_{\varpi_1} \mathcal{G}\left|\frac{\partial \delta x}{\partial x}\right| d\varpi = -\int_{S_1} \mathcal{G}\,|\alpha\,\delta x|\, dS - \int_{\varpi_1}\left|\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}\,\delta x\right| d\varpi.$$

Or

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathfrak{J}}\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x},\\
&\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathfrak{J}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{J}} - \rho\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \rho\, \partial \mathfrak{J}} = \frac{\mathfrak{J}}{\varkappa}\left(1 - \frac{\rho}{\varkappa}\frac{\partial \varkappa}{\partial \rho}\right),\\
&\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathfrak{J}}\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x} = \frac{1}{\varkappa}\left(1 - \frac{\rho}{\varkappa}\frac{\partial \varkappa}{\partial \rho}\right)\mathfrak{J}\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x} = \frac{1}{\varkappa}\left(1 - \frac{\rho}{\varkappa}\frac{\partial \varkappa}{\partial \rho}\right)\left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}\right),
\end{aligned}\right.$$

d'où

$$\left|\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}\,\delta x\right| = \frac{1}{\varkappa}\left(1 - \frac{\rho}{\varkappa}\frac{\partial \varkappa}{\partial \rho}\right)|\mathcal{A}\, d\mathcal{A}| + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T}\, dT,$$

$d\rho$, dT ayant une signification analogue à celle (28) de $d\mathcal{A}$. Nous avons donc

$$\delta_T \int_{\varpi_1} \mathcal{F}\, d\varpi = \int_{\varpi_1} \left\{ \left|\frac{\mathcal{A}}{\varkappa}\left[\delta\mathcal{A} - \left(1 - \frac{\rho}{\varkappa}\frac{\partial \varkappa}{\partial \rho}\right) d\mathcal{A}\right]\right| - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \rho}\, d\rho - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T}\, dT \right\} d\varpi$$
$$- \int_{S_1} \mathcal{G}\,|\alpha\,\delta x|\, dS$$

et finalement

$$(48)\quad \delta \int \mathcal{F}\, d\varpi = \int \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\,\delta T\, d\varpi + \int_{\varpi_3}\left|\frac{\mathcal{A}}{\varkappa}\,\delta\mathcal{A}\right| d\varpi + \int_{\varpi_1}\left|\frac{\mathcal{A}}{\varkappa}(\delta\mathcal{A} - d\mathcal{A})\right| d\varpi$$
$$+ \int_{\varpi_1}\left(\frac{\rho}{\varkappa}\frac{\partial \varkappa}{\partial \rho}\left|\frac{\mathcal{A}}{\varkappa}\, d\mathcal{A}\right| - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \rho}\, d\rho - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T}\, dT\right) d\varpi - \int_{S_1} \mathcal{G}\,|\alpha\,\delta x|\, dS.$$

12. Résultat. — La variation cherchée résulte immédiatement des formules (10) et (48) et de l'addition des variations partielles (38), (41), (43), (44) et (45); le potentiel magnétique total $\mathcal{V}$ réapparaît ainsi dans plusieurs intégrales et il vient

$$
\begin{aligned}
(49) \quad & \delta\left(\mathcal{W} + \int \mathcal{F} d\varpi\right) = \int \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathrm{T}} \delta \mathrm{T} d\varpi \\
& + \int_{\varpi_1} \left| \left(\frac{\mathcal{A}}{\varkappa} + \varepsilon' \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)(\delta \mathcal{A} - d\mathcal{A}) \right| d\varpi + \varepsilon' \int_{S_1} \left(2\pi \mathcal{I}^2 - \left| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right| \right) |\alpha \delta x| dS \\
& + \int_{\varpi_1} \left(\frac{\rho}{\varkappa} \frac{\partial \varkappa}{\partial \rho} \left| \frac{\mathcal{A}}{\varkappa} d\mathcal{A} \right| - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \rho} d\rho - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathrm{T}} d\mathrm{T} \right) d\varpi - \int_{S_1} \mathcal{G} |\alpha \delta x| dS \\
& + \varepsilon' \int_{\varpi_2} \left| \frac{\partial(\mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_1)}{\partial x} \delta x \right| \mathcal{E} d\varpi + \varepsilon' \int_{S_2} \left| \frac{\partial(\mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_1)}{\partial x} \delta x \right| \mathcal{I} dS \\
& + \int_{\varpi_3} \left| \left(\frac{\mathcal{A}}{\varkappa} + \varepsilon' \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right) \delta \mathcal{A} - \varepsilon' \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} d\mathcal{A} + \varepsilon' \left[\mathcal{V} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} + \mathcal{E} \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial x} \right] \delta x \right| d\varpi \\
& + \varepsilon' \int_{S_3} \left| - \mathcal{V} [\alpha d\mathcal{A} + (\mathcal{C}\beta - \mathcal{B}\gamma)\omega_3] + \mathcal{I} \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial x} \delta x \right| dS.
\end{aligned}
$$

Nous voyons que cette expression fait apparaître, en chaque point de l'aimant déformable parfaitement doux 1, le champ magnétique

$$
(50) \qquad \mathcal{H} = - \varepsilon' \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \ldots\ldots
$$

dû à l'aimantation du système entier; en chaque point de l'aimant permanent rigide 2 le champ magnétique partiel

$$
(51) \qquad \mathcal{H}_{31} = - \varepsilon' \frac{\partial(\mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_1)}{\partial x}, \ldots\ldots
$$

dû à la seule aimantation des corps 3 et 1, tandis qu'en chaque point de l'aimant parfaitement doux rigide 3 apparaissent à la fois le champ total (50) et le champ magnétique partiel

$$
(52) \qquad \mathcal{H}_{12} = - \varepsilon' \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial x}, \ldots\ldots
$$

dû à la seule aimantation des corps 1 et 2.

L'expression (49) peut encore se simplifier en ce qui concerne les corps rigides 2 et 3; le déplacement virtuel de chacun d'eux résulte en effet d'une rotation infiniment petite $(\omega, \omega', \omega'')$ autour d'un point arbitraire invariablement lié au corps considéré et d'une translation infiniment petite (ξ, η, ζ) équipollente au déplacement de ce point. En prenant ce point à l'origine, il vient ainsi respectivement pour chacun des corps 2 et 3

$$(53)\quad \begin{cases} \delta x = \xi_2 + \omega_2' z - \omega_2'' y, \\ \delta y = \eta_2 + \omega_2'' x - \omega_2 z, \\ \delta z = \zeta_2 + \omega_2 y - \omega_2' x; \end{cases} \qquad (53')\quad \begin{cases} \delta x = \xi_3 + \omega_3' z - \omega_3'' y, \\ \delta y = \eta_3 + \omega_3'' x - \omega_3 z, \\ \delta z = \zeta_3 + \omega_3 y - \omega_3' x. \end{cases}$$

La somme des termes de (49) se rapportant au corps 2 est donc de la forme

$$-(\mathfrak{L}_2\xi_2 + \mathfrak{Q}_2\eta_2 + \mathfrak{R}_2\zeta_2 + \mathcal{L}_2\omega_2 + \mathcal{M}_2\omega_2' + \mathcal{N}_2\omega_2''),$$

ou plus simplement $-|\mathfrak{L}_2\xi_2 + \mathcal{L}_2\omega_2|$, soit

$$-|\mathfrak{L}_2\xi_2 + \mathcal{L}_2\omega_2 + \mathfrak{L}_3\xi_3 + \mathcal{L}_3\omega_3|$$

pour l'ensemble des corps 2 et 3.

Calculons donc les douze éléments $\mathfrak{L}_2, \mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathcal{N}_3$. En substituant les expressions (53) dans les intégrales de (49) étendues au corps 2 et en tenant compte de (51), il vient

$$\mathfrak{L}_2 = \int_{\varpi_2} \mathcal{X}_{31}\mathcal{E}\,d\varpi + \int_{S_2} \mathcal{X}_{31}\mathcal{G}\,dS,$$

$$\mathcal{L}_2 = \int_{\varpi_2} (y\mathcal{Z}_{31} - z\mathcal{Y}_{31})\mathcal{E}\,d\varpi + \int_{S_3} (y\mathcal{Z}_{31} - z\mathcal{Y}_{31})\mathcal{G}\,dS;$$

d'où, en remplaçant $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$ par leurs valeurs (12), en transformant les intégrales de surfaces en intégrales de volumes et en tenant compte de ce que

$$(54)\qquad \frac{\partial \mathcal{Y}_{31}}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{Z}_{31}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \mathcal{Z}_{31}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{X}_{31}}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \mathcal{X}_{31}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{Y}_{31}}{\partial x},$$

$$(55)\quad \begin{cases} \mathfrak{L}_2 = \displaystyle\int_{\varpi_2} \left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{X}_{31}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{Y}_{31}}{\partial x} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathcal{Z}_{31}}{\partial x}\right) d\varpi, \ldots\ldots; \\ \mathcal{L}_2 = \displaystyle\int_{\varpi_2} \left[y\left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{X}_{31}}{\partial z} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{Y}_{31}}{\partial z} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathcal{Z}_{31}}{\partial z}\right) \right. \\ \qquad \left. - z\left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{X}_{31}}{\partial y} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{Y}_{31}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathcal{Z}_{31}}{\partial y}\right) + \mathcal{B}\mathcal{Z}_{31} - \mathcal{C}\mathcal{Y}_{31} \right] d\varpi, \ldots\ldots \end{cases}$$

La substitution des expressions (53') dans les intégrales de (49) étendues au corps 3 donne de même, d'après (50) et (52) et en tenant compte des relations analogues à (54) relatives au champ $(\mathfrak{X}_{12}, \mathfrak{Y}_{12}, \mathfrak{Z}_{12})$;

$$
(56)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{L}_3 &= \int_{\varpi_3} \left(\mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{X}_{12}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathfrak{Y}_{12}}{\partial x} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathfrak{Z}_{12}}{\partial x} \right) d\varpi, \ldots\ldots; \\
\mathfrak{L}_3 &= \int_{\varpi_3} \Big[y \left(\mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{X}_{12}}{\partial z} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathfrak{Y}_{12}}{\partial z} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathfrak{Z}_{12}}{\partial z} \right) \\
&\qquad - z \left(\mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{X}_{12}}{\partial y} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathfrak{Y}_{12}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathfrak{Z}_{12}}{\partial y} \right) - \mathcal{B} \mathfrak{Z}_3 + \mathcal{C} \mathfrak{Y}_3 \Big] d\varpi, \ldots\ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

en désignant par

$$
(57)\qquad \mathfrak{X}_3 = -\varepsilon' \frac{\partial \mathfrak{V}_3}{\partial x}, \ldots\ldots
$$

le champ dû à la seule aimantation du corps 3. La comparaison de (55) à (56) montre que c'est dans les deux derniers termes constitutifs de $\mathfrak{L}_2, \ldots; \mathfrak{L}_3, \ldots$ qu'apparaît la différence entre deux aimants rigides, l'un permanent et l'autre parfaitement doux.

L'égalité (49) s'écrit donc en définitive

$$
\begin{aligned}
(58)\qquad & \delta\left(\mathfrak{W} + \int \mathfrak{F}\, d\varpi \right) = \int \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathrm{T}} \delta \mathrm{T}\, d\varpi \\
& + \int_{\varpi_1} \left| \left(\frac{\mathcal{A}}{\chi} + \varepsilon' \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right) (\delta \mathcal{A} - d\mathcal{A}) \right| d\varpi + \varepsilon' \int_{S_1} \left(2\pi \mathcal{I}^2 - \left| \mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right| \right) |\alpha \delta x|\, dS \\
& + \int_{\varpi_1} \left(\frac{\rho}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \left| \frac{\mathcal{A}}{\chi} d\mathcal{A} \right| - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \rho} d\rho - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathrm{T}} d\mathrm{T} \right) d\varpi - \int_{S_1} \mathcal{G} |\alpha \delta x|\, dS \\
& + \int_{\varpi_3} \left| \left(\frac{\mathcal{A}}{\chi} + \varepsilon' \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right) \delta \mathcal{A} \right| d\varpi - |\mathfrak{P}_2 \xi_2 + \mathfrak{L}_2 \omega_2 + \mathfrak{L}_3 \xi_3 + \mathfrak{L}_3 \omega_3|.
\end{aligned}
$$

CHAPITRE III

Les autres termes de l'équation fondamentale.

13. Énergie électrostatique. — Soient (A, B, C) l'intensité de polarisation diélectrique J en un point (x, y, z) du système,

$$(59) \qquad E(x, y, z, t) = -\left|\frac{\partial A}{\partial x}\right|, \qquad \Sigma(x, y, z, t) = -|A\alpha|$$

les densités cubique et superficielle de la distribution fictive équivalente de la polarisation diélectrique ; l'énergie électrostatique du système a pour expression

$$W = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\varpi} V(e+E)\,d\varpi + \frac{\varepsilon}{2}\int_{S} V(\sigma+\Sigma)\,dS.$$

Posons

$$V = V_1 + V_2 + V_3,$$

V_i désignant le potentiel électrique du seul corps i, et

$$I_{ij} = \int_{\varpi_i} V_j(e+E)\,d\varpi + \int_{S_i} V_j(\sigma+\Sigma)\,dS,$$

ou plus simplement

$$(60) \qquad I_{ij} = \int_i V_j\,dq_i.$$

dq_i représentant, pour abréger, l'élément de charge réelle et fictive $(e+E)d\varpi$ ou $(\sigma+\Sigma)dS$ du corps i et l'indice i de l'intégrale indiquant qu'elle est étendue à $\varpi_i + S_i$; nous avons comme en Magnétisme $I_{ij} = I_{ji}$ et

$$\frac{2}{\varepsilon}W = I_{11} + I_{22} + I_{33} + 2(I_{12} + I_{23} + I_{31}).$$

14. Variation de l'énergie électrostatique. — Bien que le corps 2 soit un diélectrique permanent rigide, I_{22} n'est plus une constante comme en Magnétisme, du fait de la distribution réelle (e, σ) qui est variable ; nous avons donc

$$(61) \qquad \frac{2}{\varepsilon}\delta W = \delta I_{11} + \delta I_{22} + \delta I_{33} + 2(\delta I_{12} + \delta I_{23} + \delta I_{31}).$$

Le calcul des variations δI_{ij} effectué en Magnétisme va considérablement simplifier celui des variations actuelles.

A. *Calcul des* δI_{ii}. — D'après (22), (23) et (24), on a

$$(62)\qquad \begin{aligned}\frac{1}{2}\delta I_{11} &= \int_{\varpi_1} V_1 \delta[(e+E)\,d\varpi] + \int_{S_1} V_1 \delta[(\sigma+\Sigma)\,dS]\\ &+ \int_{\varpi_1} \left|\frac{\partial V_1}{\partial x}\delta x\right|(e+E)\,d\varpi + \int_{S_1} \left|\left[\frac{\partial V_1}{\partial x} + 2\pi(\sigma+\Sigma)\alpha\right]\delta x\right|(\sigma+\Sigma)\,dS.\end{aligned}$$

Il est inutile d'expliciter davantage les deux premières intégrales, ainsi que nous le reconnaîtrons plus loin (n° 16).

La deuxième ligne de (62) ne s'étant introduite que du fait des déformations, nous avons pour les corps rigides 2 et 3

$$(63)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{1}{2}\delta I_{22} &= \int_{\varpi_2} V_2 \delta[(e+E)\,d\varpi] + \int_{S_2} V_2 \delta[(\sigma+\Sigma)\,dS],\\ \frac{1}{2}\delta I_{33} &= \int_{\varpi_3} V_3 \delta[(e+E)\,d\varpi] + \int_{S_3} V_3 \delta[(\sigma+\Sigma)\,dS].\end{aligned}\right.$$

Dans la première ligne, nous laissons subsister les variations nulles $\delta(E\,d\varpi; \Sigma\,dS)$ dans le but de simplifier le résultat final ; nous ferons de même dans quelques-unes des formules qui suivent.

