

ROGER SERVILLE

Oscillation d'un liquide dans un tube en U

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 2 (1938), p. 177-212

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1938_4_2__177_0

© Université Paul Sabatier, 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

OSCILLATION D'UN LIQUIDE DANS UN TUBE EN U

PAR ROGER SERVILLE.

Sommaire⁽¹⁾. — Après les résultats très précis obtenus pour l'écoulement d'un liquide dans un tube fin par Navier et par Poiseuille, on généralise leur loi des vitesses à l'oscillation, on en développe la théorie que l'on compare à l'expérience. Soit R le rayon du tube; la colonne liquide étant décomposée en tubes coaxiaux de rayon r , leur vitesse $x'_t(r, t) = K(R^2 - r^2)$ est une fonction parabolique de r , indépendante de t si l'écoulement est permanent. En généralisant à l'oscillation, écrivons :

$$(1) \quad x'_t(r, t) = K(R^2 - r^2) \sin \omega t,$$

relation qui suppose le synchronisme des tubes coaxiaux : ils atteignent leur maximum d'élongation au même instant, *quel que soit* r . En développant l'hypothèse (1), on cherche l'équation du mouvement, son intégrale, la période de la colonne et sa viscosité calculée : période et viscosité sont indépendantes du diamètre du tube, de l'amplitude de l'oscillation et de la viscosité de Poiseuille (définie par l'écoulement).

On compare ces résultats théoriques à ceux de l'expérience. Quand le liquide oscille dans un tube, les frottements amortissent l'amplitude; la précision relative des mesures est faible : pour l'augmenter on entretient le phénomène. Un pendule conique isochrone donne, par un système bielle manivelle, un mouvement périodique alternatif à un plongeur qui trempe dans l'une des extrémités de la colonne liquide et lui applique la force $F = N \sin \omega t$.

On cherche les erreurs systématiques introduites par le plongeur; celles-ci devenant notables par des liquides visqueux on décrit une seconde méthode d'entretien, par pression sinusoïdale : on compare ces deux méthodes et on détermine la période de la colonne liquide.

Contrairement aux résultats théoriques fournis par l'hypothèse (1), on trouve que la période (déterminée à 10^{-4} près), varie en sens inverse du diamètre et de l'am-

1. Les premiers résultats de ce travail ont été résumés par M. Bouasse : *Jets, tubes et canaux*. Delagrave, 1923, § 246 et 247.

plitude, dans le même sens que la viscosité τ_1 de Poiseuille et que la viscosité calculée varie dans le même sens que le diamètre et l'amplitude, en sens inverse de la viscosité τ_1 . En valeur absolue, la période expérimentale est plus grande que ne le veut l'hypothèse (1), la viscosité calculée quatre fois supérieure à la viscosité τ_1 .

On explique ces résultats par l'insuffisance de l'hypothèse (1) : les cylindres coaxiaux ne sont pas synchrones ; près de la paroi, ils sont en avance de phase. On vérifie ce décalage en colorant une section droite.

I. — Recherche d'une méthode d'entretien.

1. Travaux antérieurs. — Remplissons d'eau un tube de verre en forme d'U, créons une pression à l'un des bouts et laissons osciller la colonne liquide. Pour déterminer sa période avec précision, comptons plusieurs oscillations. Les frottements amortissent l'amplitude et l'instant du passage de la colonne par sa position d'équilibre est d'autant plus difficile à déterminer que l'amplitude est plus petite : la précision relative reste faible, ce que vérifie l'étude des travaux antérieurs, avec phénomène non entretenu.

Stéphan⁽¹⁾ observe l'oscillation du mercure dans deux tubes de $d = 0,96$ cm. plongeant dans la même cuve fermée. Une des colonnes porte un flotteur, armé d'un style qui inscrit le mouvement sur un cylindre enfumé : il mesure ainsi la période et l'amortissement. Stéphan calcule le frottement à la paroi en admettant que la colonne se déplace en bloc, hypothèse plus tard reconnue fautive, Warburg ayant montré dans le cas de l'écoulement que le mercure, quoique ne mouillant pas le verre, ne glisse pas sur la paroi. Pour des expériences successives les nombres présentent des écarts supérieurs à 10 %.

