

R. SAINT-GUILHEM

## Transformations sphériques réelles

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4<sup>e</sup> série*, tome 2 (1938), p. 59-143

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1938\\_4\\_2\\_\\_59\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1938_4_2__59_0)

© Université Paul Sabatier, 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# TRANSFORMATIONS SPHÉRIQUES RÉELLES

Par M. R. SAINT-GUILHEM

Professeur à l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne.

---

## SOMMAIRE

### CHAPITRE PREMIER. — Généralités.

A) *Préliminaires.* — Rappel des propriétés des déplacements et des retournements, des similitudes directes et inverses de l'espace.

B) *Définitions et théorèmes généraux.* — Toute transformation sphérique de l'espace peut être considérée comme le produit d'une inversion par un retournement ou par un déplacement, d'où la division en deux classes : directe et inverse.

### CHAPITRE II. — Les transformations sphériques directes $\mathcal{C}$ .

A) Classification intrinsèque en huit espèces par la considération des sphères conservées dans la transformation.

B) *Étude des sphériques directes « simples ».* — Rotations, translations, et homothéties anallagmatiques (constituant la quatrième espèce).

Cas particulier : la transposition (constituant la huitième espèce); c'est une involution de l'espace.

C) *Les transformations de première (et de cinquième) espèces.* — Toute  $\mathcal{C}_1$  admet deux points doubles réels; elle peut être transformée en une similitude directe dont le rapport  $k$  et l'angle  $\alpha$  sont les invariants caractéristiques de la transformation  $\mathcal{C}_1$  dans le groupe sphérique.  $\mathcal{C}_1$  conserve en outre une sphère, un cercle, et une infinité simple de cyclides de Dupin.

Cas particulier :  $\alpha = \pi$ ; il correspond aux transformations de cinquième espèce, qui admettent en plus un faisceau linéaire de sphères doubles.

D) *Les transformations de deuxième (et de sixième) espèces.* — Une  $\mathcal{C}_2$  admet pour image un déplacement; elle a un seul invariant  $\alpha$ , admet un point double et un cercle double, et conserve encore une infinité simple de cyclides.

Cas particulier : les transformations de sixième espèce, qui admettent en plus un faisceau linéaire de sphères doubles.

E) *Les transformations de troisième et de septième espèces.* — 1° Une telle transformation ne peut être transformée en une similitude; elle n'a ni sphère double, ni point double, mais *deux cercles doubles réels conjugués* ( $\Gamma$ ) et ( $\bar{\Gamma}$ ).

2° On peut la considérer comme le produit de deux « rotations » autour de ( $\Gamma$ ) et ( $\bar{\Gamma}$ ), d'angles respectifs  $\alpha$  et  $\beta$ , qui constituent les invariants caractéristiques de  $\mathcal{C}_3$  dans le groupe sphérique; il y a conservation d'une infinité simple de cylindres de Dupin.

3° Dans le cas où  $\alpha = \beta$ , la transformation est dite *paratactique*; elle admet une congruence de cercles doubles. Toutes les congruences paratactiques sont semblables entre elles; une sphérique quelconque transforme une paratactique  $\mathcal{P}$  en une autre  $\mathcal{P}'$  semblable à la première. Propriétés de la congruence paratactique. Théorème de Villarceau. Les transformations paratactiques de même espèce et de même sphère principale forment un groupe. Cercles paratactiques.

4° Les transformations  $\mathcal{C}_3$  où l'un des invariants est égal à  $\pi$  constituent la septième espèce; les  $\mathcal{C}_3'$  admettent un faisceau linéaire de sphères doubles. Si le deuxième invariant est égal à  $\pi$ , on a l'inversion négative  $\mathcal{J}$ , qui est, avec la transposition, la seule sphérique directe réciproque.

### CHAPITRE III. — Les transformations sphériques inverses $\mathcal{C}$ .

A) Toute  $\mathcal{C}$  admet au moins une sphère double réelle.

B) Toute  $\mathcal{C}$  peut être transformée, par une sphérique convenable, en une similitude inverse de l'espace, dont le rapport  $k$  et l'angle  $\alpha$  sont les invariants caractéristiques de la transformation envisagée dans le groupe sphérique. La figure invariante d'une  $\mathcal{C}$  est la même que celle d'une  $\mathcal{C}_1$  ou d'une  $\mathcal{C}_2$ .

C) Étude sommaire des différents types de transformations  $\mathcal{C}$ : similitude image correspondant à chaque cas particulier quand on donne  $\mathcal{C}$  sous la forme  $\Phi\mathcal{D}$ . Les seules  $\mathcal{C}$  qui soient réciproques sont l'inversion (ordinaire, c'est-à-dire à puissance positive) et la transformation produit de trois inversions orthogonales deux à deux (qui a pour image la symétrie par rapport à un point).

### CHAPITRE IV. — Application aux diverses décompositions des transformations sphériques.

A) Sous-groupes divers du groupe sphérique.

B) Étude du produit de  $n$  inversions dans l'espace. Décomposition d'une  $\mathcal{C}$  ou  $\mathcal{C}$  en produit d'inversions.

C) Décomposition d'une sphérique en un produit de deux sphériques « simples ».

D) Conclusion. Tableau résumant les propriétés caractéristiques des différents types.

La présente étude est la suite de celle qui a paru dans *L'Enseignement Mathématique* (1937, n<sup>os</sup> 3-4, p. 145) sous le titre : « Les transformations circulaires réelles du plan ». Les renvois à ce premier travail seront indiquées dans le texte par la mention « Plan » suivie du numéro du paragraphe.

Les deux études ont été faites dans le même esprit : nous nous proposons ici d'étudier les transformations sphériques de l'espace par la géométrie pure élémentaire, sans aucune considération d'éléments imaginaires, en transposant convenablement les propriétés classiques des similitudes. Cette méthode peut présenter un avantage pédagogique; en tout cas elle permet de faire très aisément une étude complète des différents types de transformations sphériques, directes et inverses. En ce qui concerne celles-ci, il n'y a, semble-t-il, aucune raison de les laisser dans l'ombre comme on le fait d'habitude, sinon peut-être que leur étude est trop facile, car elle se ramène immédiatement à celle des similitudes inverses, contrairement à ce qui arrive pour les sphériques directes. (Fait signalé, Plan § 7, p. 159.)

Parmi les différents cas particuliers nous trouvons tout naturellement celui des transformations *paratactiques*, qui se présentent ainsi de la manière la plus simple. Il est à remarquer que nous sommes conduits d'abord aux *transformations* paratactiques et au groupe des paratactiques de même espèce et même sphère principale, et ensuite seulement aux *cercles* paratactiques, contrairement à l'ordre suivi par les différents auteurs cités ci-dessous. De même le problème des cercles perpendiculaires communs à deux cercles donnés ne se présente pas dans notre exposé.

Plus généralement, on peut remarquer que les diverses configurations formées par deux cercles s'introduisent d'elles-mêmes avec les différents types de transformations : par exemple la notion de cercles conjugués se présente naturellement quand on étudie la rotation anallagmatique, etc...

A propos des paratactiques, remarquons encore que la méthode élémentaire que nous suivrons montre pourquoi ces transformations peuvent être beaucoup plus intéressantes que les autres : c'est que ce sont les seules qui ne peuvent être « réduites »; car une transformation sphérique quelconque transforme une opération paratactique en une autre qui lui est semblable; autrement dit l'effet, sur une paratactique, d'une sphérique est le même que celui d'une similitude. (Au contraire, et c'est cette propriété que nous utilisons, les autres types de sphériques peuvent être mis sous des formes plus simples, si on les transforme par une sphérique convenable). Cette remarque justifie en même temps l'étude des transformations et congruences paratactiques au point de vue *euclydien*, et non pas seulement *anallagmatique*.

Nous ne donnerons pas de bibliographie relative à un sujet aussi classique que des transformations sphériques; rappelons seulement quelques mémoires des plus

importants relatifs aux transformations paratactiques, et dans lesquels on peut trouver des références plus complètes :

A. BLOCH, *Journal de Mathématiques*, 1924, p. 51.

HADAMARD, *Nouvelles Annales*, 1927, p. 257.

GAMBIER, *Journal de Mathématiques*, 1930, p. 179.

ROBERT, *Id.*, p. 201.

Nous employons la terminologie de M. Hadamard. Nous introduisons en plus les termes de foyer-objet et foyer-image d'une transformation sphérique, comme dans l'étude des transformations circulaires, à cause de leur caractère intuitif; il ne peut y avoir de confusion avec les foyers d'un cercle; d'ailleurs nous n'avons pas à considérer ceux-ci, puisque nous n'introduisons *jamais* d'éléments imaginaires.

Ce travail ayant été rédigé il y a quelque temps, on y trouvera, pour désigner le produit de plusieurs transformations  $A_1, A_2, A_3$  effectuées dans cet ordre, le symbole  $A_1A_2A_3$  et non pas  $A_3A_2A_1$ , comme on écrirait de préférence aujourd'hui, depuis le développement du calcul symbolique des opérateurs. L'ancienne notation n'a pas d'inconvénient pour les transformations géométriques<sup>(1)</sup>.

---

(1) C'est elle qui est utilisée par exemple dans les ouvrages suivants :

HADAMARD, *Leçons de Géométrie élémentaire*.

M. D'OCAGNE, *Cours de Géométrie de l'École Polytechnique*.

## CHAPITRE PREMIER

### Généralités.

#### A) Préliminaires.

§ 1. — Nous supposons connu :

- 1° les résultats de notre étude sur les transformations circulaires réelles dans le plan et sur la sphère (*L'Enseignement Mathématique*, 1937, nos 3-4, p. 145-179);
- 2° les propriétés classiques de l'inversion dans l'espace;
- 3° les résultats suivants concernant les similitudes dans l'espace, que nous rappelons sans démonstration :

§ 2. — a) *Tout déplacement  $\mathcal{D}$  de l'espace peut être considéré, et cela d'une seule manière<sup>(1)</sup>, comme le produit d'une rotation  $\mathcal{R}$  d'angle  $\alpha$  autour d'une droite  $D$ , dite axe du déplacement, par une translation  $\mathcal{L}$  parallèle à l'axe  $D$ , de mesure algébrique  $l$  sur cet axe.*

On écrira 
$$\mathcal{D} = \mathcal{R}\mathcal{L}.$$

Nous compterons  $\alpha$  entre 0 et  $2\pi$  ( $0 \leq \alpha < 2\pi$ ), moyennant l'orientation préalable de l'espace, et celle de l'axe  $D$ ; par suite, le signe de  $l$  est déterminé.

Si  $\alpha \neq 0$  et  $\neq \pi$ , et  $l \neq 0$ , il n'y a pas de point double dans le déplacement; il y a une droite double : l'axe  $D$ ; point de cercles doubles, ni de plans doubles, ni de sphères doubles. Dans le groupe  $\Sigma$  des similitudes de l'espace,  $\mathcal{D}$  présente un seul invariant : l'angle  $\alpha$  de la rotation composante  $\mathcal{R}$ . Le produit de deux déplacements de même axe  $D$ , d'angles respectifs  $\alpha$  et  $\alpha'$ , de translations  $l$  et  $l'$ , est un déplacement de même axe, d'angle  $\alpha + \alpha'$ , et de translation  $l + l'$ . Les déplacements d'axe fixe  $D$  forment donc un sous-groupe du groupe des déplacements de l'espace.

*Cas particuliers.* —  $\alpha$ ) Si  $l = 0$ ,  $\mathcal{D}$  se réduit à une rotation  $\mathcal{R}$  d'angle  $\alpha$ . Tous les points de la droite  $D$  sont doubles. Tous les cercles situés dans un plan

---

<sup>(1)</sup> Sauf si  $\mathcal{D}$  se réduit à une translation  $\mathcal{L}$ , auquel cas on peut choisir l'axe  $D$  d'une double infinité de manières.

perpendiculaire à  $D$ , et centrés sur  $D$ , sont doubles; de même toutes les sphères-centrées sur  $D$ , y compris les plans perpendiculaires à  $D$ . Si  $\alpha = 0$ ,  $\mathcal{R}$  se réduit à la transformation identique; si  $\alpha = \pi$ , on a une symétrie par rapport à la droite  $D$ , ou *renversement* autour de  $D$ . Ce renversement  $r$  est *réciproque*; c'est le seul déplacement jouissant de cette propriété. Pour que  $\mathcal{D}$  soit involutif d'ordre  $m$ , il faut en effet que

$$\left| \begin{array}{l} ml = 0, \\ mz = 2k\pi \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left| \begin{array}{l} l = 0, \\ z = \frac{2k\pi}{m}. \end{array} \right.$$

§) Si  $\alpha = 0$ ,  $\mathcal{D}$  se réduit à une translation  $\mathcal{L}$ . On a une double infinité de droites doubles : toutes les droites parallèles à  $D$ , et une double infinité de plans doubles : les plans parallèles à  $D$ . Mais il n'y a aucun point double à distance finie.

§ 3. — b) Toute similitude directe  $\mathcal{S}$  proprement dite (c'est-à-dire ne se réduisant pas à un déplacement) peut être considérée, et cela d'une seule manière, comme le produit d'une homothétie directe  $\mathcal{H}$ , de rapport  $k$  et de centre  $\omega$ , par une rotation  $\mathcal{R}$ , d'angle  $\alpha$ , autour d'un axe  $D$  passant par  $\omega$ .

$$\text{On écrira} \quad \mathcal{S} = \mathcal{H}\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{H}.$$

Le rapport  $k$  est un nombre positif différent de un. Dans la suite nous réserverons le nom d'*homothétie* aux homothéties *directes*. L'angle  $\alpha$  est compté entre 0 et  $2\pi$ , l'axe  $D$  étant orienté.

Dans le cas général où  $\alpha \neq 0$  et  $\alpha \neq \pi$ , il y a un point double  $\omega$ , une droite-double  $D$ , un plan double  $\Pi$  (perpendiculaire à  $D$  en  $\omega$ ). Il n'y a point de cercles doubles ni de sphères doubles. Dans le groupe total  $\Sigma$  des similitudes de l'espace,  $\mathcal{S}$  possède les invariants  $k$  et  $\alpha$ .

Les similitudes ayant même figure invariante (droite  $D$  et plan  $\Pi$ ) forment un groupe, le produit de  $\mathcal{S}(k, \alpha)$  par  $\mathcal{S}'(k', \alpha')$  étant  $\mathcal{S}''(k'' = kk', \alpha'' = \alpha + \alpha')$ .

*Cas particuliers.* —  $k$  est toujours différent de un; mais on peut avoir  $\alpha = 0$ , ou bien  $\alpha = \pi$ . Dans le premier cas,  $\mathcal{S}$  se réduit à une homothétie  $\mathcal{H}$  présentant une double infinité de droites doubles (celles passant par  $\omega$ ) et une double infinité de plans doubles (ceux passant par  $\omega$ ). Dans le second cas,  $\alpha = \pi$ , on a  $\mathcal{S} = \mathcal{H}r$ ; les plans passant par  $D$  sont doubles; les droites passant par  $\omega$  sont deux à deux conjuguées; de même les plans passant par  $\omega$ . [C'est là un fait général : si une transformation réciproque  $r$  conserve l'ensemble des éléments doubles d'une transformation  $\mathcal{H}$ , la transformation  $\mathcal{H}r$  détermine une involution sur ces éléments; car si  $E\mathcal{H} = E$ , et  $Er = E'$ , on a  $(E.\mathcal{H}r).\mathcal{H}r = E'\mathcal{H}r = E'r = E]$ .

§ 4. — c) On passe d'une figure de l'espace à une autre qui lui est inversement égale par un *retournement* D.

Tout *retournement* peut être considéré comme le produit d'une symétrie  $\Pi$  par rapport à un plan, dit plan de *retournement*, soit par une rotation  $\mathcal{R}$  d'angle  $\alpha$  autour d'une droite D, dite *axe de retournement*, perpendiculaire au plan ( $\Pi$ ) en un point  $\omega$  (*centre de retournement*); soit par une translation  $\mathcal{L}$  parallèle à ce plan, définie par le vecteur  $\vec{\mathcal{L}}$ .

Le premier cas est celui du *retournement-rotation* R, le second celui du *retournement-translation* L.

*Retournement-translation.* — Il n'y a pas de point double à distance finie. Les droites parallèles à  $\vec{\mathcal{L}}$  dans le plan ( $\Pi$ ) sont doubles; les plans parallèles à  $\vec{\mathcal{L}}$  perpendiculaires à ( $\Pi$ ) également; les plans et les droites parallèles à  $\vec{\mathcal{L}}$  sont deux à deux conjugués. Dans le groupe  $\Sigma$ , L n'admet pas d'invariant et constitue un seul type intrinsèque.

Le produit de deux L de même plan  $\Pi$  est une translation de vecteur  $\vec{\mathcal{L}} + \vec{\mathcal{L}'}$ . En particulier  $L^2$  est une translation de vecteur  $2\vec{\mathcal{L}}$ . Donc L ne peut être réciproque sans se réduire à la symétrie  $\Pi$ .

*Retournement-rotation.* — R admet le point double  $\omega$ , la droite double D, le plan double  $\Pi$ ; en outre les sphères de centre  $\omega$  sont doubles, les cercles traces de ces sphères sur  $\Pi$  également. Les points de D, les sphères centrées sur D (en particulier les plans perpendiculaires à D), les cercles centrés sur D de plans parallèles à  $\Pi$ , sont deux à deux conjugués dans la transformation. (Cf. remarque du § 3, *in fine*.)

Dans le groupe  $\Sigma$ , R a pour invariant l'angle  $\alpha$ . Le produit de deux R de même figure invariante, d'angles  $\alpha$  et  $\alpha'$ , est une rotation d'angle  $\alpha + \alpha'$ .

Si  $\alpha = 0$ , R se réduit à la *symétrie*  $\Pi$ . Tous les points du plan ( $\Pi$ ) sont doubles; toutes les sphères centrées sur  $\Pi$  également, en particulier les plans perpendiculaires au plan ( $\Pi$ ); de même les cercles orthogonaux à ( $\Pi$ ), intersections de deux sphères doubles. La transformation est réciproque.

Si  $\alpha = \pi$ , il en est de même; cette transformation  $\Pi r$  est une *symétrie par rapport au point*  $\omega$ . Sont doubles les droites et les plans issus de  $\omega$ , les sphères de centre  $\omega$ .

Ce sont là les seuls *retournements* réciproques; car pour que  $R^2 = 1$ , il faut et il suffit que  $2\alpha = 2k\pi$ ,  $\alpha = 0$  ou  $\pi$ . Et nous avons vu qu'un *retournement-translation* ne pouvait être réciproque sans se réduire à la symétrie  $\Pi$ .

*Remarque.* — On peut ajouter qu'un *retournement* ne peut être involutif d'ordre impair; il peut l'être d'ordre pair, et le sera effectivement d'ordre  $2m$  si



$2m\alpha = 2k\pi$ , ou  $\alpha = \frac{k\pi}{m}$ , c'est-à-dire  $\alpha = 0, \frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \dots, \frac{(2m-1)\pi}{m}$ .

Il y a  $2m$  retournements involutifs d'ordre  $2m$ . Le « carré » de chacun d'eux est une rotation d'angle multiple de  $\frac{2\pi}{m}$ , c'est-à-dire involutive d'ordre  $m$ . Sur ces  $2m$  retournements, il y en a en réalité seulement  $m+1$  de distincts, car on passe de  $\alpha = k\frac{\pi}{m}$  à  $\alpha = (2m-k)\frac{\pi}{m}$  par un simple changement d'orientation de l'axe (D). (Cf. application § 66.)

§ 5. — d) *Toute similitude inverse S proprement dite, c'est-à-dire ne se réduisant pas à un retournement, peut être considérée, et cela d'une seule manière, comme le produit d'une homothétie  $\mathcal{H}$  de rapport  $k$  et de centre  $\omega$  par un retournement-rotation d'angle  $\alpha$ , et de même centre  $\omega$ .*

Le plan de retournement II, l'axe de retournement D, le point  $\omega$ , sont appelés respectivement *plan*, *axe* et *centre* de la similitude inverse. Le rapport de similitude  $k$  est un nombre positif différent de un. L'angle  $\alpha$  est compris entre 0 et  $2\pi$  (axe D orienté).  $k$  et  $\alpha$  sont les invariants de S dans le groupe  $\Sigma$ , comme pour les similitudes directes.

Dans le cas général ( $\alpha \neq 0$  et  $\alpha \neq \pi$ ) on a un point double  $\omega$ , une droite double D, un plan double II, comme dans une similitude directe. Il n'y a ni cercles doubles, ni sphères doubles, ni éléments deux à deux conjugués.

*Cas particuliers.* — Si  $\alpha = \pi$ , S se réduit à une *homothétie inverse* H. Les droites et les plans passant par  $\omega$  sont doubles; il n'y a ni cercles doubles, ni sphères doubles, ni éléments conjugués.

Si  $\alpha = 0$ , S est de la forme  $\mathcal{H}II$  ou  $Hr$ ; les droites et les plans issus de  $\omega$  sont deux à deux conjugués; les droites issues de  $\omega$  dans le plan II sont doubles; de même les plans passant par D.

Dans chacune de ces deux familles particulières, chaque transformation est définie par la valeur de l'invariant unique  $k$ .

*Sous-groupes.* — Le produit de deux similitudes inverses  $S(k, \alpha)$  et  $S'(k', \alpha')$  ayant même plan et même axe, c'est-à-dire même figure invariante, est une similitude *directe*  $\mathcal{S}$  de même figure invariante, de rapport  $kk'$  et d'angle  $\alpha + \alpha'$ . En particulier, on voit que S ne peut être réciproque que si  $k^2 = 1$ , c'est-à-dire si elle se réduit à un retournement et, par suite, à une transformation du type II ou  $IIr$ .

Les similitudes directes  $\mathcal{S}$  et inverses S de même figure invariante forment un groupe.

§ 6. — *Équations intrinsèques des différents types de similitudes.* — Il est intéressant d'avoir pour chaque transformation un système d'équations *intrinsèque*, c'est-à-

dire gardant la même forme si la transformation envisagée est transformée d'une manière quelconque dans le groupe dont elle fait partie. Pour les similitudes, considérées dans le groupe  $\Sigma$ , on obtient très facilement de telles équations.

*Cas général* :  $k \neq 1$ . — Supposons d'abord  $\alpha \neq 0$  et  $\alpha \neq \pi$ . La figure invariante est constituée par un plan  $\Pi$ , et une droite  $D$  perpendiculaire à  $\Pi$  en  $\omega$ . En définissant un point  $M$  de l'espace par ses coordonnées sphériques :  $\omega M = r$ ,  $(\omega \widetilde{M}, D) = \varphi$ , et l'angle  $\theta$  du plan  $(D, M)$  avec un plan fixe passant par  $(D)$ , on obtient les équations de  $\mathcal{J}$  sous la forme

$$r' = kr, \quad \varphi' = \varphi, \quad \theta' = \theta + \alpha;$$

et celles de  $S$  sous la forme

$$r' = kr, \quad \varphi' = \pi - \varphi, \quad \theta' = \theta + \alpha.$$

(Dans ce système de coordonnées,  $r$  est essentiellement positif,  $\varphi$  est compris entre 0 et  $\pi$ ,  $\theta$  entre 0 et  $2\pi$ , l'axe  $D$  étant orienté). Les équations précédentes restent bien les mêmes si l'on transforme  $\mathcal{J}$  ou  $S$  par une autre similitude quelconque  $\Sigma$ ; en effet  $k$  et  $\alpha$  sont invariants dans le groupe  $\Sigma$ .

En faisant  $\alpha = 0$  dans les équations précédentes, on obtient celles des transformations  $\mathcal{H}$ , et de  $\mathcal{H}\Pi = Hr$ ; en faisant  $\alpha = \pi$ , celles de  $\mathcal{H}r$  et de  $H$ , respectivement.

*Cas où  $k = 1$* . — Prenons d'abord un déplacement d'axe  $D$ . On peut définir  $M$  par sa distance  $\varphi$  à  $D$ , par l'angle  $\theta$  du plan  $(D, M)$  avec un plan fixe passant par  $D$ , et par l'abscisse  $x$  de sa projection orthogonale sur  $D$  (coordonnées cylindriques). Les équations de  $\mathcal{D}$  sont alors

$$(\mathcal{D}) \quad \varphi' = \varphi, \quad x' = x + l, \quad \theta' = \theta + \alpha.$$

En particulier les équations d'une rotation et d'une translation en coordonnées cylindriques sont respectivement

$$(\mathcal{R}_1) \quad \varphi' = \varphi, \quad x' = x, \quad \theta' = \theta + \alpha;$$

$$(\mathcal{L}) \quad \varphi' = \varphi, \quad x' = x + l, \quad \theta' = \theta.$$

On remarque que les équations  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{L})$  ne constituent pas à proprement parler des systèmes intrinsèques, car leur forme seule est invariante; le coefficient  $l$  n'est pas un invariant, à l'inverse de  $\alpha$ .

*Remarque.* — Les équations de la rotation en coordonnées sphériques s'obtiennent en faisant  $k = 1$  dans les équations de  $\mathcal{J}$ ; cela donne

$$(\mathcal{R}_2) \quad r' = r, \quad \varphi' = \varphi, \quad \theta' = \theta + \alpha.$$

Passons maintenant aux *retournements*. Le retournement-rotation en coordonnées cylindriques, est représenté par

$$(R_1) \quad \varphi' = \varphi, \quad x' = -x, \quad \theta' = \theta + \alpha;$$

et en coordonnées sphériques par

$$(R_2) \quad r' = r, \quad \varphi' = \pi - \varphi, \quad \theta' = \theta + \alpha.$$

Le retournement-translation est représenté en coordonnées cylindriques par

$$(L_1) \quad \varphi' = \varphi, \quad x' = x + l, \quad \theta' = \pi - \theta.$$

On peut utiliser aussi dans ce cas des coordonnées cartésiennes

$$(L_2) \quad x' = x + l, \quad y' = y, \quad z' = -z.$$

Pour  $l = 0$ , on a les équations de la symétrie II.

Sur les équations précédentes, on retrouve aisément toutes les propriétés intrinsèques des différents types de similitudes, que nous avons rappelées dans les paragraphes 2 à 5 : éléments doubles, couples d'éléments conjugués, sous-groupes, transformations réciproques, etc...

On remarque par ailleurs que pour le déplacement  $\mathcal{D}$ , la translation  $\mathcal{L}$ , le retournement-translation L, on n'a pas d'équations intrinsèques dans le groupe  $\Sigma$ . (Cela arrive donc chaque fois que la transformation contient une translation comme composante de sa forme canonique.)

§ 7. — *Résumé des propriétés des similitudes  $\Sigma$ .* — Elles sont rappelées par le tableau suivant : au-dessous de chaque S on a indiqué la transformation directe  $\mathcal{S} = S^*$ , et au-dessus les invariants caractéristiques, qui sont les mêmes pour les deux transformations directe et inverse se correspondant ainsi. Les types réciproques sont soulignés.

Invariants ...	néant	néant		$\alpha$		$k$		$k$ et $\alpha$
Tr. inverse...	<u>II</u> , <u>IIr</u>	L	<u>R<sub>z</sub></u> 2	R	néant	H, Hr	<u>H R<sub>z</sub></u> 2, <u>H R<sub>3z</sub></u> 2	S
Tr. directe...	1	<u>L</u>	<u>r</u>	<u>R</u>	<u>D</u>	<u>H</u>	<u>Hr</u>	<u>S</u>

*Remarque.* — Un déplacement donné  $\mathcal{D}$  n'est le carré d'aucun retournement; mais on peut le considérer comme le carré d'un autre déplacement, de deux manières différentes. Plus généralement, on peut chercher les « racines carrées » d'une

similitude  $\Sigma$ , c'est-à-dire les similitudes  $\Sigma_i$  telles que  $\Sigma_i^2 = \Sigma$ . On voit qu'une similitude inverse n'admet pas de racine carrée, car  $\Sigma_i^2$  est toujours une similitude directe, que  $\Sigma_i$  soit inverse ou directe. Au contraire, si  $\Sigma$  est directe, elle peut admettre a priori comme racines carrées des similitudes directes ou inverses; la recherche de celles-ci est immédiate d'après le tableau ci-dessus; celle des « racines carrées directes » est aussi facile. Il suffit de remarquer que si  $\mathcal{G}_1^2 = \mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G}_1$  a même figure invariante que  $\mathcal{G}$ , et que  $\alpha$  étant défini à  $2\pi$  près, il y a deux solutions (correspondant à  $\frac{\alpha}{2}$  et  $\frac{\alpha}{2} + \pi$ ) chaque fois qu'il intervient une rotation comme composante de  $\mathcal{G}$ . Cette dernière remarque vaut pour les « racines carrées inverses »; mais il peut y avoir alors dans certains cas une indétermination venant de la symétrie  $\Pi$  composante de  $S_i$ ; car le plan (II) peut être choisi arbitrairement si  $\mathcal{G} = \mathcal{I}$ , et avec un paramètre arbitraire si  $\mathcal{G} = \mathcal{Q}$  ou  $\mathcal{R}$ .

### B) Définitions et théorèmes généraux.

§ 8. — *Définition.* — Soit une transformation ponctuelle, biunivoque et continue, de l'espace; nous dirons qu'elle est *sphérique* si elle transforme une sphère quelconque en une autre sphère. Le mot « sphère » désigne ici une sphère proprement dite ou un plan. Nous considérons exclusivement les transformations sphériques réelles.

Une transformation sphérique  $\Gamma$  transforme évidemment un cercle quelconque de l'espace en un autre cercle; le mot « cercle » désigne, bien entendu, un cercle proprement dit ou une droite.

Si la sphérique  $\Gamma$  conserve une sphère (ou un plan)  $\Sigma$ , elle détermine sur  $\Sigma$  une transformation circulaire.

Les sphériques  $\Gamma$  forment évidemment un groupe.

Exemples de transformations  $\Gamma$  : une similitude, une inversion, un produit d'inversions et de similitudes en nombre quelconque.

§ 9. — **THÉORÈME I.** — *Si une transformation  $\Gamma$  est définie pour tous les points de l'espace euclidien, c'est une similitude.*

Soit en effet  $A$  un point quelconque de l'espace, d'homologue  $A'$ , et trois plans  $P_1, P_2, P_3$  passant par  $A$  et n'ayant pas d'autre point commun que  $A$ . Ces trois plans ont pour transformés trois sphères (ou plans)  $P'_1, P'_2, P'_3$  passant par  $A'$ . Si  $P'_1, P'_2, P'_3$  ne sont pas tous les trois des plans, ils ont en commun au moins un point  $B'$  distinct de  $A'$ ; celui-ci est l'homologue d'un point  $B$ , distinct de  $A$ , et commun à  $P_1, P_2, P_3$ . Il y a donc contradiction; par suite  $P'_1, P'_2, P'_3$  sont des plans, et non des sphères.

Donc  $\Gamma$  transforme chaque plan de l'espace en un autre plan; c'est une homographie; et puisqu'elle transforme les sphères en sphères, c'est une similitude.

*Corollaire.* — Dans une transformation  $\Gamma$  ne se réduisant pas à une similitude, il y a au moins un point  $\Phi$  de l'espace qui n'a pas d'homologue, et un point  $\Psi$  qui n'est l'homologue d'aucun autre.

**THÉORÈME II.** — *Les sphères passant par un point  $\Phi$  ont pour homologues des plans; les plans de l'espace ont pour homologues des sphères passant par un point  $\Psi$ .*

Démonstration analogue à celle du théorème I.

*Corollaire.* — *Il y a un seul point  $\Phi$  et un seul point  $\Psi$ .*

Car s'il y avait par exemple deux points  $\Phi$ , soient  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ , prenons deux points A et B d'homologues A' et B'; les cercles passant par A, B,  $\Phi_1$  et A, B,  $\Phi_2$  seraient transformés en deux droites distinctes ayant en commun les points A' et B'.

**THÉORÈME III.** — *Toute sphérique  $\Gamma$  proprement dite, c'est-à-dire ne se réduisant pas à une similitude, est le produit d'une inversion par un déplacement ou par un retournement.*

Soit en effet  $\Phi$  une inversion de foyer  $\Phi$ , de puissance arbitraire. La transformation  $\Phi\Gamma$ , produit de  $\Phi$  par la sphérique considérée, transforme un plan quelconque en un autre plan, une sphère quelconque en une sphère. C'est donc une similitude  $\Sigma$ ;  $\Phi\Gamma = \Sigma$  et par suite  $\Gamma = \Phi\Sigma$ . Par un choix convenable de la puissance de l'inversion  $\Phi$ , on peut écrire enfin  $\Gamma = \Phi\Delta$ ,  $\Delta$  étant un déplacement  $\mathcal{D}$  ou un retournement D.

Dans le premier cas,  $\Gamma = \Phi\mathcal{D}$  conserve les angles mais change l'orientation des trièdres. Nous donnerons à ces transformations le nom de *sphériques inverses* C.

Le deuxième cas est celui des *sphériques directes*  $\mathcal{C}$ , qui conservent les angles et l'orientation des trièdres; on a  $\mathcal{C} = \Phi D$ .

On voit facilement que, dans chacune de ces classes, la transformation générale dépend de dix paramètres (quatre pour  $\Phi$ , six pour  $\Delta$ ).

Les  $\mathcal{C}$  forment un groupe, les C non.

**§ 10.** — *Point à l'infini de l'espace.* — On peut compléter l'espace euclidien par un point impropre  $\infty$ , défini comme étant commun à tous les plans de l'espace, et par suite à toutes les droites de l'espace. Un plan apparaît alors comme une sphère passant par  $\infty$ , une droite comme un cercle passant par  $\infty$ .

Toute transformation  $\Gamma$  est définie et biunivoque pour tous les points de l'espace ainsi complété:  $\Phi$  a pour homologue  $\infty$ , et  $\infty$  a pour homologue  $\Psi$ .  $\Phi$  est appelé *foyer-objet* de  $\Gamma$ , et  $\Psi$  *foyer-image*. Une similitude apparaît comme une  $\Gamma$  conservant le point à l'infini, c'est-à-dire ayant ses deux foyers confondus avec lui.

Dans ce qui suit, nous nous placerons toujours à ce point de vue.

## CHAPITRE II

### Les transformations sphériques directes.

#### A) Classification en huit espèces par la considération des sphères doubles de la transformation.

§ 11. — *Preliminaires.* — Une transformation sphérique directe  $\mathcal{C} = \Phi D$  est définie par la sphère d'inversion  $(\Phi)$  et par le retournement  $D$ .  $\Phi$  est une inversion proprement dite, car si elle se réduisait à une symétrie par rapport à un plan,  $\mathcal{C}$  se réduirait à un déplacement, et nous écartons ce cas; la sphère  $(\Phi)$  a donc son centre  $\Phi$  à distance finie, et son rayon  $a$  fini et différent de zéro.

Le retournement  $D$  est un retournement-rotation  $R$  ou un retournement-translation  $L$ ; il peut en particulier se réduire à une simple symétrie  $\Pi$  par rapport à un plan. Dans ce dernier cas, il est défini par le plan  $(\Pi)$ . Dans le cas  $D = L$ , il est défini par le plan  $(\Pi)$  et le vecteur  $\vec{\mathcal{L}}$  parallèle à  $(\Pi)$ , de longueur  $2l$  finie et non nulle. Dans le cas  $D = R$ ,  $D$  est défini par le plan  $(\Pi)$ , l'axe de rotation  $(D)$  perpendiculaire à  $(\Pi)$ , et orienté, et par l'angle de rotation  $2\mu$  compris entre  $o$  et  $2\pi$ .