B. *Calcul des* δI_{ij}. — On a comme au n° 8

$$\delta I_{12} = \int_2 \delta V_1\,dq_2 + \int_2 V_1\,\delta dq_2,$$

la seconde intégrale résultant de la variation de la distribution électrique réelle (e, σ) ; d'où, d'après (42),

$$\delta I_{12} = \int_1 \left|\frac{\partial V_2}{\partial x_1}\delta x_1\right| dq_1 + \int_2 \left|\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\delta x_2\right| dq_2 + \int_1 V_2\,\delta dq_1 + \int_2 V_1\,\delta dq_2,$$

soit plus explicitement

$$(64)\qquad \begin{aligned}\delta I_{12} &= \int_{\varpi_1} V_2 \delta[(e+E)\,d\varpi] + \int_{S_1} V_2 \delta[(\sigma+\Sigma)\,dS]\\ &+ \int_{\varpi_2} V_1 \delta[(e+E)\,d\varpi] + \int_{S_2} V_1 \delta[(\sigma+\Sigma)\,dS]\\ &+ \int_{\varpi_1} \left|\frac{\partial V_2}{\partial x}\delta x\right|(e+E)\,d\varpi + \int_{S_1} \left|\frac{\partial V_2}{\partial x}\delta x\right|(\sigma+\Sigma)\,dS\\ &+ \int_{\varpi_2} \left|\frac{\partial V_1}{\partial x}\delta x\right|(e+E)\,d\varpi + \int_{S_2} \left|\frac{\partial V_1}{\partial x}\delta x\right|(\sigma+\Sigma)\,dS.\end{aligned}$$

Le calcul de δI_{23} est le même que le précédent, où l'indice 1 est simplement remplacé par l'indice 3 ; d'où

$$\begin{aligned}(65)\qquad \delta I_{23} = &\int_{\varpi_2} V_3 \delta[(e+E)\,d\varpi] + \int_{S_2} V_3 \delta[(\sigma+\Sigma)\,dS] \\ &+ \int_{\varpi_3} V_2 \delta[(e+E)\,d\varpi] + \int_{S_3} V_2 \delta[(\sigma+\Sigma)\,dS] \\ &+ \int_{\varpi_2} \left| \frac{\partial V_3}{\partial x} \delta x \right| (e+E)\,d\varpi + \int_{S_2} \left| \frac{\partial V_3}{\partial x} \delta x \right| (\sigma+\Sigma)\,dS \\ &+ \int_{\varpi_3} \left| \frac{\partial V_2}{\partial x} \delta x \right| (e+E)\,d\varpi + \int_{S_3} \left| \frac{\partial V_2}{\partial x} \delta x \right| (\sigma+\Sigma)\,dS .\end{aligned}$$

Le calcul de δI_{31} se déduit encore de celui de δI_{12}, en y remplaçant l'indice 2 par l'indice 3 ; d'où

$$\begin{aligned}(66)\qquad \delta I_{31} = &\int_{\varpi_3} V_1 \delta[(e+E)\,d\varpi] + \int_{S_3} V_1 \delta[(\sigma+\Sigma)\,dS] \\ &+ \int_{\varpi_1} V_3 \delta[(e+E)\,d\varpi] + \int_{S_1} V_3 \delta[(\sigma+\Sigma)\,dS] \\ &+ \int_{\varpi_3} \left| \frac{\partial V_1}{\partial x} \delta x \right| (e+E)\,d\varpi + \int_{S_3} \left| \frac{\partial V_1}{\partial x} \delta x \right| (\sigma+\Sigma)\,dS \\ &+ \int_{\varpi_1} \left| \frac{\partial V_3}{\partial x} \delta x \right| (e+E)\,d\varpi + \int_{S_1} \left| \frac{\partial V_3}{\partial x} \delta x \right| (\sigma+\Sigma)\,dS .\end{aligned}$$

15. Calcul de $\delta \int F\,d\varpi$. — Ce calcul est identique à celui du n° 11 ; de sorte qu'en posant

$$\frac{\partial F}{\partial J} = \frac{J}{k}, \qquad G(J, \rho, T) = F - \rho \frac{\partial F}{\partial \rho},$$

k désignant le coefficient de polarisation diélectrique, il vient d'après (48)

$$\begin{aligned}(67)\qquad \delta \int F\,d\varpi = &\int \frac{\partial F}{\partial T} \delta T\,d\varpi + \int_{\varpi_3} \left| \frac{A}{k} \delta A \right| d\varpi + \int_{\varpi_1} \left| \frac{A}{k} (\delta A - dA) \right| d\varpi \\ &+ \int_{\varpi_1} \left(\frac{\rho}{k} \frac{\partial k}{\partial \rho} \left| \frac{A}{k}\,dA \right| - \frac{\partial G}{\partial \rho}\,d\rho - \frac{\partial G}{\partial T}\,dT \right) d\varpi - \int_{S_1} G\,|\alpha \delta x|\,dS .\end{aligned}$$

16. Variation de $W + \int F\,d\varpi$. — Cette variation s'obtient, d'après (61), en additionnant les variations partielles de (62) à (67); d'où

$$
\begin{aligned}
(68)\quad \delta\left(W + \int F\,d\varpi\right) &= \int \frac{\partial F}{\partial T}\,\delta T\,d\varpi \\
&+ \varepsilon\int_{\varpi} V\,\delta[(e+E)\,d\varpi] + \varepsilon\int_{S} V\,\delta[(\sigma+\Sigma)\,dS] \\
&+ \int_{\varpi_1}\left[\varepsilon\left|\frac{\partial V}{\partial x}\,\delta x\right|(e+E) + \left|\frac{A}{k}(\delta A - dA)\right|\right]d\varpi \\
&+ \varepsilon\int_{S_1}\left|\left[\frac{\partial V}{\partial x} + 2\pi(\sigma+\Sigma)\alpha\right]\delta x\right|(\sigma+\Sigma)\,dS \\
+ \int_{\varpi_1}\Big(\frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial\rho}&\left|\frac{A}{k}\,dA\right| - \frac{\partial G}{\partial\rho}\,d\rho - \frac{\partial G}{\partial T}\,dT\Big)d\varpi - \int_{S_1} G\,|\alpha\,\delta x|\,dS \\
+ \varepsilon\int_{\varpi_2}&\left|\frac{\partial(V_3+V_1)}{\partial x}\,\delta x\right|(e+E)\,d\varpi + \varepsilon\int_{S_2}\left|\frac{\partial(V_3+V_1)}{\partial x}\,\delta x\right|(\sigma+\Sigma)\,dS \\
+ \int_{\varpi_3}\Big[\varepsilon&\left|\frac{\partial(V_1+V_2)}{\partial x}\,\delta x\right|(e+E) + \left|\frac{A}{k}\,\delta A\right|\Big]d\varpi + \varepsilon\int_{S_3}\left|\frac{\partial(V_1+V_2)}{\partial x}\,\delta x\right|(\sigma+\Sigma)\,dS.
\end{aligned}
$$

Cette expression peut être simplifiée; les équations indéfinie et superficielle de continuité du courant total de densité (f, g, h) s'écrivent en effet ici[1]

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| dt\,d\varpi + \delta[(e+E)\,d\varpi] &= 0, \\
|\alpha f|\,dt\,dS + \delta[(\sigma+\Sigma)\,dS] &= 0,
\end{aligned}
$$

de sorte que

$$
\begin{aligned}
(69)\quad \frac{1}{dt}\left\{\int_{\varpi} V\,\delta[(e+E)\,d\varpi] + \int_{S} V\,\delta[(\sigma+\Sigma)\,dS]\right\} \\
= -\int_{\varpi} V\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| d\varpi - \int_{S} V\,|\alpha f|\,dS = \int_{\varpi}\left|f\frac{\partial V}{\partial x}\right| d\varpi,
\end{aligned}
$$

la dernière intégrale de surface ayant été transformée en intégrale de volume.

D'autre part, les termes en $\delta(A, B, C)$ se transforment par l'introduction du courant de polarisation, dont nous rappellerons tout d'abord la définition dans le

---

[1] L. Roy, *loc. cit.*, p. 210, équations (20) et (21).

cas général d'un milieu en mouvement : la densité de ce courant en un point $M(x, y, z)$ du milieu est le vecteur $(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w})$ d'origine M, tel qu'on ait

$$|\mathrm{u}\,\alpha|\,dS = \frac{\delta(|A\,\alpha|\,dS)}{dt}, \tag{70}$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs d'une demi-normale Mn à un élément de surface dS passant par M et lié à la matière, c'est-à-dire le vecteur dont le flux à travers dS est égal à la variation par unité de temps du flux de polarisation à travers cet élément. Cette définition est donc tout à fait analogue à celle du courant de conduction, puisque la densité de celui-ci est le vecteur (u, v, w), dont le flux à travers dS et relatif à la direction Mn est égal à la quantité d'électricité par unité de temps qui traverse l'élément dans le sens Mn.

Il résulte alors de (70) qu'on a [1]

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{u}\,dt &= \delta A + A\left(\frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\right) - B\frac{\partial\delta x}{\partial y} - C\frac{\partial\delta x}{\partial z},\\ \mathrm{v}\,dt &= \delta B + B\left(\frac{\partial\delta z}{\partial z} + \frac{\partial\delta x}{\partial x}\right) - C\frac{\partial\delta y}{\partial z} - A\frac{\partial\delta y}{\partial x},\\ \mathrm{w}\,dt &= \delta C + C\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y}\right) - A\frac{\partial\delta z}{\partial x} - B\frac{\partial\delta z}{\partial y},\end{aligned}\right. \tag{71}$$

soit encore

$$\mathrm{u} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\delta x}{dt}\left|\frac{\partial A}{\partial x}\right| + \frac{\partial}{\partial y}\left(A\frac{\delta y}{dt} - B\frac{\delta x}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(C\frac{\delta x}{dt} - A\frac{\delta z}{dt}\right), \ldots\ldots, \tag{71'}$$

les premiers termes des seconds membres représentant le courant de polarisation au repos, qui correspond au courant de déplacement de Maxwell et se confond même très sensiblement avec lui [2], les seconds termes correspondant au courant de convection de Hertz et l'ensemble des termes restants au courant de Röntgen.

Cela posé, on déduit de (71)

$$|\mathrm{u}A|\,dt = |A\,\delta A| + J^2\mathfrak{D}, \tag{72}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{D} = \left|\frac{\partial\delta x}{\partial x}\right| &- \lambda^2\frac{\partial\delta x}{\partial x} - \mu^2\frac{\partial\delta y}{\partial y} - \nu^2\frac{\partial\delta z}{\partial z}\\ &- \mu\nu\left(\frac{\partial\delta z}{\partial y} + \frac{\partial\delta y}{\partial z}\right) - \nu\lambda\left(\frac{\partial\delta x}{\partial z} + \frac{\partial\delta z}{\partial x}\right) - \lambda\mu\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \frac{\partial\delta x}{\partial y}\right),\\ &(\lambda, \mu, \nu) = \frac{(A, B, C)}{J}.\end{aligned}\right. \tag{73}$$

---

[1] L. Roy, *loc. cit.*, p. 209, formules (16).

[2] L. Roy, *L'Électrodynamique des milieux isotropes en repos d'après Helmholtz et Duhem*, p. 30 et 80.

On voit (n° 6, F) que $\mathfrak{D}$ représente la dilatation superficielle au point (x, y, z) de l'élément de surface normal à la direction (λ, μ, ν) de l'intensité de polarisation en ce point.

Comme, d'autre part, $J^2 = |A^2|$ et que $\mathfrak{D}$ est nul dans le solide 3, il résulte de (72) qu'on a

$$\int_{\varpi_1} \left| \frac{A}{k} \delta A \right| d\varpi = \int_{\varpi_1} \left| \frac{A}{k} (\mathfrak{v}\, dt - A \mathfrak{D}) \right| d\varpi,$$

$$\int_{\varpi_3} \left| \frac{A}{k} \delta A \right| d\varpi = dt \int_{\varpi_3} \left| \frac{A}{k} \mathfrak{v} \right| d\varpi .$$

Remarquons que les formules (70) et (71) définissent le courant de polarisation engendré par la modification virtuelle considérée. Ce courant *virtuel* ne coïncide donc avec le courant *réel* à l'instant t que si toutes les variations δ figurant dans ces formules sont relatives à la modification réelle du système entre les instants t et $t + dt$. C'est ce que nous supposerons toujours quand interviendra le courant de polarisation [1].

Revenons à l'égalité (68); les autres intégrales étendues aux solides 2 et 3 se transforment comme nous l'avons vu (n° 12) à l'aide des formules (53) et (53'); il vient ainsi

$$(74) \quad \begin{aligned} \delta\left(W + \int F\, d\varpi\right) = & \int \frac{\partial F}{\partial T} \delta T\, d\varpi + \varepsilon\, dt \int_{\varpi} \left| f \frac{\partial V}{\partial x} \right| d\varpi \\ & + \int_{\varpi_1} \left[\varepsilon \left| \frac{\partial V}{\partial x} \delta x \right| (e + E) + \left| \frac{A}{k} (\mathfrak{v}\, dt - A \mathfrak{D} - dA) \right| \right] d\varpi \\ & + \varepsilon \int_{S_1} \left| \left[\frac{\partial V}{\partial x} + 2\pi(\sigma + \Sigma)\alpha \right] \delta x \right| (\sigma + \Sigma)\, dS \\ & + \int_{\varpi_1} \left(\frac{\rho}{k} \frac{\partial k}{\partial \rho} \left| \frac{A}{k} dA \right| - \frac{\partial G}{\partial \rho} d\rho - \frac{\partial G}{\partial T} dT \right) d\varpi - \int_{S_1} G\, |\alpha\, \delta x|\, dS \\ & + dt \int_{\varpi_3} \left| \frac{A}{k} \mathfrak{v} \right| d\varpi - |P_2 \xi_2 + L_2 \omega_2 + P_3 \xi_3 + L_3 \omega_3|, \end{aligned}$$

---

[1] Dans le cours autographié (1899-1900) de Duhem, le terme en $\mathfrak{D}$ n'existe pas, parce que, au lieu de définir le courant de polarisation par (70), Duhem le définit (p. 32 et 45) par

$$\mathfrak{v}\, dt = \delta A - C\omega' + B\omega'', \ldots\ldots,$$

$(\omega, \omega', \omega'')$ désignant la rotation moyenne au point considéré; d'où l'on tire

$$|\mathfrak{v} A|\, dt = |A\, \delta A|,$$

au lieu de notre égalité (72).

en posant

$$(75)\quad \left\{\begin{aligned}
P_2 &= \int_{\varpi_2} X_{31}\, e\, d\varpi + \int_{S_2} X_{31}\, \sigma\, dS + \int_{\varpi_2}\left(A\frac{\partial X_{31}}{\partial x} + B\frac{\partial Y_{31}}{\partial x} + C\frac{\partial Z_{31}}{\partial x}\right) d\varpi, \ldots\ldots;\\
L_2 &= \int_{\varpi_2} (yZ_{31} - zY_{31})\, e\, d\varpi + \int_{S_2} (yZ_{31} - zY_{31})\, \sigma\, dS\\
&\quad + \int_{\varpi_2}\Bigg[y\left(A\frac{\partial X_{31}}{\partial z} + B\frac{\partial Y_{31}}{\partial z} + C\frac{\partial Z_{31}}{\partial z}\right)\\
&\qquad - z\left(A\frac{\partial X_{31}}{\partial y} + B\frac{\partial Y_{31}}{\partial y} + C\frac{\partial Z_{31}}{\partial y}\right) + BZ_{31} - CY_{31}\Bigg] d\varpi, \ldots\ldots;\\
P_3 &= \int_{\varpi_3} X_{12}\, e\, d\varpi + \int_{S_3} X_{12}\, \sigma\, dS + \int_{\varpi_3}\left(A\frac{\partial X_{12}}{\partial x} + B\frac{\partial Y_{12}}{\partial x} + C\frac{\partial Z_{12}}{\partial x}\right) d\varpi, \ldots\ldots;\\
L_3 &= \int_{\varpi_3} (yZ_{12} - zY_{12})\, e\, d\varpi + \int_{S_3} (yZ_{12} - zY_{12})\, \sigma\, dS\\
&\quad + \int_{\varpi_3}\Bigg[y\left(A\frac{\partial X_{12}}{\partial z} + B\frac{\partial Y_{12}}{\partial z} + C\frac{\partial Z_{12}}{\partial z}\right)\\
&\qquad - z\left(A\frac{\partial X_{12}}{\partial y} + B\frac{\partial Y_{12}}{\partial y} + C\frac{\partial Z_{12}}{\partial y}\right) + BZ_{12} - CZ_{12}\Bigg] d\varpi, \ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

et

$$(76)\qquad X_{31} = -\varepsilon\frac{\partial(V_3 + V_1)}{\partial x}, \ldots\ldots$$

désignant le champ électrostatique dû aux seules charges réelles et fictives des corps 3 et 1,

$$(77)\qquad X_{12} = -\varepsilon\frac{\partial(V_1 + V_2)}{\partial x}, \ldots\ldots$$

le champ électrostatique dû aux seules charges réelles et fictives des corps 1 et 2.

Contrairement à ce qui avait lieu en Magnétisme, les formules (75) ne font plus apparaître de différence entre deux diélectriques rigides, l'un permanent et l'autre parfaitement doux. Remarquons enfin que l'égalité (74) n'est pas du tout la simple transposition de l'égalité (58).

17. Calcul des termes restants. — Reportons-nous à l'égalité (4); on a

$$\delta M = \int_{\varpi} \varphi\,\delta(e\,d\varpi) + \int_{S} \varphi\,\delta(\sigma\,dS) + \int \delta\varphi\, dq,$$

dq désignant ici un élément de charge réelle $e\,d\varpi$ ou $\sigma\,dS$ et la dernière intégrale étant étendue au système entier $\varpi + S$.