Nau⁽²⁾ étudie les oscillations de l'eau dans un tube en U. Il mesure le temps avec un chronographe, en rompant à la main un contact électrique : l'erreur absolue serait par cette méthode de 1 : 8 de seconde. Avec un tube de $d = 2$ cm., $l = 70$ cm., l'amortissement est considérable : l'amplitude diminue de 5 à 0,35 cm. en huit oscillations. Nau mesure la période moyenne d'un train d'oscillations, l'amplitude de départ variant de 8 à 0,25 cm. Voici les périodes moyennes pour 32 expériences successives : 1 période de 1",50; 1 de 1",37; 19 de 1",25; 8 de 1",12; 3 de 1". Ces écarts, dit-il, n'obéissent à aucune loi de décroissance (avec l'amplitude) et résultent d'erreurs d'observations. La moyenne des 32 expériences donne $T = 1",207$, tandis que la période théorique de l'oscillation en bloc est $T_b = 1",187$: la différence relative $(T - T_b)/T = 0,02$; $1,2 = 0,017$, alors que je trouve 0,062 (§ 18).

1. Stéphan, *Sitzungsberichte*, Wien. 1862, t. XLVI.

2. Nau, Thèse en Sorbonne, *Formation du Clapotis*, année 1897.

Entretien par plongeur oscillant.

2. Essai d'entretien par un flotteur placé dans le champ d'un solénoïde. — Coaxial à l'une des branches S, du tube (*fig. 1*), le solénoïde MM', monté en sonnerie électromagnétique, est relié au secteur par le rhéostat R. La colonne liquide S porte un flotteur formé d'un bouchon B, lesté d'un aimant A, qui s'élève dans l'eau de la hauteur constante $x = a$, pendant le passage du courant. Si l'épaisseur de l'anneau

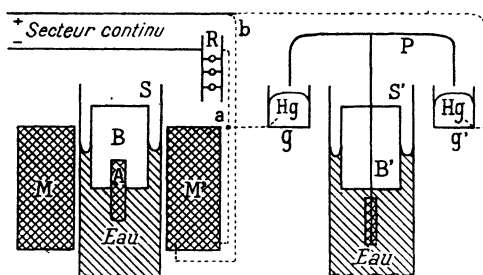


FIG. 1. — Entretien par le flotteur B placé dans le champ du solénoïde MM'.

liquide compris entre le tube et ce flotteur est suffisante, quand celui-ci s'élève, le liquide descend dans le cylindre annulaire et la dénivellation met la colonne de S' vers S (la partie inférieure du tube en U n'est pas représentée sur la figure 1).

Sur la seconde branche S' du tube le bouchon B' porte le pont en fil de platine P, qui, en s'abaissant, met en court-circuit le solénoïde et supprime l'action du flotteur ($x = 0$) : la colonne revient de S vers S' et ainsi de suite.

Ce montage crée, au sommet de la colonne S, une force, constante pendant son application, dont la période est imposée par l'oscillateur.

Étudions si la période propre T_2 de la colonne, mesurée grossièrement sans entretien, n'est pas troublée par celui-ci.

Modifions le montage :

a) en plaçant sur le rhéostat R trois lampes au lieu de deux : la période T décroît de $15'',1$ à $14'',7$;

b) en augmentant la distance entre le mercure et le pied du pont de 1 à 3 mm. : T décroît de $1'',60$ à $1'',55$;

c) en couvrant d'huile la surface du mercure : T décroît de $1'',60$ à $1'',32$.

La période de la colonne T_2 non entretenue est voisine de $2'',4$. Ce procédé d'entretien est à rejeter, car il modifie la période propre d'une quantité notable, dont il est difficile de tenir compte par une correction.