Dans les trois cas,  $\Psi$ , foyer-image, est l'homologue dans le retournement du foyer-objet  $\Phi$ . Les plans et les droites passant par  $\Phi$  ont pour homologues les plans et les droites passant par  $\Psi$ , et ce sont les seuls plans et droites de l'espace qui soient transformés en plans et droites. Plus généralement, tous les éléments invariants dans l'inversion  $\Phi$ , par exemple les points de la sphère  $(\Phi)$ , les sphères et les cercles orthogonaux à  $(\Phi)$ , subissent simplement le retournement  $D$ .

§ 12. — *Expressions diverses de  $\mathcal{C}$ .* — Dans ce qui précède, nous avons utilisé l'expression  $\mathcal{C} = \Phi D$ . Si l'on désigne par  $\Psi$  l'inversion de centre  $\Psi$  et puissance  $a^2$ , on peut écrire  $\mathcal{C} = D\Psi$  et pour l'inverse de  $\mathcal{C}$  on aura  $\mathcal{C}^{-1} = D^{-1}\Phi$  ou  $\Psi D^{-1}$ .  $\mathcal{C}^{-1}$  a  $\Psi$  pour foyer-objet, et  $\Phi$  pour foyer-image.

Si l'on désigne par  $P$  et  $Q$  les symétries par rapport à deux plans arbitraires passant par la droite  $(D)$  faisant entre eux l'angle  $(P, Q) = \mu$ , on voit que l'on peut écrire, dans le cas  $D = R$ , la décomposition

$$D = \Pi P Q.$$

Elle est encore valable dans le cas  $D = L$  en désignant par P et Q deux plans perpendiculaires à  $\vec{\mathcal{L}}$ , de distance  $PQ = l$ ; et dans le cas  $D = II$  en prenant pour P et Q deux plans confondus.

Prenons, dans les trois cas, pour plan (P) le plan normal à la droite  $\varphi\psi$  (projection de  $\Phi\Psi$  sur le plan II) en son milieu  $\chi$ , qui est aussi le milieu du segment  $\Phi\Psi$  lui-même. Dans le cas  $D = R$  (*fig. 1*) appelons  $(\Delta)$  la droite  $O\chi$ ; on aura

$$(\widetilde{O\varphi}, \widetilde{O\psi}) = (\widetilde{O\chi}, \widetilde{O\psi}) = \mu.$$

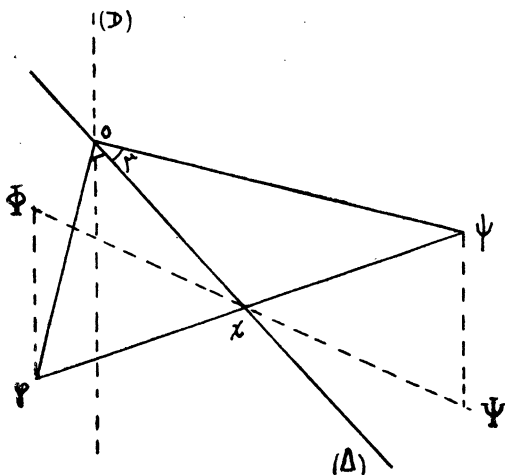


FIG. 1.

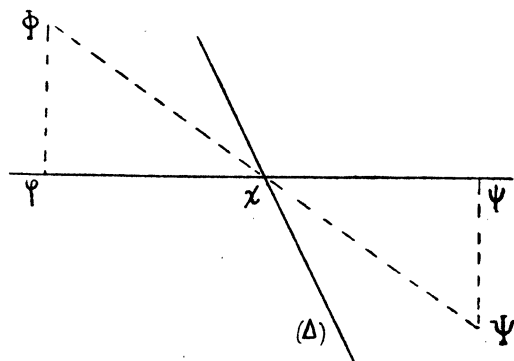


FIG. 2.

Dans le cas  $D = L$ ,  $(\Delta)$  sera toujours la trace de (P) sur (II), c'est-à-dire la médiatrice de  $\varphi\psi$ , comme dans le cas précédent; elle sera perpendiculaire à  $\vec{\mathcal{L}}$  puisque  $\vec{\varphi\psi} = \vec{\mathcal{L}}$ , et l'on aura (*fig. 2*)

$$\varphi\chi = \chi\psi = l.$$

Dans le cas particulier  $D = II$ ,  $\varphi$  et  $\psi$  sont confondus avec O.

Écartons ce dernier cas, et désignons par  $r$  le renversement autour de  $(\Delta)$ . On a  $\Pi PQ = rQ$ , (Q) étant le plan passant par (D) et par  $\Psi$  (cas de  $D = R$ ) ou le plan perpendiculaire à  $\vec{\mathcal{L}}$  passant par  $\Psi$  (cas de  $D = L$ ). Dans tous les cas, on aura

$$\mathcal{C} = \Phi r Q = r Q \Psi$$

et

$$\mathcal{C}^{-1} = Q r \Phi = \Psi Q r.$$

§ 13. — *Symétrie de la figure invariante de  $\mathcal{C}$ .* — Nous appellerons figure invariante de  $\mathcal{C}$ , et désignerons par F l'ensemble des éléments géométriques conservés par  $\mathcal{C}$  : points doubles, sphères doubles, etc... Cette figure joue un rôle essentiel

dans l'étude des  $\mathcal{C}$ , comme nous le verrons dans la suite. Nous pouvons dès à présent donner le résultat suivant :

**THÉORÈME IV.** — *Soit une  $\mathcal{C}$  dont le retournement ne se réduit pas à une symétrie : la figure invariante  $F$  admet la droite  $\Delta$  comme axe de symétrie.*

En effet, si  $E$  est un élément conservé par  $\mathcal{C}$ , prenons son symétrique  $E'$  par rapport à  $\Delta$ , soit  $E' = Er$ . On aura

$$E'\mathcal{C} = Er.\mathcal{C} = E\mathcal{C}.r.\mathcal{C} = E.rQ\Psi.r.rQ\Psi = E'.Q\Psi.Q\Psi.$$

Or  $Q$  et  $\Psi$  sont *permutables*, puisque le plan  $(Q)$  passe par le point  $\Psi$ . Donc  $Q\Psi Q\Psi = Q\Psi\Psi Q = 1$ , et par suite  $E'\mathcal{C} = E'$ , ce qui démontre la proposition :  $E'$  sera lui-même conservé dans  $\mathcal{C}$ .

*Remarques.* — 1. Dans le cas particulier où  $D$  se réduit à la symétrie  $\Pi$ ,  $\mathcal{C} = \Phi\Pi$ , et  $F$  admet un axe de révolution : la droite  $(A)$  menée par  $\Phi$  perpendiculairement à  $(\Pi)$ . Elle admet en outre le plan de symétrie  $(\Pi)$  et toutes les droites  $(\Delta)$  passant par  $O$  dans le plan  $(\Pi)$  comme axes de symétrie binaire. En effet si  $E\mathcal{C} = E$  et  $E' = E\Pi$ , on en déduit

$$E'\mathcal{C} = E.\Pi\mathcal{C} = E\mathcal{C}.\Pi.\mathcal{C} = E.\Phi\Pi.\Pi\Phi\Pi = E\Pi = E'.$$

2. On peut démontrer autrement le théorème IV :  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}^{-1}$  ont la même figure invariante (car si  $E\mathcal{C} = E$ ,  $E = E\mathcal{C}^{-1}$ ); par suite, si on passe de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{C}^{-1}$  par une transformation  $t$ , la figure invariante de  $\mathcal{C}$  est conservée dans  $t$ . Or le renversement  $r$  transforme effectivement  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{C}^{-1}$  et vice versa, car il transforme  $\mathcal{C}$  en

$$\mathcal{C}' = r\mathcal{C}r = rrQ\Psi r = Q\Psi r = \Psi Qr = \mathcal{C}^{-1}.$$

§ 13 bis. — **THÉORÈME V.** — *La figure invariante  $F$  de  $\mathcal{C}$  est conservée dans une inversion de centre  $O$  et de puissance convenable (pouvant se réduire à une symétrie par rapport à un plan si  $O$  est à l'infini).*

En effet si  $D$  est un retournement-rotation de centre  $O$  extérieur à la sphère  $\Phi$ , l'inversion par rapport à la sphère  $\Sigma$  de centre  $O$  orthogonale à  $\Phi$  conserve l'inversion  $\Phi$  et le retournement  $R$ ; donc elle conserve la transformation  $\mathcal{C}$  elle-même; par suite elle conserve la figure  $F$ .

Si le centre  $O$  est intérieur à la sphère  $\Phi$ , le plan perpendiculaire à  $\Phi O$  en  $O$  coupe  $(\Phi)$  suivant un cercle réel de rayon  $j$ ; l'inversion « négative » de centre  $O$  et de puissance  $-j^2$  conserve la sphère  $(\Phi)$  et le retournement; elle conserve donc la transformation  $\mathcal{C}$  et sa figure invariante  $F$ .

Si  $D$  est un retournement-translation, on voit de même que  $\mathcal{C}$  est conservée dans la symétrie par rapport au plan perpendiculaire à  $(\Pi)$  passant par  $\Phi$  et  $\Psi$ .



Le théorème annoncé est donc démontré. La figure F admet donc un renversement et une inversion. Mais on remarque ici que cette inversion conserve *la transformation C elle-même*, alors que la symétrie changeait C en C<sup>-1</sup>. On en déduit que C et Σ *permutent*, ou encore que C conserve l'inversion Σ. Dans le cas où celle-ci correspond à une sphère réelle (cas où O est extérieur à Φ) ou à un plan, C conservera cette sphère ou ce plan. (Cf. le paragraphe suivant.)

§ 14. — *Recherche des sphères doubles de C.* — Pour être conservée dans C, une sphère Σ doit d'abord être transformée par l'inversion Φ en une sphère égale Σ<sub>1</sub>, puisque D doit transformer Σ<sub>1</sub> en Σ. Or les sphères Σ égales à leurs

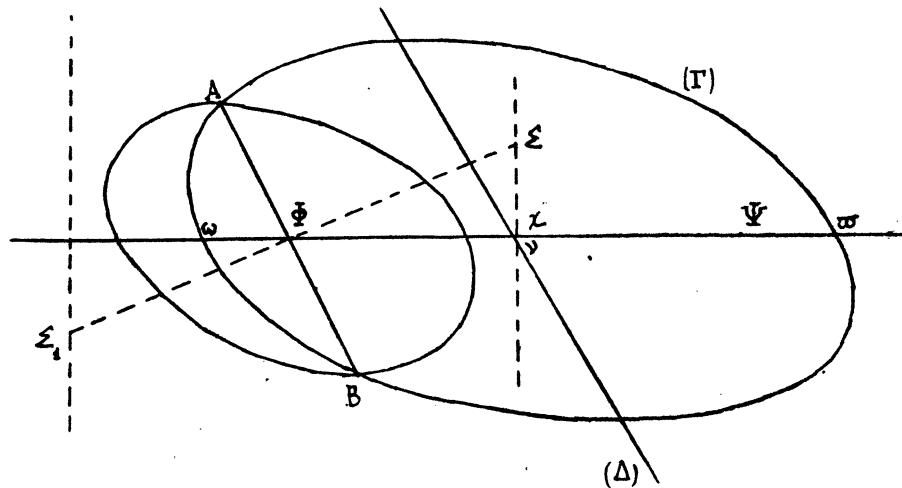


FIG. 3.

inverses sont : 1° la sphère (Φ) elle-même; 2° les sphères orthogonales à (Φ); 3° les sphères coupant (Φ) suivant un grand cercle de (Φ). En effet l'inverse d'une sphère de rayon  $\sigma$  par rapport à (Φ) a pour rayon  $\sigma_1 = \sigma \frac{a^2}{\text{Puissance de } \Phi \text{ par rapport à } (\Sigma)}$  d'après la formule classique de transformation des distances dans l'inversion. Donc  $\sigma_1 = \sigma$  exige que la puissance de Φ par rapport à (Σ) soit égale, en valeur absolue, à  $a^2$ . La sphère (Φ) elle-même, qui s'était présentée à nous au premier abord, est simplement un cas particulier de la catégorie 3° des sphères « diamétrales » à (Φ). Cherchons maintenant, parmi les deux catégories trouvées de sphères égales à leurs inverses, celles qui seront doubles dans C :

*Sphères orthogonales à (Φ).* — Elles sont conservées dans l'inversion, et doivent donc être conservées également dans le retournement.

Si  $C = \Phi\Pi$ , on obtient le réseau linéaire des sphères centrées dans (Π) et orthogonales à (Φ).

Si  $\mathcal{C} = \Phi L$ , on obtient le plan mené par  $\Phi$  perpendiculairement à  $(\Pi)$  et parallèlement à  $\vec{\mathcal{L}}$ . Dans le cas particulier où  $(\Pi)$  passe par le point  $\Phi$ , le plan  $(\Pi)$  constitue lui-même une deuxième solution, mais qui appartient à la catégorie des sphères diamétrales.

Si  $\mathcal{C} = \Phi R$ , on obtient la sphère  $\Sigma$  de centre  $O$  orthogonale à  $(\Phi)$ , si elle est réelle, c'est-à-dire si  $O$  est extérieur à  $(\Phi)$ . Dans ce cas on a donc une solution. Si au contraire  $O$  est intérieur à  $(\Phi)$  on n'a pas de sphère double réelle de cette caté-

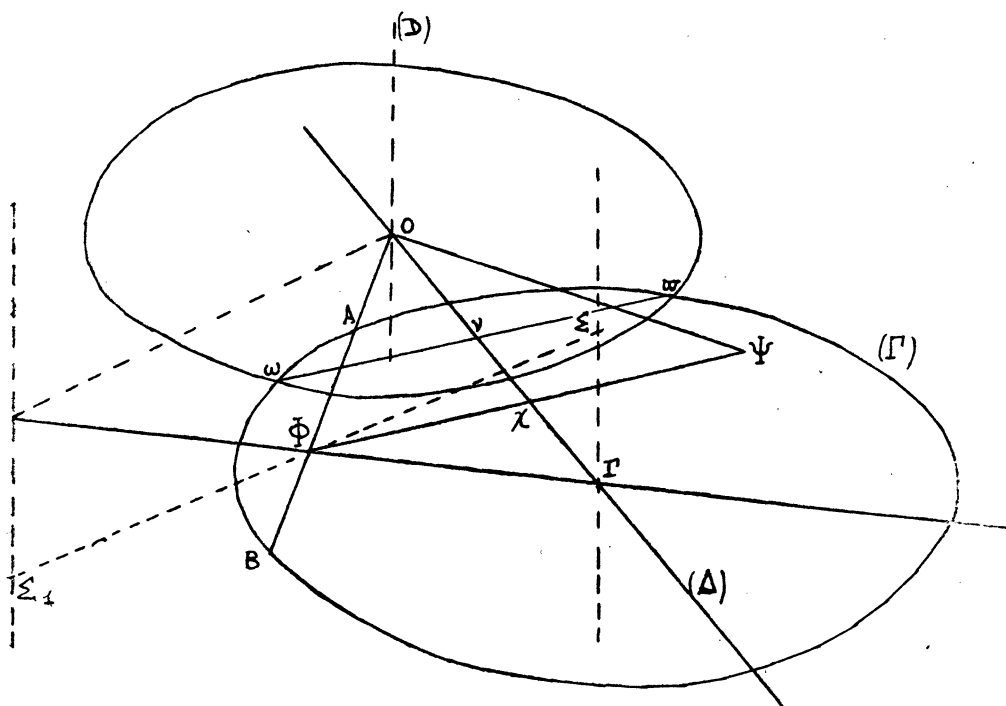


FIG. 4.

gorie. Si  $O$  est sur  $(\Phi)$ , on dira qu'il y a une sphère double de rayon nul, de centre  $O$ . Dans le cas particulier où  $(\Pi)$  passe par  $O$ , ce plan donne une solution supplémentaire comme dans le cas précédent.

*Sphères diamétrales à  $(\Phi)$ .* — Une telle sphère  $(\Sigma)$  est transformée par l'inversion en sa symétrique  $(\Sigma_1)$  par rapport au point  $\Phi$ .  $(\Sigma)$  sera double dans  $\mathcal{C}$  si le retournement  $D^{-1}$  transforme le point  $\Sigma$  en son symétrique  $\Sigma_1$  par rapport au point  $\Phi$ .

Si  $\mathcal{C} = \Phi \Pi$ , cela ne peut se produire en général; pour que ce soit possible, il faut que  $\Phi$  soit dans le plan  $(\Pi)$ , et alors on obtient le faisceau linéaire des sphères ayant leur centre sur l'axe de révolution  $(A)$ , coupant  $(\Pi)$  suivant le grand

cercle de  $(\Phi)$  situé dans ce plan. La sphère  $(\Phi)$  elle-même fait partie de ce faisceau.

Si  $\mathcal{C} = \Phi L$ , il faut encore que  $\Phi$  soit dans  $(\Pi)$  pour que l'on obtienne des solutions. Et alors on a le faisceau linéaire des sphères ayant leur centre sur la perpendiculaire en  $\chi$  à  $(\Pi)$ , et passant par un cercle fixe de  $(\Pi)$  : celui de centre  $\chi$  coupant  $(\Phi)$  aux extrémités A et B du diamètre parallèle à  $(\Delta)$  (*fig. 3*).

Si  $\mathcal{C} = \Phi R$ , il n'y a encore de solution que si  $\Phi$  est dans  $(\Pi)$ . Et dans ce cas on a encore un faisceau linéaire : celui des sphères ayant leur centre sur la perpendiculaire à  $(\Pi)$  au point  $\Gamma$  où la perpendiculaire à  $O\Phi$  coupe  $(\Delta)$ , et passant par le cercle de centre  $\Gamma$  coupant  $(\Phi)$  aux extrémités A et B du diamètre  $O\Phi$  (*fig. 4*).

*Remarque.* — Dans tous les cas que nous venons d'étudier, les sphères doubles vérifient bien la symétrie prévue au § 13, et admettent l'inversion annoncée au § 13 bis.

§ 15. — *Classification des  $\mathcal{C}$  d'après leurs sphères doubles.* — Les résultats ci-dessus nous permettent de donner une classification des  $\mathcal{C}$  ayant un caractère intrinsèque, les propriétés anallagmatiques des sphères doubles constituant évidemment un caractère de chaque  $\mathcal{C}$  invariant dans le groupe sphérique  $\Gamma$ .

Le cas général où le plan  $(\Pi)$  ne passe pas par  $\Phi$  donne lieu à quatre espèces, suivant le nombre de sphères doubles orthogonales à  $(\Phi)$  (il n'y a pas de sphères doubles diamétrales) :

*Première espèce.* —  $\mathcal{C} = \Phi L$  ou  $\mathcal{C} = \Phi R$  avec un centre de retournement O extérieur à la sphère  $(\Phi)$ . Une sphère double orthogonale à  $(\Phi)$ . (C'est un plan pour  $\mathcal{C} = \Phi L$ ).

*Deuxième espèce.* —  $\mathcal{C} = \Phi R$ , avec un centre de retournement situé sur  $(\Phi)$  : Une sphère double de rayon nul orthogonale à  $(\Phi)$ .

*Troisième espèce.* —  $\mathcal{C} = \Phi R$ , avec un centre de retournement intérieur à  $(\Phi)$ . Pas de sphère double réelle.

*Quatrième espèce.* —  $\mathcal{C} = \Phi \Pi$ . C'est un cas particulier commun aux trois précédentes. Un réseau linéaire de sphères doubles orthogonales à  $(\Phi)$ .

Si on suppose maintenant que  $\Phi$  soit dans le plan  $(\Pi)$ , chacune des quatre espèces précédentes donne lieu à une autre espèce, qui en est un cas particulier, et qui possède en supplément un faisceau linéaire de sphères doubles diamétrales à  $(\Phi)$ , comprenant en particulier le plan  $(\Pi)$  lui-même. (Cf. § 14.)

Finalement, on obtient huit espèces distinctes intrinsèquement; la transformée par une sphérique quelconque d'une  $\mathcal{C}$  appartenant à une espèce déterminée est

une  $\mathcal{C}$  de la même espèce. Le tableau suivant résume les caractéristiques de chaque espèce :

		Sphères doubles orthogonales à $(\Phi)$			
		1	—	0	$\infty^2$
Sphères doubles diamétrales à $(\Phi)$	0	I	II	III	IV
	$\infty^1$	V	VI	VII	VIII

*Remarque.* — 1. Le tiret représente la sphère double de rayon nul.  
2. Le « cas général » comprend les espèces I, II, III.

Dans ce qui suit, nous allons étudier chaque espèce, et chercher notamment sa figure invariante, ses invariants caractéristiques dans le groupe  $\Gamma$ , l'interprétation géométrique de ceux-ci sur la figure focale, etc... Nous commençons par l'espèce IV, et son cas particulier VIII, parce que cette étude est très facile, et que les résultats obtenus sont utiles dans l'étude des autres espèces.

**B) Les transformations sphériques « simples ».**

§ 16. — Ce sont les transformations des espèces IV et VIII, de la forme  $\mathcal{C} = \Phi \Pi$ , définies par la sphère  $(\Phi)$  et le plan  $(\Pi)$ . La perpendiculaire  $(A)$  menée par  $\Phi$  au plan  $(\Pi)$  est un axe de révolution pour toute la figure; les plans passant par  $(A)$  sont doubles, et par suite  $\mathcal{C}$  induit dans chacun de ces plans méridiens une transformation circulaire plane, produit de l'inversion par rapport au grand cercle de  $(\Phi)$  situé dans ce plan par une symétrie autour de la droite trace de  $(\Pi)$  sur ce même plan; c'est donc une circulaire « simple ». (Cf. Plan § 12.)

§ 17. — 1° *Supposons que  $(\Pi)$  coupe  $(\Phi)$  suivant un cercle réel  $(\gamma)$ .*

En général  $(\Pi)$  ne passe pas par  $\Phi$ ,  $(\gamma)$  n'est pas un grand cercle de  $(\Phi)$ .  $(\Pi)$  l'est seulement pour l'espèce VIII). La circulaire plane dans le méridien est une  $\mathcal{C}_r$ ; tous les points de  $(\gamma)$  sont doubles dans  $\mathcal{C}$ .

Soit  $c$  la transformée de  $\mathcal{C}$  par une sphérique  $K$  ayant son foyer-objet sur  $(\gamma)$ ;  $\mathcal{C}$  étant le produit de l'inversion  $\Phi$  par la symétrie  $\Pi$ ,  $c$  est le produit de deux symétries; c'est donc une rotation  $\mathcal{R}$  autour de la droite  $(\gamma_1)$  transformée de  $(\gamma)$ , d'un angle  $\alpha = 2\gamma$ ,  $\gamma$  étant l'angle de la sphère  $(\Phi)$  et du plan  $(\Pi)$ . L'angle  $\alpha$  est

donc indépendant de la transformation  $K$  utilisée. En outre, si  $\mathcal{C}'$  est la transformée de  $\mathcal{C}$  par une sphérique  $\Gamma$  *quelconque*,  $\mathcal{C}'$  admet un cercle de points doubles  $(\gamma')$  transformé de  $(\gamma)$ ; si l'on transforme maintenant  $\mathcal{C}'$  par une sphérique  $J$  ayant son foyer-objet sur  $(\gamma')$ , on obtient une rotation  $\mathcal{R}'$  d'angle  $\alpha' = \alpha$ . En effet,  $\alpha'$  étant indépendant de la sphérique  $J$  choisie, on peut supposer que  $J$  admet pour foyer-objet le point  $f'$  homologue dans  $\Gamma$  du foyer-objet  $f$  de  $K$ . Cela posé, on a

$$\mathcal{C}' = \Gamma^{-1} \mathcal{C} \Gamma, \quad \mathcal{R} = K^{-1} \mathcal{C} K, \quad \mathcal{R}' = J^{-1} \mathcal{C}' J;$$

d'où  $\mathcal{C} = K \mathcal{R} K^{-1}$  et  $\mathcal{R}' = J^{-1} \Gamma^{-1} K \mathcal{R} K^{-1} \Gamma J = \Sigma^{-1} \mathcal{R} \Sigma$

en posant  $\Sigma = K^{-1} \Gamma J$ , et l'on voit que  $\Sigma$  est une similitude, car

$$\infty \times K^{-1} \Gamma J = f. \Gamma J = f'. J = \infty.$$

La rotation  $\mathcal{R}'$  se déduit donc de  $\mathcal{R}$  par une similitude; par suite  $\alpha' = \alpha$ . La rotation  $\mathcal{R}$ , ainsi définie à une similitude près, est dite *image* de  $\mathcal{C}$ . Celle-ci est elle-même appelée « rotation anallagmatique » ou plus simplement « rotation »; nous la désignerons par le symbole  $(\mathcal{R})$ . Elle est caractérisée, au point de vue de ses propriétés intrinsèques, par l'invariant  $\alpha$ . La famille  $(\mathcal{R})$ , au point de vue intrinsèque, comporte donc une infinité simple de transformations, dépendant du paramètre  $\alpha$ , qui prend toutes les valeurs entre 0 et  $2\pi$ ; au point de vue euclidien habituel  $(\mathcal{R})$  dépend au contraire de sept paramètres [quatre pour  $(\Phi)$  et trois pour  $(\Pi)$ ].

§ 18. — *Équations intrinsèques du type  $(\mathcal{R})$ .* — Nous définissons un point  $M$  de l'espace où opère la « rotation »  $(\mathcal{R})$  de la manière suivante :

Le demi-plan défini par l'axe de révolution  $(A)$  et le point  $M$  coupe le cercle orienté  $(\gamma)$  en un point  $P$ , dont nous définissons la position par l'angle  $\psi = (\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP})$  compris entre 0 et  $2\pi$ ,  $P_0$  étant un point fixe arbitrairement choisi sur  $(\gamma)$ . Si  $Q$  est le second point d'intersection du plan  $[(A), M]$  avec le cercle  $(\gamma)$  nous appellerons  $\theta$  l'angle que fait en  $P$  le segment de cercle  $PMQ$  avec le segment de droite  $PQ$ , dans le plan  $MPQ$  orienté de manière que  $(OP, OA) = +\frac{\pi}{2}$ .  $\theta$  est ainsi un angle défini entre 0 et  $2\pi$ . Enfin nous poserons  $\tau = \frac{MP}{MQ}$ ;  $\tau$  est un nombre essentiellement positif:

Les trois coordonnées  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\tau$  définissent sans ambiguïté le point  $M$ .

Les surfaces de coordonnées sont :

$\psi = c^te$  : plans passant par l'axe  $(A)$  (exactement : les demi-plans);

$\theta = c^te$  : portions de sphères limitées par le cercle  $(\gamma)$ ;

$\tau = c^te$  : tores engendrés par un cercle  $\tau = c^te$  d'un plan méridien dans sa rotation autour de l'axe  $(A)$ .

Les lignes de coordonnées sont :

- $\theta = c^{\alpha}$ ,  $\tau = c^{\alpha}$  : cercles ayant (A) pour axe de révolution;  
 $\tau = c^{\alpha}$ ,  $\psi = c^{\alpha}$  : cercles situés dans un plan méridien, appartenant à un faisceau linéaire de points-limites P et Q;  
 $\psi = c^{\alpha}$ ,  $\theta = c^{\alpha}$  : cercles ayant (A) pour diamètre, limités à un segment d'extrémités P et Q.

Le système de coordonnées est triplement orthogonal.

Les équations de la transformation circulaire plane dans le méridien étant (Plan § 7)

$$\tau' = \tau, \quad \theta' = \theta + \alpha,$$

celles de  $\mathcal{C}$  dans l'espace sont

$$(\mathcal{R}) \quad \psi' = \psi, \quad \tau' = \tau, \quad \theta' = \theta + \alpha.$$

(Ces équations pourraient aussi se déduire de celles de la rotation-image, suivant un procédé utilisé plus loin pour d'autres espèces de  $\mathcal{C}$ ).

Les équations  $(\mathcal{R})$  sont *intrinsèques*, car  $\alpha$  est invariant. Par suite on peut déduire de ces équations les propriétés intrinsèques de  $(\mathcal{R})$ , qu'on peut aussi déduire directement de celles de l'image  $\mathcal{R}$ .

§ 19. — *Propriétés intrinsèques du type  $(\mathcal{R})$ .* — Il y a, comme nous le savons déjà (propriété caractéristique de l'espèce IV), un réseau linéaire de sphères doubles, ayant leurs centres dans  $(\Pi)$ , orthogonales à  $(\Phi)$ , et par suite *orthogonales au cercle*  $(\gamma)$ . Tous les points de celui-ci sont doubles. Comme *cercles doubles*, nous avons tous les cercles  $\tau = c^{\alpha}$ ,  $\psi = c^{\alpha}$ , déjà mentionnés ci-dessus; en effet ils ont pour images les cercles  $(\Gamma_i)$  ayant  $(\gamma_i)$  comme axe de révolution, dans l'espace-image où opère la rotation  $\mathcal{R}$ . On dira que ces cercles doubles  $(\Gamma')$  admettent le cercle  $(\gamma)$  pour axe, ou encore qu'ils sont *axiaux* à  $(\gamma)$ , ou enfin qu'ils sont *conjugués* à  $(\gamma)$ . En effet, un cercle  $(\Gamma')$  et le cercle  $(\gamma)$  jouissent de propriétés symétriques l'un par rapport à l'autre, notamment de celle-ci : toute sphère passant par l'un d'eux est orthogonale à toute sphère passant par l'autre. (Cela est évident sur les images.) Deux cercles *conjugués* sont tels que l'un d'eux est conservé dans toute « rotation » autour de l'autre.

Cette notion de cercles conjugués apparaît donc comme intimement liée à la « rotation ». On voit aisément ainsi que, par un point donné de l'espace, il passe un cercle conjugué à un cercle donné  $(\gamma)$ , etc...

La rotation  $\mathcal{R}$ , ainsi que toutes les rotations d'axe  $(\gamma_i)$ , conserve, en plus des éléments doubles déjà cités (points, cercles, sphères), toutes les surfaces de révolution d'axe  $(\gamma_i)$ . Donc  $(\mathcal{R})$  conservera toutes les surfaces engendrées par un cercle

conjugué à  $(\gamma)$  dont le paramètre  $\tau$  sera fonction de  $\psi$ , c'est-à-dire les surfaces ayant une équation de la forme  $f(\tau, \psi) = 0$  avec les coordonnées que nous utilisons. Ce sont des surfaces cerclées dites « de révolution » autour du cercle  $(\gamma)$ . Si en particulier la méridienne dans l'espace-image est un cercle (ou droite) il en est de même dans l'espace de  $(\mathcal{R})$ ; la surface est doublement cerclée; elle est équivalente anallagmatiquement à un tore (ou à un cône ou cylindre de révolution); c'est une cyclide de Dupin. A une « rotation » apparaît ainsi associée toute une famille de cyclides.

Toutes les  $(\mathcal{R})$  ayant même cercle de points doubles  $(\gamma)$  forment un groupe; on dira que  $(\gamma)$  est son cercle de base. Ce groupe a pour image le groupe des rotations autour d'une droite. Les opérations de ce groupe permutent entre elles, le produit des « rotations » d'angle  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  étant la « rotation » d'angle  $\alpha_1 + \alpha_2$ . Toutes les « rotations » du groupe ont une même figure invariante  $F$  composée de cercles, sphères, cyclides et surfaces « de révolution » autour de  $(\gamma)$ . Toute la figure se déduit du seul cercle  $(\gamma)$ .

Une transformation  $(\mathcal{R})$  est définie par son cercle de base  $(\gamma)$  et par la valeur de son invariant  $\alpha$ , d'après ce qu'on vient de dire. Effectivement, si on se donne  $(\gamma)$  et  $\alpha$ ,  $(\mathcal{R})$  peut être « construite » dans l'espace, d'après la signification géométrique de l'invariant  $\alpha$  donnée au § 17. En effet  $\alpha$  est l'angle d'ouverture du « cône focal » de sommet  $\Phi$  et base  $(\gamma)$ .  $(\gamma)$  étant donné, on peut donc construire le point  $\Phi$ , d'où la sphère  $(\Phi)$  et le plan  $(\Pi)$  de la définition  $(\mathcal{R}) = \Phi\Pi$ . Autrement dit, si on connaît  $(\mathcal{R})$ , pour connaître sa transformée  $(\mathcal{R}')$  par une sphérique quelconque, il suffit de connaître le transformé  $(\gamma')$  du cercle de base  $(\gamma)$ . [Il n'y a pas d'ambiguïté si, comme on l'a supposé plus haut,  $(\gamma)$  est un cercle orienté ou cycle, avec  $0 \leq \alpha < 2\pi$ ].

Disons un mot des cas particuliers pouvant se présenter suivant les diverses valeurs de  $\alpha$ . La « rotation »  $(\mathcal{R})$  sera involutive d'ordre  $m$  si  $m\alpha = 2k\pi$  ou  $\alpha = \frac{2k\pi}{m}$ , c'est-à-dire si la sphère  $(\Phi)$  et le plan  $(\Pi)$  se coupent sous l'angle  $\frac{k\pi}{m}$ . En particulier  $(\mathcal{R})$  est réciproque si  $\alpha = \pi$ , c'est-à-dire si  $\Phi$  est dans le plan  $(\Pi)$ . C'est le cas particulier de l'espèce VIII, qui apparaît ainsi comme équivalente au renversement  $r$ , et qu'on appelle *transposition*.

§ 20. — *Propriétés de la transposition.* — Elle forme un seul type intrinsèque  $(r)$  d'équations

$$\psi' = \psi, \quad \tau' = \tau, \quad \theta' = \theta + \pi.$$

Elle admet, comme sphères doubles, le faisceau linéaire des sphères passant par  $(\gamma)$  et le réseau conjugué; comme cercles doubles les cercles  $(\Gamma)$  conjugués à  $(\gamma)$  et en outre les cercles  $(\Theta)$  rencontrant  $(\gamma)$  en deux points, à angle droit, dits

*perpendiculaires* à  $(\gamma)$ . Par un point  $P$  de l'espace, il passe une infinité de cercles  $(\Theta)$  formant un faisceau linéaire, car ils sont situés sur la sphère passant par  $(\gamma)$  et  $P$ , et ils passent par l'homologue  $\bar{P}$  de  $P$  dans la transposition. On dira que  $P$  et  $\bar{P}$  sont *symétriques* par rapport au cercle  $(\gamma)$ ; ces deux points sont situés sur un même cercle  $(\Gamma)$  conjugué à  $(\gamma)$ , perpendiculaire en  $P$  et  $\bar{P}$  à tous les cercles précédents. Tout cercle  $(\Theta)$  perpendiculaire à  $(\gamma)$  est perpendiculaire à tout cercle  $(\Gamma)$  conjugué à  $(\gamma)$  qu'il rencontre.

La notion de cercles perpendiculaires apparaît donc, dans notre étude, comme liée à celle de transposition. Si deux cercles sont perpendiculaires, la transposition définie par l'un d'eux conserve l'autre; tous les cercles conjugués de celui-ci qui rencontrent le premier lui sont perpendiculaires, et sont par suite également conservés dans la transposition.

§ 21. — 2° *Supposons le plan  $(\Pi)$  tangent à la sphère  $(\Phi)$  en un point  $O$ .*

La transformation induite dans chaque plan méridien est une  $\mathcal{C}_t$  (Plan § 7). Une sphérique  $K$  de foyer-objet  $O$  transforme  $\mathcal{C}$  en une translation  $\mathcal{L}$ . Il en est de même pour la transformée  $\mathcal{C}'$  de  $\mathcal{C}$  par une sphérique quelconque  $\Gamma$ : une sphérique  $J$  de foyer-objet  $O'$  (transformé de  $O$  par  $\Gamma$ ) la transforme en une translation  $\mathcal{L}'$ . On dira que  $\mathcal{C}$  est une translation anallagmatique  $(\mathcal{L})$  de pôle  $O$ .  $(\mathcal{L})$  n'a pas d'invariant et constitue un seul type intrinsèque. (Au point de vue de la géométrie habituelle, cette transformation dépend de six paramètres.)