Mais les équations indéfinie et superficielle de continuité du courant de conduction s'écrivent ici [1]

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| dt\, d\varpi + \delta(e\, d\varpi) = 0,$$
$$|u\alpha|\, dt\, dS + \delta(\sigma\, dS) = 0;$$

d'où

$$\delta M - \int \delta\mathfrak{z}\, dq = -dt\left(\int_{\varpi} \mathfrak{z}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| d\varpi + \int_{S} \mathfrak{z}\,|u\alpha|\, dS\right) = dt\int_{\varpi}\left|u\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x}\right| d\varpi,$$

l'intégrale de surface ayant été transformée en intégrale de volume, soit encore d'après (5)

$$\delta M = dt\int_{\varpi}\left|u\frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)\right| d\varpi + \int \delta\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right) dq. \tag{78}$$

On a enfin, d'après (7),

$$\int\left|u\left(E_x - T\frac{\partial E_x}{\partial T} + \frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right| d\varpi \tag{79}$$
$$= \int\left|u\left[-\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} + \varphi_x - T\frac{\partial\varphi_x}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right) + \mathcal{E}_x\right]\right| d\varpi.$$

18. Travail élémentaire des forces intérieures — Remplaçons, dans l'équation (8), les différents termes du second membre par leurs expressions (58), (78), (74) et (79); il vient

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{T}_i = &-\delta U_0 - dt\int\left|u\left(\varphi_x - T\frac{\partial\varphi_x}{\partial T}\right)\right| d\varpi - \int\frac{\partial(\mathcal{F}+F)}{\partial T}\delta T\, d\varpi - \int\delta\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right) aq \\
&-\int_{\varpi_1}\left|\left(\frac{\mathcal{A}}{\varkappa} + \varepsilon'\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)(\delta\mathcal{A} - d\mathcal{A})\right| d\varpi - \varepsilon'\int_{S_1}\left(2\pi\mathcal{I}^2 - \left|\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right|\right)|\alpha\,\delta x|\, dS \\
&-\int_{\varpi_1}\left(\frac{\rho}{\varkappa}\frac{\partial\varkappa}{\partial\rho}\left|\frac{\mathcal{A}}{\varkappa}\, d\mathcal{A}\right| - \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\rho}\, d\rho - \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial T}\, dT\right) d\varpi + \int_{S_1}\mathcal{G}\,|\alpha\,\delta x|\, dS \\
&-\int_{\varpi_3}\left|\left(\frac{\mathcal{A}}{\varkappa} + \varepsilon'\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)\delta\mathcal{A}\right| d\varpi + |\mathfrak{P}_2\xi_2 + \mathfrak{L}_2\omega_2 + \mathfrak{P}_3\xi_3 + \mathfrak{L}_3\omega_3| - \varepsilon\, dt\int\left|\mathrm{u}\frac{\partial V}{\partial x}\right| d\varpi \\
&-\int_{\varpi_1}\left[\varepsilon\left|\frac{\partial V}{\partial x}\delta x\right|(e+E) + \left|\frac{A}{k}(\mathrm{u}\, dt - A\mathfrak{D} - dA)\right|\right] d\varpi - \varepsilon\int_{S_1}\left|\left[\frac{\partial V}{\partial x} + 2\pi(\sigma+\Sigma)\alpha\right]\delta x\right|(\sigma+\Sigma)\, dS \\
&-\int_{\varpi_1}\left(\frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial\rho}\left|\frac{A}{k}\, dA\right| - \frac{\partial G}{\partial\rho}\, d\rho - \frac{\partial G}{\partial T}\, dT\right) d\varpi + \int_{S_1} G\,|\alpha\,\delta x|\, dS \\
&-dt\int_{\varpi_3}\left|\frac{A}{k}\mathrm{u}\right| d\varpi + |P_2\xi_2 + L_2\omega_2 + P_3\xi_3 + L_3\omega_3| - \delta\Pi - dt\int|u\mathcal{E}_x|\, d\varpi.
\end{aligned}$$

[1] L. Roy, *Sur l'Électrodynamique des milieux en mouvement*, p. 206 et 207, équations (13) et (14).

Remarquons que l'intégrale en $\left|\mathfrak{v}\frac{\partial V}{\partial x}\right|$ ne s'étend en réalité qu'au volume $\varpi_3+\varpi_4$, puisque le courant de polarisation est nul dans ϖ_2.

Si maintenant, dans la dernière intégrale, on remplace u par $f-\mathfrak{v}$ d'après (2); si l'on groupe l'ensemble des termes en $\mathfrak{v}$ et si l'on observe que l'intégrale

$$\int_{\varpi_3+\varpi_4}\left|\frac{A}{k}\mathfrak{v}\right|d\varpi$$

peut être étendue au volume ϖ tout entier, d'après la remarque précédente, il vient en définitive

$$
\begin{aligned}
(80)\quad \delta\mathfrak{T}_i = & -\delta U_0 - dt\int\left|u\left(\varphi_x - T\frac{\partial\varphi_x}{\partial T}\right)\right|d\varpi - \int\frac{\partial(\mathcal{F}+F)}{\partial T}\delta T\,d\varpi \\
& -\int\delta\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)dq \\
& -\int_{\varpi_4}\left|\left(\frac{\mathfrak{A}}{\varkappa}+\varepsilon'\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\right)(\delta\mathfrak{A}-d\mathfrak{A})\right|d\varpi - \varepsilon'\int_{S_4}\left(2\pi\mathcal{S}^2 - \left|\mathfrak{A}\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\right|\right)|\alpha\delta x|\,dS \\
& -\int_{\varpi_4}\left(\frac{\rho}{\varkappa}\frac{\partial\varkappa}{\partial\rho}\left|\frac{\mathfrak{A}}{\varkappa}d\mathfrak{A}\right| - \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\rho}d\rho - \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial T}dT\right)d\varpi + \int_{S_4}\mathcal{G}|\alpha\delta x|\,dS \\
& -\int_{\varpi_3}\left|\left(\frac{\mathfrak{A}}{\varkappa}+\varepsilon'\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\right)\delta\mathfrak{A}\right|d\varpi + |\mathfrak{L}_2\xi_2+\mathcal{L}_2\omega_2+\mathfrak{L}_3\xi_3+\mathcal{L}_3\omega_3| \\
& -dt\int\left|\left(\frac{A}{k}+\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}-\mathcal{E}_x\right)\mathfrak{v}\right|d\varpi - dt\int|f\mathcal{E}_x|\,d\varpi \\
& -\int_{\varpi_4}\left[\varepsilon\left|\frac{\partial V}{\partial x}\delta x\right|(e+E) - \left|\frac{A}{k}(A\mathfrak{D}+dA)\right|\right]d\varpi \\
& -\varepsilon\int_{S_4}\left|\left[\frac{\partial V}{\partial x}+2\pi(\sigma+\Sigma)\alpha\right]\delta x\right|(\sigma+\Sigma)\,dS \\
& -\int_{\varpi_4}\left(\frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial\rho}\left|\frac{A}{k}dA\right| - \frac{\partial G}{\partial\rho}d\rho - \frac{\partial G}{\partial T}dT\right)d\varpi + \int_{S_4}G|\alpha\delta x|\,dS \\
& +|P_2\xi_2+L_2\omega_2+P_3\xi_3+L_3\omega_3| - \delta\Pi.
\end{aligned}
$$

CHAPITRE IV

Forces intérieures.

19. Lois de l'aimantation et de la polarisation; énergie électrodynamique. — Appliquons tout d'abord l'équation fondamentale (80) au système supposé en repos et à une modification virtuelle isothermique laissant ce système au repos. Dans une telle modification, $\delta\mathfrak{T}_i$ est nul; les deux premiers termes du second membre se détruisent d'après la théorie des forces électromotrices hydro-électriques; tous les termes où figure le déplacement $\delta(x, y, z)$ sont nuls, de sorte qu'il reste

$$
(81)\qquad \int_{\varpi_3+\varpi_1}\left|\left(\frac{\mathcal{A}}{\chi}+\varepsilon'\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)\delta\mathcal{A}+\left(\frac{A}{k}+\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}-\mathcal{E}_x\right)\mathfrak{u}\,dt\right|d\varpi
+\delta\Pi+dt\int|f\mathcal{E}_x|\,d\varpi=0.
$$

Le système restant au repos, on a [1]

$$
(82)\qquad \left\{\begin{aligned}
&(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z)=-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial(F, G, H)}{\partial t}-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\,\frac{\partial(\Phi, \Psi, \Omega)}{\partial t},\\
&(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})\,dt=\delta(A, B, C),
\end{aligned}\right.
$$

$\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}$ désignant la constante fondamentale des actions électrodynamiques, (F, G, H) le potentiel vecteur électrique [2] et (Φ, Ψ, Ω) le potentiel vecteur magnétique au point (x, y, z). Ces potentiels ont pour expressions

$$
\begin{aligned}
F(x, y, z, t)&=\int\left(\frac{1+\lambda}{2r}f'+\frac{1-\lambda}{2r}\left|f'\frac{x'-x}{r}\right|\frac{x'-x}{r}\right)d\varpi',\\
G(x, y, z, t)&=\int\left(\frac{1+\lambda}{2r}g'+\frac{1-\lambda}{2r}\left|f'\frac{x'-x}{r}\right|\frac{y'-y}{r}\right)d\varpi',\\
H(x, y, z, t)&=\int\left(\frac{1+\lambda}{2r}h'+\frac{1-\lambda}{2r}\left|f'\frac{x'-x}{r}\right|\frac{z'-z}{r}\right)d\varpi';
\end{aligned}
$$

---

(1) L. Roy, *L'Électrodynamique des milieux isotropes en repos d'après Helmholtz et Duhem*, page 46, formule (114).

(2) Aucune confusion n'est évidemment possible entre les deux premières composantes et les fonctions F, G considérées aux nos 4 et 15.

$$
(83)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Phi(x, y, z, t) &= \int \left(\mathcal{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} - \mathcal{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) d\varpi',\\
\Psi(x, y, z, t) &= \int \left(\mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} - \mathcal{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \right) d\varpi',\\
\Omega(x, y, z, t) &= \int \left(\mathcal{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} - \mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \right) d\varpi',
\end{aligned}
\right.
$$

λ désignant la constante de Helmholtz (¹), x', y', z' les variables d'intégration, r la distance du point $M(x, y, z)$ au point $M'(x', y', z')$ de l'élément de volume $d\varpi'$, (f', g', h') et $(\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}')$ la densité du courant total et l'intensité d'aimantation en M'.

Il résulte alors de (82) que l'égalité (81) s'écrit

$$
\int_{\varpi_3+\varpi_4} \left| \left(\frac{\mathcal{A}}{\varkappa} + \varepsilon' \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right) \delta \mathcal{A} + \left(\frac{A}{k} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} - \mathcal{E}_x \right) \delta A \right| d\varpi
$$
$$
+ \delta \Pi - dt \left(\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \int \left| f \frac{\partial F}{\partial t} \right| d\varpi + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'} \int \left| f \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right| d\varpi \right) = 0.
$$

Mais, dans le cas actuel d'un système en repos, la deuxième intégrale est la dérivée de la fonction

$$
\frac{1}{2} \int |Ff| \, d\varpi,
$$

qui ne dépend que du temps par l'intermédiaire des fonctions f, g, h (²) et l'on a d'autre part (³)

$$
- \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} dt \int \left| f \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right| d\varpi = \int |\mathfrak{L} \delta \mathcal{A}| \, d\varpi,
$$

(¹) Dans notre opuscule (L. Roy, *loc. cit.*, p. 80, n° 37), nous avions conclu à la nullité de la constante λ de Helmholtz par comparaison des égalités

$$
\text{(A)} \qquad \frac{4\pi\varepsilon}{\rho} \theta + K \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0, \qquad \frac{4\pi\varepsilon}{\rho} \theta + K \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial t^3},
$$

où ρ désignait la résistivité du milieu, $K = 1 + 4\pi\varepsilon k$ son pouvoir inducteur spécifique et

$$
\text{(B)} \qquad \theta = -\varepsilon \Delta V + \lambda \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}
$$

la divergence du champ électrique. Or cette comparaison était illégitime du fait que la première (A) résultait de l'application de l'hypothèse de Faraday-Mossotti (K très grand par rapport à l'unité) à l'équation (168) de notre opuscule qui, d'après (B), coïncidait précisément avec la deuxième (A). La seule raison qui subsiste d'annuler la constante de Helmholtz est donc de débarrasser la théorie des ondes longitudinales.

(²) L. Roy, *loc. cit.*, p. 49.

(³) L. Roy, *loc. cit.*, p. 54.

où l'on a posé

$$(84) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{L}(x, y, z, t) &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int \left(h' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} - g' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) d\varpi', \\ \mathfrak{Q}(x, y, z, t) &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int \left(f' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} - h' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \right) d\varpi', \\ \mathfrak{R}(x, y, z, t) &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int \left(g' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} - f' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \right) d\varpi', \end{aligned} \right.$$

de sorte que l'égalité (81) s'écrit finalement

$$(85) \quad \begin{aligned} \int_{\varpi_3+\varpi_4} \left| \left(\frac{\mathcal{A}}{\varkappa} + \varepsilon' \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \sqrt{\varepsilon'}\, \mathfrak{L} \right) \delta \mathcal{A} + \left(\frac{A}{k} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} - \mathcal{E}_x \right) \delta A \right| d\varpi \\ + \delta \left(\Pi - \frac{\mathfrak{A}^2}{4} \int |Ff|\, d\varpi \right) = 0. \end{aligned}$$

Cela posé, considérons d'abord une modification dans laquelle le courant total en chaque point soit nul; alors la dernière intégrale est nulle et il en est de même de Π, puisque cette fonction s'annule en même temps que les courants. L'égalité (85) se réduit ainsi à sa première ligne et comme les variations sous le signe somme sont indépendantes, l'intégrale ne peut être nulle que si chaque parenthèse est nulle; on doit donc avoir en chaque point d'un corps parfaitement doux

$$(86) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\mathcal{A}}{\varkappa} + \varepsilon' \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \sqrt{\varepsilon'}\, \mathfrak{L} = 0, \ldots\ldots; \\ & \frac{A}{k} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} - \mathcal{E}_x = 0, \ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Ce sont les lois de l'aimantation et de la polarisation diélectrique. Cette dernière, établie par Duhem lorsque le champ électrique se réduit au champ électrostatique, avait été posée par lui à titre d'hypothèse, lorsqu'au champ électrostatique s'ajoute la force électromotrice d'induction pour constituer le champ électrique total [1].

L'égalité (85) se réduit ainsi à sa seconde ligne. En considérant maintenant une modification isothermique quelconque laissant toujours le système en repos, on en conclut, en intégrant, que la parenthèse qui y subsiste ne dépend que des seuls paramètres laissés constants dans cette modification, c'est-à-dire de ρ, T en chaque point et des paramètres géométriques fixant la position et la configuration du sys-

---

[1] L. Roy, *loc. cit.*, p. 48.

tème ; elle est donc, en particulier, indépendante des courants. Comme elle s'annule avec ceux-ci, elle est elle-même nécessairement nulle, de sorte qu'en définitive l'égalité (85) exige qu'on ait aussi

$$\Pi = \frac{\mathfrak{A}^2}{4}\int |\mathrm{F}f|\, d\varpi.$$

C'est l'énergie électrodynamique du système, dont la variation dans une modification quelconque est [1]

$$(87)\qquad \delta\Pi = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int |f(\delta\mathrm{F} - d\mathrm{F})|\, d\varpi,$$

avec la notation définie par l'égalité (28).

20. Expression plus explicite du travail. — Appliquons maintenant l'équation fondamentale (80) à la modification réelle du système en mouvement entre les instants t et $t+dt$; $\delta(x, y, z)$ va donc désormais représenter, sauf aux nos 22 et 24, le déplacement réel du point matériel (x, y, z) et $\dfrac{\delta(x, y, z)}{dt}$ la vitesse de ce point à l'instant t. Nous obtiendrons ainsi les forces intérieures du système en mouvement ; les forces intérieures du système en repos s'en déduiront comme cas particulier (n° 30).