3. Entretien par plongeur animé d'un mouvement sinusoïdal imposé. — Dans la partie supérieure de la colonne S' (fig. 2), plonge la baguette de verre B suspendue par le fil f au bras vertical du pendule léger P . Grâce à la tare t , ce pendule est en équilibre indifférent, avant la fixation, par une pointe fine e , de son extrémité inférieure à la bielle en bois B , terminée par la lame de clinquant c . L'autre extrémité de la bielle est fixée par la pointe e' sur le plateau-mauivelle M du pendule conique isochrone, déjà décrit⁽¹⁾. La fourchette de ce pendule porte le doigt d qui fait basculer à chaque

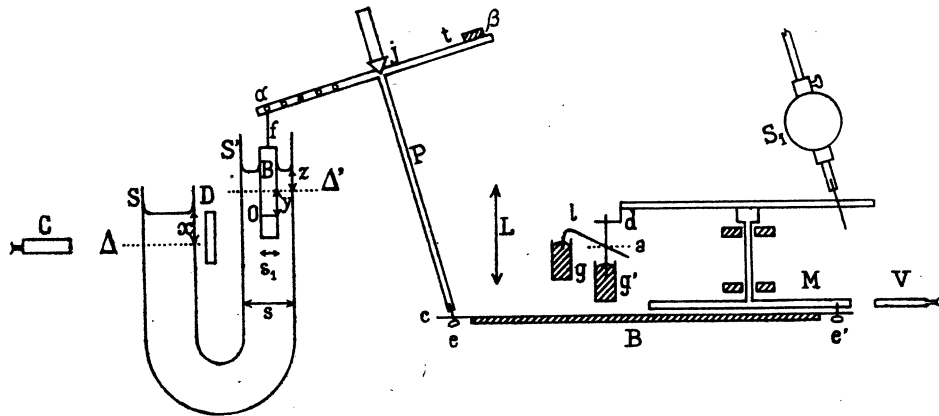


FIG. 2. — Entretien par pendule conique et plongeur oscillant.

tour un levier coudé interrupteur l , qui, par les godets de mercure g et g' , ferme le circuit du secteur continu sur une bobine de forte self. L'étincelle de rupture, projetée par la lentille L sur le verre dépoli D , éclaire la partie inférieure du ménisque liquide S , observée dans le cathétomètre C .

4. Équation du mouvement. — *a) Énergie cinétique.* — Dans les équations de Navier :

$$(2) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \gamma \Delta u = -\alpha, \quad u = K(R^2 - r^2) \quad \text{où} \quad K = \frac{\alpha}{4\gamma},$$

évaluons α et k en fonction de la vitesse moyenne x' de la colonne définie par :

$$\pi R^2 x' = \int_0^R 2\pi r k (R^2 - r^2) dr = \frac{\pi R^4 k}{2}.$$

On a :

$$K = 2x' : R^2, \quad \alpha = 8\gamma x' : R^2.$$

1. Thèse : *Études sur le pendule conique*. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, troisième série, tome 15, année 1923, page 87. Pendule isochrone, § 3 et 68.

L'énergie cinétique I est par centimètre de longueur :

$$2I = \int_0^R 2\pi r dr \cdot \rho K^2 (R^2 - r^2)^2 = \frac{\pi \rho K^2 R^8}{3} = \frac{4s\rho x'^2}{3}.$$

Si la colonne se déplaçait en bloc, on aurait $2I = s\rho x'^2$: de la distribution parabolique des vitesses u des tubes coaxiaux en fonction de leur rayon r (éq. 2), résulte que l'énergie cinétique est multipliée par 4 : 3.

b) *Travail de la pesanteur.* — Lorsque le plongeur s'enfonce de y (fig. 2), S' monte de z et S de x (x, y, z sont définies § 6). Soit s la section du tube, s_1 celle de la baguette, s_2 celle de la couronne :

$$(2 \text{ bis}) \quad ys_1 = xs + zs_2, \quad s = s_1 + s_2.$$

Dans le déplacement virtuel δx (le temps t étant fixé : $\delta y = 0$), la tranche de niveau z passe au niveau x : elle monte de $(x - z)$. Le travail virtuel est :

$$d\tilde{C} = -s\rho g(x - z)\delta x = -s\rho g[x(1 + s:s_2) - ys_1:s_2]\delta x,$$

expression où l'élongation y de la baguette a la valeur imposée $y_0 \sin \omega t$.

c) *Travail des frottements.* — D'après les équations de Navier (2) :

$$df = (p_1 - p_0) \cdot 2\pi r dr = \frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot 2\pi r dr = -\alpha dx \cdot 2\pi r dr;$$

$$F = \int_0^R df = -\pi\alpha R^2 dx = -8\pi\eta x' dx.$$

Ce frottement interne est indépendant du rayon R du tube. Pour la longueur unité $dx = 1$, dans le déplacement virtuel δx , le travail du frottement est :

$$(2 \text{ ter}) \quad d\tilde{C} = -8\pi\eta x' \delta x.$$

d) Appliquons les équations de Lagrange.