La sphère tangente en  $O$  au plan  $(\Pi)$  passant par un point  $M$  coupe la droite  $(A)$  en un point  $P$ ; la droite  $PM$  rencontre le plan  $(\Pi)$  en un point  $Q$ . Nous posons

$$x = \frac{c^2}{OP}, \quad y = \frac{c^2}{OQ}$$

et  $\psi$  désignera toujours l'angle compris entre  $o$  et  $2\pi$  du demi-plan  $(A, M)$  avec un demi-plan origine passant par  $(A)$ ;  $c$  est une longueur arbitraire. Les équations de  $(\mathcal{L})$  sont alors

$$\psi' = \psi, \quad x' = x + m, \quad y' = y.$$

(Les sphères passant par  $M$  tangentes à  $(A)$  en  $O$  passent par le cercle de diamètre  $OQ$  du plan méridien de  $M$ ).

Les surfaces coordonnées forment encore ici un système triple orthogonal; ce sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = c^t : \text{les plans méridiens;} \\ x = c^t : \text{les sphères tangentes au plan } (\Pi) \text{ en } O; \\ y = c^t : \text{les tores engendrés par la révolution autour de } (A) \text{ d'un cercle tangent} \\ \text{en } O \text{ à } (A). \end{array} \right.$$



Les courbes coordonnées sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = c^{te}, y = c^{te} : \text{cercles ayant (A) comme axe de révolution;} \\ y = c^{te}, \psi = c^{te} : \text{cercles tangents à (A) en O;} \\ \psi = c^{te}, x = c^{te} : \text{cercles tangents au plan (II) en O dans un méridien.} \end{array} \right.$$

Sur les équations précédentes, ou sur la translation image  $\mathcal{L}$ , on trouve les propriétés suivantes de  $(\mathcal{L})$  :

Il y a un seul point double : le point O.

Les cercles tangents en O à (A), et la droite (A) en particulier, sont les cercles doubles de la transformation.

Comme surfaces doubles, on a toutes les surfaces engendrées par des cercles doubles; ce sont les homologues des cylindres de génératrices parallèles à  $\vec{\mathcal{L}}$  dans l'espace image. En particulier, on a les tores  $y = c^{te}$ , et les sphères centrées dans (II) orthogonales à  $(\Phi)$ , c'est-à-dire tangentes à (A) au point O, qui constituent le réseau linéaire de sphères doubles caractéristique de la quatrième espèce.

Les  $(\mathcal{L})$  de pôle donné O forment un groupe; de même les  $(\mathcal{L})$  de figure invariante donnée, c'est-à-dire de pôle et d'axe donnés. Dans ce dernier cas, on peut utiliser, pour tout le groupe, le même système de coordonnées  $x, y, \psi$ ; si  $(\mathcal{L})$  est définie par le paramètre  $m$ ,  $(\mathcal{L}')$  par  $m'$ , le produit  $(\mathcal{L})(\mathcal{L}')$  est la « translation »  $(\mathcal{L}'')$  de paramètre  $m'' = m + m'$ . Il en résulte qu'une  $(\mathcal{L})$  n'est jamais réciproque.

*Remarque.* — Les cercles doubles de  $(\mathcal{L})$  sont tangents deux à deux au point O; ils forment une congruence. Cette configuration apparaît liée à la translation anallagmatique, de même que la congruence des cercles conjugués à un cercle donné apparaissait naturellement avec l'étude de la rotation anallagmatique.

### § 22. — 3° Le plan (II) ne coupe pas la sphère $(\Phi)$ .

La transformation circulaire plane induite dans chaque méridien est une « homothétie »  $\mathcal{C}_h$ . Il y a deux points doubles  $\omega$  et  $\omega'$  sur l'axe de révolution (A). Une sphérique K de foyer-objet  $\omega$  transforme  $\mathcal{C}$  en une homothétie  $\mathcal{H}$  de pôle  $\omega$ , dont le rapport  $k$  est indépendant de la sphérique K choisie. En outre si l'on transforme  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{C}'$  par une sphérique  $\Gamma$  quelconque, puis  $\mathcal{C}'$  en une homothétie par une sphérique J de foyer-objet  $\omega'$ , cette dernière homothétie a le même rapport  $k$ . L'homothétie  $\mathcal{H}$ , ainsi définie à une similitude près, est dite image de  $\mathcal{C}$ , qui prend le nom d'« homothétie anallagmatique »  $(\mathcal{H})$ . Chaque transformation de cette famille est définie par son invariant  $k$ , nombre positif.

Nous définirons un point M par l'angle  $\psi$  (toujours le même), l'angle  $\theta = \left( \overrightarrow{M\omega}, \overrightarrow{M\omega'} \right)$ , et le rapport  $\tau = \frac{M\omega}{M\omega'}$ .

Les surfaces coordonnées sont ici :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = c^{te} : \text{les plans méridiens;} \\ \theta = c^{te} : \text{les tores engendrés par les cercles passant par } \omega \text{ et } \bar{\omega}; \\ \tau = c^{te} : \text{les sphères du faisceau de points-limites } \omega \text{ et } \bar{\omega}. \end{array} \right.$$

Les lignes coordonnées sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = c^{te}, \tau = c^{te} : \text{les cercles d'axe de révolution (A);} \\ \tau = c^{te}, \psi = c^{te} : \text{les cercles des plans méridiens appartenant aux faisceaux de} \\ \text{point-limites } \omega \text{ et } \bar{\omega}; \\ \psi = c^{te}, \theta = c^{te} : \text{les cercles passant par } \omega \text{ et } \bar{\omega}. \end{array} \right.$$

Les équations de  $(\mathcal{H})$  sont

$$\psi' = \psi, \quad \theta' = \theta, \quad \tau' = k\tau.$$

Les seuls points doubles sont  $\omega$  et  $\bar{\omega}$ ; les cercles doubles sont les cercles passant par ces deux points; les sphères doubles sont également les sphères passant par ces deux points. Plus généralement sont conservées les surfaces engendrées par une famille à un paramètre de cercles doubles. C'est le cas des tores  $\theta = c^{te}$ .

*Interprétation géométrique de l'invariant  $k$ .* — Appliquons les équations intrinsèques de  $(\mathcal{H})$  au couple  $(\Phi, \infty)$ ; cela donne

$$1 = k \cdot \frac{\Phi \omega}{\Phi \bar{\omega}} \quad \text{ou} \quad k = \frac{\Phi \bar{\omega}}{\Phi \omega}.$$

Donc  $(\mathcal{H})$  est bien déterminée si l'on se donne les deux points doubles  $\omega$  et  $\bar{\omega}$ , et le rapport  $k$ ; ou encore la transformée  $(\mathcal{H}')$  d'une  $(\mathcal{H})$  donnée est déterminée par les transformés  $\omega'$  et  $\bar{\omega}'$  de  $\omega$  et  $\bar{\omega}$  : on saura en effet construire  $\Phi'$  défini par  $\frac{\Phi' \bar{\omega}'}{\Phi' \omega'} = k$ , puis le rayon  $a'$  de la sphère  $(\Phi')$  d'après la relation  $a'^2 = \overline{\Phi' \omega'} \cdot \overline{\Phi' \bar{\omega}'}$ .

*Sous-groupes.* — Les  $(\mathcal{H})$  de mêmes pôles  $\omega$  et  $\bar{\omega}$  forment un groupe, qui a pour image le groupe des homothéties de pôle  $\omega$ . Il en résulte qu'il n'y a pas de  $(\mathcal{H})$  réciproque ni involutive de quelque ordre que ce soit.

Les  $(\mathcal{H})$  ayant un seul point double  $\bar{\omega}$  en commun forment également un groupe, qui a pour image celui des homothéties et translations de l'espace.

§ 23. — 4° Conclusion. — La quatrième espèce se divise en trois familles  $(\mathcal{H})$ ,  $(\mathcal{L})$ ,  $(\mathcal{R})$  et cette dernière comprend la huitième espèce comme cas particulier, celui de la transposition  $(r)$ . Dans chaque famille  $(\mathcal{H})$  ou  $(\mathcal{R})$  une transformation est caractérisée par son invariant  $k$  ou  $\alpha$ ;  $(\mathcal{L})$  et  $(r)$  constituent deux types intrinsèques.

ques uniques. Toutes ces transformations sont dites *simples*; elles possèdent un réseau linéaire de sphères doubles et une congruence linéaire de cercles doubles : les cercles passant par deux points fixes dans le cas ( $\mathcal{H}$ ), les cercles tangents à un même cercle en un même point dans le cas ( $\mathcal{L}$ ), les cercles conjugués à un cercle fixe dans le cas ( $\mathcal{R}$ ).

La transposition ( $r$ ) est la seule transformation simple qui soit réciproque.

*Remarque.* — Les cercles doubles d'une  $\mathcal{C}$  simple sont deux à deux cosphériques; la division de ces transformations en trois familles correspond aux trois cas qui peuvent se présenter pour l'intersection de deux cercles cosphériques : sécants, tangents, non sécants, ou encore aux trois espèces de congruences linéaires de cercles deux à deux cosphériques. (En général les cercles d'une congruence linéaire ne sont pas deux à deux cosphériques; c'est le cas par exemple de la congruence paratactique. Cf. § 46.)

### C) Les transformations sphériques directes de première et de cinquième espèces ( $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_5$ ).

§ 24. — Ces transformations sont définies par le produit  $\Phi L$ , ou  $\Phi R$  avec  $O$  extérieur à la sphère ( $\Phi$ ). La cinquième espèce est un cas particulier de la première : celui où le point  $\Phi$  se trouve dans le plan ( $\Pi$ ); tout ce que nous dirons des  $\mathcal{C}_1$  s'applique en particulier aux  $\mathcal{C}_5$  que nous étudierons ensuite spécialement. (Cf. § 28.)

Nous allons démontrer d'abord le résultat fondamental suivant :

**THÉORÈME VI.** — *Toute transformation directe de première espèce peut être transformée par une sphérique convenable en une similitude directe  $\mathcal{S}$  dont l'angle  $\alpha$  et le rapport  $k$  sont les invariants de  $\mathcal{C}_1$  dans le groupe sphérique.*

En effet  $\mathcal{C}_1$  possède une sphère double  $\Sigma$  sur laquelle elle détermine une transformation circulaire, qui est *directe*, car l'inversion  $\Phi$  change le sens des angles sur  $\Sigma$ , et le retournement  $D$  également. Donc cette transformation circulaire admet deux points doubles *réels*  $\omega$  et  $\bar{\omega}$  (Plan § 5) qui sont également points doubles de la sphérique  $\mathcal{C}_1$ ; d'où le premier résultat :

*La sphérique de première espèce admet deux points doubles réels.*

Transformons alors  $\mathcal{C}_1$  par une sphérique  $J$  ayant  $\bar{\omega}$  pour foyer-objet; on obtient une sphérique ayant  $\infty$  comme point double, et se réduisant donc à une similitude  $\mathcal{S}$ . Celle-ci admet l'homologue  $\omega_1$  de  $\omega$  dans  $J$  comme pôle.

Si maintenant on transforme  $\mathcal{C}_1$  en  $\mathcal{C}'_1$  par une sphérique quelconque  $H$ , et que

l'on prenne l'image  $\mathcal{G}'$  de  $\mathcal{C}'_i$  avec une sphérique  $K$  ayant  $\omega'$  pour foyer-objet, on obtient

$$\mathcal{G}' = K^{-1}\mathcal{C}'_iK \quad \text{avec} \quad \mathcal{C}'_i = H^{-1}\mathcal{C}_iH, \quad \mathcal{G} = J^{-1}\mathcal{C}_iJ;$$

d'où  $\mathcal{G}' = K^{-1}H^{-1}J\mathcal{G}J^{-1}HK = \Sigma^{-1}\mathcal{G}\Sigma$  en posant  $\Sigma = J^{-1}HK$

et l'on voit que  $\Sigma$  est une similitude, car  $\infty \times J^{-1}HK = \omega'HK = \infty$ .

Donc  $\mathcal{G}'$  a même angle et même rapport que  $\mathcal{G}$ . C. Q. F. D.

La similitude  $\mathcal{G}$  ainsi définie à une similitude près est dite *image* de  $\mathcal{C}_i$ . Réciproquement, la transformée d'une similitude directe  $\mathcal{G}$  par une sphérique quelconque est une sphérique directe de première espèce  $\mathcal{C}_i$ .

§ 25. — *Figure invariante de  $\mathcal{C}_i$ .* — La similitude image  $\mathcal{G}$  conserve le plan ( $\sigma$ ) et la droite ( $\gamma$ ) qui lui est perpendiculaire au point  $\omega_i$ . Donc  $\mathcal{C}_i$  conserve la sphère ( $\Sigma$ ) et le cercle ( $\Gamma$ ) orthogonal à ( $\Sigma$ ) qu'il perce en  $\omega$  et  $\omega'$ . Cette figure devant vérifier la symétrie prévue au § 13,  $\omega$  et  $\omega'$  doivent être symétriques par rapport à la droite ( $\Delta$ ); celle-ci, qui passe par  $O$  et par le milieu  $\chi$  de  $\Phi\Psi$  passe donc également par le milieu  $\nu$  de  $\omega\omega'$ , et est perpendiculaire à ce segment  $\omega\omega'$ . Nous donnerons plus loin une construction complète par la règle et le compas de cette figure invariante à partir des éléments définissant l'inversion  $\Phi$  et le retournement  $D$ . (Cf. § 72 ci-après.)

$\mathcal{G}$  conserve en outre les cônes de révolution de sommet  $\omega_i$  et d'axe ( $\gamma$ ); donc  $\mathcal{C}_i$  conserve les cyclides de Dupin, de points singuliers  $\omega$  et  $\omega'$ , engendrées par les cercles faisant un angle constant  $\psi$  en  $\omega$  et  $\omega'$  avec le cercle double ( $\Gamma$ ). La deuxième famille de cercles de ces cyclides est formée par les cercles conjugués à ( $\Gamma$ ) s'appuyant sur un cercle passant par  $\omega$  et  $\omega'$ .

*Équations intrinsèques de  $\mathcal{C}_i$ .* — Étant donné un point  $M$  quelconque de l'espace où opère  $\mathcal{C}_i$  prenons les coordonnées suivantes pour le définir :

a) le rapport  $\tau = \frac{M\omega}{M\omega'}$ , nombre essentiellement positif;

b) l'angle  $\psi$  que fait avec ( $\Gamma$ ) en  $\omega$  et  $\omega'$  le cercle passant par  $\omega$ ,  $\omega'$  et  $M$ ; le cercle ( $\Gamma$ ) étant orienté, cet angle est bien défini entre 0 et  $\pi$ ;

c) l'angle  $\Theta$ , compris entre 0 et  $2\pi$ , du segment de sphère passant par ( $\Gamma$ ) et par  $M$  avec un segment fixe également limité à ( $\Gamma$ ). Cet angle est défini sans ambiguïté moyennant l'orientation du plan normal à ( $\Gamma$ ) déduite de celle de ( $\Gamma$ ) lui-même.

Si on introduit maintenant les coordonnées  $r, \varphi, \theta$  de l'image  $m$  définies au § 6, on voit aisément qu'elles sont liées à celles de  $M$  par les relations

$$\tau = \frac{r}{r_0}, \quad \psi = \varphi, \quad \Theta = \theta - \theta_0,$$

$r_0$  et  $\theta_0$  étant des constantes dépendant de la manière dont on passe de  $\mathcal{C}_i$  à  $\mathcal{G}$ .

En outre, on voit que dans l'espace de  $\mathcal{C}_1$  les surfaces coordonnées sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = c^e : \text{les sphères du faisceau linéaire de points-limites } \omega \text{ et } \omega'; \\ \psi = c^e : \text{les cyclides de Dupin déjà mentionnées;} \\ \Theta = c^e : \text{les sphères passant par le cercle } (\Gamma); \end{array} \right.$$

et les lignes coordonnées sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = c^e, \Theta = c^e : \text{les cercles passant par } \omega \text{ et } \omega'; \\ \Theta = c^e, \tau = c^e : \text{les cercles perpendiculaires à } (\Gamma) \text{ en deux points détermi-} \\ \quad \text{nant sur ce cercle une involution de points doubles } \omega \text{ et } \omega'; \\ \tau = c^e, \psi = c^e : \text{les cercles conjugués à } (\Gamma). \end{array} \right.$$

Des équations de  $\mathcal{G}$  (§ 6) on déduit celles de  $\mathcal{C}_1$  qui sont de la même forme

$$\tau' = k\tau, \quad \psi' = \psi, \quad \Theta' = \Theta + \alpha.$$

Ce sont des équations *intrinsèques* puisque  $k$  et  $\alpha$  sont invariants. On obtiendra les propriétés de  $\mathcal{C}_1$  à l'aide de ces équations, ou par la considération de l'image  $\mathcal{G}$ .

§ 26. — *Interprétation géométrique des invariants  $k$  et  $\alpha$ .* — Appliquons les équations ci-dessus au couple de points homologues  $\Phi$  et  $\infty$ ; on obtient

$$\tau_\infty = k\tau_\Phi, \quad \psi_\infty = \psi_\Phi, \quad \Theta_\infty = \Theta_\Phi + \alpha.$$

La première, comme  $\tau_\infty = 1$ , montre que  $k = \frac{\Phi\omega'}{\Phi\omega}$ . La deuxième montre que  $\Phi$  est sur la cyclide de Dupin de points singuliers  $\omega$  et  $\omega'$  contenant la droite  $\omega\omega'$ . [On voit immédiatement que cette cyclide possède une deuxième génératrice rectiligne, qui n'est autre que l'axe de révolution du cercle double  $(\Gamma)$ . On voit d'ailleurs aisément que d'une manière générale, si une cyclide de Dupin de l'espèce considérée ici possède une génératrice rectiligne, elle en possède une deuxième, ne rencontrant pas la première, et faisant avec elle un angle droit<sup>(\*)</sup>]. La troisième équation nous montre enfin que  $\alpha$  est égal à l'angle du plan du cercle  $(\Gamma)$  avec la sphère passant par  $(\Gamma)$  et par le point  $\Phi$ .

Le tétraèdre de sommets  $\omega\omega'\Phi\Psi$  admet l'axe de symétrie  $\Delta$ , car cette droite est perpendiculaire aux deux arêtes  $\omega\omega'$  et  $\Phi\Psi$  en leurs milieux respectifs  $\nu$  et  $\gamma$ . La forme de ce tétraèdre n'est pas invariante dans le groupe sphérique; car elle dépend de trois paramètres dont deux seulement sont invariants. Toutefois, comme elle est assujettie en permanence à une condition supplémentaire ( $\Phi$  doit être sur la cyclide

(\*) S'il s'agit au contraire de cyclides sans points singuliers réels (considérées plus loin, § 41), l'existence d'une génératrice rectiligne entraîne celle de trois autres (§ 46 - d); sur ces quatre droites, deux sont concourantes; les deux autres sont parallèles aux bissectrices de celles-là, mais ne se rencontrent pas.

mentionnée ci-dessus), si l'on transforme  $\mathcal{C}_i$  par une sphérique  $H$  quelconque, il suffit pour connaître la transformée  $\mathcal{C}'_i$  de connaître la figure invariante transformée, c'est-à-dire le cercle  $(\Gamma')$  et la sphère  $(\Sigma')$  qui le coupe aux points  $\omega'$  et  $\omega\bar{\omega}'$ . Effectivement on connaît alors le point  $O'$ , la droite  $\Delta'$ , et on peut construire  $\Phi'$  : il est à l'intersection de la cyclide à deux génératrices rectilignes avec la sphère définie par le rapport  $\frac{M\omega\bar{\omega}'}{M\omega'} = k$ , et avec la sphère faisant l'angle  $\alpha$  avec le plan de  $(\Gamma')$  le long de ce cercle. [Cette cyclide coupe chaque sphère de la famille  $\tau = c^e$  suivant deux cercles conjugués à  $(\Gamma)$  s'appuyant sur la droite  $\omega\bar{\omega}$ , et chaque sphère de la famille  $\Theta = c^e$  suivant deux cercles passant par  $\omega$  et  $\bar{\omega}$ , s'appuyant sur l'axe de  $(\Gamma)$ ].

Ces résultats sont d'accord avec le fait que  $\mathcal{C}_i$  dépend de dix paramètres, et que se donner la figure invariante revient à s'en donner huit, ce qui, avec  $k$  et  $\alpha$ , fera bien un total égal à dix.

*Sous-groupes.* — Les  $\mathcal{C}_i$  ayant un point double  $\bar{\omega}$  commun forment un groupe (dont l'image est le groupe des similitudes de l'espace).

Les  $\mathcal{C}_i$  ayant leurs deux points doubles communs forment un groupe (dont l'image est le groupe des similitudes ayant un même centre).

Enfin les  $\mathcal{C}_i$  de même figure invariante forment un groupe, dont l'image est celui des similitudes de centre et d'axe donnés.

*Cas particuliers.* — Si  $k = 1$ , on a une « rotation » (cf. § 17 et seq. ci-dessus); si  $\alpha = 0$ , on a une « homothétie » (§ 22). Une  $\mathcal{C}_i$  ne peut être involutive sans se réduire à une « rotation ». Enfin, si  $\alpha = \pi$ , on est dans le cas particulier des  $\mathcal{C}_s$ , étudié ci-après au § 28.

§ 27. — *Remarque.* — Quand on part de la forme  $\mathcal{C}_i = \Phi D$ , on peut être amené à considérer comme des cas particuliers intéressants : celui où  $D$  est un retournement-translation  $L$ , celui où l'axe du retournement-rotation passe par  $\Phi$ , et enfin celui où le plan du retournement passe par  $\Phi$ . D'après ce que nous avons dit, seul ce dernier cas présente un caractère intrinsèque. Nous allons nous assurer qu'il n'en est pas de même pour les deux premiers, c'est-à-dire que l'on peut toujours donner à une  $\mathcal{C}_i$  quelconque la forme correspondant à l'un de ces deux cas.

a) Transformons  $\mathcal{C}_i$  par une sphérique ayant son foyer-objet sur  $\Sigma$  : la transformée  $\mathcal{C}'_i$  admet un plan double  $\Sigma'$ ; elle est donc de la forme  $\mathcal{C}'_i = \Phi' L'$ ,  $\Sigma'$  étant le plan mené par le point  $\Phi'$  perpendiculairement au plan  $\Pi'$  du retournement-translation  $L'$ .

En outre, l'axe de symétrie  $\Delta'$  de la figure invariante est la perpendiculaire à  $\Phi'\Psi'$  en son milieu  $\chi$  dans le plan  $\Pi'$ . (Cf. § 13 et fig. 2.) Le plan  $\Sigma'$  étant plan de symétrie de toute la figure, le centre du cercle double  $(\Gamma')$  n'est autre que le

point  $\gamma$ , et ce cercle coupe  $\Sigma'$  en  $\omega'$  et  $\omega''$ . Il en résulte que le tétraèdre focal de  $\mathcal{C}'_1$  est aplati en un *parallélogramme*  $\omega'\omega''\Phi'\Psi'$  situé dans le plan  $\Sigma'$ . *La forme de ce parallélogramme est invariante quand  $\mathcal{C}'_1$  est transformée dans le groupe sphérique.*

(On a  $\frac{\Phi\omega''}{\Phi\omega'} = k$  et  $(\vec{\Phi\omega'}, \vec{\Phi\omega''}) = \alpha$ ). On peut en somme considérer  $\mathcal{C}'_1$  comme une forme « semi-réduite » de  $\mathcal{C}_1$ ; si la forme du tétraèdre de base de  $\mathcal{C}_1$  n'est pas invariante, en revanche la forme du parallélogramme de base de sa semi-réduite est invariante. Autrement dit, à chaque  $\mathcal{C}_1$  on fait correspondre une transformation circulaire plane directe de mêmes invariants  $k$  et  $\alpha$ .

b) Transformons  $\mathcal{C}_1$  en  $\mathcal{C}'_1$  par une sphérique ayant son foyer-objet sur le cercle double  $(\Gamma)$ ;  $\mathcal{C}'_1$  admet une droite double  $(\Gamma'')$ ; elle est donc égale au produit d'une inversion  $\Phi''$  par un retournement-rotation dont l'axe passe par le point  $\Phi''$ . Ici les points doubles  $\omega''$  et  $\omega'''$  sont sur  $(\Gamma'')$  c'est-à-dire sur la droite  $\Phi''\Psi''$ ; les quatre sommets du tétraèdre focal sont alignés.

On pourrait utiliser les formes a) ou b) pour étudier  $\mathcal{C}_1$ , mais il vaut évidemment mieux, comme on l'a fait, transformer  $\mathcal{C}_1$  en une similitude.

§ 28. — *Les transformations de cinquième espèce  $\mathcal{C}_5$ .* — Ce sont celles pour lesquelles le plan  $(\Pi)$  du retournement D passe par le centre d'inversion  $\Phi$ . En plus de la sphère  $\Sigma$  de centre O orthogonale à  $(\Phi)$   $\mathcal{C}_5$  admet un faisceau linéaire de sphères doubles coupant diamétralement  $(\Phi)$  et coupant  $(\Pi)$  suivant un cercle  $(\Gamma)$  de centre  $\Gamma$  situé sur  $(\Delta)$ , passant par les points A et B où O $\Phi$  coupe la sphère  $(\Phi)$  (cf. § 14 et fig. 4).  $(\Gamma)$  est le cercle double de  $\mathcal{C}_5$ . Les points doubles  $\omega$  et  $\omega'$  sont ceux où  $(\Gamma)$  coupe le grand cercle de  $(\Sigma)$  situé dans le plan  $(\Pi)$ . Ils sont symétriques par rapport à  $(\Delta)$ .  $(\Pi)$  est plan double : il fait partie du faisceau des sphères doubles;  $\mathcal{C}_5$  détermine dans  $(\Pi)$  une transformation circulaire inverse du type  $\mathcal{C}_h$ . (Cf. Plan § 11.)

L'image de  $\mathcal{C}_5$  obtenue par une sphérique de foyer-objet  $\omega$  est une  $\mathcal{G}$  de la forme  $\mathcal{H}r$ . Les  $\mathcal{C}_5$  constituent donc une famille à un paramètre, chaque transformation étant caractérisée par son invariant  $k$ . Le tétraèdre de base est aplati dans le plan  $(\Pi)$  et affecte la forme d'un trapèze isocèle ayant  $\Delta$  comme axe de symétrie.

La forme de ce trapèze n'est pas invariante, mais seulement le rapport  $k = \frac{\Phi\omega'}{\Phi\omega}$ .

On peut transformer  $\mathcal{C}_5$  en une « semi-réduite »  $\mathcal{C}'_5$  de la forme  $\Phi'L'$  pour laquelle le trapèze est aplati, les quatre points  $\omega'\omega''\Phi'\Psi'$  étant alignés. (Cf. fig. 3, et Plan § 11.) Une  $\mathcal{C}_5$  est complètement déterminée par la donnée de son invariant caractéristique  $k$  et de sa figure invariante constituée par le cercle  $(\Gamma)$  et la sphère  $(\Sigma)$ .

Si  $k = 1$ ,  $\mathcal{C}_5$  se réduit à une transposition. (Cf. § 20.)

Le produit de deux  $\mathcal{C}_5$  de même figure invariante est une homothétie anallagmatique. Une  $\mathcal{C}_5$  ne peut être réciproque sans se réduire à une transposition.

D) Les transformations sphériques directes de deuxième  
et de sixième espèces.

§ 29. — *Image et figure invariante.* — Tout ce que nous dirons des  $\mathcal{C}_2$  s'appliquera en particulier aux  $\mathcal{C}_6$  dont l'étude spéciale suivra (§ 31 ci-après).

Les  $\mathcal{C}_2$  sont le produit d'une inversion  $\Phi$  par un retournement-rotation  $R$  dont le centre  $O$  est situé sur la sphère  $(\Phi)$ . Le point  $O$  est évidemment point double de  $\mathcal{C}_2$ . Une sphérique  $J$  de foyer-objet  $O$  transforme  $\mathcal{C}_2$  en un produit de deux rotations, c'est-à-dire en un déplacement  $\mathcal{D}$ . Si on remplace  $J$  par une autre sphérique de foyer  $O$ , ou bien si l'on fait cette opération sur la transformée  $\mathcal{C}'_2$  de  $\mathcal{C}_2$  par une sphérique quelconque, on retrouve le déplacement  $\mathcal{D}$  à une similitude près (démonstration analogue à celle du théorème VI, § 24).  $\mathcal{D}$  sera dit l'image de  $\mathcal{C}_2$ ; celle-ci admet l'angle  $\alpha$  du déplacement comme invariant caractéristique dans le groupe sphérique. Au point de vue de la géométrie ordinaire,  $\mathcal{C}_2$  dépend de neuf paramètres, comme on s'en assure aisément : quatre pour la sphère  $(\Phi)$ , deux pour le point  $O$  sur  $(\Phi)$ , deux pour l'axe  $D$  du retournement-rotation, un pour l'angle  $2\mu$  de ce retournement. Nous pouvons supposer ici que  $\mathcal{D}$  est un déplacement hélicoïdal complet; en effet les cas  $\mathcal{D} = \mathcal{R}$  et  $\mathcal{D} = \mathcal{L}$  ont été étudiés plus haut (§ 17 et seq.).  $\mathcal{D}$  admet un point double : le point à l'infini de l'espace; une droite double : l'axe hélicoïdal  $(\gamma)$ ; pas de cercles doubles; pas de plans doubles (sauf si  $\alpha = \pi$ ) ni de sphères doubles;  $\mathcal{D}$  conserve enfin les cylindres de révolution d'axe  $(\gamma)$ . Il en résulte que  $\mathcal{C}_2$  conserve le point  $O$ , le cercle  $(\Gamma)$ , et les cyclides de Dupin engendrées par les cercles tangents en  $O$  à  $(\Gamma)$  qui s'appuient sur un même cercle conjugué à  $(\Gamma)$ . Il n'y a pas de sphère double, sauf si  $\alpha = \pi$ , c'est-à-dire si l'on a affaire à une  $\mathcal{C}_6$ .

Nous verrons plus loin (§ 72) comment on peut construire le cercle  $(\Gamma)$  et par suite toute la figure invariante (cyclides) à partir des éléments définissant  $\mathcal{C}_2$ . Nous savons dès à présent que ce cercle admet  $\Delta$  comme diamètre par raison de symétrie (§ 13).

§ 30. — *Équations de  $\mathcal{C}_2$ .* — Dans l'espace-image où opère  $\mathcal{D}$ , prenons les coordonnées  $\rho, x, \theta$  définies au § 6, et dans l'espace où opère  $\mathcal{C}_2$  les coordonnées correspondantes définies comme suit :

Par  $M$  menons la sphère passant par  $(\Gamma)$  : la calotte sphérique limitée par  $(\Gamma)$  et contenant  $M$  fait avec une calotte fixe passant par  $(\Gamma)$  un angle  $\Theta$  défini sans ambiguïté entre 0 et  $2\pi$ . [ $(\Gamma)$  est, comme toujours, orienté]. Le plan passant par  $M$  et par la tangente  $OX$  à  $(\Gamma)$  en  $O$  coupe la calotte précédente suivant un cercle  $(G)$  tangent à  $(\Gamma)$  en  $O$ ; ce cercle coupe en  $O$  et en un autre point  $G$  le plan



normal à  $OX$  en  $O$ ; soit  $O'$  le point diamétralement opposé à  $O$  sur le cercle  $(\Gamma)$ ; nous posons  $\tau = \frac{GO'}{GO}$ ; ce rapport est un nombre essentiellement positif. Soit enfin  $N$  le centre de la sphère normale à  $(\Gamma)$  en  $O$  et passant par  $M$ ; nous posons  $X = \frac{c^2}{ON}$ ,  $c$  étant une longueur arbitraire. On voit aisément que l'on a

$$\tau = \frac{\xi}{\xi_0}, \quad X = \xi(x - x_0), \quad \Theta = \theta - \theta_0,$$

$\xi_0, \xi, x_0, \theta_0$  étant des constantes dépendant de la transformation utilisée pour prendre l'image  $\mathcal{D}$ . Les surfaces coordonnées sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = c^{te} : \text{les cyclides de Dupin mentionnées au précédent paragraphe;} \\ X = c^{te} : \text{les sphères normales à } (\Gamma) \text{ en } O; \\ \Theta = c^{te} : \text{les sphères passant par } (\Gamma); \end{array} \right.$$

et les lignes coordonnées sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = c^{te}, \Theta = c^{te} : \text{les cercles passant par } O \text{ « perpendiculaires » à } (\Gamma), \text{ c'est-} \\ \text{à-dire rencontrant } (\Gamma) \text{ à angle droit en } O \text{ et en un autre} \\ \text{point;} \\ \Theta = c^{te}, \tau = c^{te} : \text{les cercles tangents à } (\Gamma) \text{ en } O; \\ \tau = c^{te}, X = c^{te} : \text{les cercles conjugués à } (\Gamma). \end{array} \right.$$

Les équations de  $\mathcal{D}$  étant

$$\xi' = \xi, \quad x' = x + m, \quad \theta' = \theta + \alpha,$$

celles de  $\mathcal{C}_2$  sont

$$\tau' = \tau, \quad X' = X + M, \quad \Theta' = \Theta + \alpha.$$

Seul  $\alpha$  est invariant, et non pas  $M$ .

*Interprétation géométrique de l'invariant  $\alpha$ .* — Appliquons les équations précédentes au couple  $(\Phi, \infty)$ . On obtient

$$\tau_\infty = \tau_\Phi, \quad X_\infty = X_\Phi + M, \quad \Theta_\infty = \Theta_\Phi + \alpha.$$

Comme  $\tau_\infty = 1$ , la première équation montre que  $\Phi$  est sur la cyclide  $\tau = 1$  engendrée par les cercles  $(G_i)$  tangents en  $O$  à  $(\Gamma)$  et s'appuyant sur l'axe de révolution du cercle  $(\Gamma)$ . La deuxième équation donne  $M = -X_\Phi$  car  $X_\infty = 0$ , ce qui donne la signification géométrique de la quantité  $M$ . La troisième équation donne  $\alpha = \Theta_\infty - \Theta_\Phi$ , c'est-à-dire que  $\alpha$  est égal à l'angle du plan de  $(\Gamma)$  avec la sphère passant par  $(\Gamma)$  et  $\Phi$ .

*Détermination d'une  $\mathcal{C}_2$ .* — La donnée de la figure invariante (cercle  $\Gamma$  et point  $O$ ) et de l'angle  $\alpha$  ne suffit pas à déterminer complètement  $\mathcal{C}_2$ . En effet le cercle ( $G_1$ ) sur lequel doit se trouver  $\Phi$  est bien déterminé par ses équations  $\tau = 1$  et  $\Theta = \Theta_\infty - \alpha$ , mais  $\Phi$  peut être quelconque sur ce cercle. Cela s'accorde avec le fait que  $\mathcal{C}_2$  dépend de neuf paramètres, et que la donnée de la figure invariante et de  $\alpha$  représente celle de  $7 + 1 = 8$  paramètres seulement.

*Sous-groupes.* — Les  $\mathcal{C}_2$  de même point double  $O$  forment un groupe, qui a pour image le groupe des déplacements de l'espace.

Les  $\mathcal{C}_2$  de même point double  $O$  et de même cercle double ( $\Gamma$ ) forment un groupe, qui a pour image le groupe des déplacements de même axe hélicoïdal. Dans ce groupe, toutes les cyclides  $\tau = c^{10}$  sont conservées. Le produit de deux de ces  $\mathcal{C}_2$  d'angles respectifs  $\alpha$  et  $\alpha'$  est une  $\mathcal{C}_2$  d'angle  $\alpha + \alpha'$ .

Une  $\mathcal{C}_2$  ne peut être réciproque ou involutive d'ordre quelconque sans se réduire à une « rotation ».