Cela posé, les expressions (82) de la force électromotrice d'induction doivent être remplacées par les suivantes

$$(88)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathcal{E}_x dt &= -\left(\delta\mathcal{F} + \mathcal{F}\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \mathcal{G}\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \mathcal{H}\frac{\partial\delta z}{\partial x}\right),\\
\mathcal{E}_y dt &= -\left(\delta\mathcal{G} + \mathcal{F}\frac{\partial\delta x}{\partial y} + \mathcal{G}\frac{\partial\delta y}{\partial y} + \mathcal{H}\frac{\partial\delta z}{\partial y}\right),\\
\mathcal{E}_z dt &= -\left(\delta\mathcal{H} + \mathcal{F}\frac{\partial\delta x}{\partial z} + \mathcal{G}\frac{\partial\delta y}{\partial z} + \mathcal{H}\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right),
\end{aligned}\right.$$

qui tiennent compte du déplacement du système et dans lesquelles

$$(89)\qquad (\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}) = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}(\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H}) + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}(\Phi, \Psi, \Omega)$$

[1] L. Roy, *loc. cit.*, p. 64, formule (152). Le changement de signe tient à ce que l'énergie électrodynamique y est désignée par $-\Pi$, comme dans le mémoire correspondant de Duhem.

désigne le potentiel vecteur total[1]. En tenant compte en outre de (86) et (87), il vient en groupant convenablement les termes

(90) $\delta\mathcal{T}_i =$

$$-\delta U_0 - dt\int\left|u\left(\varphi_x - T\frac{\partial\varphi_x}{\partial T}\right)\right|d\varpi - \int\frac{\partial(\mathcal{F}+F)}{\partial T}\delta T\, d\varpi \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{I}$$

$$-\int\delta\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)dq \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{II}$$

$$\left.\begin{aligned}&-\varepsilon'\int_{S_1}\left(2\pi\mathcal{I}^2 - \left|\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right|\right)|\alpha\delta x|\,dS + |\mathcal{P}_2\xi_2 + \mathcal{L}_2\omega_2 + \mathcal{P}_3\xi_3 + \mathcal{L}_3\omega_3| \\ &+\int_{\varpi_1}\left(\frac{\rho}{\chi}\frac{\partial\chi}{\partial\rho}\varepsilon'\left|\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}d\mathcal{A}\right| + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial T}dT\right)d\varpi + \int_{S_1}\mathcal{G}|\alpha\delta x|\,dS\end{aligned}\right\}\ \mathrm{III}$$

$$\left.\begin{aligned}&-\varepsilon\int_{\varpi_1}\left|\frac{\partial V}{\partial x}[(e+E)\delta x + A\mathcal{D} + dA]\right|d\varpi \\ &-\varepsilon\int_{S_1}\left|\left[\frac{\partial V}{\partial x} + 2\pi(\sigma+\Sigma)\alpha\right]\delta x\right|(\sigma+\Sigma)\,dS + |P_2\xi_2 + L_2\omega_2 + P_3\xi_3 + L_3\omega_3| \\ &+\int_{\varpi_1}\left(\frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial\rho}\varepsilon\left|\frac{\partial V}{\partial x}dA\right| + \frac{\partial G}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial G}{\partial T}dT\right)d\varpi + \int_{S_1}G|\alpha\delta x|\,dS\end{aligned}\right\}\ \mathrm{IV}$$

$$+\int_{\varpi_1}\left|\mathcal{E}_x\left[A\mathcal{D} + \left(1 - \frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial\rho}\right)dA\right]\right|d\varpi \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{V}$$

$$+\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\left|f\left(F\frac{\partial\delta x}{\partial x} + G\frac{\partial\delta y}{\partial x} + H\frac{\partial\delta z}{\partial x} + dF\right)\right|d\varpi \quad\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{VI}$$

$$\left.\begin{aligned}&+\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\int\left|f\left(\Phi\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \Psi\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \Omega\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \delta\Phi\right)\right|d\varpi \\ &+\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_2}|\mathcal{L}\delta\mathcal{A}|\,d\varpi + \sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1}|\mathcal{L}(\delta\mathcal{A} - d\mathcal{A})|\,d\varpi + \sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1}\frac{\rho}{\chi}\frac{\partial\chi}{\partial\rho}|\mathcal{L}\,d\mathcal{A}|\,d\varpi.\end{aligned}\right\}\ \mathrm{VII}$$

---

[1] L. Roy, *loc. cit.*, p. 45, formules (112) et (113). On voit que les fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ du présent mémoire sont celles de notre opuscule multipliées par $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}$. Ce léger changement de notation a pour but de faire disparaître cette constante de (88) et des formules que nous établirons au n° 28. Aucune confusion n'est évidemment possible entre les deux premières composantes et les fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ considérées aux n^{os} 4 et 11.

Interprétons cette égalité. Les termes I du second membre représentent le travail élémentaire des forces intérieures du système à l'état neutre et celui qui résulte de la variation de la température seule;

Le terme II représente le travail des forces électrocapillaires;

Les termes III représentent apparemment le travail des forces magnétiques;

Les termes IV représentent apparemment le travail des forces électriques, c'est-à-dire des forces qui s'exercent entre les charges électriques réelles et fictives;

Les termes V représentent apparemment le travail des forces qu'exerce la force électromotrice d'induction sur la polarisation diélectrique; ces forces n'avaient pas encore, à notre connaissance, été signalées.

Nous disons *apparemment* parce que, du fait du terme en $\mathcal{G}$, le calcul de la résultante et du moment résultant des forces magnétiques qui s'exercent sur le corps déformable 1 fera apparaître des termes électromagnétiques; de même, le calcul analogue effectué pour les forces électriques fera apparaître, du fait du terme en G, des termes se rapportant aux actions de la force électromotrice d'induction sur la polarisation diélectrique.

Les termes VI représentent le travail des forces électrodynamiques;

Les termes VII représentent le travail des forces électromagnétiques, c'est-à-dire des forces exercées par l'aimantation sur les courants et par les courants sur l'aimantation.

Laissant de côté les forces des deux premières catégories, nous allons étudier successivement toutes les autres.

21. Forces magnétiques. — Le travail élémentaire des forces magnétiques est, d'après (90),

$$\begin{aligned}
(91)\qquad \delta\mathcal{T}_3 = & -\varepsilon' \int_{S_1} \left(2\pi\mathcal{J}^2 - \left| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right| \right) |\alpha\,\delta x|\, dS \\
& + \int_{\varpi_1} \left(\frac{\rho}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \varepsilon' \left| \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\, d\mathcal{A} \right| + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T}\, dT \right) d\varpi + \int_{S_1} \mathcal{G}\, |\alpha\,\delta x|\, dS \\
& + |\mathfrak{P}_2\xi_2 + \mathfrak{L}_2\omega_2 + \mathfrak{P}_2\xi_3 + \mathfrak{L}_3\omega_3|.
\end{aligned}$$

Il résulte tout d'abord de la dernière ligne de (91) que les forces magnétiques agissant sur l'aimant permanent rigide 2 se réduisent par rapport à l'origine, à la force ($\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{R}_2$) et au couple ($\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_2$) donnés par les formules (55); de même celles qui agissent sur l'aimant parfaitement doux rigide 3 se réduisent à la force ($\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{Q}_3$, $\mathfrak{R}_3$) et au couple ($\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{N}_3$) donnés par les formules (56).

Les formules (55) et (56) peuvent se transformer en y introduisant le champ magnétique $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ dû à l'aimantation du système entier et moyennant deux groupes d'identités très remarquables

$$(92)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{\varpi}\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial x}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial x}\right)d\varpi = 2\pi\varepsilon'\int_{S}\mathcal{I}^2\alpha\,dS,\ldots\ldots;\\ &\int_{\varpi}\left[y\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial z}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial z}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial z}\right)-z\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial y}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial y}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial y}\right)\right.\\ &\qquad\left.+\mathcal{B}\mathcal{Z}-\mathcal{C}\mathcal{Y}\right]d\varpi = 2\pi\varepsilon'\int_{S}\mathcal{I}^2(y\gamma-z\beta)\,dS,\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

dûs à M. Liénard[1], dans lesquels $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ désigne le champ magnétique (23) du *seul* aimant (ϖ, S). La première de ces égalités appliquée au corps 2 nous donne en effet

$$0 = \int_{\varpi_2}\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{X}_2}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Y}_2}{\partial x}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{Z}_2}{\partial x}\right)d\varpi - 2\pi\varepsilon'\int_{S_2}\mathcal{I}^2\alpha\,dS,$$

$(\mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Z}_2)$ étant le champ magnétique propre du corps 2. En ajoutant cette égalité à la première (55) et en remarquant que le champ magnétique (50) dû à l'aimantation du système entier est

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_{31},\ldots\ldots,$$

il vient la première des suivantes

$$(93)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \int_{\varpi_2}\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial x}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial x}\right)d\varpi - 2\pi\varepsilon'\int_{S_2}\mathcal{I}^2\alpha\,dS,\ldots\ldots;\\ \mathcal{L}_2 &= \int_{\varpi_2}\left[y\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial z}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial z}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial z}\right)-z\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial y}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial y}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial y}\right)\right.\\ &\qquad\left.+\mathcal{B}\mathcal{Z}-\mathcal{C}\mathcal{Y}\right]d\varpi - 2\pi\varepsilon'\int_{S_2}\mathcal{I}^2(y\gamma-z\beta)\,dS,\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

les deux autres s'obtenant d'une manière analogue. Les égalités (56) s'écrivent de même

$$(94)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= \int_{\varpi_3}\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial x}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial x}\right)d\varpi - 2\pi\varepsilon'\int_{S_3}\mathcal{I}^2\alpha\,dS,\ldots\ldots;\\ \mathcal{L}_3 &= \int_{\varpi_3}\left[y\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial z}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial z}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial z}\right)-z\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial y}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial y}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial y}\right)\right]d\varpi\\ &\qquad - 2\pi\varepsilon'\int_{S_3}\mathcal{I}^2(y\gamma-z\beta)\,dS,\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

[1] A. Liénard, *Pressions à l'intérieur des aimants et des diélectriques*, La Lumière électrique, 1894, p. 7 et 67.

Les formules (55) expriment ce résultat bien connu que la résultante et le moment résultant par rapport à un point quelconque des forces magnétiques agissant sur un aimant permanent rigide peuvent se calculer comme si l'aimant était, en chaque point, soumis à la force par unité de volume de composantes

$$\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{X}_{31}}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{Y}_{31}}{\partial x}+\mathcal{C}\frac{\partial \mathcal{Z}_{31}}{\partial x}, \ldots\ldots$$

et au couple par unité de volume de composantes

$$\mathcal{B}\mathcal{Z}_{31}-\mathcal{C}\mathcal{Y}_{31}, \qquad \mathcal{C}\mathcal{X}_{31}-\mathcal{A}\mathcal{Z}_{31}, \qquad \mathcal{A}\mathcal{Y}_{31}-\mathcal{B}\mathcal{X}_{31},$$

($\mathcal{X}_{31}$, $\mathcal{Y}_{31}$, $\mathcal{Z}_{31}$) étant le champ magnétique partiel créé par l'ensemble des aimants *autres* que l'aimant considéré.

D'après les formules (93), le même calcul peut être fait en substituant le champ magnétique total au champ partiel, mais en supposant qu'en outre la surface de l'aimant soit soumise à la *tension* normale $2\pi\varepsilon'\mathcal{I}^2$. Cet important résultat, qui rectifiait une erreur commise par Maxwell, est dû à M. Liénard.

Passons à l'aimant parfaitement doux rigide 3. Les formules (56) expriment que la résultante et le moment résultant des forces magnétiques agissant sur un aimant parfaitement doux rigide peuvent se calculer comme si l'aimant était, en chaque point, soumis à la force par unité de volume de composantes

$$\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{X}_{12}}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{Y}_{12}}{\partial x}+\mathcal{C}\frac{\partial \mathcal{Z}_{12}}{\partial x}, \ldots\ldots$$

et au couple par unité de volume de composantes

$$-\mathcal{B}\mathcal{Z}_{3}+\mathcal{C}\mathcal{Y}_{3}, \qquad -\mathcal{C}\mathcal{X}_{3}+\mathcal{A}\mathcal{Z}_{3}, \qquad -\mathcal{A}\mathcal{Y}_{3}+\mathcal{B}\mathcal{X}_{3},$$

($\mathcal{X}_{12}$, $\mathcal{Y}_{12}$, $\mathcal{Z}_{12}$) étant le champ magnétique partiel créé par l'ensemble des aimants *autres* que l'aimant considéré et ($\mathcal{X}_3$, $\mathcal{Y}_3$, $\mathcal{Z}_3$) le champ magnétique propre de cet aimant.

D'après les formules (94), le même calcul peut être fait en substituant le champ magnétique total au champ partiel, en supprimant le couple par unité de volume et en ajoutant la tension normale $2\pi\varepsilon'\mathcal{I}^2$ de M. Liénard. Au point de vue mécanique, l'aimant parfaitement doux rigide se distingue donc de l'aimant permanent rigide par la valeur du couple par unité de volume.

Passons à l'étude des forces magnétiques qui s'exercent sur l'aimant parfaitement doux déformable 1. Remarquons tout d'abord que les dérivées $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \ldots$ figurant dans la première intégrale de surface de (91) sont des dérivées intérieures. Si donc nous les y remplaçons par leurs valeurs déduites de (50), ($\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$) y désignera le *champ* *intérieur*, c'est-à-dire la limite vers laquelle tend le champ magnétique dû à l'aimantation totale en un point M' *intérieur* au volume ϖ_1, lorsque M' tend vers le point $M(x, y, z)$ de la surface S_1.

Dès lors, l'égalité (91) exprime qu'en chaque point de la surface S_1 s'exerce la tension normale

$$2\pi\varepsilon'\mathcal{J}^2 + |\mathcal{A}\mathcal{X}| - \mathcal{G}, \tag{95}$$

comptée positivement vers l'extérieur du corps, et, d'après la signification (28) de $d\mathcal{A}$, $d\rho$, dT, qu'en chaque point du volume ϖ_1 s'exerce la force par unité de volume de composantes

$$-\frac{\rho}{\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial\rho}\left(\mathcal{X}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \mathcal{Y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x} + \mathcal{Z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}\right) + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}, \ldots\ldots, \tag{96}$$

$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ désignant le champ magnétique (50) dû à l'aimantation totale du système.

Cela posé, calculons la résultante $(\mathcal{L}_1, \mathcal{Q}_1, \mathcal{R}_1)$ de toutes ces forces élémentaires et leur moment résultant $(\mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1, \mathcal{N}_1)$ par rapport à l'origine. On a tout d'abord

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 = {} & -2\pi\varepsilon'\int_{S_1}\mathcal{J}^2\alpha\, dS + \int_{S_1}(-|\mathcal{A}\mathcal{X}| + \mathcal{G})\alpha\, dS \\ & + \int_{\varpi_1}\left[-\frac{\rho}{\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial\rho}\left(\mathcal{X}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \mathcal{Y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x} + \mathcal{Z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}\right) + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\right]d\varpi.\end{aligned}$$

Mais on a d'après (47)

$$\begin{aligned}\int_{S_1}(-|\mathcal{A}\mathcal{X}| + \mathcal{G})\alpha\, dS &= \int_{\varpi_1}\left(\frac{\partial|\mathcal{A}\mathcal{X}|}{\partial x} - \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial x}\right)d\varpi \\ = \int_{\varpi_1}\Bigg[\frac{\partial|\mathcal{A}\mathcal{X}|}{\partial x} - \frac{1}{\kappa}\left(1 - \frac{\rho}{\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial\rho}\right)&\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}\right) - \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} - \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\Bigg]d\varpi,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 = {} & -2\pi\varepsilon'\int_{S_1}\mathcal{J}^2\alpha\, dS + \int_{\varpi_1}\Bigg\{\frac{\partial|\mathcal{A}\mathcal{X}|}{\partial x} + \left[\frac{\rho}{\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial\rho}\left(\frac{\mathcal{A}}{\kappa} + \varepsilon'\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right) - \frac{\mathcal{A}}{\kappa}\right]\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} \\ & + \left[\frac{\rho}{\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial\rho}\left(\frac{\mathcal{B}}{\kappa} + \varepsilon'\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right) - \frac{\mathcal{B}}{\kappa}\right]\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x} + \left[\frac{\rho}{\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial\rho}\left(\frac{\mathcal{C}}{\kappa} + \varepsilon'\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right) - \frac{\mathcal{C}}{\kappa}\right]\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}\Bigg\}d\varpi,\end{aligned}$$

soit encore d'après (86)

$$
(97)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathcal{X}_1 = & \int_{\varpi_1}\left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial x} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial x}\right)d\varpi - 2\pi\varepsilon'\int_{S_1}\mathcal{I}^2\alpha\, dS \\
& + \sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1}\left(1 - \frac{\rho}{\kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial \rho}\right)\left(\mathcal{P}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \mathcal{Q}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} + \mathcal{R}\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}\right)d\varpi, \ldots\ldots
\end{aligned}\right.
$$

Le moment résultant s'obtient d'une manière analogue et l'on trouve

$$
(98)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 = & \int_{\varpi_1}\left[y\left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial z} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial z} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial z}\right) - z\left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial y} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial y}\right)\right]d\varpi \\
& - 2\pi\varepsilon'\int_{S_1}\mathcal{I}^2(y\gamma - z\beta)\, dS \\
& + \sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1}\left(1 - \frac{\rho}{\kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial \rho}\right)\left[y\left(\mathcal{P}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} + \mathcal{Q}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} + \mathcal{R}\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}\right)\right. \\
& \qquad\qquad \left. - z\left(\mathcal{P}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y} + \mathcal{Q}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \mathcal{R}\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y}\right)\right]d\varpi, \ldots\ldots
\end{aligned}\right.
$$

En tenant compte des identités (92) de M. Liénard, les formules (97) et (98) s'écrivent encore

$$
(99)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathcal{X}_1 = & \int_{\varpi_1}\left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{X}_{23}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{Y}_{23}}{\partial x} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathcal{Z}_{23}}{\partial x}\right)d\varpi \\
& + \sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1}\left(1 - \frac{\rho}{\kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial \rho}\right)\left(\mathcal{P}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \mathcal{Q}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} + \mathcal{R}\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}\right)d\varpi, \ldots\ldots; \\
\mathcal{L}_1 = & \int_{\varpi_1}\left[y\left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{X}_{23}}{\partial z} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{Y}_{23}}{\partial z} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathcal{Z}_{23}}{\partial z}\right)\right. \\
& \qquad \left. - z\left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{X}_{23}}{\partial y} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{Y}_{23}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathcal{Z}_{23}}{\partial y}\right) - \mathcal{B}\mathcal{Z}_1 + \mathcal{C}\mathcal{Y}_1\right]d\varpi \\
& + \sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1}\left(1 - \frac{\rho}{\kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial \rho}\right)\left[y\left(\mathcal{P}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} + \mathcal{Q}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} + \mathcal{R}\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}\right)\right. \\
& \qquad\qquad \left. - z\left(\mathcal{P}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y} + \mathcal{Q}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \mathcal{R}\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y}\right)\right]d\varpi, \ldots\ldots
\end{aligned}\right.
$$

Les dernières intégrales de (97), (98) et (99) sont électromagnétiques, en ce sens qu'elles représentent une partie de la résultante et du moment résultant des forces exercées sur l'aimantation par le champ magnétique des courants $-\sqrt{\varepsilon'}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R})$.