*Forme semi-réduite.* — En transformant  $\mathcal{C}_2$  en  $\mathcal{C}'_2$  par une sphérique ayant son foyer-objet sur le cercle double ( $\Gamma$ ) on peut toujours mettre  $\mathcal{C}_2$  sous la forme  $\mathcal{C}'_2$  du produit d'une inversion  $\Phi'$  par un retournement  $D'$  dont l'axe passe par  $\Phi'$ , et par suite dont le plan est tangent à la sphère ( $\Phi'$ ) en  $O'$ . L'angle  $2\mu'$  de ce retournement est égal à  $\alpha$ .

§ 31. — *Transformation de sixième espèce.* — C'est le cas particulier où le point  $\Phi$  se trouve dans le plan de retournement. Il y a un faisceau de sphères doubles passant par le cercle ( $\Gamma$ ) du plan ( $\Pi$ ) qui passe par  $O$ , par le point  $O_1$  diamétralement opposé à  $O$  sur ( $\Phi$ ), et centré sur  $\Delta$  (fig. 5). Parmi ces sphères se trouve en particulier le plan ( $\Pi$ ), dans lequel  $\mathcal{C}_2$  détermine une transformation circulaire inverse du type  $\mathcal{C}_2$  (Plan § 11). L'image de  $\mathcal{C}_2$  obtenue à l'aide d'une sphérique de foyer-objet  $O$  est un déplacement  $\mathcal{D}$  dont la rotation composante est d'angle  $\alpha = \pi$ ;  $\mathcal{D} = r\mathcal{F}$ .

Avec les coordonnées utilisées ci-dessus pour les  $\mathcal{C}_2$  en général, les équations de  $\mathcal{C}_2$  sont

$$\tau' = \tau, \quad X' = X + M, \quad \Theta' = \Theta + \pi.$$

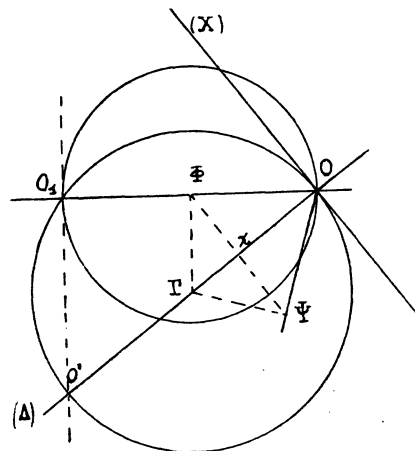


FIG. 5.

$\mathcal{C}_2$  ne présente pas d'invariant dans le groupe sphérique; c'est un type intrinsèque.

que. Elle est déterminée par la donnée de sa figure invariante (cercle  $\Gamma$  et point  $O$ ) et d'une condition supplémentaire, pour fixer la position de  $\Phi$  sur le cercle de diamètre  $O\Gamma$ .

On peut mettre  $\mathcal{C}_6$  sous une forme semi-réduite, cas particulier de celle de  $\mathcal{C}_4$ , par le même procédé; cette forme  $\mathcal{C}'_6$  se déduit de celle de la figure 5 en faisant  $2\mu = \pi$ . Il y a une droite double, et une infinité de plans doubles : ceux qui passent par cette droite.  $\mathcal{C}'_6$  est, si l'on veut, le produit d'une inversion  $\Phi'$  par une symétrie autour d'un point  $O'$  de la sphère d'inversion.

### E) Les transformations sphériques directes de troisième et de septième espèces.

Elles sont définies par un produit  $\mathcal{C}_3 = \Phi R$ , où  $R$  est un retournement-rotation de centre  $O$  intérieur à la sphère  $(\Phi)$ . Leur propriété caractéristique est, nous l'avons vu, de n'admettre aucune sphère double réelle, sauf si le plan  $(II)$  contient le point  $\Phi$ ; auquel cas on a affaire à une  $\mathcal{C}_7$ , qui admet un faisceau linéaire de sphères doubles.

§ 32. — 1° PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES; CERCLES DOUBLES. — Une  $\mathcal{C}_3$  ne peut être transformée en une similitude, car celle-ci serait nécessairement directe, et la transformée d'une similitude directe quelconque est une  $\mathcal{C}_1$  (§ 24). Donc une  $\mathcal{C}_3$  n'admet aucun point double réel, car si elle en avait un, soit  $\omega$ , une sphérique de foyer-objet  $\omega$  la transformerait en une similitude.

Une  $\mathcal{C}_3$  n'admet donc ni sphère double, ni point double; nous allons montrer qu'elle admet au contraire deux cercles doubles en général, et exceptionnellement une infinité. La recherche de ces cercles nous donnera toutes les propriétés des  $\mathcal{C}_3$ ; dès à présent, nous pouvons penser que les  $\mathcal{C}_3$  sont plus intéressantes que les  $\mathcal{C}_1$  ou  $\mathcal{C}_2$ , car les propriétés intrinsèques des  $\mathcal{C}_1$  ou  $\mathcal{C}_2$  n'étaient pas différentes de celles des similitudes.

§ 33. — LEMME I. — *La condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles égaux soient homologues dans l'inversion définie par la sphère  $(\Phi)$  est que ces deux cercles aient deux points communs, que la sphère  $(S)$  passant par ces deux cercles soit orthogonale à  $(\Phi)$ , et que son centre  $S$  soit l'inverse par rapport à  $(\Phi)$  du milieu  $I$  de la corde commune.*

[Nous supposons les deux cercles distincts; s'ils ne l'étaient pas, la condition serait qu'ils soient tracés sur la sphère  $(\Phi)$  ou orthogonaux à  $(\Phi)$ ].

a) *La condition est nécessaire.* — En effet, si  $(\Gamma_1)$  est l'inverse de  $(\Gamma)$ , il est sur

La sphère (S) orthogonale à  $(\Phi)$  menée par  $(\Gamma)$ : le plan mené par  $\Phi$  perpendiculairement à celui de  $(\Gamma)$  est de symétrie pour toute la figure. La droite  $(\delta)$  intersection des plans de  $(\Gamma)$  et de  $(\Gamma_1)$  est perpendiculaire en I à ce plan de symétrie, que nous prenons pour plan de figure (*fig. 6*). I est dans le plan polaire du point  $\Phi$  par rapport à (S), donc sur la droite  $(d)$  trace sur le plan de figure du plan radical des sphères  $(\Phi)$  et (S).

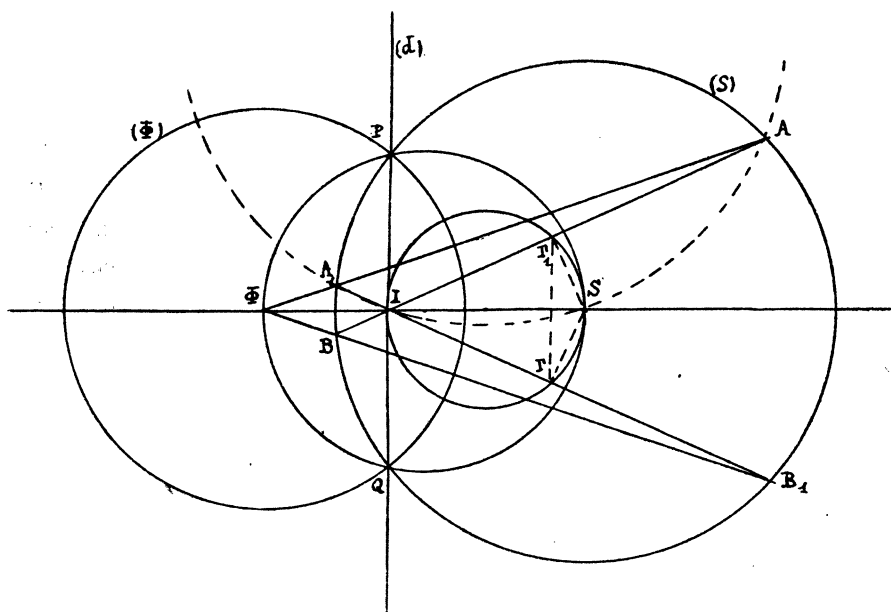


FIG. 6.

Si  $a$  est le rayon de  $(\Phi)$ ,  $A$  et  $B$  les points où  $(\Gamma)$  perce le plan de figure,  $A_1$  et  $B_1$  les points analogues pour  $(\Gamma_1)$ , le rapport des longueurs des diamètres des deux cercles est

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{a^2}{\Phi A \cdot \Phi B}$$

Comme  $A_1B_1 = AB$ , on a  $\Phi A \cdot \Phi B = a^2$ ; un des points  $A$  ou  $B$ ,  $A$ , par exemple, est extérieur à  $(\Phi)$ , l'autre  $B$  intérieur. [Si l'on avait  $\Phi A = a$ ,  $\Phi B = a$ , on retrouverait le cas écarté de deux cercles confondus]. Le cercle  $(\Gamma)$  coupe donc  $(\Phi)$  en deux points réels  $M$  et  $N$  se projetant sur le plan de figure au milieu  $I$  du segment  $MN$ .  $(\Gamma_1)$  passe par  $M$  et  $N$  et l'on a

$$\overline{\Phi A_1} \cdot \overline{\Phi A} = a^2, \quad \overline{\Phi B_1} \cdot \overline{\Phi B} = a^2;$$

d'où

$$\overline{\Phi A_1} = \frac{a^2}{\overline{\Phi A}} = \overline{\Phi B}, \quad \overline{\Phi B_1} = \frac{a^2}{\overline{\Phi B}} = \overline{\Phi A}.$$

Par suite le point I intersection de AB et  $A_1B_1$  se trouve sur la bissectrice des deux droites  $\Phi AA_1$  et  $\Phi BB_1$ ; cette droite  $\Phi I$  est axe de symétrie de la figure; elle passe par le centre S de la sphère passant par les deux cercles. Comme la polaire de S par rapport au cercle ( $\Phi$ ) est la droite ( $d$ ), on a

$$(1) \quad \overline{\Phi I} \cdot \overline{\Phi S} = a^2.$$

b) *La condition est suffisante.* — Il s'agit de montrer que si ( $\Gamma_1$ ) est un cercle égal à ( $\Gamma$ ) situé sur une sphère (S) passant par ( $\Gamma$ ) de sorte que le milieu I de la corde commune à ( $\Gamma_1$ ) et ( $\Gamma$ ) soit l'inverse de S par rapport à ( $\Phi$ ), alors ( $\Gamma_1$ ) est l'inverse de ( $\Gamma$ ) par rapport à ( $\Phi$ ).

A cet effet, prenons le plan médiateur de la corde commune à ( $\Gamma$ ) et ( $\Gamma_1$ ) comme plan de figure (*fig. 6*); ce plan contient la droite  $\Phi IS$  et l'on a  $\overline{\Phi I} \cdot \overline{\Phi S} = a^2$ . Les cercles ( $\Phi$ ) et (S) étant orthogonaux, leur axe radical ( $d$ ) coupe  $\Phi S$  en un point J tel que  $\overline{\Phi J} \cdot \overline{\Phi S} = a^2$ ; donc J se confond avec I, c'est-à-dire que ( $d$ ) passe par I.

Les plans de ( $\Gamma$ ) et de ( $\Gamma_1$ ) sont équidistants de S; donc leurs traces sur le plan de figure sont symétriques par rapport à IS, soient AB et  $A_1B_1$ . L'inverse de A est un point A' tel que  $\widehat{SIA'} = \widehat{\Phi IA}$  (car ISAA' sont sur un même cercle orthogonal à ( $\Phi$ ), et  $\widehat{\text{arc SA}} = \widehat{\text{arc SA'}}$  puisque  $SA = SA'$ ). Donc A' se confond avec  $A_1$ ; de même  $B_1$  est l'inverse de B; par suite ( $\Gamma_1$ ) est l'inverse de ( $\Gamma$ ).

§ 34. — LEMME II. — *La condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles cosphériques soient homologues dans un retournement-rotation est que ces deux cercles soient égaux, que leurs centres soient situés dans le plan de retournement et homologues dans la rotation du retournement, et que la corde commune aux deux cercles passe par le centre de retournement.*

[Nous écartons le cas où la sphère (S) passant par les deux cercles serait conservée dans le retournement : elle aurait alors O pour centre; la condition nécessaire et suffisante est alors simplement que les centres  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$  des deux cercles soient homologues dans le retournement].

Remarquons d'abord que la condition nécessaire et suffisante pour que deux points M et M' soient homologues dans un retournement-rotation est que le segment MM' ait son milieu  $M_0$  dans le plan (II) de retournement, et soit perpendiculaire en ce point à la droite  $OM_0$ , les points M et M' se projetant sur (II) en m et m' tels que

$$(\widehat{Om}, \widehat{OM_0}) = (\widehat{OM_0}, \widehat{Om'}) = \mu$$

(l'angle du retournement étant  $2\mu$ ). Cela posé :

a) *La condition est nécessaire.* — Si ( $\Gamma$ ) est l'homologue de ( $\Gamma_1$ ) dans le retournement R, la sphère (S) passant par ( $\Gamma$ ) et ( $\Gamma_1$ ) devient dans R une sphère (S')

passant par  $(\Gamma)$ , égale à  $(S)$ . Donc, ou bien elle se confond avec  $(S)$ , ou bien elle est symétrique de  $(S)$  par rapport à  $\Gamma$ . Dans le premier cas,  $(S)$  serait conservée dans le retournement, et nous avons supposé qu'il n'en était pas ainsi. Dans le deuxième cas, seul à considérer,  $\Gamma$  est le milieu du segment  $SS'$ : donc  $\Gamma$  est dans le plan  $(II)$  et  $O\Gamma$  est perpendiculaire à  $SS'$ . De même  $\Gamma_1$  est dans  $(II)$ ;  $S\Gamma_1$  est perpendiculaire à  $O\Gamma_1$ , et  $(O\Gamma_1, O\Gamma) = 2\varphi$  (*fig. 7*).

Comme  $S\Gamma = S\Gamma_1$ , on voit que  $S$  est dans le plan médiateur de  $\Gamma_1\Gamma$ , dont la trace sur  $(II)$  est la droite  $OHs$ ,  $s$  étant la projection de  $S$  sur  $(II)$ . Comme les plans des cercles  $(\Gamma_1)$  et  $(\Gamma)$  sont respectivement perpendiculaires à  $S\Gamma_1$  et  $S\Gamma$ , ils passent par  $\Gamma_1O$  et  $\Gamma O$ ; donc la corde commune  $(\delta)$  aux deux cercles passe par  $O$ ; en son milieu  $I$  elle est d'ailleurs perpendiculaire à  $SH$ .

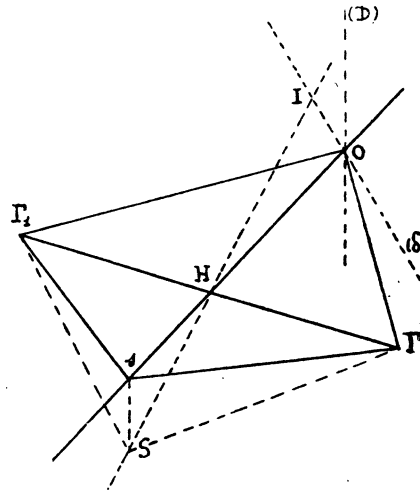


FIG. 7.

b) *La condition est suffisante.* — Si elle est réalisée, l'homologue  $(\Gamma'_1)$  de  $(\Gamma_1)$  dans le retournement se confond avec  $(\Gamma)$ .

En effet le centre de  $(\Gamma'_1)$  est le point  $\Gamma$ ; ensuite  $(\Gamma'_1)$  est égal à  $(\Gamma)$ . Ces deux cercles sont donc sur une même sphère; il reste à montrer qu'ils sont dans un même plan. Pour cela, on remarque que,  $S'$  étant l'homologue de  $S$  dans le retournement,  $\overrightarrow{SS'} = 2\overrightarrow{S\Gamma}$ ; or le plan de  $(\Gamma'_1)$  doit être perpendiculaire en  $\Gamma$  à  $S'\Gamma$ ; il passe donc par  $O\Gamma$ . En outre il fait avec  $(II)$  un angle égal à celui que fait le plan de  $(\Gamma_1)$ , donc égal à celui que fait  $(\Gamma)$ . Donc les plans de  $(\Gamma'_1)$  et de  $(\Gamma)$  sont bien confondus.

*Remarque.* — Cet énoncé s'étend au cas du retournement-translation (qui n'est pas à considérer dans l'étude des  $\mathcal{C}_2$ ). La corde commune  $(\delta)$  est alors parallèle au plan de retournement.

§ 35. — LEMME III. — Nous rappelons sous cette rubrique quelques propriétés du *quadrangle orthocentrique*. Soient  $A, B, C, D$  les sommets;  $I, J, K$  les pieds des trois hauteurs (*fig. 8*).

a) Par un des sommets, soit  $A$ , menons une droite arbitraire  $(X)$ ; projetons sur elle orthogonalement un des côtés ne passant pas par  $A$ , soit  $BC$ , en  $bc$ ; soient  $\beta$  et  $\gamma$  les points où la droite  $X$  coupe  $DB$  et  $DC$ . On aura

$$(1) \quad \frac{\overline{Ab}}{\overline{A\beta}} = \frac{\overline{Ac}}{\overline{A\gamma}}.$$

En effet, les triangles semblables  $ABb$  et  $A\gamma I$  donnent :  $\frac{Ab}{AI} = \frac{AB}{A\gamma}$  ;  
 les triangles  $ACc$  et  $A\beta J$  donnent de même :  $\frac{AC}{A\beta} = \frac{Ac}{AJ}$  ;  
 et enfin les triangles  $ABJ$  et  $ACI$  donnent :  $\frac{AB}{AC} = \frac{AJ}{AI}$  .

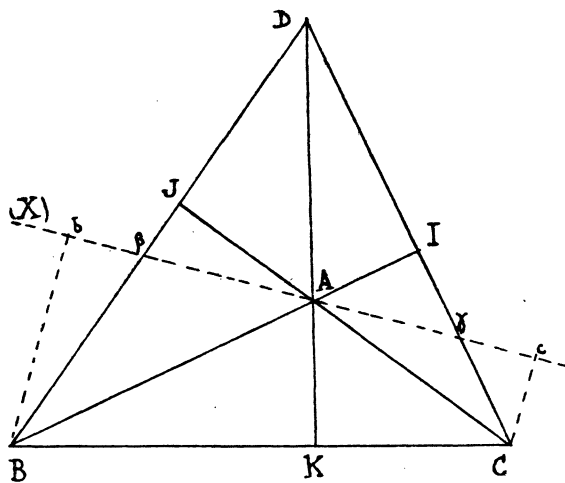


FIG. 8.

En multipliant membre à membre ces trois relations, on a bien l'égalité (1).

b) Les cercles ayant pour diamètres deux côtés opposés du quadrangle sont orthogonaux.

Par exemple I et J sont les points d'intersection des cercles de diamètres AD et BC; C étant sur la polaire de B par rapport au cercle (AD), le cercle (BC) est orthogonal à celui-là. Il y a six cercles de ce

genre; par chacun des quatre sommets A, B, C, D il en passe trois. On a

$$(2) \quad \overline{KB} \cdot \overline{KC} + \overline{KA} \cdot \overline{KD} = 0$$

et trois relations analogues.

§ 36. — *Construction des cercles doubles.* — Revenons au problème posé au début de ce paragraphe, savoir la recherche des cercles doubles de  $\mathcal{C}_3$ .

Si  $(\Gamma)$  est un tel cercle, l'inversion  $\Phi$  le transforme en  $(\Gamma_1)$ , et le retournement R transforme  $(\Gamma_1)$  en  $(\Gamma)$ .  $(\Gamma_1)$  et  $(\Gamma)$  étant donc égaux, le lemme I est applicable. Remarquons que si les deux cercles sont confondus, c'est que  $(\Gamma)$  est conservé dans  $\Phi$  et par suite dans R; donc il est dans le plan (II) et a O pour centre; par suite  $\Phi$  est sur l'axe (D) ou dans le plan (II) du retournement. Ces deux cas seront examinés ci-après (§ 37 b et c).

Reprenons le cas général où  $\Phi$  n'est pas sur (D) ni dans (II). Alors  $(\Gamma_1)$  et  $(\Gamma)$  ne sont pas confondus; d'après le lemme I, le milieu l de leur corde commune  $(\delta)$  est l'inverse du centre S de la sphère commune, qui est orthogonale à  $(\Phi)$ . En outre, puisque  $\mathcal{C}_3$  ne possède pas de sphère double, le lemme II montre que les centres  $\Gamma_1$  et  $\Gamma$  sont dans le plan (II), que  $(\delta)$  passe par O. et que  $(\overline{O\Gamma_1}, \overline{O\Gamma}) = 2\mu$ . On en déduit que le plan passant par (D),  $(\delta)$ , S et H (milieu de  $\Gamma\Gamma_1$ ) contient aussi le point  $\Phi$ , puisque  $\Phi, S, I$  sont alignés. Prenons-le pour plan de la figure 9.

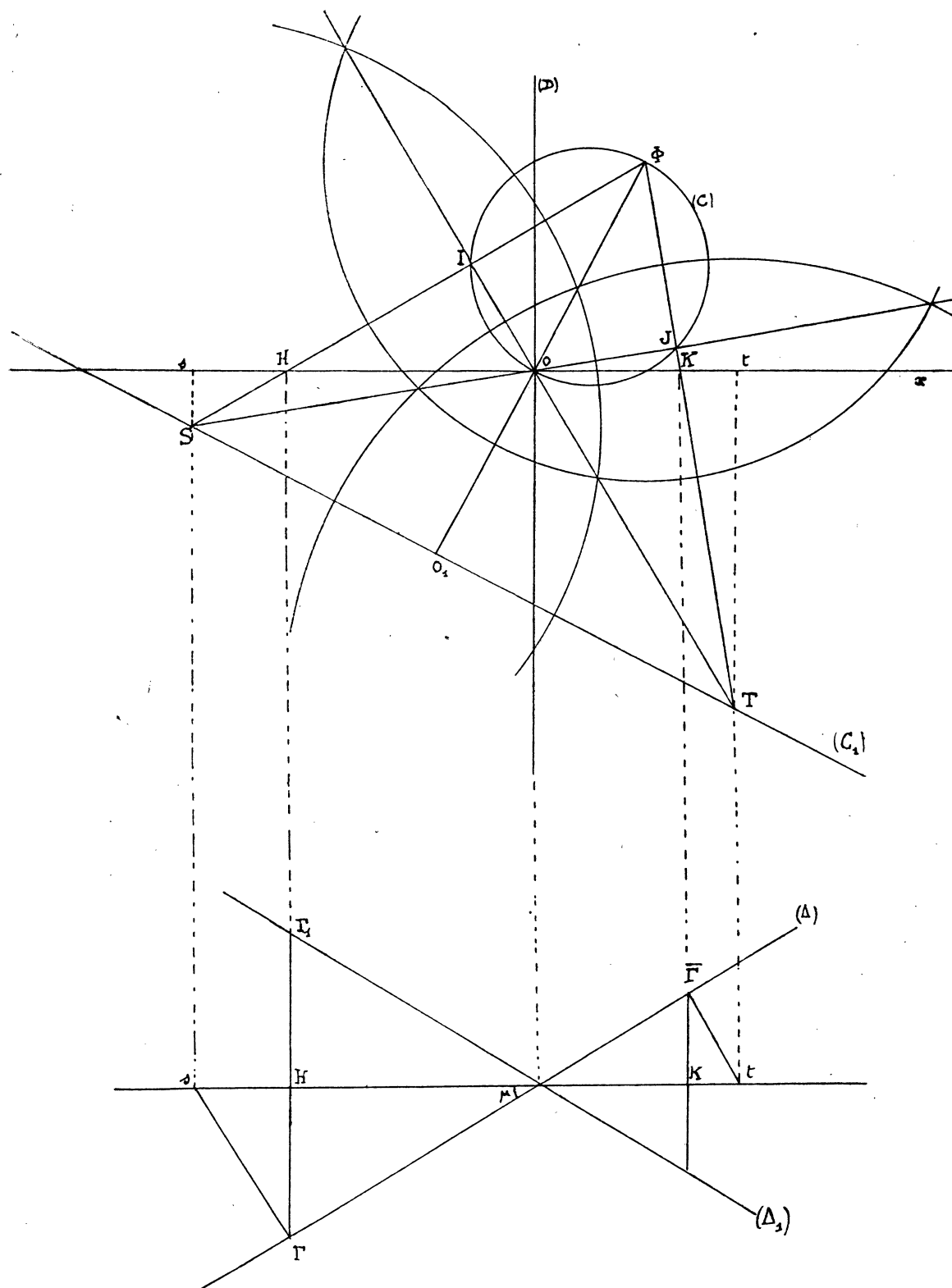


FIG. 9.



Soit  $O_1$  l'inverse de  $O$ ; puisque  $O$  est intérieur à  $(\Phi)$ ,  $O_1$  est extérieur. Le cercle  $(C)$  de diamètre  $\Phi O$  a pour inverse la perpendiculaire  $(C_1)$  en  $O_1$  à  $\Phi O_1$ . Comme  $I$  se trouve sur  $(C)$ , son inverse  $S$  est sur  $(C_1)$ . Soit alors  $T$  l'orthocentre du triangle  $\Phi OS$ , intersection de  $(C_1)$ ,  $OI$  et  $\Phi J$  (perpendiculaire menée de  $\Phi$  à  $OS$ ); les pieds des trois hauteurs du quadrangle orthocentrique  $\Phi OST$  sont les points  $O_1, I, J$ .

Projetons toute la figure de l'espace sur le plan  $(II)$ , ce qui donne la partie inférieure de la figure 9, laquelle constitue ainsi une représentation en géométrie descriptive. Le point  $\Gamma$  est tel que  $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{O\Gamma}) = \mu$ ; il est sur la droite  $(\Delta)$ ; de même  $\Gamma'$  est sur  $(\Delta)$  faisant l'angle  $-\mu$  avec  $Ox$ .  $H$  étant le milieu de  $\Gamma\Gamma'$ , on a

$$\overline{OH} = \overline{O\Gamma} \cos \mu = \overline{Os} \cos^2 \mu,$$

$s$  étant la projection de  $S$  sur  $Ox$ . La recherche de  $\Gamma$  est ainsi ramenée à un problème de *géométrie plane* (sur la projection verticale) : mener par  $\Phi$  une droite coupant les droites fixes  $(C_1)$  et  $Ox$  respectivement en  $S$  et  $H$  tels que

$$\overline{OH} = \overline{Os} \cos^2 \mu,$$

$\mu$  étant un angle donné.

Pour résoudre ce problème, remarquons d'abord que si  $S$  est une solution, il en est de même de  $T$ , car en vertu du lemme III (a) on a

$$\frac{\overline{O\Gamma}}{\overline{OK}} = \frac{\overline{Os}}{\overline{OH}}$$

et l'on aura en outre

$$\overline{O_1S} \cdot \overline{O_1T} + \overline{O_1O} \cdot \overline{O_1\Phi} = 0 \quad [\text{lemme III (b)}].$$

Considérons ensuite l'homographie définie sur  $Ox$  de la manière suivante :  $P$  étant un point de cette droite, on mène  $\Phi P$  coupant  $(C_1)$  en  $P_1$ , que l'on projette en  $p_1$  sur  $Ox$ , et on prend  $\overline{OQ} = \overline{Op_1} \cos^2 \mu$ . Les points  $H$  cherchés sont les points doubles de l'homographie  $(P, Q)$ . Il y aura donc en général deux solutions  $H$  et  $K$  que nous construirons de la manière suivante : si  $R$  est le milieu de  $ST$ ,  $r$  sa projection sur  $Ox$ ,  $L$  le milieu de  $HK$  on aura  $\overline{OL} = \overline{Or} \cos^2 \mu$ , et l'on construira  $r$  en construisant  $L$ , ce qui est immédiat, car  $L$ , milieu des points doubles de l'homographie, est aussi milieu de ses deux foyers. Or le foyer-objet  $P_\infty$  est le point où la parallèle à  $(C_1)$  menée par  $\Phi$  coupe  $Ox$  (*fig. 10*); le foyer-image  $Q_\infty$  se construit à partir de la relation  $\overline{OQ_\infty} = \overline{Op} \cos^2 \mu$ ,  $p$  étant la projection sur  $Ox$  du point où la parallèle à  $Ox$  menée par  $\Phi$  coupe  $(C_1)$ ;  $L$  est le milieu du segment  $P_\infty Q_\infty$  (*fig. 10*).

$L$  étant ainsi construit, on en déduit  $r$  d'après  $\overline{Or} = \frac{\overline{OL}}{\cos^2 \mu}$ , d'où  $R$ ; et de ce point comme centre on mène le cercle orthogonal à  $(C)$  qui coupe  $(C_1)$  en  $S$  et  $T$ .

Les projections  $\Gamma$  et  $\bar{\Gamma}$  de  $S$  et  $T$  sur  $(\Delta)$  sont les centres des deux cercles doubles de  $\mathcal{C}_3$ . Ces deux cercles sont tracés respectivement sur les sphères de centres  $S$  et  $T$  orthogonales à  $(\Phi)$ , et leurs plans sont respectivement perpendiculaires à  $S\Gamma$  et  $T\bar{\Gamma}$  en  $\Gamma$  et  $\bar{\Gamma}$ , ce qui les détermine complètement.

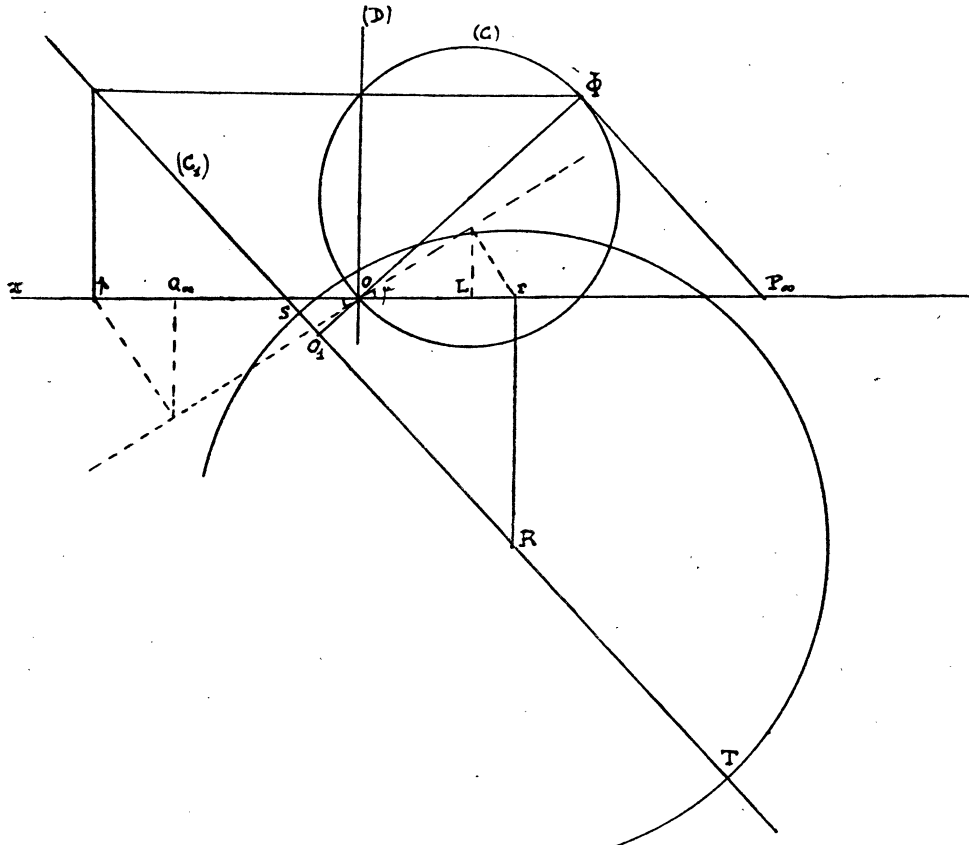


FIG. 10.

§ 37. — Discussion. — a) Cas général :  $\Phi$  est hors du plan (II) et hors de la droite (D). La construction précédente donne deux cercles doubles distincts réels proprement dits, c'est-à-dire ayant leurs centres à distance finie. En effet  $O\Phi$  étant distinct des droites  $Ox$  et (D), il en est de même de  $(C_1)$  (fig. 10), et l'on a  $\Phi O_1 > a > \Phi O$ . Les points  $P_\infty$  et  $Q_\infty$  sont tous deux à distance finie; de même  $L_1$  et  $r$  si  $\cos^2 \mu \neq 0$ , c'est-à-dire si  $2\mu \neq \pi$ .  $R$  est bien déterminé, de même  $S$  et  $T$ , car  $R$  est extérieur au cercle (C) puisqu'il est sur  $(C_1)$ . De même  $S$  et  $T$ , étant extérieurs à  $(\Phi)$ , les sphères (S) et (T) orthogonales à  $(\Phi)$  sont réelles. Enfin les projections  $\Gamma$  et  $\bar{\Gamma}$  de  $S$  et  $T$  sur  $(\Delta)$  sont respectivement intérieures aux deux sphères (S) et (T) car (fig. 9)  $S\Gamma < SO$ , et  $\text{rayon}(S) = \text{puissance}_\Phi S = \text{puissance}_c S = \overline{SI} \cdot \overline{S\Phi} = \overline{SO} \cdot \overline{SJ}$  qui est  $> \overline{SO}^2$ . Donc les cercles  $(\Gamma)$  et  $(\bar{\Gamma})$  sont réels.

$\mathcal{C}_s$  admet donc en général deux cercles doubles réels ayant  $(\Delta)$  pour diamètre commun. Cette droite est donc bien axe de symétrie de la figure invariante, conformément au théorème général IV (§ 13). En outre *les cercles*  $(\Gamma)$  et  $(\bar{\Gamma})$  sont « conjugués » : en effet  $S$  est dans le plan du cercle  $(\bar{\Gamma})$  car ce dernier contient la droite  $SOJ$ , corde commune à  $(\bar{\Gamma})$  et à son inverse  $(\bar{\Gamma}_1)$ ; de même  $T$  est dans le plan de  $(\Gamma)$ . Par suite les deux droites  $S\Gamma$  et  $T\bar{\Gamma}$ , axes de révolution de  $(\Gamma)$  et  $(\bar{\Gamma})$ , sont perpendiculaires, et d'ailleurs toutes deux perpendiculaires à  $(\Delta)$  respectivement en  $\Gamma$  et  $\bar{\Gamma}$ ; en outre, les sphères  $(S)$  et  $(T)$  sont orthogonales, car  $T$  par exemple étant sur l'axe radical  $IO$  de  $(S)$  et  $(\Phi)$ , la sphère  $(T)$  est orthogonale à  $(S)$  puisqu'elle l'est à  $(\Phi)$ . Il en résulte bien que  $(\Gamma)$  et  $(\bar{\Gamma})$  sont conjugués. [On s'en assure par exemple à l'aide d'une inversion ayant pour pôle un des points où  $(\Gamma)$  coupe  $(\Delta)$ ].

Cette propriété pourrait d'ailleurs s'établir indirectement d'après un théorème donné ci-après (§ 38).

b)  $\Phi$  est sur l'axe de retournement  $(D)$ . — Une  $\mathcal{C}_s$  de cette catégorie sera dite transformation  $\mathcal{C}$ . La droite  $(D)$  est évidemment conservée dans  $\mathcal{C}$ ; de même le cercle  $(\Gamma)$  intersection de  $(\Phi)$  avec le plan de retournement  $(II)$ . Il y a donc bien toujours deux cercles doubles conjugués. Mais, pour le moment, rien ne prouve qu'il n'y ait pas d'autres cercles doubles; nous reviendrons plus loin sur cette question (§ 43).

c)  $\Phi$  est dans le plan de retournement  $(II)$ . — C'est le cas des transformations de septième espèce, qui seront étudiées plus loin (§ 55). Nous verrons que la construction générale s'applique et donne encore deux cercles doubles conjugués, dont un d'ailleurs nous est déjà connu (§ 14 ci-dessus).

d) Nous avons aussi laissé de côté le cas où  $2\mu = \pi$ , quelle que soit la position de  $(II)$ . Il est facile de voir que la transformation correspondante est une  $\mathcal{C}_r$  (mise sous une forme particulière), car elle est égale au produit de l'inversion  $\Phi$  par une symétrie autour du plan de  $(D)$  et  $\Phi$ , suivie d'un renversement autour de  $(\Delta)$ . Nous en reparlerons avec les  $\mathcal{C}_r$  (§ 55). Dès à présent on peut remarquer que la droite  $\Phi O$  est double, de même le cercle  $(\Gamma)$  de centre  $O$  tracé sur  $(\Phi)$ . C'est donc aussi, si l'on veut, une  $\mathcal{C}$ .

e) *Conclusion.* — Sauf peut-être pour les  $\mathcal{C}$  qui peuvent dans certains cas en posséder davantage, toute sphérique directe de troisième espèce admet deux cercles doubles réels distincts qui sont conjugués.

## 2° INVARIANTS D'UNE $\mathcal{C}_s$ .

§ 38. — THÉORÈME VII. — Par une sphérique convenable, toute  $\mathcal{C}_s$  peut être transformée en une  $\mathcal{C}$ .

Il suffit de prendre une sphérique ayant son foyer-objet sur l'un des deux cercles

doubles de  $\mathcal{C}_3$ , soit  $(\bar{\Gamma})$ . La transformée  $\mathcal{C}'_3 = \Phi' \hat{R}'$  admet une droite double  $(\bar{\Gamma}')$ ;  $\Phi'$  est nécessairement sur cette droite, qui est donc conservée dans l'inversion  $\Phi'$  et par suite dans le retournement  $R'$ . C'est donc l'axe  $D'$  de ce retournement, et  $\mathcal{C}'_3$  est bien dans la catégorie  $\mathcal{C}$ . [Ou bien c'est une droite du plan (II), avec  $2\mu = \pi$ , et on retrouve la transformation rencontrée ci-dessus au § 37 (d) qui est aussi une  $\mathcal{C}$  comme on l'a fait remarquer].

Pour le moment, nous ne savons rien de la réciproque : il y a peut-être des  $\mathcal{C}$  formant un type intrinsèque se distinguant des  $\mathcal{C}_3$  générales; nous verrons qu'il en est effectivement ainsi (§ 44) mais, pour le moment, nous retenons seulement que toute  $\mathcal{C}_3$  peut être transformée en une  $\mathcal{C}$ . Nous avons rencontré une propriété analogue pour les  $\mathcal{C}_4$  (§ 27) et pour les  $\mathcal{C}_2$  (§ 30) mais nous ne l'avions pas utilisée pour l'étude de ces transformations parce qu'il était possible de leur donner une forme encore plus simple, celle d'une similitude ou d'un déplacement, ce qui n'a pas lieu pour les  $\mathcal{C}_3$ .

Le théorème précédent permet de retrouver que les deux cercles doubles d'une  $\mathcal{C}_3$  sont conjugués : en effet, si on la transforme en une  $\mathcal{C}$ , ces deux cercles deviennent l'un la droite (D) axe du retournement de  $\mathcal{C}$ , l'autre le cercle double  $(\Gamma)$  de  $\mathcal{C}$  qui admet (D) comme axe de révolution.

**THÉORÈME VIII.** — *Toute  $\mathcal{C}_3$  peut être considérée comme le produit de deux rotations anallagmatiques autour de deux cercles conjugués (qui seront cercles doubles de cette transformation).*

En effet on peut transformer  $\mathcal{C}_3$  en une  $\mathcal{C}$  pour laquelle il en est ainsi : car toute  $\mathcal{C}$  est le produit d'une rotation anallagmatique  $\Phi \Pi$  autour du cercle  $(\Gamma)$  par une rotation proprement dite autour de l'axe (D) de ce cercle.  $\mathcal{C}_3$  peut donc se mettre sous la forme du produit  $(\mathcal{R}) \cdot (\bar{\mathcal{R}})$ . La « rotation »  $(\mathcal{R})$  autour de  $(\Gamma)$  conserve tous les cercles conjugués à  $(\Gamma)$  et en particulier  $(\bar{\Gamma})$ ; la « rotation »  $(\bar{\mathcal{R}})$  autour de  $(\bar{\Gamma})$  conserve de même tous les cercles conjugués à  $(\bar{\Gamma})$  et en particulier  $(\Gamma)$ .

**THÉORÈME IX.** — *Les angles  $\alpha$  et  $\beta$  des deux « rotations » composantes sont invariants quand  $\mathcal{C}_3$  est transformée dans le groupe sphérique.*

En effet toute sphère passant par  $(\Gamma)$  est transformée par  $\mathcal{C}_3$  en une autre passant par  $(\Gamma)$  et faisant l'angle  $\alpha$  avec la première. Si on transforme le tout par une sphérique quelconque  $H$ , les deux nouvelles sphères homologues dans  $\mathcal{C}'_3$  se coupent suivant  $(\Gamma')$  sous l'angle  $\alpha'$ ; et l'on a  $\alpha' = \alpha$  puisque  $H$  conserve les angles. De même  $\beta' = \beta$ .

**Corollaire.** — Si l'on transforme  $\mathcal{C}_3$  en une  $\mathcal{C}$ , et de même  $\mathcal{C}'_3$  en une  $\mathcal{C}'$ , on pourra passer de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{C}'$  par une similitude. En effet le retournement de  $\mathcal{C}$  a même angle  $\beta$  que celui de  $\mathcal{C}'$ , et de même la sphère d'inversion coupe le plan de retournement sous le même angle  $\frac{\alpha}{2}$  dans les deux transformations. (Pour que cela soit

exact, on prendra l'image  $\bar{\mathcal{C}}'$  dont l'axe corresponde à l'axe de  $\bar{\mathcal{C}}$ . et non à son cercle double).

Il en résulte que l'on peut parler, pour une  $\mathcal{C}_3$ , de son *image*  $\bar{\mathcal{C}}$ , celle-ci étant définie à une similitude près. (Il y a en réalité deux images possibles, suivant que le retournement de  $\bar{\mathcal{C}}$  est d'angle  $\alpha$  ou  $\beta$ , c'est-à-dire deux familles de  $\bar{\mathcal{C}}$  semblables entre elles dans chaque famille).

§ 39. — *Équations intrinsèques de  $\mathcal{C}_3$* . — Nous venons de voir que  $\alpha$  et  $\beta$  sont les invariants caractéristiques de  $\mathcal{C}_3$  dans le groupe sphérique. Cela nous amène à définir un point  $M$  de l'espace par les coordonnées suivantes :

Par  $M$  on mène la sphère passant par  $(\Gamma)$ , faisant l'angle  $\Theta$  avec une sphère fixe passant par ce cercle; le cercle  $(\Gamma)$  étant orienté, comme d'habitude, on considère non les sphères entières, mais les calottes sphériques limitées à  $(\Gamma)$ , ce qui permet de définir  $\Theta$  sans ambiguïté entre 0 et  $2\pi$ . On définit de même l'angle analogue  $\Lambda$  pour le cercle  $(\bar{\Gamma})$ , dont l'orientation se déduit de celle de  $(\Gamma)$ , le sens des trièdres directs ayant été défini.

Considérons ensuite le cercle  $(\mathcal{C})$  conjugué de  $(\Gamma)$  passant par  $M$ . On peut l'amener dans le plan du cercle  $(\bar{\Gamma})$  par une « rotation » autour de celui-ci, et cela de deux manières différentes donnant l'une un cercle  $\mathcal{C}_0$  intérieur à  $(\bar{\Gamma})$ , l'autre un cercle  $\mathcal{C}'_0$  extérieur à  $(\bar{\Gamma})$ .  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}'_0$  sont homologues dans la transposition d'axe  $(\bar{\Gamma})$ . La droite  $\Delta$ , diamètre commun à  $(\Gamma)$  et  $(\bar{\Gamma})$ , coupe le premier de ces deux cercles en  $P$  et  $Q$ , le second en  $R$  et  $S$  [(fig. 11). Notations sans rapport avec celles du § 36];

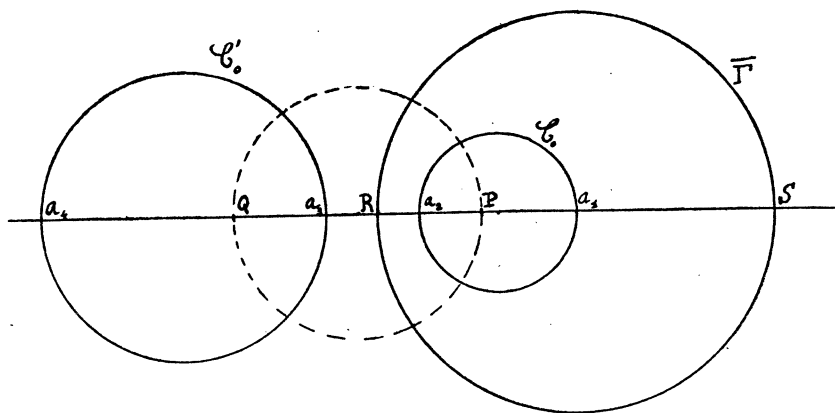


FIG. 11.

$P$  est intérieur à  $(\bar{\Gamma})$  et  $R$  à  $(\Gamma)$ . Dans le plan de  $(\bar{\Gamma})$  (plan de la figure 11), soit  $t$  le rapport constant  $\frac{MP}{MQ}$  définissant un cercle du faisceau linéaire ayant  $P$  et  $Q$  pour points-limite. [Ces cercles sont, dans l'espace, conjugués de  $(\Gamma)$ ].

$t$  et  $t'$  étant les paramètres de  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}'_0$ ,  $\tau$  celui de  $(\bar{\Gamma})$ , on voit aisément que

$$tt' = \tau^2.$$

(Il suffit par exemple de faire une inversion de pôle  $Q$ , puissance  $\overline{QP}^2$ ).

Nous poserons

$$U = \frac{t}{\tau} = \frac{\tau}{t'}.$$

On voit que  $U$  est un nombre positif inférieur ou égal à l'unité. (On aurait aussi bien pu considérer le rapport inverse  $\frac{\tau}{t} = \frac{t'}{\tau}$  qui est  $\geq 1$ ).

Les trois quantités  $\Theta$ ,  $\Lambda$ ,  $U$  constituent un système de coordonnées permettant de définir sans ambiguïté la position de tout point  $M$  de l'espace où opère  $\mathcal{C}_x$ . Voyons leurs relations avec les coordonnées de l'image  $m$  de  $M$  dans l'espace où opère l'image  $\bar{\mathcal{C}}$  de  $\mathcal{C}_x$ . Définissons  $m$  par : *a*) l'angle  $\lambda$  du plan  $(\bar{\gamma}, m)$  avec un plan fixe passant par la droite  $\bar{\gamma}$ ; *b*) l'angle  $\theta$  de la sphère  $(\gamma, m)$  avec une sphère fixe passant par le cercle  $(\gamma)$ ; *c*) le rapport  $u$  des distances de  $m$  aux points  $p$  et  $q$  où le plan  $(\bar{\gamma}, m)$  coupe le cercle  $(\gamma)$ . Il est aisé de voir que l'on a les trois relations

$$\Theta = \theta - \theta_0, \quad \Lambda = \lambda - \lambda_0, \quad U = u,$$

$\theta_0$  et  $\lambda_0$  étant des constantes dépendant de la manière dont on prend l'image  $\bar{\mathcal{C}}$  de  $\mathcal{C}_x$ . En effet, les deux premières formules sont évidentes à cause de la conservation des angles autour de  $(\Gamma)$  et  $(\bar{\Gamma})$ . La troisième résulte de la formule bien connue du rapport des longueurs de deux segments rectilignes dont les extrémités sont deux à deux inverses, cela de la manière suivante :

Si  $G$  est le foyer-image de la sphérique transformant  $\mathcal{C}_x$  en  $\bar{\mathcal{C}}$ , dont le foyer-objet  $F$  est sur  $(\bar{\Gamma})$ , si  $k^2$  est la puissance de l'inversion composante, si  $M_0$  est le point de  $\mathcal{C}_0$  transformé de  $M$  par la rotation autour de  $(\bar{\Gamma})$ , si  $m_0$  est son image sur le cercle  $(c_0)$  image de  $(\mathcal{C}_0)$ ; on a

$$M_0P = m_0p_0 \frac{k^2}{Gm_0 \cdot Gp_0}, \quad M_0Q = m_0q_0 \frac{k^2}{Gm_0 \cdot Gq_0}, \quad \frac{FP}{FQ} = \frac{Gq_0}{Gp_0};$$

d'où

$$U = \frac{M_0P}{M_0Q} : \frac{FP}{FQ} = \frac{m_0p_0}{m_0q_0} = u_0 = u.$$

(En effet, on passe de *c*) à *c*<sub>0</sub>) par une rotation autour de  $\bar{\gamma}$ ; on remarque que  $F$  étant sur  $(\bar{\Gamma})$  dans le plan de  $\mathcal{C}_0$ ,  $G$  se trouvera dans le plan de  $c_0$ ).

Dans l'espace de  $\mathcal{C}_3$ , les surfaces coordonnées sont :

$\left\{ \begin{array}{l} \Theta = c^{te} : \text{les sphères passant par } (\Gamma); \\ \Lambda = c^{te} : \text{les sphères passant par } (\bar{\Gamma}); \\ U = c^{te} : \text{d'après la définition même de } U, \text{ ce sont les cyclides de Dupin} \\ \text{engendrées par la « révolution » autour de } (\bar{\Gamma}) \text{ d'un cercle conjugué à } (\Gamma); \text{ elles} \\ \text{ont pour image les tores engendrées par la révolution autour de la droite } (\bar{\gamma}) \text{ d'un} \\ \text{cercle conjugué à } (\gamma). \text{ Les deux cercles } (\Gamma) \text{ et } (\bar{\Gamma}) \text{ sont tous deux « axes de révolu-} \\ \text{tion » d'une telle cyclide } \mathcal{C}_y; \text{ ils ont vis-à-vis d'elle exactement les mêmes pro-} \\ \text{priétés, comme on va le préciser ci-dessous. } \mathcal{C}_y \text{ est doublement cerclée : par des} \\ \text{cercles conjugués à } (\Gamma), \text{ et par des cercles conjugués à } (\bar{\Gamma}). \end{array} \right.$

Les lignes coordonnées sont :

$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda = c^{te}, U = c^{te} : \text{les cercles conjugués à } (\Gamma) \text{ tels que } (\mathcal{C}); \\ U = c^{te}, \Theta = c^{te} : \text{les cercles conjugués à } (\bar{\Gamma}); \\ \Theta = c^{te}, \Lambda = c^{te} : \text{les cercles « perpendiculaires » à } (\Gamma) \text{ et } (\bar{\Gamma}). \end{array} \right.$

Les équations de  $\bar{\mathcal{C}}$  dans l'espace image étant

$$\theta' = \theta + \alpha, \quad \lambda' = \lambda + \beta, \quad u' = u,$$

celles de  $\mathcal{C}_3$  sont

$$\Theta' = \Theta + \alpha, \quad \Lambda' = \Lambda + \beta, \quad U' = U.$$

*Remarque.* — Notre définition de  $U$  fait jouer un rôle différent à chacun des deux cercles  $(\Gamma)$  et  $(\bar{\Gamma})$ , ce qui peut sembler choquant; mais il n'y a là qu'une apparence. On peut en effet considérer le cercle  $(\bar{\mathcal{C}})$  conjugué de  $(\bar{\Gamma})$  passant par  $M$ , l'amener dans le plan de  $(\Gamma)$  par une « rotation » autour de ce dernier cercle, et définir ainsi une coordonnée  $V$  de  $M$  d'une manière identique à ce qui a été fait pour  $U$ . Les équations de  $\mathcal{C}_3$  s'écrivent alors

$$\Theta' = \Theta + \alpha, \quad \Lambda' = \Lambda + \beta, \quad V' = V.$$

Les équations  $U' = U$  et  $V' = V$  doivent donc être équivalentes. C'est ce qu'il est aisé de vérifier :  $U$  et  $V$  sont fonctions l'un de l'autre, car les équations  $U = c^{te}$  et  $V = c^{te}$  représentent toutes deux la même famille de cyclides de Dupin  $\mathcal{C}_y$  admettant  $(\Gamma)$  et  $(\bar{\Gamma})$  comme axes de révolution. On peut d'ailleurs expliciter la relation entre les valeurs de  $U$  et  $V$  correspondant à une même cyclide. En effet, si  $\alpha$  est un des quatre points où  $(\Delta)$  traverse  $\mathcal{C}_y$ , on a (*fig. 11*)

$$(1) \quad U = \frac{\overline{aP}}{aQ} : \frac{\overline{RP}}{RQ} \quad \text{et} \quad V = \frac{\overline{aR}}{aS} : \frac{\overline{PR}}{PS} \quad (1);$$

(1) Pour que ces deux expressions soient exactes en grandeur et signe, il faut les appliquer au point  $\alpha_2$  (*fig. 11*), c'est-à-dire, d'une manière générale, à celui des quatre points  $\alpha$  qui est intérieur aux deux cercles  $(\Gamma)$  et  $(\bar{\Gamma})$ .

U et V sont liés par une homographie, qui doit être involutive, à cause de la symétrie entre les propriétés des deux cercles ( $\Gamma$ ) et ( $\bar{\Gamma}$ ). Elle est donc de la forme

$$UV + A(U + V) + B = 0.$$

On détermine A et B en remarquant que  $U = 0$  doit correspondre à  $V = 1$ , d'où  $A + B = 0$ , et que  $\frac{1}{U}$  doit correspondre à  $\frac{1}{V}$  (d'après la nature de la définition de U et V) d'où  $B^2 = 1$ ; on élimine la solution  $B = 1$  donnant une homographie singulière, et il reste  $B = -1$ , d'où  $A = 1$ . La relation entre U et V est donc

$$UV + U + V - 1 = 0.$$

(Au lieu de raisonner ainsi, on peut l'établir par un calcul complet à partir des formules (1) en éliminant entre ces deux équations le paramètre choisi pour définir la position de  $a$  sur  $\Delta$ ).

On remarque qu'il y a quatre points  $a_1, a_2, a_3, a_4$  communs à  $\Delta$  et  $\mathcal{C}_y$ .

Le cercle  $\mathcal{C}_0$  passe par  $a_1$  et  $a_2$ ,  $\mathcal{C}'_0$  par  $a_3$  et  $a_4$ ;  $\bar{\mathcal{C}}_0$  par  $a_2$  et  $a_3$ ;  $\bar{\mathcal{C}}'_0$  par  $a_1$  et  $a_4$ ; ( $\Delta$ ) est un diamètre commun aux six cercles  $\Gamma, \bar{\Gamma}, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}'_0, \bar{\mathcal{C}}_0, \bar{\mathcal{C}}'_0$  (fig. 11).

§ 40. — *Sous-groupes particuliers.* — La figure invariante de  $\mathcal{C}_3$  se compose des deux cercles ( $\Gamma$ ) et ( $\bar{\Gamma}$ ), ainsi que de la famille de cyclides  $\mathcal{C}_y$  à un paramètre (U ou V) qui admet ces deux cercles comme « axes de révolution ». On remarque que cette figure invariante est commune à toutes les  $\mathcal{C}_3$  du groupe à deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  des transformations produits de deux « rotations » autour de ( $\Gamma$ ) et ( $\bar{\Gamma}$ ) respectivement.

Si on veut, on peut dire qu'une cyclide  $\mathcal{C}_y$  admet un groupe continu à deux paramètres de transformations  $\mathcal{C}_3$  : chacune de celles-ci conserve globalement une des deux familles de cercles ( $\mathcal{C}$ ) et ( $\bar{\mathcal{C}}$ ) situés sur  $\mathcal{C}_y$ .

Si dans le groupe à deux paramètres envisagé ci-dessus, on suppose que  $\beta$  soit fonction continue de  $\alpha$ , on obtient un groupe continu à un paramètre  $\alpha$ ; les « trajectoires » de ce groupe sont des courbes conservées par toutes les transformations du groupe; elles constituent une famille à deux paramètres. En général, ces courbes ne présentent pas d'intérêt particulier. (Il en était de même pour les sous-groupes que l'on pouvait prélever dans le groupe à deux paramètres des  $\mathcal{C}_1$  ayant une même figure invariante (§ 26); aussi n'en avons-nous même pas parlé pour ceux-là). Mais, dans certains cas particuliers, ces trajectoires peuvent ici être fermées; il en est ainsi si  $\alpha$  et  $\beta$  sont constamment commensurables, c'est-à-dire si l'on a

$$\alpha = p\gamma, \quad \beta = q\gamma;$$

$p$  et  $q$  étant des entiers (qu'on peut supposer premiers entre eux) et  $\gamma$  un paramètre angulaire. Les équations d'une  $\mathcal{C}_3$  du groupe sont alors

$$\Theta' = \Theta + p\gamma, \quad \Lambda' = \Lambda + q\gamma, \quad U' = U.$$



La trajectoire  $W$  du groupe passant par un point  $M_0$  a pour représentation paramétrique

$$\Theta = \Theta_0 + p\varepsilon, \quad \Lambda = \Lambda_0 + q\varepsilon, \quad U = U_0.$$

La transformation  $\mathcal{C}_s(\gamma)$  fait passer du point  $M$  de paramètre  $\varepsilon$  au point  $M'$  de paramètre  $\varepsilon + \gamma$  sur cette courbe  $W$ . On peut dire aussi que l'équation de  $W$  sur la cyclide  $\mathcal{C}_y$  passant par  $M_0$  est

$$\frac{\Theta}{p} - \frac{\Lambda}{q} = c^{\text{te}} = \frac{\Theta_0}{p} - \frac{\Lambda_0}{q}.$$

On a ainsi sur  $\mathcal{C}_y$  une famille à un paramètre de courbes  $W$  invariantes dans  $\mathcal{C}_s(\gamma)$ , qui sont des courbes fermées, car pour  $\varepsilon = 2\pi$  on retrouve le point  $M_0$  correspondant à  $\varepsilon = 0$ . Le cas le plus remarquable est celui de  $p = q = 1$ , c'est-à-dire  $\alpha = \beta = \gamma$ ; les courbes  $W$  ont alors pour équation sur  $\mathcal{C}_y$

$$\Theta - \Lambda = c^{\text{te}}.$$

Nous verrons plus loin (§ 46) que ce sont des cercles. Il en est de même pour  $p = 1, q = -1$ ; ou  $p = -1, q = 1$ , qui donne

$$\Theta + \Lambda = c^{\text{te}}.$$

§ 41. — *Interprétation géométrique des invariants.* — Appliquons au couple de points homologues  $(\Phi, \infty)$  les équations de  $\mathcal{C}_s$ ; on obtient

$$\Theta_\infty = \Theta_\Phi + \alpha, \quad \Lambda_\infty = \Lambda_\Phi + \beta, \quad U_\infty = U_\Phi.$$

La première montre que  $\Phi$  est sur la sphère passant par  $(\Gamma)$  faisant avec le plan de ce cercle un angle égal à  $\alpha$ ; la deuxième montre que  $\Phi$  est aussi sur la sphère analogue faisant l'angle  $\beta$  avec le plan de  $(\bar{\Gamma})$ ; la troisième montre que  $\Phi$  est sur la cyclide de la famille  $\mathcal{C}_y$  contenant les axes de révolution des deux cercles  $(\Gamma)$  et  $(\bar{\Gamma})$ . Ce dernier résultat est analogue à celui concernant les  $\mathcal{C}_1$  et les  $\mathcal{C}_2$ . Pour toutes les sphériques directes, les deux foyers sont sur une cyclide invariante dans la transformation possédant deux génératrices rectilignes. (Dans le cas présent des  $\mathcal{C}_s$  cette cyclide a en tout quatre génératrices rectilignes; cela résulte du théorème de Villarceau donné ci-après § 46.)

Nous savons que  $\mathcal{C}_s$  dépend de dix paramètres. Si on se donne  $\alpha, \beta$ , et la figure invariante de  $\mathcal{C}_s$  on peut effectivement déterminer  $\mathcal{C}_s$  sous la forme  $\Phi R$  en construisant  $\Phi$  d'après les propriétés ci-dessus: il suffit de prendre l'intersection de la cyclide à génératrices rectilignes avec les deux sphères faisant les angles  $\alpha$  et  $\beta$  avec les plans de  $(\Gamma)$  et  $(\bar{\Gamma})$  respectivement;  $\Phi$  est le point commun à deux cercles: l'un conjugué à  $(\bar{\Gamma})$  (situé sur la sphère  $\alpha$  et s'appuyant sur l'axe de révolution

de  $(\Gamma)$ ), l'autre conjugué à  $(\Gamma)$  (situé sur la sphère  $\beta$  et s'appuyant sur l'axe de révolution de  $(\bar{\Gamma})$ ).

Dans le problème ci-dessus, si  $\alpha$  ou  $\beta$  est nul,  $\mathcal{C}_3$  se réduit à une simple « rotation » (§ 17). Si  $\alpha$  ou  $\beta$  est égal à  $\pi$ ,  $\Phi$  est dans le plan de l'un des cercles, soit  $(\Gamma)$ ; ce plan sera conservé dans l'inversion et le retournement; on a donc affaire à une  $\mathcal{C}_r$  (§ 55 et seq.), puisqu'une  $\mathcal{C}_3$  proprement dite ne peut avoir de sphère double ou de plan double.

Si  $\alpha = \beta$ , cas particulier déjà cité (§ 40 *in fine*), la transformation, comme nous allons le voir, n'est pas une  $\mathcal{C}_3$  ordinaire, mais une  $\mathcal{C}$  d'un type spécial admettant une congruence de cercles doubles. Autrement dit, une  $\mathcal{C}_3$  donnée sous la forme  $\Phi R$ , avec  $\Phi$  hors de l'axe de retournement  $R$ , ne peut avoir ses deux invariants égaux.

§ 42. — 3° LES TRANSFORMATIONS PARATACTIQUES<sup>(1)</sup>. — Revenons aux transformations  $\mathcal{C}$ , définies au § 37 (b), que nous avons utilisées comme images des  $\mathcal{C}_3$  au § 38. Nous avons vu que toute  $\mathcal{C}_3$  pouvait être transformée en une  $\mathcal{C}$ , mais nous allons voir que la réciproque n'est pas vraie : toute  $\mathcal{C}$  ne peut être transformée en une  $\mathcal{C}_3$  du type général, c'est-à-dire que certaines  $\mathcal{C}$  constituent une famille définie intrinsèquement, constituant une sous-espèce particulière des  $\mathcal{C}_3$ .

Proposons-nous en effet de rechercher directement la figure invariante d'une  $\mathcal{C}$  donnée.

*Sphères doubles.* — L'étude générale de la question nous a montré qu'il n'y en a pas (§ 14). On peut le vérifier directement : une sphère  $(\Sigma)$  conservée dans  $\mathcal{C}$  devrait avoir son centre sur la droite  $(D)$ ; le problème est donc le même que celui des cercles doubles d'une circulaire plane du type  $\mathcal{C}_r$ ; or une telle transformation n'a pas de cercle double centré sur  $(D)$  (Plan § 7).

*Points doubles.* — Nous savons également qu'il n'y en a pas, et on peut aussi le voir directement : si  $\omega$  était point double,  $\omega$  serait sur  $(D)$  et serait point double de la circulaire plane  $\mathcal{C}_r$ ; or celle-ci n'a que deux points doubles, qui sont situés hors de  $(D)$ .

*Remarque.* — On a supposé implicitement que l'angle  $2\mu$  du retournement était différent de  $\pi$ . S'il était au contraire égal à  $\pi$ , on aurait affaire à une  $\mathcal{C}_r$  mise sous la forme particulière  $\mathcal{C}$ . Ce cas a été déjà rencontré au § 37 (d); tous les plans passant par  $(D)$  sont alors conservés, ce qui est conforme aux conclusions du § 14 : une  $\mathcal{C}_r$  admet un faisceau linéaire de sphères doubles. Mais il n'y a pas de points doubles.

<sup>(1)</sup> Afin d'avoir un exposé cohérent de cette question, il nous arrivera fréquemment de reproduire dans la suite presque intégralement certains raisonnements donnés par M. Hadamard (*loc. cit.*) bien que la marche suivie ici soit tout à fait différente.

§ 43. — *Cercles doubles.* — Dans l'étude générale de cette question nous avons noté simplement que  $\mathcal{C}$  admettait la droite (D) et le cercle (I') comme cercles doubles (§ 37 b). Nous n'avons pas recherché s'il y en avait d'autres, et c'est ce que nous allons faire maintenant.

Comme pour une  $\mathcal{C}_s$  quelconque, si le cercle (C) est double, son inverse (C<sub>1</sub>) dans  $\Phi$  lui est égal et cosphérique, le centre S de la sphère commune étant l'inverse dans  $\Phi$  du milieu I de la corde commune ( $\delta$ ) à (C) et (C<sub>1</sub>), et ( $\delta$ ) passe par le point O. Prenons comme plan de la figure 12 le plan passant par (D) et ( $\delta$ ), cou-

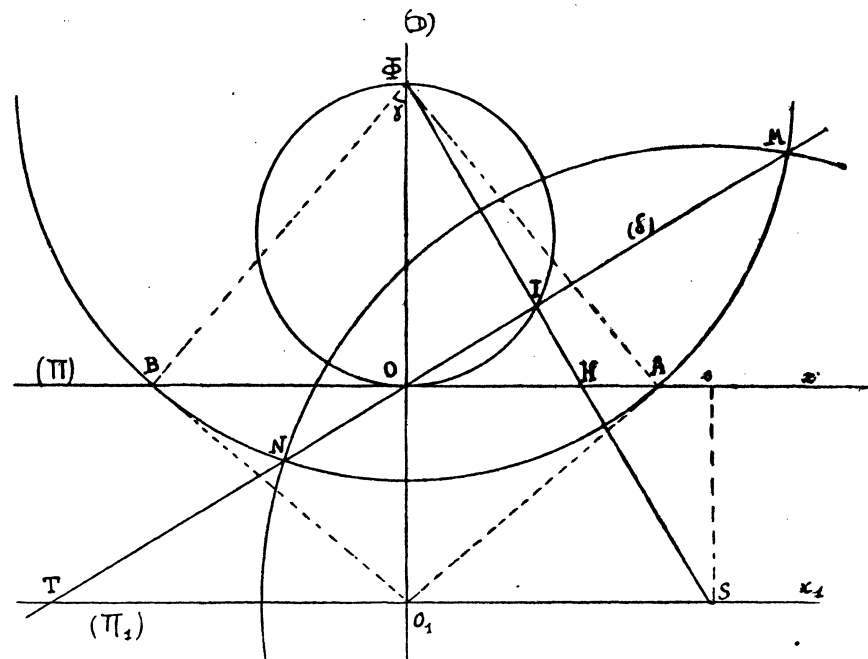


FIG. 12.

pant (II) suivant  $Ox$ . I est sur la sphère de diamètre  $O\Phi$ , S dans le plan (II<sub>1</sub>) inverse de cette sphère, perpendiculaire à  $\Phi O$  en  $O_1$ ;  $\Phi S$  coupe  $Ox$  en H, milieu du segment  $CC_1$ ; on doit donc avoir (fig. 13)

$$(1) \quad \overline{OH} = \overline{Os} \cdot \cos^2 \mu.$$

(Tout cela n'est que l'énoncé dans le cas particulier des  $\mathcal{C}$  de ce que nous avons dit au § 36 pour le cas général des  $\mathcal{C}_s$ ).

On a par ailleurs (*fig. 12*)

$$\overline{OH} = \overline{O_1S} \cdot \frac{\Phi O}{\Phi O_1} = \overline{Os} \cdot \frac{\Phi O}{\Phi O_1}$$

ou

$$(2) \quad \overline{OH} = \overline{Os} \cdot \cos^2 \gamma,$$

en appelant  $\gamma$  l'angle de la sphère ( $\Phi$ ) avec le plan (II), car  $\Phi O = \Phi A \cdot \cos \gamma$  et  $\Phi A = \Phi O_1 \cdot \cos \gamma$ .

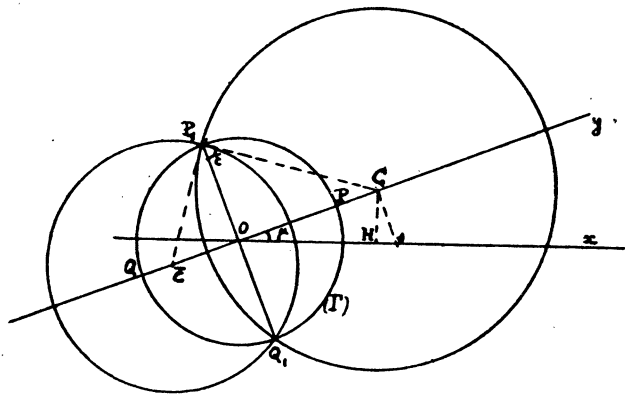


FIG. 13.

De (1) et (2) il résulte que l'on doit avoir

$$(3) \quad \overline{Os} (\cos^2 \mu - \cos^2 \gamma) = 0.$$

Or en général  $\cos^2 \mu - \cos^2 \gamma \neq 0$ , et par suite on aura  $\overline{Os} = 0$ ; S sera confondu avec  $O_1$ , C avec O; on retrouve comme solution le cercle ( $\Gamma$ ) intersection de la sphère ( $\Phi$ ) avec le plan (II). [La solution correspondant à la droite (D), c'est-à-dire à S rejeté à l'infini, avait été implicitement écartée]. Donc, dans le cas général, la transformation  $\mathcal{C}$  admet seulement comme cercles doubles la droite (D) et le cercle ( $\Gamma$ ); une sphérique quelconque la transforme en une  $\mathcal{C}_s$  du type ordinaire, admettant deux cercles doubles conjugués.

§ 44. — Examinons maintenant le cas particulier où  $\cos^2 \mu - \cos^2 \gamma = 0$ . Comme  $\gamma$  et  $\mu$  sont des angles comptés entre 0 et  $\pi$ , cela se produit dans les deux cas :  $\mu = \gamma$  et  $\mu = \pi - \gamma$ . Dans les deux cas, on peut prendre  $s$  quelconque sur  $Ox$ , et par suite S quelconque dans le plan ( $\Pi_1$ ). De  $s$  on déduit un point C dans le plan (II) [en portant  $(Os, OC) = \mu$ , et  $OC = Os \cos \mu$ ]; la sphère de

centre S orthogonale à  $(\Phi)$  coupe le plan normal à SC en C suivant un cercle (C) qui sera conservé dans la transformation  $\bar{\mathcal{C}}$ , comme on s'en assure aisément.

Nous avons donc, dans ce cas particulier, une infinité double de cercles doubles réels (C). Cette propriété est invariante dans le groupe sphérique; elle caractérise une sous espèce particulière de transformations  $\mathcal{C}_3$ ; les  $\bar{\mathcal{C}}$  jouissant de cette propriété sont appelées transformations paratactiques; nous les désignerons par le symbole  $\mathcal{F}$ .

§ 45. — THÉORÈME X. — La congruence des cercles (C) est indépendante de l'angle  $\mu$ .

En effet on peut construire les cercles (C), sans que cet angle intervienne, en se donnant par exemple la position du centre C dans le plan (II) du cercle ( $\Gamma$ ); car la donnée de C détermine également l'axe de révolution (R) du cercle (C) et la valeur du rayon  $\rho$  de ce cercle.