Il faudra donc en tenir compte, lorsque nous calculerons la résultante et le moment résultant des forces exercées par les courants sur l'aimantation.

La présence de ces termes électromagnétiques nous montre que, dans les actions élémentaires et apparemment magnétiques (95) et (96) qui s'exercent sur un aimant parfaitement doux déformable, il est impossible de séparer complètement ce qui est purement magnétique de ce qui est électromagnétique. Ainsi se trouve justifié l'adverbe apparemment employé au n° 21.

Faisons donc ici abstraction de ces termes électromagnétiques; si nous comparons (97) et (98) à (94), ou bien (99) à (56), nous constatons que les deux règles données plus haut, pour le calcul de la résultante et du moment résultant des forces magnétiques qui s'exercent sur un aimant parfaitement doux rigide, restent valables pour un aimant parfaitement doux déformable.

22. Système en repos simplement aimanté. — On peut se demander si les résultats précédents (n° 21) sont bien conformes à ceux qu'on déduirait de la considération d'un système en repos en équilibre magnétique et seulement aimanté. Il est facile de voir qu'il en est bien ainsi. En effet, le potentiel thermodynamique interne du système étant alors[1]

$$\mathfrak{F}_0 + \mathfrak{W} + \int \mathfrak{F}\, d\varpi,$$

où $\mathfrak{F}_0$ désigne le potentiel du système désaimanté, la condition d'équilibre est qu'on ait pour toute modification virtuelle

$$\delta\mathfrak{T}_e - \delta_T\left(\mathfrak{F}_0 + \mathfrak{W} + \int \mathfrak{F}\, d\varpi\right) = 0,$$

$\delta\mathfrak{T}_e$ étant le travail virtuel des forces extérieures et la dernière variation devant être calculée en laissant la température constante.

Or, le système étant supposé en équilibre, $\delta\mathfrak{T}_e + \delta\mathfrak{T}_i = 0$, d'où

$$\delta\mathfrak{T}_i = -\delta_T\mathfrak{F}_0 - \delta_T\left(\mathfrak{W} + \int \mathfrak{F}\, d\varpi\right). \tag{100}$$

Le premier terme du second membre est le travail virtuel des forces intérieures du système désaimanté; les termes restants, dont le développement est fourni par (58) abstraction faite du terme en δT, représentent celui $\delta\mathfrak{T}_3$ des forces magnétiques. Mais, dans (58), deux intégrales sont nulles d'après les premières (86), où nous devons annuler $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, puisque le système n'est le siège d'aucun courant.

---

[1] L. Roy, *loc. cit.*, p. 18.

L'égalité précédente nous redonne donc l'égalité (91); de sorte que nous retrouvons bien toutes les forces déjà calculées, sauf que les expressions (97), (98) et (99) sont maintenant débarrassées de leurs termes électromagnétiques.

23. Forces électriques. — Le travail élémentaire des forces électriques fait apparaître dans les intégrales de volume étendues au corps 1 le champ électrostatique total

$$X = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}, \dots\dots \tag{101}$$

et s'écrit ainsi

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{T}_4 = & \int_{\varpi_1} |X[(e+E)\delta x + A\mathfrak{D} + dA]|\, d\varpi \\ & + \int_{\varpi_1} \left(-\frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial \rho}|X\,dA| + \frac{\partial G}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial G}{\partial T} dT\right) d\varpi + \int_{S_1} G|\alpha\delta x|\, dS \\ & - \varepsilon \int_{S_1} \left|\left[\frac{\partial V}{\partial x} + 2\pi(\sigma+\Sigma)\alpha\right]\delta x\right|(\sigma+\Sigma)\, dS + |P_2\xi_2 + L_2\omega_2 + P_3\xi_3 + L_3\omega_3|.\end{aligned} \tag{102}$$

Dans la première intégrale apparaissent des termes où figure la dilatation superficielle $\mathfrak{D}$ de l'élément en (x, y, z) normal au vecteur (A, B, C) en ce point. Par intégrations par parties, on trouve d'après (73)

$$\begin{aligned}\int_{\varpi_1} |X(A\mathfrak{D} + dA)|\, d\varpi = & \int_{S_1} |AX|\,\big|(-\alpha + \lambda|\lambda\alpha|)\delta x\big|\, dS \\ & + \int_{\varpi_1} \left|\left(-A\frac{\partial X}{\partial x} - B\frac{\partial Y}{\partial x} - C\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial \lambda^2|AX|}{\partial x} + \frac{\partial \lambda\mu|AX|}{\partial y} + \frac{\partial \lambda\nu|AX|}{\partial z}\right)\delta x\right| d\varpi,\end{aligned} \tag{103}$$

de sorte que le travail (102) s'écrit

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{T}_4 = & \int_{\varpi_1} \left|\left[X(e+E) - A\frac{\partial X}{\partial x} - B\frac{\partial Y}{\partial x} - C\frac{\partial Z}{\partial x}\right.\right. \\ & \left.\left. + \frac{\partial \lambda^2|AX|}{\partial x} + \frac{\partial \lambda\mu|AX|}{\partial y} + \frac{\partial \lambda\nu|AX|}{\partial z}\right]\delta x\right| d\varpi \\ & + \int_{\varpi_1} \left(-\frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial \rho}|X\,dA| + \frac{\partial G}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial G}{\partial T} dT\right) d\varpi + \int_{S_1} G|\alpha\delta x|\, dS \\ & - \varepsilon \int_{S_1} \left|\left[\frac{\partial V}{\partial x} + 2\pi(\sigma+\Sigma)\alpha\right]\delta x\right|(\sigma+\Sigma)\, dS \\ & + \int_{S_1} |AX|\,\big|(-\alpha + \lambda|\lambda\alpha|)\delta x\big|\, dS + |P_2\xi_2 + L_2\omega_2 + P_3\xi_3 + L_3\omega_3|.\end{aligned} \tag{104}$$

Il résulte tout d'abord des derniers termes de (104) que les forces électriques agissant d'une part sur le diélectrique permanent rigide 2, d'autre part sur le diélectrique parfaitement doux rigide 3, se réduisent par rapport à l'origine et respectivement à la force (P_2, Q_2, R_2), au couple (L_2, M_2, N_2) et à la force (P_3, Q_3, R_3) et au couple (L_3, M_3, N_3) donnés par les formules (75), qui sont la transposition exacte des formules (55), si le système n'est pas électrisé $[(e, \sigma) = 0]$. Un diélectrique rigide, permanent ou parfaitement doux, se comporte donc au point de vue mécanique comme un aimant permanent rigide.

Remarquons encore que, d'après (68), (74), (76) et (77), on a

$$|P_2\xi_2 + L_2\omega_2| = \int_{\varpi_2} |X_{31}\delta x|(e+E)\,d\varpi + \int_{S_2} |X_{31}\delta x|(\sigma+\Sigma)\,dS,$$

ainsi qu'une égalité analogue pour le corps 3. Ces égalités expriment que, pour chacun d'eux, la résultante et le moment résultant peuvent être calculés comme si, entre deux éléments de charge totale (réelle et fictive), s'exerçaient les forces élémentaires définies par la loi de Coulomb.

Passons à l'étude des forces électriques qui s'exercent sur le diélectrique parfaitement doux déformable 1. L'égalité (104) exprime qu'en chaque point de la surface S_1 s'exerce la tension normale

$$2\pi\varepsilon(\sigma+\Sigma)^2 + |AX| - G,$$

comptée positivement vers l'extérieur du corps, et la pression de composantes

$$X(\sigma+\Sigma) + |AX|\,|\lambda\alpha|\lambda, \ldots\ldots,$$

(X, Y, Z) désignant le champ intérieur (101), et qu'en chaque point du volume ϖ_1 s'exerce la force par unité de volume de composantes

$$\begin{aligned} X(e+E) - A\frac{\partial X}{\partial x} - B\frac{\partial Y}{\partial x} - C\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial \lambda^2 |AX|}{\partial x} + \frac{\partial \lambda\mu |AX|}{\partial y} + \frac{\partial \lambda\nu |AX|}{\partial z} \\ - \frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial \rho}\left(X\frac{\partial A}{\partial x} + Y\frac{\partial B}{\partial x} + Z\frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial G}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}, \ldots\ldots \end{aligned}$$

Ainsi que nous l'avons fait pour les forces magnétiques, calculons la résultante (P_1, Q_1, R_1) de toutes ces forces élémentaires et leur moment résultant (L_1, M_1, N_1) par rapport à l'origine. D'après le calcul analogue fait au n° 21, on a tout d'abord

$$\begin{aligned} \int_{S_1} G\alpha\,dS &= -\int_{\varpi_1} \frac{\partial G}{\partial x}\,d\varpi \\ &= -\int_{\varpi_1} \left[\frac{1}{k}\left(1 - \frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial \rho}\right)\left(A\frac{\partial A}{\partial x} + B\frac{\partial B}{\partial x} + C\frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial G}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\right] d\varpi, \end{aligned}$$

puis

$$\int_{S_1} |AX|(-\alpha+\lambda|\lambda\alpha|)\,dS = \int_{\varpi_1}\left(\frac{\partial|AX|}{\partial x} - \frac{\partial\lambda^2|AX|}{\partial x} - \frac{\partial\lambda\mu|AX|}{\partial y} - \frac{\partial\lambda\nu|AX|}{\partial z}\right)d\varpi;$$

d'où

$$\begin{aligned} P_1 = &\int_{S_1} [X - 2\pi\varepsilon(\sigma+\Sigma)\alpha](\sigma+\Sigma)\,dS + \int_{\varpi_1}\Big\{ X(e+E) + X\frac{\partial A}{\partial x} + Y\frac{\partial B}{\partial x} + Z\frac{\partial C}{\partial x} \\ &+ \left[\frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial\rho}\left(\frac{A}{k} + \varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{A}{k}\right]\frac{\partial A}{\partial x} + \left[\frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial\rho}\left(\frac{B}{k} + \varepsilon\frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{B}{k}\right]\frac{\partial B}{\partial x} \\ &+ \left[\frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial\rho}\left(\frac{C}{k} + \varepsilon\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{C}{k}\right]\frac{\partial C}{\partial x}\Big\}\,d\varpi, \end{aligned}$$

soit encore, d'après (86) et (101),

$$\begin{aligned} P_1 = &\int_{S_1} [X - 2\pi\varepsilon(\sigma+\Sigma)\alpha](\sigma+\Sigma)\,dS + \int_{\varpi_1} X(e+E)\,d\varpi \\ &- \int_{\varpi_1}\left(1 - \frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial\rho}\right)\left(\mathcal{E}_x\frac{\partial A}{\partial x} + \mathcal{E}_y\frac{\partial B}{\partial x} + \mathcal{E}_z\frac{\partial C}{\partial x}\right)d\varpi, \ldots\ldots \end{aligned} \tag{105}$$

Le moment résultant (L_1, M_1, N_1) s'obtient d'une manière analogue et l'on trouve

$$\begin{aligned} L_1 = &\int_{S_1} \{y[Z - 2\pi\varepsilon(\sigma+\Sigma)\gamma] - z[Y - 2\pi\varepsilon(\sigma+\Sigma)\beta]\}(\sigma+\Sigma)\,dS \\ &+ \int_{\varpi_1} (yZ - zY)(e+E)\,d\varpi \\ &- \int_{\varpi_1}\left(1 - \frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial\rho}\right)\left[y\left(\mathcal{E}_x\frac{\partial A}{\partial z} + \mathcal{E}_y\frac{\partial B}{\partial z} + \mathcal{E}_z\frac{\partial C}{\partial z}\right) - z\left(\mathcal{E}_x\frac{\partial A}{\partial y} + \mathcal{E}_y\frac{\partial B}{\partial y} + \mathcal{E}_z\frac{\partial C}{\partial y}\right)\right]d\varpi, \ldots\ldots \end{aligned} \tag{106}$$

Mais on a, d'après (59) et (101),

$$\int_{S_1} X\Sigma\,dS + \int_{\varpi_1} XE\,d\varpi = \int_{\varpi_1}\left(A\frac{\partial X}{\partial x} + B\frac{\partial Y}{\partial x} + C\frac{\partial Z}{\partial x}\right)d\varpi,$$

$$\int_{S_1} yZ\Sigma\,dS + \int_{\varpi_1} yZE\,d\varpi = \int_{\varpi_1}\left[y\left(A\frac{\partial X}{\partial z} + B\frac{\partial Y}{\partial z} + C\frac{\partial Z}{\partial z}\right) + BZ\right]d\varpi,$$

avec une autre égalité analogue en zY, de sorte que les formules (105) et (106) s'écrivent encore

$$
(107)\quad \left\{
\begin{aligned}
P_1 = & \int_{S_1} [X\sigma - 2\pi\varepsilon(\sigma+\Sigma)^2\alpha]\,dS \\
& + \int_{\varpi_1} \left(Xe + A\frac{\partial X}{\partial x} + B\frac{\partial Y}{\partial x} + C\frac{\partial Z}{\partial x} \right) d\varpi \\
& - \int_{\varpi_1} \left(1 - \frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial \rho} \right)\left(\mathcal{E}_x\frac{\partial A}{\partial x} + \mathcal{E}_y\frac{\partial B}{\partial x} + \mathcal{E}_z\frac{\partial C}{\partial x} \right) d\varpi, \ldots\ldots; \\
L_1 = & \int_{S_1} \{ y[Z\sigma - 2\pi\varepsilon(\sigma+\Sigma)^2\gamma] - z[Y\sigma - 2\pi\varepsilon(\sigma+\Sigma)^2\beta] \}\,dS \\
& + \int_{\varpi_1} \left[y\left(Ze + A\frac{\partial X}{\partial z} + B\frac{\partial Y}{\partial z} + C\frac{\partial Z}{\partial z} \right) \right. \\
& \qquad \left. - z\left(Ye + A\frac{\partial X}{\partial y} + B\frac{\partial Y}{\partial y} + C\frac{\partial Z}{\partial y} \right) + BZ - CY \right] d\varpi \\
& - \int_{\varpi_1} \left(1 - \frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial \rho} \right)\left[y\left(\mathcal{E}_x\frac{\partial A}{\partial z} + \mathcal{E}_y\frac{\partial B}{\partial z} + \mathcal{E}_z\frac{\partial C}{\partial z} \right) \right. \\
& \qquad \left. - z\left(\mathcal{E}_x\frac{\partial A}{\partial y} + \mathcal{E}_y\frac{\partial B}{\partial y} + \mathcal{E}_z\frac{\partial C}{\partial y} \right) \right] d\varpi, \ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Les dernières intégrales de (105), (106) et (107) représentent une partie de la résultante et du moment résultant des forces exercées sur la polarisation diélectrique par la force électromotrice d'induction. Il y aura lieu d'en tenir compte plus loin (n° 25); faisons donc ici abstraction de ces termes.

Si l'on remarque que $X - 2\pi\varepsilon(\sigma+\Sigma)\alpha, \ldots$ représentent les composantes du champ électrostatique total sur S_1, les formules (105) et (106) montrent que, comme pour les corps rigides 2 et 3, la résultante et le moment résultant peuvent être calculés comme si, entre deux éléments de charge totale (réelle et fictive), s'exerçaient les forces élémentaires définies par la loi de Coulomb.

Remarquons encore que les formules (107), abstraction faite de leurs derniers termes, sont la transposition exacte des formules (93), si le système n'est pas électrisé $[(e, \sigma) = 0]$. Au point de vue résultante et moment résultant des forces qui lui sont appliquées, un diélectrique parfaitement doux déformable se comporte donc également comme un aimant permanent rigide.

Avec la définition du courant de polarisation adoptée par Duhem (n° 16), nous avons vu que le terme en $\mathfrak{D}$ n'existe pas, de sorte que, d'après (102), le travail des forces électriques devient dans cette hypothèse

$$\delta\mathcal{T}'_4 = \int_{\varpi_1} \left| \left[X(e+E) + X\frac{\partial A}{\partial x} + Y\frac{\partial B}{\partial x} + Z\frac{\partial C}{\partial x}\right]\delta x \right| d\varpi$$
$$+ \int_{\varpi_1} \left(-\frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial \rho} | X dA | + \frac{\partial G}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial G}{\partial T} dT \right) d\varpi + \int_{S_1} G | \alpha \delta x | dS$$
$$- \varepsilon \int_{S_1} \left| \left[\frac{\partial V}{\partial x} + 2\pi(\sigma+\Sigma)\alpha \right] \delta x \right| (\sigma + \Sigma) dS + | P_2\xi_2 + L_2\omega_2 + P_3\xi_3 + L_3\omega_3 | .$$

En comparant à (104), on voit que les forces électriques ne se trouvent modifiées qu'en ce qui concerne les actions élémentaires qui s'exercent sur le corps déformable 1. Mais il est facile de voir que leur résultante et leur moment résultant par rapport à l'origine sont encore donnés par les formules (107).

24. Système en repos simplement électrisé. — Comme au n° 22, on peut se demander si les résultats précédents (n° 23) sont bien conformes à ceux qu'on déduirait de la considération d'un système en repos en équilibre électrique et seulement électrisé. Nous allons reconnaître qu'il n'en est pas tout à fait ainsi.