Pour le voir, remarquons que cet axe (R) est nécessairement dans le plan perpendiculaire à OC en C; pour le déterminer, il suffit donc de connaître l'angle  $\varepsilon$  de (R) avec l'axe (D) de ( $\Gamma$ ). Or on a (fig. 12 et 13)

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{sC}{sS} = \frac{OC \operatorname{tg} \mu}{O\Phi \cdot \frac{Hs}{OH}} = \frac{OC \operatorname{tg} \mu}{OA \operatorname{cotg} \mu \cdot \frac{Os \sin^2 \mu}{Os \cos^2 \mu}} = \frac{OC}{OA};$$

$\varepsilon$  dépend donc seulement du rapport  $\frac{OC}{OA}$ . On construit immédiatement cet angle en traçant dans le plan (II) le rayon  $OP_1$  du cercle ( $\Gamma$ ) perpendiculaire à OC (fig. 13). L'axe (R) du cercle (C) est donc construit indépendamment de  $\mu$ . Or la connaissance de (R) entraîne celle de (C); il suffit en effet de remarquer que la sphère ayant (C) pour grand cercle doit couper ( $\Gamma$ ) en  $P_1$  et  $Q_1$  (fig. 13) puisque la puissance de O par rapport à (C) est la même que par rapport à la sphère (S) de la construction primitive (fig. 12), c'est-à-dire égale à  $-K^2$ , en appelant K le rayon de ( $\Gamma$ ). Cette remarque permet donc la construction immédiate de cette sphère (C) et par suite du cercle (C) lui-même, qui se trouve dans le plan faisant l'angle  $\varepsilon$  avec le plan (II) (dans lequel est tracée la figure 13). Autrement dit, le rayon  $\rho$  du cercle (C) est donné par la relation  $\rho^2 = r^2 + K^2$ , en posant  $OC = r$ .

Remarques. — I. En passant, nous venons de voir que chaque cercle (C) perce la sphère (K) ayant ( $\Gamma$ ) pour grand cercle suivant les extrémités d'un même diamètre; nous dirons que ces cercles sont diamétraux à la sphère (K). Cela est conforme aux propriétés générales des  $\mathcal{C}$ , et plus particulièrement des  $\mathcal{C}_3$  (cf. § 13 et 13 bis). Chaque cercle (C) est invariant dans l'inversion négative de centre O et puissance  $-K^2$ ; la congruence (C) tout entière est donc elle-même conservée dans cette inversion, qui transforme  $\mathcal{F}$  en elle-même. De même la congruence admet bien la

droite (D) comme axe de révolution et toutes les droites issues de O dans le plan (II) comme axes de symétrie.

II. Dans la construction ci-dessus du cercle (C) connaissant son centre, il y a ambiguïté si l'on ne fixe pas le sens dans lequel on doit porter l'angle  $\varepsilon$  de valeur absolue donnée par la relation  $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{r}{K}$ . Cette ambiguïté n'existait pas dans la construction primitive (§ 44) qui faisait intervenir  $\mu$ ; pour la lever ici, il suffit de savoir si l'on a  $\mu = \gamma$  ou  $\mu = \pi - \gamma$ . On voit qu'il y a deux espèces de transformations paratactiques, chacune d'elles étant caractérisée par le signe de l'angle  $\varepsilon = (Oz, OR_1)$  que fait avec Oz (demi-droite positive de D) la parallèle  $OR_1$  à l'axe de révolution (R) du cercle (C), dans le plan orienté  $(Oy_1, Oz)$ . Si  $\varepsilon$  est positif (c'est le cas  $\mu = \pi - \gamma$ )  $\mathfrak{F}$  sera dite *dextrorsum*; si  $\varepsilon$  est négatif (cas de  $\mu = \gamma$ ),  $\mathfrak{F}$  sera *sinistrorsum*.

*Conséquences.* — La congruence (C) est parfaitement déterminée si on se donne dans l'espace le cercle ( $\Gamma$ ), et l'espèce à laquelle elle appartient.

Toutes les congruences (C) attachées aux diverses transformations  $\mathfrak{F}$  sont *semblables* entre elles. Cela résulte de ce qu'elles dépendent seulement de leur cercle ( $\Gamma$ ), ou, plus précisément, si l'on veut, des relations  $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{r}{K}$  et  $\rho^2 = r^2 + K^2$ .

Une telle congruence (C) est appelée *congruence paratactique*. On voit que *même au point de vue de la géométrie euclidienne*, et non pas seulement de la géométrie anallagmatique, il n'y a qu'une congruence paratactique, comme il n'y a qu'un cercle.

On peut préciser cela en disant que les congruences paratactiques de l'espace se répartissent en deux espèces : *sinistrorsum* C et *dextrorsum* C'; on passe d'une congruence à une autre de même espèce par une similitude directe, et à une autre d'espèce opposée par une similitude inverse.

Nous avons rencontré la congruence (C) comme constituée par les cercles doubles de la transformation  $\mathfrak{F}$ ; nous venons de voir qu'elle est indépendante de  $\mu$ ; donc elle est la même pour toutes les  $\mathfrak{F}$  d'une espèce déterminée ayant en commun la droite double (D) et le cercle double ( $\Gamma$ ), transformations qui forment un groupe continu à un paramètre.

Nous dirons que le point O est le *centre*, ( $\Gamma$ ) le *cercle principal*, (D) l'*axe*, (K) la *sphère principale* de la congruence (C) ou du groupe à un paramètre correspondant. Le plan (II) du cercle ( $\Gamma$ ) dont chaque point est centre d'un cercle (C) sera dit *plan central* de la congruence.

#### § 46. — Premières propriétés de la congruence paratactique :

a) Deux cercles (C) ne peuvent être *cosphériques*. En effet, s'ils l'étaient, la sphère commune serait invariante dans la transformation  $\mathfrak{F}$ ; or celle-ci n'admet pas de sphère double.

b) Deux cercles (C) ne peuvent avoir de point commun. Raisonnement analogue.

c) Sur toute sphère ( $\Sigma$ ) diamétrale à la sphère principale (K) il existe un cercle (C). [D'après (a) il ne peut y en avoir qu'un ou zéro.]

Considérons en effet la sphère de diamètre  $O\Sigma$ ,  $\Sigma$  étant le centre de la sphère donnée ( $\Sigma$ ). Elle coupe le plan central (II) suivant un cercle ( $\sigma$ ) de diamètre  $O\sigma$ ,  $\sigma$  étant la projection orthogonale de  $\Sigma$  sur (II) (fig. 14). L'axe de révolution (R) du cercle (C) cherché doit faire avec  $Oz$  l'angle  $\varepsilon$  tel que  $\text{tg } \varepsilon = \frac{r}{K}$ ; mais on a par ailleurs  $\text{tg } \varepsilon = \frac{\sigma C}{\sigma \Sigma}$  puisque cet axe (R) doit passer par  $\Sigma$ . On en déduit

$$\frac{r}{K} = \frac{\sigma C}{\sigma \Sigma} \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma C}{r} = \frac{\sigma \Sigma}{K}.$$

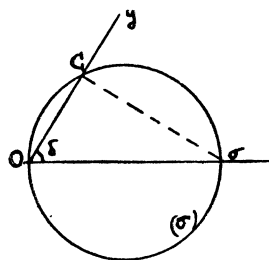


FIG. 14.

Or  $\frac{\sigma C}{r} = \text{tg } \delta$ , en appelant  $\delta$  l'angle ( $O\sigma, OC$ ) dans le plan (II). Cet angle se trouve donc déterminé par la relation  $\text{tg } \delta = \frac{\sigma \Sigma}{K}$  qui permet de le construire immédiatement (fig. 14). On en déduit le point C sur le cercle ( $\sigma$ ); on lève l'ambiguïté sur le signe de  $\delta$  par la considération de l'espèce à laquelle appartient la congruence donnée.

Le cercle (C) correspondant au centre C est bien situé sur ( $\Sigma$ ), car si on considère la transformation  $\mathcal{F}$  d'angle  $\mu = \delta$ , et qu'on applique la construction du § 44, la sphère (S) de ce paragraphe n'est autre que la sphère ( $\Sigma$ ) elle-même.

d) Par tout point M de l'espace il passe un cercle (C) [et un seul d'après (b)]. Comme pour la propriété (C) nous allons construire ce cercle (C), et pour cela construire son centre C. Remarquons que ce point C doit être équidistant de M et de son homologue  $\bar{M}$  dans l'inversion négative de centre O, puissance  $-K^2$ (<sup>1</sup>); donc C est sur la droite (M) trace du plan médiateur de  $M\bar{M}$  sur le plan (II) (fig. 15). Soit  $\gamma$  l'angle de OC avec  $Om$  (projection de OM), E le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur la droite OC, n l'intersection de (M) et  $Om$  (en général, ce n'est pas le milieu de  $m\bar{m}$ ). La pente du plan OCM est

$$\text{tg } \varepsilon = \frac{mM}{mE} = \frac{mM}{Om \cdot \sin \gamma} = \frac{\text{tg } \varphi}{\sin \gamma},$$

$\varphi$  étant la pente de OM.

(<sup>1</sup>) Nous dirons, dans tout ce qui suit, que M et  $\bar{M}$  sont des points opposés (dénomination employée par M. Hadamard, *loc. cit.*, p. 266).

Par ailleurs on doit avoir

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{OC}{K} = \frac{On}{K \cdot \cos \gamma_1},$$

d'où l'équation

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \gamma_1} = \frac{On}{K \cos \gamma_1}, \quad \operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{K}{On} \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

$\gamma_1$  étant ainsi déterminé, on construira le point C, d'où le cercle de la congruence ayant ce point pour centre; et on vérifie immédiatement qu'il passe par M, par exemple en calculant  $\overline{CM}^2$ , que l'on trouve égal à  $\overline{OC}^2 + K^2$ .

*Corollaire : théorème de Villarceau.*

En nous reportant à ce qui a été dit au § 40 sur les trajectoires d'un groupe de  $\mathcal{C}_y$  à un paramètre, dans le cas  $\beta = \alpha = 2\mu$ , nous voyons que pour le groupe à un paramètre des transformations paratactiques d'axe D et de cercle principal  $\Gamma$ , les courbes invariantes W

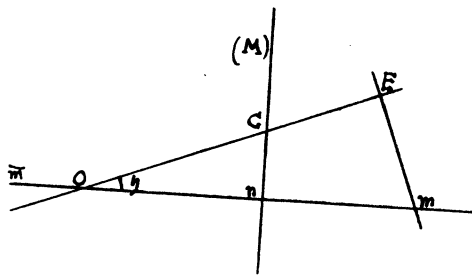


FIG. 15.

sont situées sur les tores d'axe de révolution D, ayant pour cercles méridiens les cercles conjugués à ( $\Gamma$ ). Or, d'après ce qui précède, les courbes (W) ne sont autres que les cercles (C). En effet par un point M de l'espace il passe une courbe W et un cercle C, tous deux invariants dans le groupe  $\mathcal{F}$ ; si (W) et (C) n'étaient pas confondus, M serait lui-même invariant dans le groupe, ce qui est impossible. En considérant les transformations paratactiques d'espèce opposée, définies par  $\beta = -\alpha$ , on obtient une deuxième famille de courbes W, qui n'est autre que la congruence (C') d'espèce opposée à la précédente.

Il en résulte que sur un tore sans points singuliers réels il passe quatre cercles par chaque point M de la surface : un cercle conjugué à (D), un conjugué à ( $\Gamma$ ), et un de chaque congruence (C) et (C'); dans le plan tangent en M, les tangentes aux deux derniers cercles admettent pour bissectrices les tangentes aux deux premiers. C'est là le *théorème de Villarceau*, qui s'étend évidemment à toutes les cyclides  $\mathcal{C}_y$  sans points singuliers réels considérées aux § 39 et 40. A cause de ce qui précède on les appelle quelquefois *cyclides paratactiques*<sup>(1)</sup>. Avec

(1) Dénomination proposée par M. Robert (*loc. cit.*). Cette démonstration du théorème de Villarceau est celle de M. Hadamard (*loc. cit.*, p. 299) qui fait remarquer qu'elle est de beaucoup la meilleure.



les notations du § 40, les équations des deux familles de cercles sont, sur la cyclide

$$(C) \quad \Theta - \Lambda = c^2; \quad (C') \quad \Theta + \Lambda = c^2.$$

Il résulte en particulier du théorème de Villarceau que si une cyclide paratactique admet une génératrice rectiligne, elle en admet nécessairement quatre. C'était le cas de la cyclide « focale » d'une  $\mathcal{C}_3$  (§ 41).

e) *Les cercles de la congruence (C) sont deux à deux conjugués.* En effet dans la construction du § 44 (*fig. 12*) il suffit de considérer le point T où  $(\delta)$  coupe  $O, x_1$ ; c'est le centre d'une sphère donnant un cercle double de  $\mathcal{F}$ , soit  $(\bar{C})$ , qui est conjugué du cercle (C) fourni par S, d'après le raisonnement fait dans le cas général des  $\mathcal{C}_3$  (§ 37).

Les centres C et  $\bar{C}$  des deux cercles conjugués sont sur la même droite issue de O, d'après leur construction même, et l'on a en outre  $\overline{OC} \cdot \overline{O\bar{C}} = -K^2$ , ce qu'on voit aisément, par exemple en considérant les deux sphères ayant respectivement (C) et  $(\bar{C})$  comme grands cercles; elles doivent être orthogonales, et elles se coupent suivant un même grand cercle de (K), se projetant suivant  $P, Q$ , sur le plan central (*fig. 13*). Autrement dit, les centres de deux cercles conjugués de (C) sont inverses dans l'inversion négative principale.

f) *Les « symétriques » d'un même point P de l'espace par rapport aux divers cercles de la congruence sont les points d'une même sphère fonction de P.* [Rappelons qu'on appelle symétrique d'un point P par rapport à un cercle (C) le point  $\bar{P}$  homologue de P dans la transposition d'axe (C). Cf. § 20].

Transformons en effet la paratactique  $\mathcal{F}$  en une autre  $\mathcal{F}'$  au moyen d'une sphérique quelconque  $\mathcal{C}$  ayant P pour foyer-objet; le symétrique  $\bar{P}_c$  de P par rapport à (C) devient le centre du cercle (C') transformé de (C) par  $\mathcal{C}$ ; et nous savons que les centres des cercles (C') sont les points d'un plan.

Donc les points  $\bar{P}_c$  sont les points d'une sphère (P) passant par le point P. Nous voyons aussi qu'elle passe par le cercle  $(\bar{C}_0)$  conjugué dans la congruence du cercle  $(C_0)$  passant par le point P; elle est donc orthogonale en P au cercle  $(C_0)$ , et de même en  $\bar{P}$  « opposé » de P. On sait donc construire la sphère correspondant à un point P donné: il suffit de construire le cercle  $(C_0)$  passant par P [construction (d) ci-dessus] et ensuite son conjugué  $(\bar{C}_0)$ , ce qui est immédiat. On peut remarquer d'ailleurs que le cercle intersection de la sphère (P) et du plan passant par P et l'axe (D) de la congruence est déterminé par le symétrique  $\bar{P}_D$  de P par rapport à (D) et  $\bar{P}_\Gamma$  par rapport à (Γ). (On retrouve ainsi que la sphère passe par  $\bar{P}$ ).

D'après ce qui précède, à chaque point P de l'espace on peut faire correspondre une sphère diamétrale à la sphère principale (K); inversement, si on se donne une telle sphère ( $\Sigma$ ), il existe sur elle un cercle  $(\bar{C}_0)$  de la congruence et un seul, que

l'on sait construire d'après (c); on prendra son conjugué ( $C_0$ ) qui coupera ( $\Sigma$ ) en deux points P et  $\bar{P}$  opposés, c'est-à-dire conjugués dans l'inversion négative; chacun d'eux redonnerait la sphère ( $\Sigma$ ) comme lieu de ses symétriques par rapport aux cercles (C). On a donc établi une correspondance biunivoque entre les sphères ( $\Sigma$ ) diamétrales à (K) et les couples de points opposés, ou encore entre les sphères ( $\Sigma$ ) et les points d'un demi-espace limité par un plan passant par le centre O de la congruence (ou plus généralement les points situés à l'intérieur ou à l'extérieur d'une sphère diamétrale à la sphère principale).

§ 47. — *Transformations paratactiques ayant même sphère principale.* — Donnons-nous une sphère (K) de centre O, et considérons l'ensemble des transformations paratactiques ayant (K) comme sphère principale. Chacune d'elles sera déterminée par son axe issu de O et par son angle, soit en tout trois paramètres; il faudra en outre se donner l'espèce, sinistrorsum ou dextrorsum. Dans la famille totale à trois paramètres, on peut distinguer une infinité double de groupes à un paramètre du type envisagé au § 45, *in fine*, les trajectoires de chacun d'eux constituant une congruence paratactique.

Les cercles doubles des transformations envisagées ici forment une famille (C) à quatre paramètres, qui n'est autre que celle des cercles diamétraux à (K). En effet tout cercle double (C) est diamétral à (K) d'après les propriétés données plus haut (§ 45, Remarque I); et réciproquement tout cercle diamétral à (K) peut être considéré comme cercle double d'une certaine transformation paratactique de la famille à trois paramètres envisagée ici; car il appartient à une congruence paratactique de chaque espèce, celle dont le plan central passe par OC et fait avec le plan du cercle (C) un angle  $\varepsilon$  de valeur absolue donnée par  $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{r}{K}$ .

Donc la famille (C) à quatre paramètres des cercles diamétraux à (K) se décompose en une infinité double de congruences paratactiques de chaque espèce.

Dans la famille (C) les cercles sont deux à deux conjugués. En effet un cercle ( $C_i$ ) de la famille appartient à une congruence paratactique ( $K_i$ ) dans laquelle il a un cercle conjugué ( $\bar{C}_i$ ); et d'ailleurs un tel cercle ( $C_i$ ) ne peut avoir dans la famille (C) plus d'un cercle conjugué; car s'il en avait deux ( $\bar{C}_i$ ) et ( $\bar{C}'_i$ ), chacun de ceux-ci déterminerait une congruence d'une espèce donnée, et ces deux congruences auraient en commun le cercle ( $C_i$ ), ce qui est impossible, puisque la donnée de ( $C_i$ ) et de son espèce suffit à déterminer une congruence.

On peut voir d'ailleurs directement que, si on se donne ( $C_i$ ) de la famille, il y en a un autre et un seul qui lui est conjugué: il suffit de remarquer que, étant donnés deux cercles conjugués, il existe une sphère et une seule à laquelle ils sont tous deux diamétraux, savoir celle qui admet pour grand cercle le cercle d'intersection des deux sphères ayant les deux cercles donnés respectivement pour grands cercles;

on en déduit que  $(C_i)$  admet dans la famille  $(C)$  un conjugué et un seul, celui dont le centre  $\bar{C}_i$  est le point opposé de son centre  $C_i$ , et dont le plan est perpendiculaire au plan de  $(C_i)$ .

§ 48. — THÉORÈME XI. — *Deux congruences paratactiques de même sphère principale et d'espèces opposées ont un couple de cercles conjugués communs.*

En effet les plans centraux des deux congruences se coupent suivant une droite  $Oy$ , sous l'angle  $2\varepsilon$ . Prenons sur  $Oy$  les deux points  $C$  et  $\bar{C}$  tels que

$$OC = r = K \operatorname{tg} \varepsilon, \quad O\bar{C} = \bar{r} = -K \operatorname{cotg} \varepsilon.$$

Les cercles  $(C)$  et  $(\bar{C})$ , ayant respectivement pour centres les points  $C$  et  $\bar{C}$ , et pour plans les deux bissecteurs des deux plans centraux, sont communs aux deux congruences<sup>(1)</sup>.

Rappelons que deux congruences paratactiques de même sphère principale et de même espèce ne peuvent avoir un couple de cercles conjugués communs, car la donnée d'un tel couple définit complètement la congruence.

THÉORÈME XII. — *Deux transformations paratactiques de même sphère principale et d'espèces opposées permutent<sup>(2)</sup>.*

En effet, d'après le théorème précédent, ces deux transformations  $\mathfrak{F}_1$  et  $\mathfrak{F}'_2$  ont en commun deux cercles doubles conjugués  $(\Gamma)$  et  $(\bar{\Gamma})$ ; or chacune d'elles peut se décomposer en un produit de deux rotations anallagmatiques autour de ces deux cercles; pour l'une, soit  $\mathfrak{F}_1$ , les deux rotations auront le même angle  $\alpha_1$ , pour l'autre, soit  $\mathfrak{F}'_2$ , elles auront des angles opposés  $\alpha_2$  et  $-\alpha_2$  [cela, parce qu'elles sont d'espèces opposées, et quels que soient les sens choisis sur  $(\Gamma)$  et  $(\bar{\Gamma})$ ]<sup>(3)</sup>.

Nous écrirons

$$\mathfrak{F}_1 = \Gamma(\alpha_1) \times \bar{\Gamma}(\alpha_1), \quad \mathfrak{F}'_2 = \Gamma(\alpha_2) \times \bar{\Gamma}(-\alpha_2);$$

d'où 
$$\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}'_2 = \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2) \times \bar{\Gamma}(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Et on trouve la même expression pour le produit  $\mathfrak{F}'_2 \mathfrak{F}_1$ .

(1) Pour déterminer lequel des deux points  $C$  ou  $\bar{C}$  correspond à chaque plan bissecteur, il faut tenir compte de l'espèce de chaque congruence. Si on remplace chacune des deux congruences par la congruence d'espèce opposée ayant le même plan principal, les deux nouvelles congruences ont en commun deux cercles différents des deux premiers, obtenus en associant le point  $C$  au bissecteur précédemment associé à  $\bar{C}$ , et vice versa. Ce dernier couple de cercles se déduit du précédent par rotation de  $\frac{\pi}{2}$  autour de  $Oy$ .

(2) Hadamard, *loc cit.*, p. 315.

(3) Cela est vrai même si l'on oriente indépendamment l'un de l'autre les cercles  $(\Gamma)$  et  $(\bar{\Gamma})$ ; c'est un résultat indépendant de l'orientation de l'espace, qui n'intervient que pour nommer les deux espèces de congruence, et qu'il n'est pas nécessaire de connaître pour savoir si deux congruences sont de même espèce ou d'espèces opposées.

Le résultat annoncé se trouve ainsi démontré; on remarque en outre que le produit des deux paratactiques permutable est une  $\mathcal{C}_3$  non paratactique (sauf si l'un des deux angles  $\alpha_1$  ou  $\alpha_2$  était nul) ayant pour cercles doubles  $(\Gamma)$  et  $(\bar{\Gamma})$  et permutable avec l'inversion négative  $(K)$ .

Réciproquement, toute  $\mathcal{C}_3$  peut être décomposée en un produit de deux paratactiques d'espèces opposées ayant même sphère principale (celle de la  $\mathcal{C}_3$  proposée)<sup>(\*)</sup>.

Évident : prendre  $\alpha_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}$  et  $\alpha_2 = \frac{\alpha - \beta}{2}$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant les deux invariants de  $\mathcal{C}_3$ . On a  $\mathcal{C}_3 = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{P}_1$  étant la paratactique d'une certaine espèce d'angle  $\alpha_1$  d'axes  $(\Gamma)$  et  $(\bar{\Gamma})$ ,  $\mathcal{P}_2$  la paratactique d'espèce opposée, d'angle  $\alpha_2$ , ayant les mêmes axes.

§ 49. — THÉORÈME XIII. — Deux congruences paratactiques de même sphère principale et de même espèce se coupent en tout point de l'espace sous un même angle  $\varphi$  <sup>(\*)</sup>.

Soient  $(K_1)$  et  $(K_2)$  les deux congruences,  $M$  et  $N$  deux points quelconques de l'espace, par lesquels passent respectivement les cercles  $(C_1)$  et  $(D_1)$  de la première,  $(C_2)$  et  $(D_2)$  de la deuxième. Par  $M$  et  $N$  il passe un cercle  $(C')$  diamétral à la sphère principale  $(K)$  et un seul, définissant une congruence  $(K')$  d'espèce opposée aux deux précédentes, et un groupe de transformations paratactiques  $\mathcal{P}'$  à un paramètre, dont les trajectoires sont les cercles  $(K')$ , dont fait partie en particulier  $(C')$ . Considérons, dans le groupe, la paratactique amenant  $M$  sur  $N$ ; comme d'après le théorème XII, elle conserve chacune des congruences  $(K)$  de première espèce prise dans son ensemble, elle amène nécessairement  $(C_1)$  sur  $(D_1)$  et  $(C_2)$  sur  $(D_2)$ ; donc l'angle de  $(C_1)$  et  $(C_2)$  en  $M$  est égal à l'angle de  $(D_1)$  et  $(D_2)$  en  $N$ . C. Q. F. D.

Cet angle constant  $\varphi$  sera dit l'angle des deux congruences.

Remarquons que, dans la famille à deux paramètres des congruences d'une espèce déterminée ayant  $(K)$  pour sphère principale, on peut définir biunivoquement chaque congruence par le point  $K$  où son axe  $(D)$  perce la sphère principale; ce point sera dit pôle de la congruence correspondante. On a ainsi une représentation sphérique des congruences d'une certaine espèce, de sphère principale  $(K)$ .

En appliquant le théorème XIII au point  $O$ , on voit que l'angle des deux congruences est égal à la distance sphérique de leurs pôles sur la sphère principale, c'est-à-dire à la distance sphérique de leurs images dans la représentation que nous venons de définir.

Rotation d'une congruence autour d'une autre de même espèce. — Une rotation anallagmatique d'angle quelconque  $\alpha$  autour d'un cercle  $(C_0)$  conserve globalement la congruence  $(K_0)$  à laquelle il appartient (puisque cette rotation permute avec

<sup>(\*)</sup> A. Bloch, *loc. cit.*, p. 69.

<sup>(\*)</sup> E. Cartan, cité par J. Hadamard, *loc. cit.*, p. 315.

toute paratactique du groupe  $K_0$  et elle transforme toute autre congruence  $(K_1)$  de la famille en une autre  $(K'_1)$ . Nous allons montrer que  $(K'_1)$  dépend de  $(K_1)$ , de l'angle  $\alpha$ , et de la congruence  $(K_0)$ , mais non du cercle  $(C_0)$  lui-même, c'est-à-dire que si on fait tourner  $(K_1)$  d'un angle  $\alpha$  autour d'un autre cercle  $(D_0)$  de la congruence  $(K_0)$  on retrouve la même congruence  $(K'_1)$ .

Cela résulte du théorème XIII : soit  $M$  un point de  $(C_0)$ ,  $(C_1)$  le cercle de  $(K_1)$  passant par  $M$ ,  $(C'_1)$  celui qui s'en déduit par rotation de  $\alpha$  autour de  $(C_0)$ ;  $N$  un point de  $(D_0)$ ,  $(D_1)$  le cercle de  $(K_1)$  passant par  $N$ ,  $(D'_1)$  le cercle de  $(K'_1)$  passant par  $N$ ,  $(D''_1)$  le cercle déduit de  $(D_1)$  par rotation de  $\alpha$  autour de  $(D_0)$ . Ces deux derniers cercles  $(D'_1)$  et  $(D''_1)$  coïncident nécessairement, car ils font les mêmes angles avec  $(D_0)$  et  $(D_1)$  au point  $N$  : d'après le théorème XIII le trièdre des tangentes à  $D'_1, D_0, D_1$  en  $N$  est en effet égal à celui des tangentes à  $C'_1, C_0, C_1$  en  $M$ , qui est lui-même égal à celui des tangentes à  $D''_1, D_0, D_1$  par construction.

En appliquant le raisonnement précédent au point  $O$ , on voit que le pôle  $K'_1$  de la congruence  $(K'_1)$  « tournée » se déduit du pôle  $K_1$  par une rotation (au sens ordinaire du mot) d'angle  $\alpha$  autour du pôle  $K_0$ . *Les « rotations » des congruences les unes autour des autres se représentent donc par les rotations de leurs images les unes autour des autres sur la sphère représentative, les angles de rotation étant les mêmes dans les deux cas.*

§ 50. — *Transformée d'une congruence par une paratactique de même espèce.* — Considérons une congruence  $(K_1)$  et une opération paratactique  $\mathcal{F}$  de congruence  $(K_0)$  de même espèce; cette transformation  $\mathcal{F}$  est équivalente au produit de deux « rotations » d'un même angle  $\alpha$  autour de deux cercles conjugués de la congruence  $(K_0)$ . Donc  $\mathcal{F}$  transforme  $(K_1)$  en une congruence  $(K''_1)$  dont le pôle  $K''_1$  se déduit de  $K_1$  sur la sphère représentative par une rotation d'angle  $2\alpha$  autour de  $K_0$ . [Si on transformait  $(K_1)$  par une paratactique  $\mathcal{F}'$  d'espèce opposée, l'image de la transformée se déduirait de  $K_1$  par une rotation de  $\alpha$  représentant la première rotation anallagmatique composante, suivie d'une autre de l'angle  $-\alpha$  représentant la seconde; on retrouve donc bien comme il le fallait, le point  $K_1$  lui-même].

Ce raisonnement montre, en passant, que lorsqu'on décompose une paratactique  $\mathcal{F}$  en un produit de deux « rotations » d'un même angle  $\alpha$ , cet angle  $\alpha$  est, comme il était à prévoir, indépendant du couple de cercles conjugués choisi, pour faire la décomposition, dans la congruence des cercles doubles.

Finalement la transformée d'une congruence  $(K_1)$  par une paratactique de même espèce, d'angle  $\alpha$ , d'image  $K_0$ , a pour image le point déduit de  $K_1$  par une rotation d'angle  $2\alpha$  autour de  $K_0$ , sur la sphère représentative.

Les propriétés que nous venons d'établir nous conduisent enfin au théorème suivant, qui résout complètement le problème de la composition des transformations paratactiques de même sphère principale.

**THÉORÈME XIV.** — *Les transformations paratactiques de même sphère principale et de même espèce forment un groupe. Elles se composent comme les rotations autour d'un point fixe dans l'espace, l'axe de la rotation étant l'axe de la paratactique, et l'angle de rotation étant le double de l'angle de la paratactique.*

En effet chaque paratactique  $\mathcal{P}$  de l'espèce choisie se représente par une rotation d'angle  $2\alpha$  autour de son image  $K$ , en ce qui concerne son effet sur les congruences paratactiques de même espèce. Ces paratactiques se composent donc comme les rotations d'angle  $2\alpha$  autour des droites  $OK$ , de sorte que le théorème découle immédiatement des résultats donnés plus haut, si on applique les  $\mathcal{P}$  seulement aux congruences de même espèce. Mais il est valable sans cette restriction<sup>(1)</sup>.

Considérons en effet les deux transformations paratactiques de première espèce  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  comme appliquées aux divers points de l'espace; leur produit  $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$  est une  $\mathcal{C}_3$  de sphère principale ( $K$ ) (puisqu'elle permute avec l'inversion négative  $K$ ). Cette  $\mathcal{C}_3$  est donc le produit de deux rotations d'angles  $\alpha$  et  $\beta$  autour de deux cercles conjugués diamétraux à la sphère ( $K$ ). Nous allons montrer que  $\alpha = \beta$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{C}_3$  est paratactique. En effet  $\mathcal{C}_3$  permute avec toutes les paratactiques de seconde espèce  $\mathcal{P}'$ , en nombre doublement infini, puisqu'il en est ainsi de ses deux composantes  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ ; or toute  $\mathcal{C}_3$  permutant avec une paratactique a ses deux cercles doubles dans la congruence de cette dernière transformation. Donc ici  $\mathcal{C}_3$  doit posséder une infinité double de cercles doubles deux à deux conjugués (un couple pour chaque  $\mathcal{P}'$ ); par suite  $\mathcal{C}_3$  est une paratactique  $\mathcal{P}$  de première espèce. Soit  $K$  son image sphérique,  $\theta$  son angle; l'effet de  $\mathcal{P}$  sur les congruences de première espèce se traduit par une rotation de leur image d'un angle  $\theta$  autour de  $K$ . Il en résulte que  $K$  et  $\theta$  sont donnés par la règle annoncée, dont nous avons montré la validité à ce point de vue restreint. Le théorème annoncé se trouve donc maintenant complètement établi.

L'étude commencée au § 47 est ainsi achevée, et se résume ainsi : les transformations paratactiques ayant une sphère principale donnée se divisent en deux groupes, correspondant à chaque espèce; nous connaissons le moyen de faire le produit de deux de ces transformations appartenant ou non à un même groupe; dans le dernier cas, les deux transformations permutent et le produit est une  $\mathcal{C}_3$  ordinaire.

**§ 51.** — *Retour aux propriétés de la congruence paratactique : représentation sphérique des cercles d'une telle congruence.* — Nous avons vu au § 45 qu'il y a correspondance biunivoque entre les cercles ( $C$ ) de la congruence et les points du plan central ( $\Pi$ ), chacun de ces points étant le centre d'un des cercles. On peut donc

---

<sup>(1)</sup> Le raisonnement qui suit est absolument nécessaire pour justifier le théorème énoncé, à cause de la restriction essentielle sur laquelle nous venons d'insister, et qu'il faut absolument lever.

étudier une figure formée de cercles (C) en étudiant son « image plane », c'est-à-dire la figure formée par les points correspondants du plan (II). La propriété (f) du § 46 conduit à envisager une représentation sphérique des cercles de la congruence, dont les propriétés vont être indiquées; nous utiliserons pour cela une partie des résultats des § 47 à 50; c'est pourquoi nous revenons seulement maintenant à l'étude d'une congruence paratactique isolée. Et il est bien entendu qu'il faut éviter toute confusion entre la représentation sphérique des *congruences* d'une certaine espèce ayant une sphère principale donnée (§ 49 et 50) et la représentation sphérique des *cercles* d'une congruence paratactique donnée, dont nous allons parler maintenant.

Prenons un point P quelconque de l'espace; nous avons vu que les symétriques de P par rapport aux divers cercles de la congruence sont les points d'une sphère déterminée par le point P lui-même et le cercle ( $\bar{C}$ ) conjugué du cercle (C) passant par P [§ 46 (f)]. Inversement si Q est un point quelconque de la sphère (P), il existe un cercle et un seul de la congruence tel que Q soit le symétrique de P par rapport à ce cercle; cela résulte de ce qu'il y a un cercle (C) et un seul ayant pour centre un point donné du plan (II). Cette correspondance biunivoque permet de considérer les points de la sphère (P) comme les images sphériques, prises avec le pôle P, des différents cercles de la congruence.

Il s'agit maintenant de trouver la relation entre les images sphériques d'une même congruence prises avec différents pôles. Nous allons montrer que *les images correspondant à deux pôles différents sont circulairement équivalentes*, c'est-à-dire que l'on passe d'une figure sphérique à l'autre par une transformation circulaire.

Effectivement, soient P et Q deux points quelconques de l'espace pris comme pôles,  $\bar{P}_1$  et  $\bar{Q}_1$  leurs symétriques par rapport à un cercle ( $C_1$ ) arbitraire de la congruence. Par P et Q passe un cercle et un seul diamétral à la sphère principale, déterminant une congruence paratactique d'espèce opposée à celle que nous étudions, et une seule; dans le groupe à un paramètre correspondant, prenons la paratactique  $\mathcal{F}'$  amenant P sur Q; et considérons celle que l'on en déduit par une rotation de  $\pi$  autour de ( $C_1$ ); d'après le § 49, elle est indépendante du cercle ( $C_1$ ) pris dans la congruence proposée. La paratactique  $\mathcal{F}'_1$  ainsi définie amène  $\bar{P}_1$  sur  $\bar{Q}_1$ , quel que soit le cercle envisagé. Elle amène la sphère (P) sur la sphère (Q), et l'on voit que les deux images se déduisent l'une de l'autre par une transformation circulaire, « trace » de  $\mathcal{F}'_1$  sur le couple de sphères (P) et (Q).

On peut donc parler de l'image sphérique des cercles d'une congruence, à une transformation circulaire près.

On peut voir maintenant que *si la congruence subit une transformation sphérique quelconque, son image subit une transformation circulaire*. En effet si la sphérique  $\bar{C}$  transforme la congruence (C) en ( $C'$ ), elle transforme le pôle P servant à prendre l'image en un point P'; l'image de ( $C'$ ) prise avec le pôle P' sera manifestement

circulairement homologue à celle de (C) prise avec P, ce qui suffit à démontrer la propriété.

Comme pôle servant à prendre l'image on peut considérer en particulier le point à l'infini de l'espace; on retrouve ainsi les propriétés de l'image plane constituée par les centres qui nous a servi de point de départ. Plus généralement, tous les points du plan (II) donnent des images planes, le plan étant celui du cercle  $(\bar{C}_0)$  conjugué au cercle  $(C_0)$  passant par le pôle. D'après ce qui précède on passe d'une de ces images à l'autre par une transformation circulaire plane.

§ 52. — *Image principale.* — Prenons maintenant comme pôle le point K où la demi-droite positive Oz de (D) perce la sphère principale (point appelé déjà *pôle* de la congruence à un autre point de vue; cf. § 49). L'image ainsi obtenue sera dite *image principale* de la congruence, car elle jouit de propriétés particulières :

D'abord la sphère correspondant à K est la sphère principale (K) elle-même. Ensuite les images de deux cercles conjugués (C) et  $(\bar{C})$  étant dans le cas général des points *opposés* [au sens du § 46 (d), note], comme on s'en assure aisément, sont ici *diamétralement* opposés sur la sphère représentative. Enfin, *si la congruence subit une transformation sphérique quelconque, la nouvelle image principale est semblable à l'ancienne.* En effet, d'après ce que nous avons vu ci-dessus, la nouvelle image se déduit de la première par une transformation circulaire; or celle-ci doit transformer deux points diamétralement opposés en deux autres qui le sont aussi; et cela entraîne qu'elle se réduit à une similitude<sup>(1)</sup>.

On peut donc parler de l'image principale d'une congruence, à une similitude près.

Rappelons maintenant que toute « rotation » autour d'un cercle de la congruence conserve celle-ci globalement (déjà vu au § 49) et détermine donc une transformation de ses cercles les uns dans les autres. On a la propriété fondamentale suivante :

THÉORÈME XV. — *Une rotation anallagmatique de la congruence autour d'un de ses cercles (C) est représentée sur l'image principale par une rotation euclidienne de celle-ci, d'un angle égal, autour de l'image du cercle (C) envisagé.*

En effet le théorème est évident si le cercle (C) se trouve être l'axe (D) de la congruence, et on peut toujours se ramener à ce cas, en transformant la con-

(1) On peut démontrer ce dernier point par exemple ainsi :

Amenons par les similitudes convenables les deux images sur une même sphère, ce qui donne deux figures équivalentes à une circulaire directe près; celle-ci a deux points doubles qui sont forcément opposés; par suite l'homothétie anallagmatique composante (Plan § 12) disparaît car le grand cercle ayant sur la sphère ces deux points pour pôles doit être conservé; il reste donc seulement la rotation anallagmatique, qui se réduit à une rotation euclidienne dans l'espace.



gruence par une sphérique quelconque ayant son foyer-objet sur (C), ce qui démontre la propriété, *puisque la nouvelle image principale est semblable à l'ancienne.*

Donc, *en ce qui concerne leur effet sur les cercles de la congruence* (et non sur les points de l'espace), les « rotations » autour des cercles de la congruence se composent comme les rotations autour d'un point fixe dans l'espace, les angles étant les mêmes de part et d'autre. On remarque en particulier que deux rotations d'un même angle autour de deux cercles conjugués sont équivalentes, puisque les points-images sont diamétralement opposés.

On appelle *série de Villarceau* l'ensemble des cercles de la congruence se déduisant de l'un d'entre eux par « rotation » autour d'un même cercle fixe; on voit qu'une telle série est représentée par un cercle sur la sphère principale, et par suite sur toute autre sphère ou plan représentatif, en particulier sur le plan central; donc les centres des cercles d'une série de Villarceau sont sur un même cercle. La série est dite *droite* si elle est représentée par un grand cercle de la sphère principale, c'est-à-dire si les cercles de la série sont deux à deux conjugués; dans les autres cas elle est dite *oblique*. Dans tous les cas, on peut considérer qu'une série de Villarceau a deux axes, savoir les deux cercles conjugués représentés par les pôles du petit (ou grand) cercle représentatif de la série. Les cercles d'une série de Villarceau engendrent une cyclide de Dupin « paratactique » (cf. § 46). Il y a une infinité triple de telles cyclides formées à partir de la congruence considérée, puisqu'il y a une triple infinité de cercles sur la sphère. C'est là une généralisation de la génération d'une cyclide par rotation d'un cercle autour d'un cercle conjugué.

### § 53. — Angle de parataxie; cercles paratactiques.

THÉORÈME XVI. — *Les sphères passant par un cercle (C<sub>1</sub>) de la congruence coupent tout autre cercle (C<sub>2</sub>) de la même congruence sous un angle constant, fonction seulement du couple C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub> choisi. Cet angle V est appelé angle de parataxie des deux cercles (C<sub>1</sub>) et (C<sub>2</sub>).*

Démonstration : soient  $\Sigma_1$  et  $\Sigma'_1$  deux sphères passant par (C<sub>1</sub>),  $\mathcal{F}$  une transformation paratactique du groupe à un paramètre défini par la congruence, ayant pour angle  $\alpha$  précisément l'angle des deux sphères  $\Sigma_1$  et  $\Sigma'_1$ . On voit que  $\mathcal{F}$  transforme  $\Sigma_1$  en  $\Sigma'_1$  et conserve le cercle (C<sub>2</sub>), ce qui démontre la propriété.

Pour l'un des deux cercles considérés, prenons en particulier le cercle principal ( $\Gamma$ ), l'autre étant un cercle (C) quelconque. En considérant le plan de ( $\Gamma$ ) puis celui de (C), comme sphères particulières, on voit que les sphères passant par ( $\Gamma$ ) coupent (C) sous l'angle  $\varepsilon$  défini au § 45, et de même les sphères passant par (C) coupent ( $\Gamma$ ) sous le même angle. Cela démontre en passant que *l'angle de parataxie de (C<sub>1</sub>) avec (C<sub>2</sub>) est le même que celui de (C<sub>2</sub>) avec (C<sub>1</sub>)* puisqu'on peut toujours

amener par une « rotation » convenable, autour d'un cercle de la congruence, un cercle  $(C_1)$  quelconque sur le cercle  $(\Gamma)$ .

L'angle de parataxie  $V$  est donc fonction symétrique des deux cercles  $(C_1)$  et  $(C_2)$ ; cherchons sa représentation sur l'image sphérique. Pour cela reprenons le cas particulier où  $(C_1)$  n'est autre que  $(\Gamma)$ ; nous venons de voir que  $V = \varepsilon$ . Or si l'on cherche à construire l'image  $c$  du cercle  $(C)$  avec  $K$  pour pôle, c'est-à-dire le symétrique de  $K$  par rapport à  $(C)$ , on voit que  $c$  n'est autre que le symétrique (au sens ordinaire) de  $K$  par rapport au plan du cercle  $(C)$ . [Il suffit de décomposer la transposition autour de  $(C)$  en le produit de l'inversion par rapport à la sphère ayant  $(C)$  pour grand cercle, sphère qui passe par  $K$ , suivie de la symétrie par rapport au plan de  $(C)$ ]. La distance sphérique des points  $\bar{K}$  et  $c$  est donc égale à  $2\varepsilon$ , c'est-à-dire à  $2V$ . Cette propriété s'étend immédiatement au cas de deux cercles quelconques, à cause de l'invariance de l'angle de parataxie dans une « rotation » autour d'un cercle de la congruence et de la distance sphérique de deux points dans une rotation euclidienne autour d'un axe passant par le centre de la sphère; d'où le résultat :

**THÉORÈME XVII.** — *L'angle de parataxie de deux cercles est égal à la moitié de la distance sphérique de leurs images principales.*

On vérifie ainsi immédiatement que l'angle de parataxie de deux cercles conjugués est égal à  $\frac{\pi}{2}$ .

*Remarque.* — De ce qui précède on déduit immédiatement la manière de passer de l'image des centres à l'image principale de la congruence : si on prolonge en effet la droite  $Kc$  jusqu'à son intersection en  $c'$  avec le plan  $(\Pi)$  (fig. 16), on voit que

$$Oc' = OK \cdot \operatorname{tg} \varepsilon = OC;$$

si  $\bar{K}c$  coupe  $(\Pi)$  en  $c''$ , on a de même

$$Oc'' = O\bar{K} \cdot \operatorname{cotg} \varepsilon = O\bar{C},$$

$\bar{C}$  étant le centre du cercle conjugué à  $(C)$  dans la congruence.

On passe donc du centre  $C$  à l'image principale  $c$  par une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  autour de  $(D)$  suivie d'une projection stéréographique de pôle  $K$  du plan  $(\Pi)$  sur la sphère principale.

Cela permet de rattacher facilement entre elles les propriétés de l'image sphérique et celles de l'image plane, au cas où on voudrait développer celles-ci.

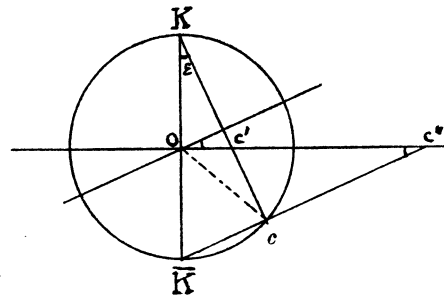


FIG. 16.

§ 54. — Donnons-nous maintenant deux cercles quelconques de l'espace tels que les sphères passant par l'un d'eux coupent l'autre sous un angle constant; on dira que ces cercles sont *paratactiques*. Dans ce qui précède, nous avons montré que deux cercles appartenant à une même congruence paratactique sont paratactiques (entre eux). Réciproquement, deux cercles paratactiques (entre eux) appartiennent à une même congruence paratactique. (Démonstration facile en supposant, comme on peut le faire, que l'un des cercles est une droite, qui sera donc l'axe de la congruence).

Les cercles paratactiques jouissent de plusieurs propriétés importantes, entre autres :

**THÉORÈME XVIII.** — *Tout cercle  $(\gamma)$  cosphérique à deux cercles paratactiques  $(C_1)$  et  $(C_2)$  les coupe tous deux sous un même angle.*

Ce résultat découle des propriétés étudiées aux § 47 et seq. Considérons en effet la congruence paratactique contenant  $(\gamma)$ , d'espèce opposée à celle de  $(C_1)$  et  $(C_2)$ ; toute transformation  $\mathcal{F}'$  du groupe qu'elle définit conserve la congruence  $(C)$  dans son ensemble, puisqu'elle permute avec les transformations que définit celle-ci (théorème XII, § 48). Il existe une  $\mathcal{F}'$  amenant un des points où  $(\gamma)$  coupe  $(C_1)$ , soit  $M_1$ , sur un des points où  $(\gamma)$  coupe  $(C_2)$ , soit  $M_2$ ; elle amènera en outre  $(C_1)$  sur  $(C_2)$  et par suite également le second point  $N_1$  commun à  $(\gamma)$  et  $(C_1)$  sur le second point  $N_2$  commun à  $(\gamma)$  et  $(C_2)$ ; d'où résulte la proposition.

*Corollaire.* — *Deux cercles paratactiques admettent une infinité de cercles perpendiculaires communs.*

En effet une sphère quelconque  $(S_1)$  passant par  $(C_1)$  coupe  $(C_2)$  en deux points  $P_1$  et  $Q_2$ ; le cercle  $(\gamma)$  perpendiculaire à  $(C_2)$  en ces deux points, et situé sur  $(S_1)$ , sera aussi perpendiculaire à  $(C_1)$  d'après le théorème précédent.

*Réciproque.* — *Deux cercles  $(C_1)$  et  $(C_2)$  ayant une infinité de cercles perpendiculaires communs  $(\gamma)$  sont paratactiques.*

En effet soit  $(\Sigma_1)$  une sphère passant par  $(C_1)$  choisie une fois pour toutes, coupant  $(C_2)$  en  $P_1$  et  $Q_1$ ; soit  $(\Sigma)$  une autre sphère passant par  $(C_1)$ , coupant  $(C_2)$  en  $P$  et  $Q$ . Une transposition autour de l'un quelconque des cercles  $(\gamma)$  conserve chacun des cercles  $(C_1)$  et  $(C_2)$ . Elle transforme  $(\Sigma_1)$  en une sphère  $(\Sigma'_1)$  qui coupera  $(C_2)$  sous un angle égal à celui que fait  $(\Sigma_1)$  avec ce même cercle. Or on peut choisir  $(\gamma)$  de sorte que  $(\Sigma'_1)$  coïncide avec  $(\Sigma)$ ; on le voit par exemple très facilement en transformant la figure par une sphérique ayant son foyer-objet sur  $(C_1)$  qui devient une droite,  $(\Sigma_1)$  et  $(\Sigma)$  devenant des plans (discussion facile).

Il en résulte que toute sphère  $(\Sigma)$  passant par  $(C_1)$  coupe  $(C_2)$  sous un angle constant; les deux cercles sont donc paratactiques.

On est ainsi amené à l'étude des cercles perpendiculaires communs à deux cer-

cles donnés, qui a servi de point de départ à M. Hadamard (*loc. cit.*, p. 266) pour établir la théorie de la parataxie. Il est inutile de la refaire ici. Mais on remarquera que nous avons été conduits tout naturellement d'abord aux propriétés des transformations paratactiques (§ 42 et seq.), et ensuite seulement à celles des cercles paratactiques.

§ 55. — 4° LES TRANSFORMATIONS DE SEPTIÈME ESPÈCE. — Ce sont des  $\mathcal{C}_7$  particulières, celles pour lesquelles  $\Phi$  se trouve dans le plan ( $\Pi$ ) du retournement (*fig. 17*). Nous savons déjà qu'elles admettent un faisceau linéaire de sphères doubles comprenant en particulier le plan ( $\Pi$ ) (cf. § 15). Il en résulte que le cercle fixe ( $\Gamma$ ) par où passent ces sphères, cercle situé dans le plan ( $\Pi$ ), est conservé dans la transformation.

Si on applique à la  $\mathcal{C}_7$  envisagée la construction générale des cercles doubles d'une  $\mathcal{C}_3$  ou un raisonnement direct, on trouve un deuxième cercle double ( $\bar{\Gamma}$ ), conjugué à ( $\Gamma$ ) ayant pour centre la projection

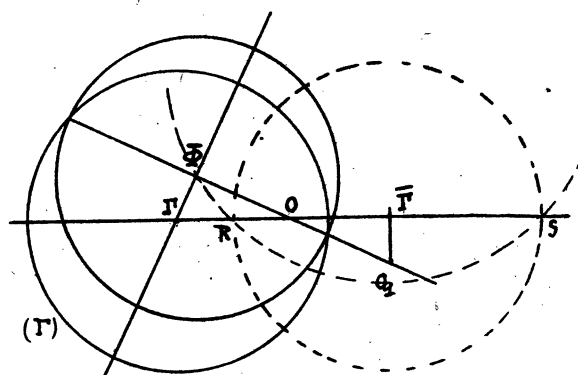


FIG. 17.

sur ( $\Delta$ ) de l'inverse  $O'$  de  $O$  par rapport à la sphère ( $\Phi$ ) (*fig. 17*). Quand  $O$  est distinct de  $\Phi$ , ( $\bar{\Gamma}$ ) est un cercle proprement dit; mais si  $O$  est confondu avec  $\Phi$ ,  $\mathcal{C}_7$  est une transformation  $\mathcal{C}_7$  particulière (cf. § 41) caractérisée par ce que le plan du retournement composant est diamétral à la sphère ( $\Phi$ ); ( $\bar{\Gamma}$ ) se confond alors avec l'axe de retournement ( $D$ ), ( $\Gamma$ ) étant le cercle d'intersection de ( $\Pi$ ) et de ( $\Phi$ ). Nous dirons que l'on a affaire à une  $\mathcal{C}_\pi$ , car il s'agit d'une  $\mathcal{C}_7$  où l'un des invariants est égal à  $\pi$ , puisque c'est le produit d'une rotation d'angle  $\beta$  autour de ( $D$ ) par une transposition autour du cercle ( $\Gamma$ ).

Si on transforme une  $\mathcal{C}_7$  quelconque par une sphérique de foyer-objet situé sur ( $\bar{\Gamma}$ ), on obtient une transformation  $\mathcal{C}'_7$  admettant une droite double ( $\bar{\Gamma}'$ ) et un cercle double ( $\Gamma'$ ); le foyer-objet  $\Phi'$  sera donc situé sur ( $\bar{\Gamma}'$ ) qui sera nécessairement l'axe du retournement à moins que l'angle de celui-ci ne soit égal à  $\pi$  ( $\Phi'$  devant être toujours dans le plan de retournement); dans les deux cas on voit que  $\mathcal{C}'_7$  est une  $\mathcal{C}_\pi$ . Il en résulte que  $\mathcal{C}_7$  est toujours le produit d'une transposition autour d'un cercle par une « rotation » d'angle  $\beta$  autour d'un cercle conjugué du premier; c'est une  $\mathcal{C}_3$  dont un des invariants  $\alpha$  ou  $\beta$  est égal à  $\pi$ , comme nous l'avions déjà annoncé (§ 41, *in fine*). Une  $\mathcal{C}_7$  admet donc un seul invariant.

Avec les coordonnées utilisées pour une  $\mathcal{C}_3$  quelconque (§ 39) les équations intrinsèques de  $\mathcal{C}$ , sont

$$\Theta' = \Theta + \pi, \quad \Lambda' = \Lambda + \beta, \quad U' = U.$$

La figure invariante se compose des cercles ( $\Gamma$ ) et ( $\bar{\Gamma}$ ), des sphères passant par ( $\Gamma$ ), des cyclides d'axes ( $\Gamma$ ) et ( $\bar{\Gamma}$ ). L'invariant  $\beta$  s'interprète comme d'habitude sur la figure focale; c'est l'angle de la sphère passant par ( $\bar{\Gamma}$ ) et  $\Phi$  avec le plan de ( $\bar{\Gamma}$ ), c'est-à-dire l'angle du cercle passant par R, S,  $\Phi$  avec la droite ( $\Delta$ ) (*fig. 17*).

Une  $\mathcal{C}_7$  dépend de neuf paramètres : quatre pour l'inversion  $\Phi$ , deux pour le plan ( $\Pi$ ) (qui doit passer par  $\Phi$ ), deux pour le point O dans ( $\Pi$ ), et un pour l'angle  $2\mu$  du retournement. Si on se donne la figure invariante (dépendant de huit paramètres) et l'invariant  $\beta$ , on peut effectivement construire le point  $\Phi$ , comme intersection du cercle de diamètre  $\Gamma O$  avec le cercle passant par R et S faisant l'angle  $\beta$  avec ( $\Delta$ ) (*fig. 17*).  $\Phi$  est ainsi déterminé sans ambiguïté si l'on tient compte des signes.

§ 56. — *Types particuliers de  $\mathcal{C}_7$ .* — Le cas où O et  $\Phi$  sont confondus n'est pas intrinsèquement distinct du cas général, comme nous l'avons vu; c'est un cas particulier de ce fait que les  $\mathcal{C}$  (non paratactiques) ne sont pas intrinsèquement distinctes des  $\mathcal{C}_3$  générales. Les types intrinsèques correspondent à des valeurs particulières de l'invariant  $\beta$ .

Si  $\beta = 0$ , on retrouve la transposition (§ 20).

Si  $\beta = \pi$ , on a une paratactique particulière, d'angle  $\pi$ . On voit immédiatement que cette transformation n'est autre que l'inversion de puissance négative, car c'est le produit de l'inversion  $\Phi$  par une symétrie autour de  $\Phi$ . Cette transformation  $\mathcal{J}$  est réciproque; elle conserve toutes les sphères diamétrales et tous les cercles diamétraux à la sphère ( $\Phi$ ). Cette propriété a été déjà rencontrée.

Remarquons que  $\mathcal{J}$  et la transposition ( $r$ ) sont les seules  $\mathcal{C}_3$  réciproques; car pour qu'une  $\mathcal{C}_3$  soit involutive d'ordre  $p$ , il faut que l'on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} p\alpha = 2k\pi, \\ p\beta = 2k'\pi; \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = k \frac{2\pi}{p}, \\ \beta = k' \frac{2\pi}{p}. \end{array} \right.$$

Pour  $p = 2$ , cela donne  $\alpha = k\pi$ ,  $\beta = k'\pi$ ; d'où les deux solutions

$$\alpha = \pi, \quad \beta = 0 \quad (\text{transposition}); \quad \alpha = \pi, \quad \beta = \pi \quad (\text{inversion négative}).$$

Ce sont là les deux seules sphériques directes  $\mathcal{C}$  qui soient réciproques, puisque une  $\mathcal{C}_1$  ou une  $\mathcal{C}_2$  ne l'est jamais.

Nous avons terminé l'étude des sphériques directes, et nous allons passer aux sphériques inverses; comme nous allons le voir, cette étude est beaucoup plus facile, et d'ailleurs moins intéressante.

---

## CHAPITRE III

### Les transformations sphériques inverses.

#### A) Généralités. — Sphères doubles.

§ 57. — Une sphérique inverse  $C = \Phi \mathcal{D}$  (cf. § 9) est définie par la donnée de l'inversion  $\Phi$  et du déplacement  $\mathcal{D}$ .

Si l'inversion  $\Phi$  dégénérât en une symétrie par rapport à un plan,  $C$  se réduirait à un retournement, et nous écartons ce cas. Donc  $\Phi$  est donnée sous la forme d'une sphère d'inversion, de centre  $\Phi$  à distance finie, et de rayon  $a$ .

Le déplacement  $\mathcal{D}$  est défini par son axe hélicoïdal orienté  $(D)$ , son angle de rotation  $2\mu$  compris entre 0 et  $2\pi$ , et l'amplitude  $2l$  de la translation le long de  $(D)$ . En particulier,  $\mathcal{D}$  pourra se réduire à une rotation ( $l = 0$ ), à une translation ( $\mu = 0$ ), ou même à la transformation identique ( $l = 0$  et  $\mu = 0$ ).

Dans tous les cas le foyer-image  $\Psi$  de  $C$  est le transformé de  $\Phi$  dans le déplacement  $\mathcal{D}$ ; les plans et les droites passant par  $\Phi$  sont transformés dans les plans et droites passant par  $\Psi$ , et ce sont les seuls plans et droites qui ne soient pas transformés en cercles et sphères proprement dits.

§ 58. — *Symétrie de la figure invariante.* — On a :  $C = \Phi \mathcal{D} = \mathcal{D} \Psi$  et  $C^{-1} = \mathcal{D}^{-1} \Phi = \Psi \mathcal{D}^{-1}$ . Par ailleurs on peut écrire  $\mathcal{D} = PQRS$  en appelant  $P$  et  $Q$  les symétries respectives par rapport à deux plans normaux à  $(D)$  distants de  $l$ ,  $R$  et  $S$  par rapport à deux plans passant par  $(D)$  faisant entre eux l'angle  $\mu$ . On a aussi  $\mathcal{D} = PRQS = rs$  en appelant  $r$  le renversement autour de la droite intersection des plans  $P$  et  $R$ ,  $s$  autour de l'intersection de  $Q$  et  $S$ . On pourra donc écrire  $\mathcal{D} = rs$ , ( $r$ ) et ( $s$ ) étant deux droites perpendiculaires à  $(D)$  en deux points distants de  $l$ , et faisant entre elles l'angle  $\mu$ .

En particulier, prenons pour ( $r$ ) la droite  $(\Delta)$  perpendiculaire commune à  $(D)$  et à  $\Phi\Psi$ , qui coupe  $\Phi\Psi$  en son milieu  $\chi$  et  $(D)$  en un point  $O$ ; ( $s$ ) est alors la perpendiculaire menée à  $(D)$  par le point  $\Psi$ , et l'on a

$$C = rs\Psi = r\Psi s,$$

car  $s$  et  $\Psi$  permutent.

Nous pouvons alors montrer que  $r$  transforme  $C$  en  $C^{-1}$ . En effet

$$C' = rCr = r.r\Psi s.r = \Psi sr = C^{-1}.$$

Il en résulte (§ 13, *Remarque 2*) que  $\Delta$  est axe de symétrie de la figure invariante de  $C$ , c'est-à-dire :

**THÉORÈME XIX.** — *La figure invariante de toute sphérique inverse  $C$  admet au moins un axe de symétrie, savoir la perpendiculaire commune ( $\Delta$ ) à l'axe du déplacement et à la droite joignant les deux foyers.*

[La démonstration et l'énoncé doivent être modifiés si  $\Phi$  est sur l'axe (D); dans ce cas la figure invariante admet (D) comme axe de révolution, le plan médiateur de  $\Phi\Psi$  comme plan de symétrie, et par suite une infinité d'axes de symétries ( $\Delta$ ) : les perpendiculaires à  $\Phi\Psi$  en son milieu].

Nous allons voir que la figure invariante d'une  $C$ , comme celle d'une  $\mathcal{C}$  (§ 13 bis) admet aussi une inversion, qui est ici toujours à puissance positive.

§ 59. — *Recherche des sphères doubles de  $C$ .* — Si  $C$  conserve la sphère ( $\Sigma$ ), l'inversion  $\Phi$  change ( $\Sigma$ ) en une sphère égale ( $\Sigma_1$ ) puisque ( $\Sigma$ ) = ( $\Sigma_1$ ) $\mathcal{D}$ .

Donc ( $\Sigma$ ) est orthogonale ou diamétrale à la sphère ( $\Phi$ ).

Dans le premier cas, ( $\Sigma$ ) est conservée par  $\Phi$ , et doit l'être aussi par  $\mathcal{D}$ ; mais  $\mathcal{D}$  n'admet de sphères doubles que dans les cas particuliers suivants :

a)  $\mathcal{D} = \mathcal{R}$  ( $2l = 0$ ). Toutes les sphères ayant leurs centres sur (D) sont conservées dans  $\mathcal{D}$ .  $C$  présente donc un faisceau linéaire de sphères doubles centrées sur (D) orthogonales à ( $\Phi$ );

b)  $\mathcal{D} = r$  ( $2l = 0, 2\mu = \pi$ ). C'est un cas particulier du précédent. Le renversement  $r$  autour de (D) conserve, outre les sphères précédentes, les plans passant par (D).  $C$  conserve donc le plan passant par  $\Phi$  et (D); si, plus particulièrement,  $\Phi$  est sur (D), tous les plans passant par (D) sont conservés dans  $C$ ;

c)  $\mathcal{D} = \mathcal{L}$  (c'est-à-dire  $2\mu = 0$ ). Tous les plans parallèles au vecteur  $\vec{\mathcal{L}}$  sont conservés dans le déplacement;  $C$  conserve tous les plans passant par  $\Phi\Psi$ . Ce cas n'est pas intrinsèquement distinct du cas (a) ci-dessus;

d)  $\mathcal{D} = r\mathcal{L}$  (c'est-à-dire  $2\mu = \pi$ ). Le déplacement conserve tous les plans passant par (D); par suite  $C$  conserve le plan passant par  $\Phi$  et (D), et tous les plans passant par (D) si  $\Phi$  est sur (D);

e) Si  $\mathcal{D} = 1$  (c'est-à-dire  $2l = 0$  et  $2\mu = 0$ ),  $C = \Phi$ , et l'on sait que toutes les sphères orthogonales à ( $\Phi$ ) sont doubles.

Envisageons maintenant les sphères diamétrales à ( $\Phi$ ). Une telle sphère ( $\Sigma$ ) est transformée par  $\Phi$  en une sphère ( $\Sigma_1$ ) symétrique de ( $\Sigma$ ) par rapport au point  $\Phi$ ;  $\mathcal{D}$  doit ramener  $\Sigma_1$  sur  $\Sigma$ ; donc  $\Phi$ , milieu de  $\Sigma, \Sigma_1$  est le pied de la perpendicu-



laire commune  $f\Phi$  à (D) et à  $\Sigma, \Sigma$ ; la projection de  $\Sigma, \Phi$  sur (D) a pour longueur  $l$ , et sur le plan (II) perpendiculaire à (D) la figure se projette suivant un triangle isocèle  $O\sigma_1\sigma_2$  de hauteur  $O\varphi$ , d'angle au sommet  $2\mu$  (fig. 18).

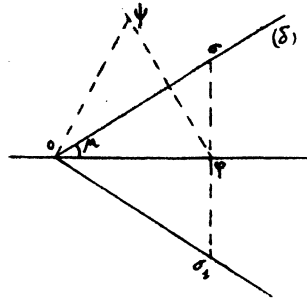


FIG. 18.

On a  $(\vec{O\varphi}, \vec{O\sigma}) = \mu$  ce qui détermine le point  $\sigma$ , et par suite  $\Sigma$  sur la droite ( $\Delta$ ). On vérifie que la sphère de centre  $\Sigma$  passant par les points A et B où ( $\Phi$ ) coupe  $f\Phi$  est conservée dans C.

Cette construction s'applique dans tous les cas, excepté celui où  $\mu = \frac{\pi}{2}$ . Dans celui-là, on retrouve par passage à la limite le plan double déjà rencontré [cas (d) ci-dessus]. Finalement on peut énoncer le théorème suivant :

**THÉORÈME XX.** — *Toute transformation C admet une sphère double ( $\Sigma$ ), et elle est en général unique.*

Ce résultat est tout à fait différent de celui que nous avons obtenu pour les sphériques directes  $\mathcal{C}$  (§ 14 et 15).

On pourrait établir, dès à présent, une classification intrinsèque des C d'après leurs sphères doubles; nous la retrouverons plus loin d'une autre manière.

On voit que toute C est conservée par une certaine inversion (à puissance positive)  $\Sigma$ , qui conservera donc la figure invariante de C, comme on l'a annoncé ci-dessus. Celle-ci admet donc les mêmes éléments de symétrie que la figure invariante d'une  $\mathcal{C}$ .

## B) Similitude image et invariants de C.

§ 60. — Du théorème XX on déduit le suivant :

**THÉORÈME XXI.** — *Toute C admet deux points doubles réels (au moins).*

En effet, sur la sphère double ( $\Sigma$ ), dont nous venons de démontrer l'existence, C détermine une transformation circulaire *directe*.

Pour le voir, remarquons que deux figures tracées sur ( $\Sigma$ ), homologues dans l'inversion  $\Phi$ , ont leurs angles égaux *et de même sens* car ( $\Sigma$ ) coupe ( $\Phi$ ) suivant un grand cercle de cette dernière sphère. Dans le cas  $2\mu = \pi$ , ( $\Sigma$ ) se réduit à un plan passant par  $\Phi$ ; les deux figures planes homologues dans  $\Phi$ , tracées dans ce plan, ont leurs angles égaux *et de sens contraires*. Mais le déplacement  $\mathcal{D}$  détermine dans ce plan double un retournement, changeant le sens des angles, ce qui donne bien en tout une transformation circulaire directe sur ( $\Sigma$ ).

Il en résulte (Plan § 5) qu'il existe sur ( $\Sigma$ ) deux points réels  $\omega$  et  $\omega$  conservés dans la transformation circulaire ci-dessus, et par suite dans C.

Exceptionnellement, ces deux points pourront être confondus, ou il y en aura une infinité double (si la transformation circulaire se réduit à la transformation identique). Nous verrons que ces cas particuliers possibles se présentent effectivement.

*Corollaire.* — Toute  $C$  peut être transformée, par une sphérique convenable, en une similitude inverse de l'espace.

Il suffit de prendre une sphérique  $J$  ayant pour foyer-objet l'un des points doubles de  $C$ , par exemple  $\omega$ . On voit en plus que si l'on remplace  $J$  par une autre sphérique  $K$  de même foyer-objet  $\omega$ , la transformée  $S$  est remplacée par une autre similitude qui lui est semblable, c'est-à-dire a même angle et même rapport.

Cette propriété fondamentale des  $C$ , conséquence directe du théorème XX établit une différence profonde entre les  $C$  et les  $\mathcal{C}$ . Nous n'aurons dans les  $C$  rien d'analogue aux  $\mathcal{C}_1$  ni en particulier aux transformations paratactiques; l'étude des  $C$  ressemble à celle des  $\mathcal{C}$ , et  $\mathcal{C}_2$ .

**THÉORÈME XXII.** — Si on transforme  $C$  en  $C'$  par une sphérique quelconque  $H$ , la similitude  $S'$  correspondant à  $C'$  est semblable à  $S$ , c'est-à-dire a même angle  $\alpha$  et même rapport  $k$ .

Même démonstration que pour le théorème VI (§ 24).  $\alpha$  et  $k$  sont les invariants de  $C$  dans le groupe sphérique; la similitude  $S$ , définie à une similitude près, est dite l'image de  $C$ .

§ 61. — *Figure invariante de  $C$ .* — Dans  $S$  on a un point double  $\omega_i$ , un plan double  $(\sigma)$  passant par  $\omega_i$ , une droite double  $(\gamma)$  perpendiculaire à  $(\sigma)$  en  $\omega_i$ . On en déduit que  $C$  admet un cercle double  $(\Gamma)$  orthogonal en  $\omega$  et  $\omega'$  à sa sphère double  $(\Sigma)$ , ce qui était évident directement, mais aussi que c'est en général le seul cercle double de  $C$ . On voit aussi que  $\omega$  et  $\omega'$ , que nous connaissions déjà, sont en général les seuls points doubles de  $C$ .

En outre  $S$  conserve les cônes de révolution de sommet  $\omega_i$ , d'axe  $(\gamma)$ ; donc  $C$  conserve les cyclides de Dupin, de points singuliers  $\omega$  et  $\omega'$ , engendrées par les cercles faisant en ces deux points un angle constant  $\psi$  avec  $(\Gamma)$ .

On voit que  $C$  a la même figure invariante qu'une  $\mathcal{C}_1$  (cf. § 25) qui aurait même sphère double et mêmes points doubles. Cette figure doit présenter la symétrie prévue par le théorème XIX; le centre  $\Sigma$  de la sphère double est sur  $(\Delta)$  (construction du § 59 ci-dessus) et le segment  $\omega\omega'$  est perpendiculaire à  $(\Delta)$  en son milieu  $\nu$ . Les notations que nous avons adoptées sont les mêmes pour les  $C$  et pour les  $\mathcal{C}_1$  en ce qui concerne  $\omega$ ,  $\nu$ ,  $\omega'$ ,  $\Phi$ ,  $\chi$ ,  $\Psi$ ,  $(\Delta)$  et  $(\Sigma)$ .

On peut construire effectivement, par la règle et le compas, la figure invariante de  $C$  à partir des éléments définissant  $\Phi$  et  $\mathcal{D}$ .

§ 62. — *Équations intrinsèques.* — Dans l'espace-image où opère S, prenons les coordonnées  $r, \varphi, \theta$  du § 6; et pour C les coordonnées correspondantes  $\tau, \psi, \Theta$  définies au § 25 pour les  $\mathcal{C}_1$ . Les équations de S étant

$$r' = kr, \quad \varphi' = \pi - \varphi, \quad \theta' = \theta + \alpha,$$

comme on a

$$\tau = \frac{r}{r_0}, \quad \psi = \varphi, \quad \Theta = \theta - \theta_0 \quad (\text{cf. § 25}),$$

les équations de C seront

$$\tau' = k\tau, \quad \psi' = \pi - \psi, \quad \Theta' = \Theta + \alpha.$$

On pourra étudier les propriétés de C à l'aide de ces équations, ou directement sur l'image S qui a servi à les obtenir.