Tout d'abord, le potentiel thermodynamique interne du système étant[1]

$$\mathcal{F}_0 + \int \Theta\, dq + W + \int F d\varpi,$$

dq désignant un élément de charge réelle $ed\varpi$ ou σdS, le travail virtuel des forces intérieures est fourni par l'égalité analogue à (100)

$$\delta\mathcal{T}_i = -\delta_T \mathcal{F}_0 - \delta_T\left(\int \Theta\, dq + W + \int F d\varpi\right),$$

qui doit être ici vérifiée pour toute modification virtuelle laissant constante la charge réelle totale de chacun des corps, c'est-à-dire telle qu'on ait

$$\int_i \delta dq = 0 \qquad , \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Il doit donc exister trois constantes D_1, D_2, D_3, telles qu'on ait pour toute modification virtuelle

$$\delta\mathcal{T}_i = -\delta_T \mathcal{F}_0 - \delta_T\left(\int \Theta\, dq + W + \int F d\varpi\right) + \sum_{i=1}^{i=3} D_i \int_i \delta dq,$$

(1) L. Roy, *loc. cit.*, p. 22.

soit encore d'après (68) et (75)

$$\delta\mathcal{T}_i = -\delta_T\mathcal{F}_0 - \int \delta_T \Theta\, dq - \sum_{i=1}^{i=3} \int_i (\varepsilon V + \Theta - D_i)\,\delta dq \tag{108}$$
$$- \varepsilon \int_{\varpi} V\,\delta(E\,d\varpi) - \varepsilon \int_{S} V\,\delta(\Sigma\, dS)$$
$$- \int_{\varpi_1} \left[\varepsilon \left| \frac{\partial V}{\partial x}\,\delta x \right| (e + E) + \left| \frac{A}{k}(\delta A - dA) \right| \right] d\varpi$$
$$- \varepsilon \int_{S_1} \left| \left[\frac{\partial V}{\partial x} + 2\pi(\sigma + \Sigma)\alpha \right] \delta x \right| (\sigma + \Sigma)\, dS$$
$$+ \int_{\varpi_1} \left(-\frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial \rho} \left| \frac{A}{k}\, dA \right| + \frac{\partial G}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial G}{\partial T}\, dT \right) d\varpi + \int_{S_1} G\,|\alpha\,\delta x|\, dS$$
$$+ |P_2\xi_2 + L_2\omega_2 + P_3\xi_3 + L_3\omega_3| - \int_{\varpi_3} \left| \frac{A}{k}\,\delta A \right| d\varpi.$$

Calculons tout d'abord la seconde ligne de cette égalité. Dans le corps 1, on a d'après (37')

$$\int_{\varpi_1} V\,\delta(E\,d\varpi) + \int_{S_1} V\,\delta(\Sigma\, dS) = \int_{\varpi_1} \left| \frac{\partial V}{\partial x}(\delta A - dA - E\,\delta x) \right| d\varpi - \int_{S_1} \left| \left(\Sigma \frac{\partial V}{\partial x} + \alpha \left| A\,\frac{\partial V}{\partial x} \right| \right) \delta x \right| dS.$$

Dans le corps 2, la seconde ligne de (108) est nulle, puisqu'on y a $\delta(E\,d\varpi, \Sigma\, dS) = 0$. Enfin, dans le corps 3, $\delta(d\varpi, dS) = 0$, de sorte que

$$\int_{\varpi_3} V\,\delta(E\,d\varpi) + \int_{S_3} V\,\delta(\Sigma\, dS) = \int_{\varpi_3} V\,\delta E\,d\varpi + \int_{S_3} V\,\delta\Sigma\, dS$$
$$= \int_{\varpi_3} \left| (\delta A - dA)\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial E}{\partial x}\,\delta x \right| d\varpi - \int_{S_3} V\,|\alpha\, dA + (C\beta - B\gamma)\omega_3|\, dS,$$

d'après (39) et (40), cette dernière égalité restant valable pour une fonction V quelconque. Nous avons ainsi, en additionnant ces résultats partiels

$$\int_{\varpi} V\,\delta(E\,d\varpi) + \int_{S} V\,\delta(\Sigma\, dS) \tag{109}$$
$$= \int_{\varpi_1} \left| \frac{\partial V}{\partial x}(\delta A - dA - E\,\delta x) \right| d\varpi - \int_{S_1} \left| \left(\Sigma \frac{\partial V}{\partial x} + \alpha \left| A\,\frac{\partial V}{\partial x} \right| \right) \delta x \right| dS$$
$$+ \int_{\varpi_3} \left| \frac{\partial V}{\partial x}(\delta A - dA) + V\frac{\partial E}{\partial x}\,\delta x \right| d\varpi - \int_{S_3} V\,|\alpha\, dA + (C\beta - B\gamma)\omega_3|\, dS,$$

de sorte qu'en substituant dans (108), il vient d'après (101)

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{T}_i = & -\delta_T\mathcal{F}_0 - \int \delta_T\Theta\, dq - \sum_{i=1}^{i=3}\int_i (\varepsilon V + \Theta - D_i)\,\delta\, dq \\ & + \int_{\varpi_1} \left| X e\,\delta x - \left(\frac{A}{k} + \varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}\right)(\delta A - dA)\right| d\varpi \\ & - \varepsilon\int_{S_1}\left|\left\{\frac{\partial V}{\partial x}\sigma + \alpha\left[2\pi(\sigma+\Sigma)^2 - \left|A\frac{\partial V}{\partial x}\right|\right]\right\}\delta x\right| dS \\ & + \int_{\varpi_1}\left(-\frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial\rho}\left|\frac{A}{k}\, dA\right| + \frac{\partial G}{\partial\rho}\, d\rho + \frac{\partial G}{\partial T}\, dT\right) d\varpi + \int_{S_1} G\,|\alpha\,\delta x|\, dS \\ & + |P_2\xi_2 + L_2\omega_2 + P_3\xi_3 + L_3\omega_3| \\ & - \int_{\varpi_3}\left|\left(\frac{A}{k} + \varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta A + X\, dA + \varepsilon V\frac{\partial E}{\partial x}\,\delta x\right| d\varpi \\ & + \varepsilon\int_{S_3} V\,|\alpha\, dA + (C\beta - B\gamma)\omega_3|\, dS.\end{aligned}$$

A part les termes en $\delta(A, B, C)$, les deux dernières intégrales peuvent encore se transformer à l'aide des formules (53') et l'on trouve aisément

$$(110)\qquad \begin{aligned} & -\int_{\varpi_3}\left|X\, dA + \varepsilon V\frac{\partial E}{\partial x}\,\delta x\right| d\varpi \\ & + \varepsilon\int_{S_3} V\,|\alpha\, dA + (C\beta - B\gamma)\omega_3|\, dS = \left|\omega_3\int_{\varpi_3}(CY - BZ)\, d\varpi\right|,\end{aligned}$$

de sorte que ces termes ne donnent lieu qu'à un couple supplémentaire sans résultante. Il vient ainsi

$$(111)\qquad \begin{aligned}\delta\mathfrak{T}_i = & -\delta_T\mathcal{F}_0 - \int \delta_T\Theta\, dq - \sum_{i=1}^{i=3}\int_i (\varepsilon V + \Theta - D_i)\,\delta\, dq \\ & + \int_{\varpi_1} \left| X e\,\delta x - \left(\frac{A}{k} + \varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}\right)(\delta A - dA)\right| d\varpi \\ & - \varepsilon\int_{S_1}\left|\left\{\frac{\partial V}{\partial x}\sigma + \alpha\left[2\pi(\sigma+\Sigma)^2 - \left|A\frac{\partial V}{\partial x}\right|\right]\right\}\delta x\right| dS \\ & + \int_{\varpi_1}\left(-\frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial\rho}\left|\frac{A}{k}\, dA\right| + \frac{\partial G}{\partial\rho}\, d\rho + \frac{\partial G}{\partial T}\, dT\right) d\varpi + \int_{S_1} G\,|\alpha\,\delta x|\, dS \\ & + |P_2\xi_2 + L_2\omega_2 + P_3\xi_3 + l_3\omega_3| - \int_{\varpi_3}\left|\left(\frac{A}{k} + \varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta A\right| d\varpi,\end{aligned}$$

en posant, d'après (75) et (110),

$$(112)\quad \left\{ \begin{aligned} l_3 = & \int_{\varpi_3} (yZ_{12} - zY_{12}) e\, d\varpi + \int_{S_3} (yZ_{12} - zY_{12}) \sigma\, dS \\ & + \int_{\varpi_3} \Big[y \Big(A \frac{\partial X_{12}}{\partial z} + B \frac{\partial Y_{12}}{\partial z} + C \frac{\partial Z_{12}}{\partial z} \Big) \\ & \quad - z \Big(A \frac{\partial X_{12}}{\partial y} + B \frac{\partial Y_{12}}{\partial y} + C \frac{\partial Z_{12}}{\partial y} \Big) - BZ_3 + CY_3 \Big] d\varpi, \ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

et (X_3, Y_3, Z_3) étant le champ électrostatique dû aux charges réelles et fictives du seul corps 3. On voit que les expressions (75) et (112) de P_3, Q_3, R_3, l_3, m_3, n_3, relatives au diélectrique parfaitement doux rigide, sont, pour $(e, \sigma) = 0$, la transposition exacte des formules (56) relatives à l'aimant parfaitement doux rigide.

Cela posé, revenons à l'égalité (111) et considérons tout d'abord une modification virtuelle isothermique laissant le système en repos; il reste

$$\sum_{i=1}^{i=3} \int_i (\varepsilon V + \Theta - D_i) \delta dq + \int_{\varpi_3 + \varpi_1} \left| \left(\frac{A}{k} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right) \delta A \right| d\varpi = 0$$

et comme cette égalité doit être vérifiée quels que soient les δdq et les $\delta(A, B, C)$, on en conclut qu'on doit avoir :

En tout point de chacun des trois corps du système

$$\varepsilon V + \Theta - D_i = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, 3);$$

En chaque point des diélectriques parfaitement doux 3 et 1

$$(113)\qquad \frac{A}{k} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \ldots\ldots,$$

cas particulier du second groupe (86). Nous retrouvons donc les conditions bien connues de l'équilibre électrique, d'après lesquelles l'égalité (111) se simplifie. Ses deux premiers termes représentant respectivement le travail des forces intérieures du système ramené à l'état neutre et celui des forces électrocapillaires[1],

---

[1] Il est facile de voir que ce travail coïncide avec le terme II de l'égalité (90), si l'on néglige la quantité $\delta \frac{\partial \Theta}{\partial T}$.

il vient pour le travail virtuel des forces électriques du système en repos et en équilibre électrique

$$(114)\quad \delta\mathcal{C}''_4 = \int_{\varpi_1} |X\delta x|\, e\, d\varpi - \varepsilon \int_{S_1} \left| \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}\sigma + \alpha\left[2\pi(\sigma+\Sigma)^2 - \left|A\frac{\partial V}{\partial x}\right|\right]\right\}\delta x \right| dS$$

$$+ \int_{\varpi_1} \left(-\frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial \rho}|X\,dA| + \frac{\partial G}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial G}{\partial T}dT \right) d\varpi + \int_{S_1} G|\alpha\delta x|\, dS$$

$$+ |P_2\xi_2 + L_2\omega_2 + P_3\xi_3 + l_3\omega_3|.$$

On voit que cette égalité diffère de la précédente (104), surtout en ce qui concerne les pression et force par unité de volume s'exerçant sur le corps déformable 1. Cette différence tient à ce que l'égalité (69) s'est trouvée en partie remplacée par l'égalité toute différente (109) et à ce que les termes en $\mathfrak{D}$ de (102), qu'avait introduits le courant de polarisation, n'existent plus ici. On en conclut que les forces électriques ne sont pas les mêmes lorsque le système est en équilibre et lorsqu'il subit une transformation. Rien n'est changé toutefois en ce qui concerne le diélectrique permanent rigide 2. Si, d'autre part, on calcule la résultante et le moment résultant par rapport à l'origine des forces élémentaires appliquées au corps 1, on retrouve encore les formules (107), débarrassées de la force électromotrice d'induction du fait des équations d'équilibre (113), et avec cette différence que le couple par unité de volume (BZ — CY,...) n'existe plus. Ces formules ainsi modifiées deviennent donc, pour $(e, \sigma) = 0$, la transposition exacte des formules (97) et (98), abstraction faite de leurs termes électromagnétiques. Si nous remarquons enfin que, pour $(e, \sigma) = 0$, les expressions (75) et (112) de $P_2, \ldots, L_2, \ldots; P_3, \ldots, l_3, \ldots$ sont la transposition exacte des expressions (55) et (56) de $\mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_3, \ldots, \mathfrak{L}_3, \ldots$ et l'égalité (114) la transposition de (91), nous en concluons qu'à l'équilibre chacun des trois diélectriques considérés se comporte, au point de vue de la résultante et du moment résultant des forces qui lui sont appliquées, comme l'aimant qui lui correspond. Nous avons vu au contraire que, dans l'état de mouvement au sens énergétique du mot, ces trois diélectriques se comportent, au même point de vue, comme un aimant permanent rigide.

25. Forces exercées par la force électromotrice d'induction sur la polarisation diélectrique. — Le travail élémentaire de ces forces est, d'après (90),

$$(115)\qquad \delta\mathcal{C}_5 = \int_{\varpi_1} \left| \mathcal{E}_x \left[A\mathfrak{D} + \left(1 - \frac{\rho}{k}\frac{\partial k}{\partial \rho}\right) dA \right] \right| d\varpi.$$

Or on a, par intégrations par parties et d'après (73),

$$\int_{\varpi_1} |A\mathcal{E}_x| \mathfrak{D} d\varpi = \int_{S_1} |A\mathcal{E}_x| \Big| (-\alpha + \lambda |\lambda\alpha|) \delta x \Big| dS$$

$$+ \int_{\varpi_1} \Big| \left(-\frac{\partial |A\mathcal{E}_x|}{\partial x} + \frac{\partial \lambda^2 |A\mathcal{E}_x|}{\partial x} + \frac{\partial \lambda\mu |A\mathcal{E}_x|}{\partial y} + \frac{\partial \lambda\nu |A\mathcal{E}_x|}{\partial z} \right) \delta x \Big| d\varpi,$$

d'où

$$\delta\mathcal{T}_s = \int_{S_1} |A\mathcal{E}_x| \Big| (-\alpha + \lambda |\lambda\alpha|) \delta x \Big| dS$$

$$+ \int_{\varpi_1} \Big| \Big[-\frac{\partial |A\mathcal{E}_x|}{\partial x} + \frac{\partial \lambda^2 |A\mathcal{E}_x|}{\partial x} + \frac{\partial \lambda\mu |A\mathcal{E}_x|}{\partial y} + \frac{\partial \lambda\nu |A\mathcal{E}_x|}{\partial z}$$

$$+ \left(1 - \frac{\rho}{k} \frac{\partial k}{\partial \rho} \right) \left(\mathcal{E}_x \frac{\partial A}{\partial x} + \mathcal{E}_y \frac{\partial B}{\partial x} + \mathcal{E}_z \frac{\partial C}{\partial x} \right) \Big] \delta x \Big| d\varpi.$$

Cette égalité exprime que la force électromotrice d'induction exerce, en chaque point de la surface S_1, la pression de composantes

$$|A\mathcal{E}_x| (-\alpha + \lambda |\lambda\alpha|), \ldots\ldots$$

et, en chaque point du volume ϖ_1, la force par unité de volume de composantes

$$-\frac{\partial |A\mathcal{E}_x|}{\partial x} + \frac{\partial \lambda^2 |A\mathcal{E}_x|}{\partial x} + \frac{\partial \lambda\mu |A\mathcal{E}_x|}{\partial y} + \frac{\partial \lambda\nu |A\mathcal{E}_x|}{\partial z}$$

$$+ \left(1 - \frac{\rho}{k} \frac{\partial k}{\partial \rho} \right) \left(\mathcal{E}_x \frac{\partial A}{\partial x} + \mathcal{E}_y \frac{\partial B}{\partial x} + \mathcal{E}_z \frac{\partial C}{\partial x} \right), \ldots\ldots$$

La résultante et le moment résultant de ces forces élémentaires doivent être calculés en ajoutant à leurs composantes respectives les dernières intégrales des formules (107); dès lors il est facile de voir que cette résultante et ce moment sont nuls. Autrement dit, les forces exercées par la force électromotrice d'induction sur un diélectrique polarisé constituent un système nul; on comprend donc pourquoi les corps rigides 2 et 3 ne sont pas intervenus dans l'expression du travail de ces forces.

Avec la définition du courant de polarisation adoptée par Duhem (n° 16), le terme en $\mathfrak{D}$ n'existant pas, on voit que les actions élémentaires de la force électromotrice d'induction se réduisent à la force par unité de volume

$$\left(1 - \frac{\rho}{k} \frac{\partial k}{\partial \rho} \right) \left(\mathcal{E}_x \frac{\partial A}{\partial x} + \mathcal{E}_y \frac{\partial B}{\partial x} + \mathcal{E}_z \frac{\partial C}{\partial x} \right), \ldots\ldots$$

appliquée en chaque point du volume ϖ_1. La résultante et le moment résultant des forces correspondantes, aux composantes desquelles il faut ajouter respectivement les dernières intégrales des formules (107), sont donc encore nuls comme précédemment.