§ 63. — *Interprétation géométrique des invariants.* — On appliquera comme toujours les équations précédentes au couple  $(\Phi, \infty)$ , ce qui donne, comme pour les  $\mathcal{C}_1$

$$\tau_\infty = k\tau_\Phi, \quad \psi_\infty = \pi - \psi_\Phi, \quad \Theta_\infty = \Theta_\Phi + \alpha.$$

La première, où  $\tau_\infty = 1$ , montre que  $k = \frac{\Phi \omega}{\Phi_\omega}$ .

La deuxième montre que  $\Phi$  est sur la cyclide de Dupin passant par  $\omega$  et  $\omega$  à deux génératrices rectilignes :  $\omega \bar{\omega}$  et l'axe du cercle  $(\Gamma)$ .

La troisième montre que  $\alpha$  est l'angle du plan de  $(\Gamma)$  avec la calotte sphérique passant par  $(\Gamma)$  et  $\Phi$ .

Ici, comme pour les  $\mathcal{C}_1$ , la forme du tétraèdre  $\omega \bar{\omega} \Phi \Psi$  n'est pas invariante, mais il suffit toutefois de connaître la figure invariante de C et les valeurs de  $k$  et  $\alpha$  pour pouvoir construire  $\Phi$  et  $\Psi$ , et par suite les éléments définissant l'inversion  $\Phi$  et le déplacement  $\mathcal{D}$ .

On peut envisager pour chaque C une forme « semi-réduite »  $\mathcal{C}_1$  obtenue en transformant C au moyen d'une sphérique ayant son foyer-objet sur la sphère double  $\Sigma$ .  $\mathcal{C}_1$  est du type  $\Phi.r\mathcal{L}$  rencontré au § 59 (d). Elle possède un plan double  $\Sigma$ , dans lequel elle induit une transformation circulaire plane directe, d'invariants  $k$  et  $\alpha$ ; le parallélogramme de base de  $\mathcal{C}_1$  garde une forme invariante quand C est transformée dans le groupe sphérique.

Si on transforme au contraire C en  $\mathcal{C}_2$  au moyen d'une sphérique ayant son foyer-objet sur le cercle double  $(\Gamma)$ , on voit que  $\mathcal{C}_2$  admet une droite double  $(\Gamma_2)$ ; elle est par suite de la forme  $\Phi_2 \mathcal{D}_2$ , le point  $\Phi_2$  étant sur l'axe  $(D_2)$  du déplacement  $\mathcal{D}_2$ . L'angle de rotation de celui-ci est égal à  $\alpha$ , et le tétraèdre de base a ses quatre sommets sur  $(D_2)$ .

Ici encore, il est évidemment plus avantageux, pour étudier C, de la transformer tout de suite en une similitude.

## C) Étude sommaire des différents types de transformations C.

§ 64. — Il nous suffira de transposer les propriétés des différents types de similitudes inverses étudiés aux § 4 et 5. Le cas général C. ( $k \neq 1$  et  $\alpha \neq 0$ ) a été étudié dans ce qui précède; il est caractérisé par l'existence de deux points doubles, une sphère double, et un cercle double.

Les cas particuliers à considérer sont les suivants :

1°  $\alpha = 0$ . S est alors du type  $\mathcal{H}\Pi = Hr$ . Nous écrirons  $C = (\mathcal{H}\Pi)$ . Outre les éléments doubles du cas général, S admet tous les plans passant par  $(\gamma)$  comme plans doubles, et toutes les droites de  $(\Pi)$  passant par  $\omega_i$  comme droites doubles. Donc C admet un faisceau linéaire de sphères doubles [celles passant par le cercle double  $(\Gamma)$ ] et un faisceau linéaire de cercles doubles [traces des sphères précédentes sur  $(\Sigma)$ , c'est-à-dire les cercles de  $(\Sigma)$  passant par  $\omega$  et  $\omega'$ ]. Les équations intrinsèques de C sont

$$\tau' = k\tau, \quad \psi' = \pi - \psi, \quad \Theta' = \Theta.$$

Sur les sphères doubles du faisceau linéaire, les calottes limitées à  $(\Gamma)$  sont elles-mêmes conservées.

2°  $\alpha = \pi$ . S est du type *homothétie inverse* H. On écrira  $C = (H)$ . Comme H conserve tous les plans et toutes les droites passant par  $\omega_i$ , C conserve toutes les sphères et tous les cercles passant par  $\omega$  et  $\omega'$ . Mais ici, sur l'une de ces sphères doubles, les deux calottes limitées par un cercle double sont échangées par la transformation. Les équations intrinsèques sont de la forme

$$\tau' = k\tau, \quad \psi' = \pi - \psi, \quad \Theta' = \Theta + \pi.$$

3°  $k = 1$ . S se réduit à un *retournement* D. On distinguera les types suivants (cf. § 4) :

a) *Retournement-rotation* R, d'équations

$$r' = r, \quad \varphi' = \pi - \varphi, \quad \theta' = \theta + \alpha.$$

R conserve les sphères de centre  $\omega_i$  et les cercles de centre  $\omega_i$  situés dans le plan  $(\Pi)$ . Donc C conserve les sphères du faisceau linéaire ayant  $\omega$  et  $\omega'$  pour points-limite et les cercles traces de ces sphères sur la sphère double  $(\Sigma)$ . Les équations intrinsèques de C seront

$$\tau' = \tau, \quad \psi' = \pi - \psi, \quad \Theta' = \Theta + \alpha.$$

Un cas particulier intéressant est celui où  $\alpha = \pi$ . Dans ce cas R est une symétrie par rapport à un point; C conservera à la fois les sphères passant par  $\omega$  et  $\omega'$ ,

et les sphères du faisceau conjugué de ce réseau; de même les cercles passant par  $\omega$  et  $\omega'$  et les cercles intersections d'une sphère du faisceau avec une sphère du réseau précédent.

b) *Retournement-translation*.  $S = L$ . On écrira  $C = (L)$ . Comme  $L$  conserve les plans perpendiculaires à  $(\Pi)$  parallèles à  $\vec{L}$  et les droites traces de ces plans sur le plan  $(\Pi)$ , on voit que  $C$  admettra une sphère double  $(\Sigma)$ , un point double  $O$  situé sur cette sphère, et en outre elle conservera les sphères tangentes en  $O$  à un plan diamétral de  $(\Sigma)$ , ainsi que les cercles traces des sphères précédentes sur  $(\Sigma)$ .

On voit qu'ici les deux points doubles prévus par le théorème XXI sont confondus avec  $O$ .

4°  $S = \Pi$ ,  $C = \Phi$ . C'est un cas particulier commun à tous les précédents. On retrouve l'inversion elle-même, admettant tous les points de la sphère  $(\Phi)$  comme points doubles, les sphères orthogonales à  $(\Phi)$  et la sphère  $(\Phi)$  elle-même comme sphères doubles, les cercles orthogonaux à  $(\Phi)$  et les cercles tracés sur  $(\Phi)$  comme cercles doubles.

Dans tous les cas particuliers que nous venons d'examiner, la sphérique  $C$  admet au moins un faisceau linéaire de sphères doubles; à un autre point de vue, chaque transformation est caractérisée dans sa famille par un seul invariant, ou même aucun, c'est-à-dire qu'elle constitue alors un seul type intrinsèque (cas de  $S = L$  et  $S = \Pi$ ).

§ 65. — En partant de la classification précédente, on pourrait, pour chaque type de  $C$ , construire l'inversion  $\Phi$  et le déplacement  $\mathcal{D}$  composants.

Nous allons suivre l'ordre inverse, c'est-à-dire retrouver les types précédents en partant de  $C = \Phi\mathcal{D}$ , et en étudiant les différents cas qui peuvent se présenter :

1°  $\mathcal{D} = \mathcal{R}$ . Le plan  $(\Pi)$  mené par  $\Phi$  perpendiculairement à l'axe  $(D)$  du déplacement est conservé par  $C$ ; il est plan de symétrie de toute la figure;  $C$  y détermine une transformation circulaire *inverse*, ce qui nous amène à distinguer les cas suivants (cf. Plan § 11) :

a) *L'axe  $(D)$  ne coupe pas la sphère  $(\Phi)$* . — La circulaire induite est du type  $C_h$  (Plan, fig. 12).  $O$  étant le point où  $(D)$  perce le plan  $(\Pi)$ ,  $(\Gamma)$  le cercle de centre  $O$  orthogonal au grand cercle de  $(\Phi)$ , toutes les sphères passant par  $(\Gamma)$  sont conservées dans la sphérique  $(C)$ ; celle-ci conserve également la sphère  $(\Sigma)$  diamétrale à  $\Phi$  ayant pour centre le point  $\Omega$  diamétralement opposé à  $O$  sur le cercle passant par  $O\Phi\Psi$ . [ $\Omega$  est sur  $(\Delta)$ ]. Le cercle  $(\Gamma)$  perce  $(\Sigma)$  en  $\omega$  et  $\omega'$ , points doubles de la sphérique. Les cercles passant par  $\omega$  et  $\omega'$  situés sur  $(\Sigma)$  sont doubles.

On reconnaît les propriétés caractéristiques du type  $(\mathcal{M}\Pi)$  du § 64 (1°) ci-dessus (qu'on retrouve en transformant  $C$  par une sphérique ayant  $\omega'$  pour foyer-objet).

*b) L'axe (D) est tangent à la sphère (Φ).* — La circulaire induite dans le plan (II) est du type  $C_1$  (Plan, *fig. 16*); elle admet un point double O et un cercle double (Ω) passant par O diamétral à (Φ). La sphérique admet la sphère double (Σ) ayant (Ω) pour grand cercle, et un faisceau linéaire de sphères doubles : les sphères tangentes au plan (II) en O. Les cercles découpés par ces sphères sur (Σ) sont doubles.

C est donc du type (L) décrit *a priori* au § 64 (3°, *b*) comme on peut s'en assurer encore par une transformation sphérique quelconque ayant son foyer-objet en O.

*c) L'axe (D) perce la sphère (Φ) en deux points ω et ω̄.* — Ces deux points sont les points doubles de la sphérique C; elle induit dans (II) une  $C_2$  admettant le cercle double (Ω). La sphérique admet comme sphères doubles la sphère (Σ) de centre Ω diamétrale à (Φ) et le faisceau linéaire des sphères ayant ω et ω̄ comme points-limites. Celles-ci découpent sur (Σ) un faisceau de cercles ayant ω et ω̄ comme points-limites, qui sont conservés dans C.

On a donc affaire au type (R) du § 64 (3°, *a*).

Si l'axe (D) passe par Φ, la sphère (Σ) se confond avec la sphère (Φ), et l'angle  $\alpha$  invariant de C est égal à l'angle  $2\mu$  de la rotation  $\mathcal{R}$ ; mais ce cas n'a pas de caractère intrinsèque. Si l'on a en outre  $2\mu = \pi$ , c'est-à-dire  $\mathcal{R} = r$ , les plans passant par (D) sont doubles, ainsi que toutes les sphères passant par ω et ω̄; de même tous les cercles passant par ces deux points, et la droite (D) en particulier. C est du type (H) avec  $k = 1$ , c'est-à-dire qu'elle a pour image la symétrie autour d'un point rencontrée plus haut; elle est réciproque; nous la désignerons par (H<sub>1</sub>).

2°  $\mathcal{D} = \mathcal{L}$ . Soit (D) la droite menée par Φ parallèlement à  $\vec{\mathcal{L}}$ ; les plans passant par (D) sont conservés par C; celle-ci induit dans chacun d'eux une sphérique du type  $C_h$ ; il y a deux points doubles ω et ω̄ sur (D). Ce cas n'est pas distinct au point de vue intrinsèque du cas (1°, *a*), C est du type ( $\mathcal{H}\Pi$ ).

3°  $\mathcal{D} = 1$ . On a alors  $C = \Phi$ ; on retrouve l'inversion.

4°  $\mathcal{D} = r\mathcal{L}$ . Le plan défini par Φ et l'axe (D) du déplacement est double; ce cas n'est pas intrinsèquement distinct du cas général; C a pour image une similitude inverse quelconque. Mais si Φ se trouve sur l'axe (D) du déplacement, C présente deux points doubles ω et ω̄ situés sur cet axe; tous les cercles et toutes les sphères passant par ces deux points sont conservés dans C; celle-ci est donc du type (H) avec invariant  $k$  quelconque. [On obtient ces résultats en considérant la transformation circulaire *directe* déterminée par C dans son plan double].

Si l'amplitude  $2l$  de la translation tend vers zéro, on retrouve bien la transformation (H<sub>1</sub>) rencontrée ci-dessus.

§ 66. — Nous venons de voir comment on détermine la similitude image d'une  $C$  donnée sous la forme  $\Phi \mathcal{D}$ , c'est-à-dire le type intrinsèque auquel elle appartient; et nous savons également, étant donné un tel type, sous quelle forme  $\Phi \mathcal{D}$  la transformation se présentera. Pour achever l'étude des sphériques inverses, nous allons chercher celles qui sont involutives; le problème est très simple, et tout à fait analogue à la recherche des transformations circulaires inverses jouissant de cette propriété. (Cf. Plan § 11, *in fine*.)<sup>(1)</sup>

$C$  ne peut être involutive d'ordre  $n$  que si  $n$  est pair, soit  $n = 2p$ . On doit avoir en outre

$$k = 1 \quad \text{et} \quad 2p\alpha = 2m\pi \quad \text{ou} \quad \alpha = m \frac{\pi}{p},$$

$m$  étant un entier quelconque pris entre 0 et  $2p$ . Pour chaque valeur de  $p$  on a  $2p$  transformations involutives d'ordre  $p$ , ayant pour images les retournements-rotations d'angles

$$0, \frac{\pi}{p}, 2 \frac{\pi}{p}, \dots, (2p-1) \frac{\pi}{p}. \quad (\text{Cf. § 4, Remarque.})$$

En réalité on peut en considérer seulement la moitié, chacun des  $p$  autres se déduisant d'un des premiers par adjonction d'une transposition, ou, autrement, par changement du sens d'orientation de l'axe de retournement, c'est-à-dire par une symétrie.

Pour  $p = 1$  on trouve  $\alpha = 0$  ce qui donne l'inversion  $\Phi$ , et  $\alpha = \pi$  c'est-à-dire la transformation  $H_1$  ayant pour image la symétrie par rapport à un point. Ce sont donc les seules transformations  $C$  qui soient réciproques.

Pour  $p = 2$  on trouverait  $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ , c'est-à-dire outre les deux transformations précédentes, deux « antiinvolutions quaternaires », en réalité non distinctes.

Etc... pour chaque valeur de  $p$ , on retrouve les deux  $C$  réciproques, et  $2p - 2$  « antiinvolutions d'ordre  $2p$  » qui se répartissent en deux familles en réalité non distinctes; on a ainsi  $p + 1$  transformations distinctes involutives d'ordre  $p$ . C'est seulement pour  $p = 1$  qu'elles sont toutes distinctes (car  $2p = p + 1$  donne  $p = 1$ ); ce sont  $\Phi$  et  $H_1$ . Celle-ci pourrait être appelée « antiinvolution » (sans indication d'ordre). On a donc en tout quatre transformations sphériques réciproques : deux directes (transposition et inversion négative) et deux inverses (inversion ordinaire et antiinvolution). (Cf. ci-après § 69, Remarque.)

<sup>(1)</sup> Le texte paru dans les nos 3-4 de *L'Enseignement Mathématique*, 1937, p. 169, lignes 23 à 30, était inexact; la rectification a paru dans la même publication, nos 5-6.

Le texte rétabli est équivalent au texte actuel.

## CHAPITRE IV

### Application aux diverses décompositions des transformations sphériques.

§ 67. — Nous rassemblons ici un certain nombre de résultats découlant immédiatement de ce qui précède, relatifs à la décomposition des transformations sphériques en produits d'inversions ou en produits de deux transformations « simples », ainsi qu'à la correspondance entre certains types de transformations directes et inverses; nous ne cherchons pas à être complets, afin d'éviter une énumération fastidieuse de propriétés évidentes, qui seraient beaucoup plus nombreuses que celles du même genre concernant les transformations circulaires. (Cf. Plan § 12 et seq.)

#### A) Sous-groupes divers du groupe sphérique.

§ 68. — Nous avons rencontré, au cours du chapitre II, divers sous-groupes très simples que l'on pouvait former avec des transformations sphériques *directes* : rappelons-en quelques-uns.

Les sphériques directes admettant une même figure invariante forment un groupe : s'il s'agit de  $\mathcal{C}_1$ , ce groupe a pour image celui que constituent les similitudes directes ayant un centre et un axe donnés; s'il s'agit de  $\mathcal{C}_2$ , c'est un groupe de déplacements ayant un même axe hélicoïdal; s'il s'agit de  $\mathcal{C}_3$ , c'est un groupe de transformations  $\mathcal{C}$ . On peut considérer aussi le groupe des  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  ayant un point double donné : il a pour image le groupe des similitudes directes et des déplacements de l'espace. Montrons que l'on peut étendre tous ces sous-groupes du groupe sphérique direct, en leur adjoignant des transformations inverses  $C$ , ce qui permettra d'en déduire des sous-groupes du groupe sphérique total  $\Gamma$ , formés de transformations  $\mathcal{C}$  et  $C$ .

Remarquons en effet d'abord que le produit d'une  $\mathcal{C}$  par une  $C$  est une  $C$ , celui d'une  $C$  par une autre  $C$  est une  $\mathcal{C}$ ; en particulier le « carré » d'une  $C$  est une  $\mathcal{C}$  d'un type bien déterminé, se déduisant de celui de la  $C$  considérée (cf. tableau final du § 71). C'est ainsi que le carré d'une  $C$  générale d'invariants  $k$  et  $\alpha$  est une  $\mathcal{C}$  générale d'invariants  $k^2$  et  $2\alpha$ . Le carré d'une transformation  $(Hr)$  sera une



homothétie anallagmatique ( $\mathcal{H}$ ) de rapport invariant  $k' = k^*$ , etc... Une inversion ou une transformation réciproque ( $H_1$ ) donne comme carré la transformation identique. On remarque que l'on n'obtient ainsi ni les  $\mathcal{C}_2$  ni les  $\mathcal{C}_3$ ; cela résulte d'ailleurs directement de ce que nous avons dit des « racines carrées » d'une  $\mathcal{G}$  (cf. § 7) qui s'applique évidemment aux sphériques  $\mathcal{C}_1$ .

En ce qui concerne les groupes, on peut les constituer très facilement : groupe des  $\mathcal{C}_1$  et  $C$  ayant une même figure invariante (constituée par une sphère et un cercle orthogonal); groupe des  $\mathcal{C}_1$  et  $C$  ayant un même point double (ayant pour image le groupe des similitudes, déplacements et retournements de l'espace); etc...

### B) Étude du produit de $n$ inversions dans l'espace.

§ 69. — Si  $n$  est pair, ce produit est une transformation directe  $\mathcal{C}$ ; si  $n$  est impair, c'est une transformation inverse  $C$ .

Cas de  $n = 1$ . — On retrouve l'inversion ordinaire, c'est-à-dire à puissance positive, qui est la plus simple des transformations  $C$ .

Cas de  $n = 2$ . — Si les deux sphères d'inversion se coupent suivant un cercle réel, on a une « rotation » ( $\mathcal{R}$ ). (Cf. § 17 et seq.)

Si les deux sphères sont tangentes, on a une « translation » (§ 21). Si elles ne se coupent pas, on a une « homothétie » (§ 22).

On vérifie ces résultats en prenant l'image du produit des inversions données  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  au moyen d'une sphérique convenable, ou en considérant la figure invariante de  $\mathcal{C} = \Phi_1 \Phi_2$ , qui présentera suivant les cas, les propriétés respectives *caractéristiques* des types ( $\mathcal{R}$ ), ( $\mathcal{L}$ ) ou ( $\mathcal{H}$ ). Les raisonnements sont identiques à ceux que nous avons faits pour les transformations circulaires (Plan § 14); il est inutile de les répéter.

On voit donc que le produit de deux inversions est une sphérique directe « simple », au sens de ce mot défini au § 16. Inversement on pourrait donc appeler sphériques directes simples celles qui sont le produit de deux inversions. On remarque qu'une  $\mathcal{C}$  simple dépend de sept paramètres, alors que les deux inversions correspondent à huit paramètres; cela correspond au fait que chaque sphérique simple peut être décomposée en un produit de deux inversions d'une infinité de manières. (Cf. Plan § 14.)

Cas de  $n = 3$ . — On obtient, suivant la disposition des sphères d'inversion, les sphériques inverses des types ( $\mathcal{H}\Pi$ ), ( $\mathcal{R}$ ), ( $\mathcal{L}$ ) auxquels nous donnerons le nom de transformations  $C$  *simples*. Ces transformations  $C$  ont pour caractère commun de

conserver un faisceau linéaire de sphères. Mais on remarque que les transformations du type (H) qui conservent aussi un faisceau linéaire de sphères, et même une infinité constituant un réseau linéaire, ne rentrent pas dans cette catégorie. Seule la transformation réciproque (H<sub>1</sub>) en fait partie; elle appartient en effet à la catégorie (R).

Cas de  $n = 4$ . — On obtient une  $\mathcal{C}$ , et c'est la plus générale, d'après le théorème suivant :

**THÉORÈME XXIII.** — *Toute  $\mathcal{C}$  peut être considérée comme le produit de quatre inversions successives par rapport à quatre sphères  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ , dont les deux dernières sont orthogonales aux deux premières.*

En effet ce théorème est vérifié par les images  $\mathcal{S}$  des  $\mathcal{C}_1, \mathcal{D}$  des  $\mathcal{C}_2$ , et par les  $\mathcal{C}_3$  (cf. § 38, théorème VIII). Pour les permutations des inversions, cf. Plan, théorème XXIII.

Cas de  $n = 5$ . On obtient la transformation inverse la plus générale, d'après le théorème suivant :

**THÉORÈME XXIV.** — *Toute  $\mathcal{C}$  peut être considérée comme le produit de cinq inversions successives par rapport à cinq sphères  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5$ , telles que  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  soient orthogonales à  $\Phi_3, \Phi_4, \Phi_5$ , et  $\Phi_3$  et  $\Phi_4$  orthogonales à  $\Phi_5$ .*

En effet cet énoncé est exact pour l'image  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{C}$ . On voit en même temps que la décomposition dépend de deux paramètres arbitraires : car  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  peuvent être remplacées par deux autres sphères du même faisceau dont une est arbitraire; de même pour  $\Phi_3$  et  $\Phi_4$ . Au total on retrouve bien ainsi les vingt paramètres dont dépendent les cinq sphères : dix pour déterminer  $\mathcal{C}$ , huit pour les conditions d'orthogonalité, deux pour l'indétermination précitée. (Des remarques analogues peuvent être faites pour  $n = 4$ ).

*Remarque sur les transformations sphériques réciproques.* — Nous avons vu plus haut (§ 66, *in fine*) qu'il y en avait quatre types : deux directs [transposition ( $r$ ) et inversion négative  $\mathcal{J}$ ] et deux inverses [inversion  $\Phi$  et antiinvolution ( $H_1$ )]. On remarque que si on met à part l'inversion simple  $\Phi$ , les autres types se décomposent en produit de  $n$  inversions par rapport à des sphères deux à deux orthogonales, comme on pourrait le voir directement en faisant le carré de la transformation envisagée. ( $r$ ) correspond à deux sphères orthogonales, ( $H_1$ ) à trois sphères deux à deux orthogonales, et  $\mathcal{J}$  à quatre. Il n'y a pas de transformation  $\mathcal{C}$  réciproque correspondant à  $n = 5$ , parce qu'il n'y a pas de sphère réelle orthogonale à quatre sphères données réelles deux à deux orthogonales.

## C) Décomposition en un produit de deux transformations simples.

§ 70. — De ce qui précède il résulte directement qu'une transformation sphérique, si elle n'est pas « simple », est décomposable en un produit de deux sphériques simples. Cette conclusion résulte en effet des théorèmes XXIII et XXIV, ainsi que de la définition des transformations simples, soit directes, soit inverses. Les deux composantes simples sont d'ailleurs permutable, chacune d'elles conservant la figure invariante de l'autre. On peut dire aussi qu'elles sont « conjuguées ». Cela résulte des propriétés d'orthogonalité des sphères d'inversion du paragraphe précédent.

C'est ainsi qu'une  $\mathcal{C}_1$  est le produit d'une « rotation » par une « homothétie » dont les pôles sont situés sur le cercle axe de la « rotation » ; une  $\mathcal{C}_2$  est le produit de deux « rotations » autour de deux cercles conjugués (théorème VIII, § 38), etc... On pourrait ainsi obtenir directement (c'est-à-dire sans utiliser la décomposition en inversions du § 69) la décomposition de chaque type en transformations simples. Nous avons ainsi obtenu comme conclusion, avec tous les détails convenables, le résultat appelé souvent *théorème de Goursat-Bloch*<sup>(1)</sup> :

*Toute transformation sphérique qui n'est pas elle-même une transformation « simple » peut être considérée comme le produit de deux transformations simples permutable entre elles*<sup>(2)</sup>.

## D) Résumé.

§ 71. — Nous avons étudié, au cours de ce travail, les différents types de transformations sphériques directes et inverses; nous résumons dans le tableau ci-après les grandes lignes de cette classification.

<sup>(1)</sup> Goursat, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 1889.  
Bloch, *loc. cit.*

<sup>(2)</sup> Rappelons ici pour mémoire une décomposition particulière aux  $\mathcal{C}_3$ , rencontrée au § 48 ci-dessus, en un produit de deux transformations paratactiques de mêmes axes et d'espèces opposées, donc permutable.

**Transformations sphériques réelles de l'espace.**

Invariant caractéristique de chaque type	Néant	Néant	Néant	$\alpha$	Néant	$k$	$k$	$k$	$k$	$k$ et $\alpha$	$\alpha$	$\alpha$ et $\beta$	$\alpha$ ( $\alpha = \beta$ )	Néant ( $\alpha = \beta = \pi$ )
<b>Sphérique inverse</b> C	Inversion $\Phi$	Antinvolution ( $H_1$ )	$(R_{II} \frac{1}{2})$	(R)	(L)	( $\mathcal{H} II$ )	(H)	$(\mathcal{H} R_{II} \frac{1}{2})$ et $(\mathcal{H} R_{3II} \frac{1}{2})$	C générale					
<b>Nombre d'inversions composantes</b>	I	3	3	3	3	3	5	5	5	5				
<b>Similitude image S</b>	Symétrie II	Symétrie par rapport à un point $H_1$	$R_{II} \frac{1}{2}$	Retournement R	Retournement L	$\mathcal{H} II$	H	$\mathcal{H} R_{II} \frac{1}{2}$ et $\mathcal{H} R_{3II} \frac{1}{2}$	S générale					
<b>Sphères doubles</b>	$\infty^3 + I$	$\infty^3 + \infty^1$	$\infty^1 + I$	$\infty^1 + I$	$\infty^1 + I$	$\infty^1 + I$	$\infty^2$	I	I					
<b>Cercles doubles</b>	$\infty^4 + \infty^3$	$\infty^3 + \infty^3$	$\infty^1 + I$	$\infty^1 + I$	$\infty^1$	$\infty^1 + I$	$\infty^2$	I	I					
<b>Points doubles</b>	$\infty^2$	2	2	2	I	2	2	2	2					
<b>Sphérique directe</b> $C = C^2$	Identique I	Identique I	Transposition ( $r$ ) (réciproque)	« Rotation » (R)	« Translation » (L)	« Homothétie » (H)	(H)	$C_3$ ou ( $\mathcal{H} r$ )	$C_1$ générale	$C_2$ générale	$C_3$ générale	$\mathcal{F}$ (paratactique)	Inversion négative $J$ (réciproque)	
<b>Nombre d'inversions composantes</b>	0	0	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4
<b>Similitude image <math>\mathcal{S}</math></b>	I	I	Reversement $r$	Rotation R	Translation L	Homothétie H	H	$\mathcal{H} r$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{D}$	Néant (image $\mathcal{C}$ )	Néant (identique à son image)	Identique à son image	
<b>Sphères doubles</b>	Tous ceux de l'espace	Tous ceux de l'espace	$\infty^3 + \infty^1$	$\infty^3$	$\infty^2$	$\infty^2$	Comme ci-contre	$\infty^1 + I$	I	—	Néant	Néant	Néant	Néant
<b>Cercles doubles</b>			$\infty^3 + \infty^3$	$\infty^3 + I$	$\infty^2$	$\infty^2$		$\infty^1 + I$	I	I	2	$\infty^3$	$\infty^4$	
<b>Points doubles</b>			$\infty^1$	$\infty^1$	I	2		2	2	I	Néant	Néant	Néant	Néant

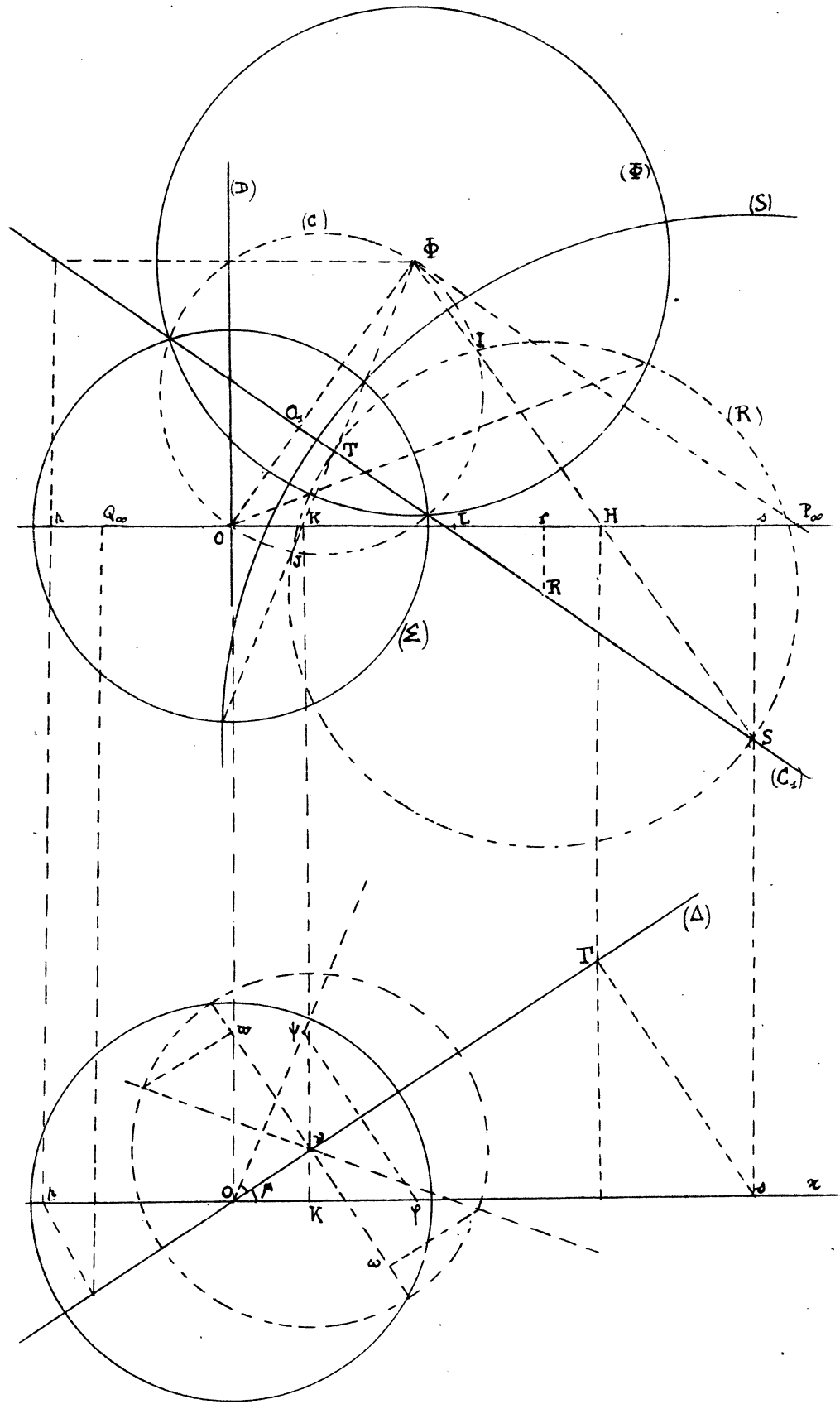


FIG. 19.

NOTE

Construction de la figure invariante des  $\mathcal{C}_1$  et des  $\mathcal{C}_2$  (fig. 19).

§ 72. — Nous savons qu'une  $\mathcal{C}_1$  admet une sphère double ( $\Sigma$ ), un cercle double ( $\Gamma$ ) orthogonal à ( $\Sigma$ ), et deux points doubles  $\omega$  et  $\bar{\omega}$  intersection de ( $\Sigma$ ) et ( $\Gamma$ ). ( $\Sigma$ ) se construit immédiatement puisque c'est la sphère orthogonale à ( $\Phi$ ) ayant pour centre le centre  $O$  du retournement composant de  $\mathcal{C}_1 = \Phi R$ . Il nous reste à construire ( $\Gamma$ ) ainsi que  $\omega$  et  $\bar{\omega}$ .

On peut le faire en appliquant la méthode établie pour les  $\mathcal{C}_3$  aux § 32 et seq. En effet les raisonnements qui ont servi à l'établir sont valables pour les  $\mathcal{C}_1$ ; le fait que le point  $O$  est intérieur ou extérieur à la sphère ( $\Phi$ ) n'intervient qu'à la fin de la discussion. La figure 19 donne, comme la figure 10 pour les  $\mathcal{C}_3$ , la construction des points  $P_\infty$ ,  $Q_\infty$ ,  $L$ ,  $R$ , d'où  $S$  et  $T$ . Mais ici un seul de ces deux derniers points, soit  $S$  est extérieur à ( $\Phi$ ); l'autre est intérieur, cela parce que la droite ( $C_1$ ) coupe ( $\Phi$ ) [puisque  $O$  est extérieur à ( $\Phi$ ) et par suite  $O_1$  intérieur]. Il en résulte que seule la sphère ( $S$ ) est réelle et donne lieu à un cercle double réel ( $\Gamma$ ). On retrouve ainsi cette propriété que  $\mathcal{C}_1$  admet un cercle double réel et un seul.

Les points  $\omega$  et  $\bar{\omega}$  s'obtiendront ensuite sans difficulté comme les points où ( $\Gamma$ ) perce ( $\Sigma$ ), c'est-à-dire les points communs aux sphères ( $\Sigma$ ) et ( $S$ ), et au plan perpendiculaire à  $S\Gamma$  en  $\Gamma$ , plan contenant ( $\Delta$ ). On retrouve bien deux points symétriques par rapport à ( $\Delta$ ).

La construction ci-dessus s'applique également aux transformations  $\mathcal{C}_2$ . Une sphérique de cette espèce admet  $O$  comme point double unique, et un cercle double ( $\Gamma$ ) passant par  $O$  que l'on construira comme pour les  $\mathcal{C}_1$  ou les  $\mathcal{C}_3$ .

Si  $\Phi$  est dans le plan ( $\Pi$ ),  $\mathcal{C}_1$  devient une  $\mathcal{C}_3$  et  $\mathcal{C}_2$  une  $\mathcal{C}_3$ . Ces deux cas particuliers ont été étudiés aux § 28 et 31 respectivement; on a vu à ce moment-là comment on pouvait construire le cercle double ( $\Gamma$ ); on aboutirait au même résultat par passage à la limite de la construction donnée ici.

Il en est de même dans le cas où  $\Phi$  est sur la droite ( $D$ ): on retrouve ( $D$ ) comme cercle double unique des  $\mathcal{C}_1$  ou des  $\mathcal{C}_2$  en appliquant la méthode donnée au § 43 pour les  $\mathcal{C}$ .