26. Forces électrodynamiques. — Le travail élémentaire des forces électrodynamiques est, d'après (90),

$$\delta\mathfrak{T}_6 = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int \left| f\left(\mathrm{F}\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \mathrm{G}\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \mathrm{H}\frac{\partial\delta z}{\partial x} + d\mathrm{F}\right)\right| d\varpi, \tag{116}$$

soit encore et par intégrations par parties

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{T}_6 = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int |f\alpha||\mathrm{F}\delta x|\,d\mathrm{S}\\ &+\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\left|\left[g\left(\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial x}-\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial y}\right)-h\left(\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial z}-\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x}\right)-\mathrm{F}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\right]\delta x\right| d\varpi.\end{aligned}$$

Mais, en chaque point des corps rigides 2 et 3, les composantes $\delta(x, y, z)$ doivent recevoir leurs valeurs (53) et (53'), de sorte que, après transformation d'intégrales de surfaces en intégrales de volumes, il vient en définitive

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{T}_6 = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int_{\mathrm{S}_1} |f\alpha||\mathrm{F}\delta x|\,d\mathrm{S}\\ &+\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int_{\varpi_1}\left|\left[g\left(\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial x}-\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial y}\right)-h\left(\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial z}-\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x}\right)-\mathrm{F}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\right]\delta x\right| d\varpi\\ &+|\mathrm{P}'_2\xi_2+\mathrm{L}'_2\omega_2+\mathrm{P}'_3\xi_3+\mathrm{L}'_3\omega_3|,\end{aligned} \tag{117}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{P}'_2 &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int_{\varpi_2}\left(f\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial x}+g\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial x}+h\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x}\right)d\varpi,\ldots\ldots;\\ \mathrm{L}'_2 &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int_{\varpi_2}\left[y\left(f\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial z}+g\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial z}+h\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial z}\right)\right.\\ &\qquad\left.-z\left(f\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial y}+g\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial y}+h\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial y}\right)+g\mathrm{H}-h\mathrm{G}\right]d\varpi,\ldots\ldots,\end{aligned}\right. \tag{118}$$

avec les mêmes expressions, soit (118'), pour $\mathrm{P}'_3, \ldots, \mathrm{L}'_3, \ldots, \varpi_3$ y remplaçant simplement ϖ_2.

Dès lors, l'égalité (117) exprime qu'en chaque point de la surface S_1 s'exerce la pression de composantes

$$-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}|f\alpha|(\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H}); \tag{119}$$

qu'en chaque point du volume ϖ_1 s'exerce la force par unité de volume de composantes

$$\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[g\left(\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial x}-\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial y}\right)-h\left(\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial z}-\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x}\right)-\mathrm{F}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\right],\ldots\ldots; \tag{120}$$

que les forces électrodynamiques appliquées aux corps rigides 2 et 3 se réduisent par rapport à l'origine et respectivement aux forces (P'_2, Q'_2, R'_2), (P'_3, Q'_3, R'_3) et aux couples (L'_2, M'_2, N'_2), (L'_3, M'_3, N'_3) donnés par (118) et (118') et calculés à partir des pression et force par unité de volume (119) et (120). Les formules (118) et (118') expriment que, pour chacun de ces corps, la résultante et le moment résultant peuvent également être calculés comme s'il s'y exerçait la force par unité de volume de composantes

$$\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(f\frac{\partial F}{\partial x}+g\frac{\partial G}{\partial x}+h\frac{\partial H}{\partial x}\right),\ldots\ldots$$

et le couple par unité de volume de composantes

$$\frac{\mathfrak{A}^2}{2}(gH-hG,\ hF-fH,\ fG-gF).$$

La résultante et le moment résultant des forces électrodynamiques qui s'exercent sur le corps déformable 1 sont également donnés par (118), où l'indice 2 est remplacé par l'indice 1.

Les parenthèses de (120) font apparaître le champ magnétique $-\sqrt{\varepsilon'}(\mathfrak{L}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R})$ dû aux courants, puisqu'on a [1]

$$\mathfrak{L}=\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z}\right),\ldots\ldots;$$

de sorte que, si les courants du corps considéré sont uniformes, c'est-à-dire si l'on a

$$(121)\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|=0,\qquad |f\alpha|=0,$$

l'action élémentaire des courants du système entier sur les courants de ce corps se réduit à la force par unité de volume de composantes

$$-\frac{\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\varepsilon'}}\sqrt{\varepsilon'}(h\mathfrak{Q}-g\mathfrak{R},\ f\mathfrak{R}-h\mathfrak{L},\ g\mathfrak{L}-f\mathfrak{Q}).$$

Cette force par unité de volume est donc, multiplié par $\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}:\sqrt{\varepsilon'}$, le produit vectoriel du champ magnétique dû aux courants par la densité de courant au point considéré. C'est la loi de Grassmann généralisée.

---

[1] L. Roy, *loc. cit.*, p. 41.

27. Forces électromagnétiques. — Le travail élémentaire des forces électromagnétiques est, d'après (90),

$$\delta\mathcal{T}_7 = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\int\left|f\left(\Phi\,\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}+\Psi\,\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}+\Omega\,\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}+\delta\Phi\right)\right|d\varpi \tag{122}$$
$$+\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_3}|\mathcal{L}\,\delta\mathcal{A}|\,d\varpi+\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1}|\mathcal{L}(\delta\mathcal{A}-d\mathcal{A})|\,d\varpi+\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1}\frac{\rho}{\varkappa}\,\frac{\partial\varkappa}{\partial\rho}\,|\mathcal{L}\,d\mathcal{A}|\,d\varpi.$$

Le calcul que nous avions fait(1) du terme en $\delta\Phi$ supposait un aimant permanent rigide; il n'est donc valable ici que pour le corps 2.

Tout d'abord, les formules (83) s'écrivent encore

$$\Phi(x,\,y,\,z,\,t) = -\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{M}}{\partial z},\;\ldots\ldots,$$

en posant

$$(\mathcal{L},\,\mathcal{M},\,\mathcal{N}) = \int\frac{(\mathcal{A}',\,\mathcal{B}',\,\mathcal{C}')}{r}\,d\varpi', \tag{123}$$

r étant, comme au n° 6, la distance du point $M(x,\,y,\,z)$ au point $M'(x',\,y',\,z')$ de l'élément de volume $d\varpi'$ et les fonctions accentuées se rapportant au point M'. On a alors

$$\delta\Phi = \left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,\delta x\right| + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\,dt,$$

avec

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}\,dt = \delta'\left(-\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{M}}{\partial z}\right),$$

cette dernière variation étant relative au déplacement $\delta'(x',\,y',\,z')$, pendant le temps dt, de chaque point M' et des variations correspondantes $\delta'(\mathcal{A}',\,\mathcal{B}',\,\mathcal{C}')$ des composantes de l'intensité d'aimantation en ce point.

Soit alors $\delta'\mathcal{L} = \mathcal{L}'-\mathcal{L}$ la variation correspondante de la fonction $\mathcal{L}$ au point *fixe* $M(x,\,y,\,z)$; on a, comme cas particulier de la formule (26),

$$\delta'\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial x} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial\,\delta'\mathcal{L}}{\partial x},\;\ldots\ldots,$$

d'où, avec la notation définie par (28),

$$\delta\Phi = d\Phi - \frac{\partial\,\delta'\mathcal{N}}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta'\mathcal{M}}{\partial z},$$

$$f\,\delta\Phi = f\,d\Phi - \frac{\partial}{\partial y}(f\,\delta'\mathcal{N}) + \frac{\partial}{\partial z}(f\,\delta'\mathcal{M}) + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta'\mathcal{N} - \frac{\partial f}{\partial z}\,\delta'\mathcal{M}.$$

(1) L. Roy, *loc. cit.*, p. 68.

On a donc, par intégrations par parties,

$$\int |f\delta\Phi|\, d\varpi = \int |f d\Phi| + \mathrm{A},$$

en posant

$$(124)\qquad \mathrm{A} = -\int \left|\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\delta'\mathfrak{L}\right| d\varpi - \int |(\beta h - \gamma g)\delta'\mathfrak{L}|\, dS,$$

de sorte que l'égalité (122) devient

$$(125)\quad \delta\mathfrak{T}_7 = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\int \left| f\left(\Phi\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \Psi\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \Omega\frac{\partial\delta z}{\partial x} + d\Phi\right)\right| d\varpi + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\,\mathrm{A}$$
$$+\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_3} |\mathfrak{L}\delta\mathcal{A}|\, d\varpi + \sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1} |\mathfrak{L}(\delta\mathcal{A} - d\mathcal{A})|\, d\varpi + \sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1} \frac{\rho}{\varkappa}\frac{\partial\varkappa}{\partial\rho} |\mathfrak{L} d\mathcal{A}|\, d\varpi.$$

La première intégrale étant celle de (116), où les fonctions F, G, H sont simplement remplacées par Φ, Ψ, Ω, conduit à un développement de la forme (117) et (118); de sorte que nous n'avons à développer que la fonction A, en calculant les variations $\delta'(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Or on a ici

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_3, \qquad \text{avec} \qquad \mathfrak{L}_i = \int_{\varpi_i} \frac{\mathcal{A}'}{r}\, d\varpi'$$

et l'expression de $\delta'\mathfrak{L}_i$ dépendant de l'indice i du corps considéré.

Pour l'aimant parfaitement doux déformable 1, on a

$$\delta'\mathfrak{L}_1 = \int_{\varpi_1} \left[\left(\frac{\delta'\mathcal{A}'}{r} + \mathcal{A}'\delta'\frac{1}{r}\right) d\varpi' + \frac{\mathcal{A}'}{r}\delta' d\varpi'\right].$$

Or

$$\int_{\varpi_1} \frac{\mathcal{A}'}{r}\delta' d\varpi' = \int_{\varpi_1} \frac{\mathcal{A}'}{r}\left|\frac{\partial\delta x'}{\partial x'}\right| d\varpi' = -\int_{S_1} \frac{\mathcal{A}'}{r} |\alpha'\delta x'|\, dS'$$
$$-\int_{\varpi_1} \left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\mathcal{A}'}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial\mathcal{A}'}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial\mathcal{A}'}{\partial z'}\delta z'\right) + \mathcal{A}'\left|\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\delta x'\right|\right] d\varpi',$$

α', β', γ' étant les cosinus directeurs de la demi-normale intérieure au point (x', y', z') de S_1, et, comme la dernière quantité entre traits est $\delta'\frac{1}{r}$, puisque cette variation n'est relative qu'aux coordonnées x', y', z', il vient avec la notation (28)

$$(126)\qquad \delta'\mathfrak{L}_1 = \int_{\varpi_1} \frac{\delta'\mathcal{A}' - d\mathcal{A}'}{r}\, d\varpi' - \int_{S_1} \frac{\mathcal{A}'}{r} |\alpha'\delta x'|\, dS'.$$

Pour l'aimant permanent rigide 2, qui se déplace en entraînant son aimantation, on a[1]

$$\delta'\mathcal{A}' = \mathcal{C}'\omega_2' - \mathcal{B}'\omega_2'', \qquad \delta'\mathcal{B}' = \mathcal{A}'\omega_2'' - \mathcal{C}'\omega_2, \qquad \delta'\mathcal{C}' = \mathcal{B}'\omega_2 - \mathcal{A}'\omega_2',$$

d'où

$$(127) \qquad \delta'\mathcal{L}_2 = \int_{\varpi_2}\left(\frac{\mathcal{C}'\omega_2' - \mathcal{B}'\omega_2''}{r} + \mathcal{A}'\left|\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\delta x'\right|\right)d\varpi'$$

et, pour l'aimant parfaitement doux rigide 3,

$$\delta'\mathcal{L}_3 = \int_{\varpi_3}\left(\frac{\delta'\mathcal{A}'}{r} + \mathcal{A}'\left|\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\delta x'\right|\right)d\varpi'.$$

Remplaçons alors dans (124) les $\delta'(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$ par leurs valeurs

$$\delta'\mathcal{L} = \delta'\mathcal{L}_1 + \delta'\mathcal{L}_2 + \delta'\mathcal{L}_3, \ldots\ldots;$$

nous sommes amenés à poser

$$(128) \qquad A = A_1 + A_2 + A_3,$$

d'où, d'après (124) et (126),

$$A_1 = -\int_{\varpi}\left|\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\left(\int_{\varpi_1}\frac{\delta'\mathcal{A}' - d\mathcal{A}'}{r} - \int_{S_1}\frac{\mathcal{A}'}{r}|\alpha'\delta x'|\,dS'\right)\right|d\varpi$$
$$-\int_{S}\left|(\beta h - \gamma g)\left(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right)\right|dS,$$

les points représentant la somme des deux intégrales de la première ligne.

Or, la première des formules (84) s'écrit encore en intégrant par parties

$$\mathcal{L}(x, y, z, t) = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int_{\varpi}\left(\frac{\partial h'}{\partial y'} - \frac{\partial g'}{\partial z'}\right)\frac{d\varpi'}{r} + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int_{S}\frac{\beta' h' - \gamma' g'}{r}dS',$$

d'où

$$(129) \quad \mathcal{L}' = \mathcal{L}(x', y', z', t) = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int_{\varpi}\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\frac{d\varpi}{r} + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int_{S}\frac{\beta h - \gamma g}{r}dS.$$

---

[1] Il n'y a pas à accentuer ici les composantes $\omega_2, \omega_2', \omega_2''$, puisqu'elles sont les mêmes pour tous les points du solide.

Il vient ainsi, en intervertissant les intégrations,

$$\mathrm{A}_1 = -\int_{\varpi_1} \left| (\delta \mathcal{A}' - d\mathcal{A}') \left[\int_{\varpi} \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) \frac{d\varpi}{r} + \int_{\mathrm{S}} \frac{\beta h - \gamma g}{r} \, d\mathrm{S} \right] \right| d\varpi'$$
$$+ \int_{\mathrm{S}_1} \left| \mathcal{A}' \left[\cdots\cdots\cdots \right] \right| |\alpha' \delta x'| \, d\mathrm{S}',$$

d'où

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathrm{A}_1 = -\int_{\varpi_1} |\mathcal{L}'(\delta'\mathcal{A}' - d\mathcal{A}')| \, d\varpi' + \int_{\mathrm{S}_1} |\mathcal{A}'\mathcal{L}'| |\alpha'\delta x'| \, d\mathrm{S}',$$

expression où les accents sont maintenant devenus inutiles; soit finalement

$$(130) \qquad \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathrm{A}_1 = -\int_{\varpi_1} |\mathcal{L}(\delta\mathcal{A} - d\mathcal{A})| \, d\varpi + \int_{\mathrm{S}_1} |\mathcal{A}\mathcal{L}| |\alpha\delta x| \, d\mathrm{S}.$$

On a de même, d'après (124) et (127),

$$\mathrm{A}_2 = -\int_{\varpi} \left| \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) \int_{\varpi_2} \left(\frac{\mathcal{C}'\omega_2' - \mathcal{B}'\omega_2''}{r} + \mathcal{A}' \left| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \delta x' \right| \right) d\varpi' \right| d\varpi$$
$$- \int_{\mathrm{S}} \left| (\beta h - \gamma g) \int_{\varpi_2} \left(\cdots\cdots\cdots \right) d\varpi' \right| d\mathrm{S}$$
$$= -\int_{\varpi_2} \left| \left(\mathcal{C}'\omega_2' - \mathcal{B}'\omega_2'' + \mathcal{A}' \left| \frac{\partial}{\partial x'} \delta x' \right| \right) \left[\int_{\varpi} \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) \frac{d\varpi}{r} + \int_{\mathrm{S}} \frac{\beta h - \gamma g}{r} \, d\mathrm{S} \right] \right| d\varpi',$$

soit encore, d'après (129) et en effaçant les accents devenus inutiles,

$$(131) \qquad \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathrm{A}_2 = -\int_{\varpi_2} \left| \left(\mathcal{C}\omega_2' - \mathcal{B}\omega_2'' + \mathcal{A} \left| \frac{\partial}{\partial x} \delta x \right| \right) \mathcal{L} \right| d\varpi$$
$$= -\int_{\varpi_2} \left| (\mathcal{B}\mathcal{R} - \mathcal{C}\mathcal{Q})\omega_2 + \left(\mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} \right) \delta x \right| d\varpi.$$

On trouve de même

$$(132) \qquad \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathrm{A}_3 = -\int_{\varpi_3} \left| \mathcal{L}\delta\mathcal{A} + \left(\mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} \right) \delta x \right| d\varpi.$$

L'égalité (125) devient ainsi, d'après la remarque faite sur sa première intégrale et d'après (128), (130), (131) et (132),

$$
\begin{aligned}
(133)\qquad \delta\mathfrak{T}_7 = & -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\int_{S_1} |f\alpha||\Phi\,\delta x|\,dS \\
& + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1}\left|\left[g\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-h\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)-\Phi\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\right]\delta x\right|d\varpi \\
& \qquad + |\mathfrak{L}'_2\xi_2+\mathcal{L}'_2\omega_2+\mathfrak{L}'_3\xi_3+\mathcal{L}'_3\omega_3| \\
& + \sqrt{\varepsilon'}\int_{S_1}|\mathcal{A}\mathfrak{L}||\alpha\,\delta x|\,dS - \sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_2}\left|(\mathcal{B}\mathfrak{R}-\mathcal{C}\mathfrak{Q})\,\omega_2+\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial x}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x}\right)\delta x\right|d\varpi \\
& - \sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_3}\left|\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial x}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x}\right)\delta x\right|d\varpi + \sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1}\frac{\rho}{\varkappa}\frac{\partial\varkappa}{\partial\rho}|\mathfrak{L}\,d\mathcal{A}|\,d\varpi,
\end{aligned}
$$

où l'on a posé

$$
(134)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{L}'_2 &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_2}\left(f\frac{\partial\Phi}{\partial x}+g\frac{\partial\Psi}{\partial x}+h\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)d\varpi, \ldots\ldots; \\
\mathcal{L}'_2 &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_2}\left[y\left(f\frac{\partial\Phi}{\partial z}+g\frac{\partial\Psi}{\partial z}+h\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)\right. \\
&\qquad \left. - z\left(f\frac{\partial\Phi}{\partial y}+g\frac{\partial\Psi}{\partial y}+h\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)+g\Omega-h\Psi\right]d\varpi, \ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

et avec les mêmes expressions, soit (134'), pour $\mathfrak{L}'_3, \ldots, \mathcal{L}'_3, \ldots, \varpi_3$ y remplaçant simplement ϖ_2.

Pour donner à l'égalité (133) sa forme définitive, il ne reste plus qu'à remplacer, dans les intégrales étendues aux volumes ϖ_2 et ϖ_3, $\delta(x, y, z)$ par leurs valeurs (53) et (53'); il vient ainsi

$$
\begin{aligned}
(135)\quad \delta\mathfrak{T}_7 = & -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\int_{S_1}|f\alpha||\Phi\,\delta x|\,dS + \sqrt{\varepsilon'}\int_{S_1}|\mathcal{A}\mathfrak{L}||\alpha\,\delta x|\,dS \\
& + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1}\left|\left[g\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-h\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)-\Phi\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\right]\delta x\right|d\varpi \\
& + \sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1}\frac{\rho}{\varkappa}\frac{\partial\varkappa}{\partial\rho}\left|\left(\mathfrak{L}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}+\mathfrak{Q}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x}+\mathfrak{R}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}\right)\delta x\right|d\varpi \\
& + |(\mathfrak{L}'_2+\mathfrak{L}''_2)\,\xi_2+(\mathcal{L}'_2+\mathcal{L}''_2)\,\omega_2+(\mathfrak{L}'_3+\mathfrak{L}''_3)\,\xi_3+(\mathcal{L}'_3+\mathcal{L}''_3)\,\omega_3|,
\end{aligned}
$$

en posant

$$
(136)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\mathcal{L}''_2 &= -\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_2}\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial x}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x}\right)d\varpi,\ldots\ldots;\\
\mathcal{L}''_2 &= -\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_2}\Bigg[y\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial z}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial z}\right)\\
&\qquad -z\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial y}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial y}\right)+\mathcal{B}\mathcal{R}-\mathcal{C}\mathcal{Q}\Bigg]d\varpi,\ldots\ldots;\\
\mathcal{L}''_3 &= -\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_3}\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial x}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x}\right)d\varpi,\ldots\ldots;\\
\mathcal{L}''_3 &= -\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_3}\Bigg[y\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial z}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial z}\right)\\
&\qquad -z\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial y}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial y}\right)\Bigg]d\varpi,\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Interprétons maintenant l'égalité (135), dans laquelle il y a lieu de distinguer le travail des forces exercées par l'aimantation sur les courants et celui des forces exercées par les courants sur l'aimantation. Cette égalité exprime les résultats suivants.

A. *Actions de l'aimantation sur les courants.* — En chaque point de la surface S_1 du corps déformable 1, s'exerce la pression de composantes

$$(137)\qquad -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\,|f\alpha|\,(\Phi,\Psi,\Omega);$$

En chaque point du volume ϖ_1 du même corps, s'exerce en outre la force par unité de volume de composantes

$$(138)\qquad \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\left[g\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-h\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)-\Phi\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\right],\ldots\ldots$$

La résultante $(\mathcal{L}'_1, \mathcal{Q}'_1, \mathcal{R}'_1)$ de toutes ces forces élémentaires et leur moment résultant $(\mathcal{L}'_1, \mathcal{M}'_1, \mathcal{N}'_1)$ par rapport à l'origine sont donnés par les formules (134), où l'indice 2 est remplacé par l'indice 1.

La résultante et le moment résultant des forces exercées par l'aimantation sur les courants des aimants 2 et 3 sont donnés par les formules (134) et (134'). Les actions élémentaires (137), (138) et les formules (134) étant ainsi valables pour chacun des trois corps considérés, fournissent le théorème suivant :

Qu'il s'agisse d'un corps déformable ou rigide, la résultante et le moment résultant des forces, que l'aimantation du système exerce sur les courants de ce corps, peuvent être calculés à l'aide des actions élémentaires (137), (138), ou comme si, en chaque point du corps, s'exerçait la force par unité de volume de composantes

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\left(f\frac{\partial\Phi}{\partial x}+g\frac{\partial\Psi}{\partial x}+h\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right),\ldots\ldots$$

et le couple par unité de volume de composantes

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}(g\Omega-h\Psi,\ h\Phi-f\Omega,\ f\Psi-g\Phi).$$

B. *Actions des courants sur l'aimantation.* — En chaque point de la surface S_1 de l'aimant parfaitement doux déformable 1, s'exerce la pression normale

$$\sqrt{\varepsilon'}\,|\mathcal{A}\mathfrak{L}| \tag{139}$$

comptée positivement vers l'intérieur du corps;

En chaque point du volume ϖ_1 du même corps, s'exerce en outre la force par unité de volume de composantes

$$\sqrt{\varepsilon'}\,\frac{\rho}{\mathrm{x}}\frac{\partial\mathrm{x}}{\partial\rho}\left(\mathfrak{L}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}+\mathfrak{Q}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x}+\mathfrak{R}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}\right),\ldots\ldots \tag{140}$$

Pour calculer la résultante $(\mathfrak{L}''_1, \mathfrak{Q}''_1, \mathfrak{R}''_1)$ et le moment résultant $(\mathfrak{L}''_1, \mathfrak{M}''_1, \mathfrak{N}''_1)$ par rapport à l'origine de toutes les forces que les courants exercent sur l'aimantation du corps 1, il faut ajouter aux composantes calculées d'après (139) et (140) les dernières intégrales de (97) et (98); il vient ainsi

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon'}}\mathfrak{L}''_1 &= \int_{S_1}|\mathcal{A}\mathfrak{L}|\,\alpha\,dS+\int_{\varpi_1}\frac{\rho}{\mathrm{x}}\frac{\partial\mathrm{x}}{\partial\rho}\left(\mathfrak{L}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}+\mathfrak{Q}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x}+\mathfrak{R}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}\right)d\varpi\\ &+\int_{\varpi_1}\left(1-\frac{\rho}{\mathrm{x}}\frac{\partial\mathrm{x}}{\partial\rho}\right)\left(\mathfrak{L}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}+\mathfrak{Q}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x}+\mathfrak{R}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}\right)d\varpi,\ldots\ldots\end{aligned}$$

On voit que les termes en $\frac{\partial\mathrm{x}}{\partial\rho}$ se détruisent, de sorte qu'en transformant l'intégrale de surface en intégrale de volume, il vient la première des six formules suivantes

$$(141)\quad\left\{\begin{aligned}\mathfrak{L}''_1 &= -\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1}\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial x}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x}\right)d\varpi,\ldots\ldots;\\ \mathfrak{L}''_1 &= -\sqrt{\varepsilon'}\int_{\varpi_1}\left[y\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial z}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial z}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial z}\right)\right.\\ &\qquad\left.-z\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial y}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial y}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial y}\right)\right]d\varpi,\ldots\ldots,\end{aligned}\right.$$

les autres s'obtenant d'une manière analogue.

La résultante et le moment résultant des forces exercées par les courants sur l'aimantation des corps 2 et 3 sont donnés par les formules (136). Les formules (136) et (141) conduiraient à des théorèmes analogues à celui qui a été énoncé à la fin du précédent paragraphe.

28. Actions totales des courants et de l'aimantation sur les courants. — En ajoutant les résultats des nos 24 et 25 A, on fait apparaître les composantes (89) du potentiel vecteur total $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ et l'on voit que l'ensemble des courants et de l'aimantation du système exerce :

En chaque point de la surface d'un corps déformable parcouru par des courants, la pression de composantes

$$-|f\alpha|(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H});$$

En chaque point intérieur de ce corps, la force par unité de volume de composantes

$$(142) \qquad g\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial x} - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right) - h\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z} - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}\right) - \mathcal{F}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|, \ldots\ldots$$

Qu'il s'agisse d'ailleurs d'un corps déformable ou rigide, la résultante et le moment résultant des forces totales que les courants et l'aimantation exercent sur les courants de ces corps peuvent être calculés à partir de cette pression et de cette force par unité de volume.

Les parenthèses de (142) font apparaître l'induction magnétique $(\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y, \mathcal{B}_z)$, puisqu'on a [1]

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathcal{B}_x = -\sqrt{\varepsilon'}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y} - \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial z}\right), \ldots\ldots;$$

de sorte que, si les courants du corps considéré sont uniformes, c'est-à-dire vérifient les égalités (121), l'action totale des courants et de l'aimantation sur les courants de ce corps se réduit à la force par unité de volume de composantes

$$\frac{\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\varepsilon'}}(h\mathcal{B}_y - g\mathcal{B}_z, f\mathcal{B}_z - h\mathcal{B}_x, g\mathcal{B}_x - f\mathcal{B}_y).$$

Cette force par unité de volume est donc, multiplié par $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} : \sqrt{\varepsilon'}$, le produit vectoriel de l'induction magnétique par la densité de courant au point considéré;

---

[1] L. Roy, *loc. cit.*, p. 57. La présence de la constante $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}$ résulte de la remarque déjà faite à propos des formules (88) et (89).

elle est normale au plan des deux vecteurs et dirigée vers la gauche de l'observateur d'Ampère placé le long du vecteur (f, g, h) et regardant dans le sens du vecteur induction.

Il en résulte que la force qui s'exerce sur un élément de filet de courant uniforme d'intensité I est, multiplié par $\dfrac{\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\varepsilon'}}\,\mathrm{I}$, le produit vectoriel de l'induction magnétique par la longueur du tronçon.

Revenons au cas général de courants quelconques. Quel que soit le corps considéré, il est facile de vérifier que la résultante et le moment résultant peuvent encore être calculés comme si, en chaque point du corps, s'exerçait la force par unité de volume de composantes

$$f\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}+g\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}+h\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \ldots\ldots$$

et le couple par unité de volume de composantes

$$g\mathcal{H}-h\mathcal{G},\quad h\mathcal{F}-f\mathcal{H},\quad f\mathcal{G}-g\mathcal{F}.$$

L'intérêt de cette seconde règle de calcul est son analogie avec celle qui fait connaître la résultante et le moment résultant des forces qui s'exercent sur un aimant permanent rigide placé dans le champ magnétique d'un autre aimant. On voit, en effet, que la résultante et le moment résultant des forces totales, que les courants et l'aimantation exercent sur les courants de l'un des corps du système, sont les mêmes que si ce corps était un aimant permanent rigide d'intensité d'aimantation (f, g, h), placé dans le champ magnétique $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ d'un autre aimant.

29. Actions totales de l'aimantation et des courants sur l'aimantation. — En ajoutant d'une part les pressions (95) et (139), d'autre part les forces par unité de volume (96) et 140), on fait apparaître les composantes

$$\mathfrak{X}=\mathcal{X}-\sqrt{\varepsilon'}\,\mathfrak{L}, \ldots\ldots \tag{143}$$

du champ magnétique total $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$, en un point $\mathrm{M}(x, y, z)$ quelconque, dû à l'aimantation et aux courants du système entier et l'on voit que l'ensemble de l'aimantation et des courants du système exerce :

En chaque point de la surface de l'aimant parfaitement doux déformable 1, la tension normale

$$2\pi\varepsilon'\mathcal{J}^2+|\mathcal{A}\mathfrak{X}|-\mathcal{G}$$

comptée positivement vers l'extérieur du corps;

En chaque point intérieur de cet aimant, la force par unité de volume de composantes

$$-\frac{\rho}{\varkappa}\frac{\partial\varkappa}{\partial\rho}\left(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}+\mathfrak{y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x}+\mathfrak{z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}\right)+\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\mathrm{T}}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial x},\ldots\ldots$$

La résultante $(\mathcal{X}_1''', \mathcal{Y}_1''', \mathcal{Z}_1''')$ et le moment résultant $(\mathcal{L}_1''', \mathcal{M}_1''', \mathcal{N}_1''')$ par rapport à l'origine de ces actions élémentaires résultent alors de l'addition membre à membre des formules (97), (98) et (141), abstraction faite toutefois des dernières intégrales de (97), (98) dont il a été tenu compte dans le calcul de (141). Il vient ainsi d'après (143)

$$(144)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathcal{X}_1''' &= \int_{\varpi_1}\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x}\right)d\varpi-2\pi\varepsilon'\int_{S_1}\mathcal{J}^2\alpha\,dS,\ldots\ldots;\\
\mathcal{L}_1''' &= \int_{\varpi_1}\left[y\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z}\right)\right.\\
&\qquad\left.-z\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y}\right)\right]d\varpi-2\pi\varepsilon'\int_{S_1}\mathcal{J}^2(y\gamma-z\beta)\,dS,\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

On voit de même, d'après (93), (94), (136) et (143) que la résultante et le moment résultant par rapport à l'origine des forces exercées par l'ensemble de l'aimantation et des courants sur l'aimant permanent rigide 2 et sur l'aimant parfaitement doux rigide 3 ont pour expressions

$$(145)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathcal{X}_2+\mathcal{X}_2'' &= \int_{\varpi_2}\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x}\right)d\varpi-2\pi\varepsilon'\int_{S_2}\mathcal{J}^2\alpha\,dS,\ldots\ldots;\\
\mathcal{L}_2+\mathcal{L}_2'' &= \int_{\varpi_2}\left[y\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z}\right)-z\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\mathcal{B}\mathfrak{z}-\mathcal{C}\mathfrak{y}\right]d\varpi-2\pi\varepsilon'\int_{S_2}\mathcal{J}^2(y\gamma-z\beta)\,dS,\ldots\ldots;\\
\mathcal{X}_3+\mathcal{X}_3'' &= \int_{\varpi_3}\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x}\right)d\varpi-2\pi\varepsilon'\int_{S_3}\mathcal{J}^2\alpha\,dS,\ldots\ldots:\\
\mathcal{L}_3+\mathcal{L}_3''' &= \int_{\varpi_3}\left[y\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z}\right)\right.\\
&\qquad\left.-z\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y}\right)\right]d\varpi-2\pi\varepsilon'\int_{S_3}\mathcal{J}^2(y\gamma-z\beta)\,dS,\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Les formules (144) et (145) montrent qu'abstraction faite de la tension de M. Liénard et en ne considérant que la résultante et le moment résultant, l'aimantation et les courants n'agissent sur l'aimantation que par le champ magnétique total ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) qu'ils créent ; elles fournissent les théorèmes suivants :

I. La résultante et le moment résultant des forces que l'aimantation et les courants d'un système exercent sur un aimant parfaitement doux déformable ou rigide de ce système peuvent être calculés comme si cet aimant était soumis, en chaque point de sa surface, à la *tension* normale $2\pi\varepsilon'\mathcal{I}^2$ et, en chaque point intérieur, à la force par unité de volume de composantes

$$\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial x}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial x},\ldots\ldots;$$

II. La même règle s'applique à un aimant permanent rigide du système, sauf à adjoindre à cette tension et à cette force par unité de volume le couple par unité de volume de composantes

$$\mathcal{B}\mathfrak{Z}-\mathcal{C}\mathfrak{Y},\quad \mathcal{C}\mathfrak{X}-\mathcal{A}\mathfrak{Z},\quad \mathcal{A}\mathfrak{Y}-\mathcal{B}\mathfrak{X}.$$

30. Cas d'un système en repos. — Les expressions des actions intérieures (pressions, forces et couples par unité de volume, résultantes et moments résultants), que nous venons d'obtenir dans le cas général d'un système en mouvement, restent valables pour un système en repos, puisque la vitesse n'y figure nulle part explicitement. La vitesse (a, b, c) du point matériel qui est en (x, y, z) à l'instant t n'intervient en effet que dans l'expression de la densité $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ du courant de polarisation, qui est d'après (71′)

$$\mathfrak{u}=\frac{\partial A}{\partial t}+a\left|\frac{\partial A}{\partial x}\right|+\frac{\partial}{\partial y}(Ab-Ba)-\frac{\partial}{\partial z}(Ca-Ac),\ldots\ldots$$

Il suffit donc de réduire chaque second membre à son premier terme, dans le cas d'un système en repos.

TABLE DU MÉMOIRE

CHAPITRE I. — *Préliminaires.*

CHAPITRE II. — *Variation de* $\mathfrak{W} + \int \mathfrak{F} d\varpi$.

CHAPITRE III. — *Les autres termes de l'équation fondamentale.*

CHAPITRE IV. — *Forces intérieures.*