Pour une colonne de longueur l :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial I}{\partial x'} - \frac{\partial I}{\partial x} = A, \\ \frac{4}{3} l s \rho x'' + 8\pi\eta l x' + s\rho g \left(1 + \frac{s}{s_2}\right) x = s\rho g \frac{s_1}{s_2} y_0 \sin \omega t, \\ Mx'' + fx' + Cx = N \sin \omega t, \end{cases}$$

en appelant M, f, C, N les coefficients de $x'', x', x, \sin \omega t$.

Dans l'hypothèse simpliste du frottement interne nul ($r_1 = 0$) et du déplacement en bloc ($2I = ls \varphi x''$), l'équation devient

$$(3 \text{ bis}) \quad ls \varphi x'' + Cx = N \sin \omega t.$$

Le système est donc soumis à une force Cx proportionnelle à son élongation x (distance à sa position d'équilibre) et qui tend à l'y ramener, à une force de frottement fx' proportionnelle à sa vitesse moyenne x' et à une force périodique $N \sin \omega t$, sinusoidale par rapport au temps, de période imposée T . Nous prenons la masse du pendule conique suffisante devant celle de la colonne liquide pour qu'il impose à l'ensemble sa période T : il y a, *non résonance, mais oscillation forcée*.

5. — Intégrale de l'équation du mouvement. — Résumons les résultats donnés par Helmholtz. L'intégrale est la somme de deux parties :

a) La première, intégrale de l'équation sans second membre, fournit un mouvement amorti qui est, suivant la grandeur de f , apériodique ou périodique. Dans ce dernier cas, le plus général dans ces expériences (le mélange eau-glycérine, oscillant dans un tube de $d = 2$ cm., n'est apériodique que pour une viscosité, relative à l'eau, supérieure à 25), la première partie de l'intégrale est :

$$(4) \quad x = Ce^{\lambda t} \sin \omega t, \quad \lambda = -f : 2M, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{M : (C - f^2 : 4M)}.$$

T_2 est la période propre de la colonne; c'est elle qu'observent ceux qui n'entretiennent pas le phénomène (§ 1); elle diffère peu de la période $T_1 = \pi \sqrt{M : C}$, pour le frottement nul.

b) La seconde partie de l'intégrale :

$$(5) \quad x = x_0 \sin (\omega t - \varphi), \quad \omega = 2\pi : T,$$

est une intégrale particulière de l'équation avec second membre qui constitue la solution du problème lorsque l'on attend, pour étudier le phénomène, que le décalage φ soit fixé. Les paramètres x_0 , φ sont liés à ceux de l'équation (3) par les relations :

$$(6) \quad x_0 = \frac{NT \sin \varphi}{2\pi f} = \frac{NT^2}{\sqrt{4\pi^2 f^2 T^2 + (CT^2 - 4\pi^2 M)^2}},$$

$$(7) \quad \operatorname{tg} \varphi = 2\pi f T : (CT^2 - 4\pi^2 M).$$

L'énergie transmise par période est :

$$(8) \quad W = (N^2 T \sin^2 \varphi) : 2f = 2\pi^2 f x_0^2 : T.$$

Le mouvement de la colonne est donc sinusoïdal : son amplitude x_0 est liée à la force imposée (N , T) et au frottement interne (f) par la relation (6), sa période T est égale à celle du pendule, mais colonne et pendule ne sont pas synchrones : la colonne est en retard du décalage φ sur le pendule. Si l'on représente sur le cercle C le mouvement du pendule par P (fig. 3), la colonne est en C avec un retard de phase φ .

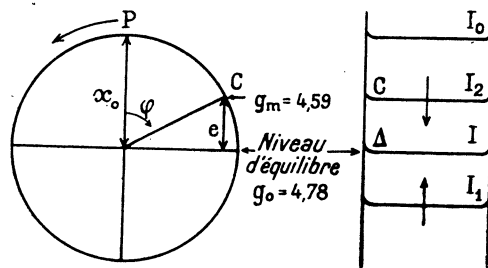


FIG. 3. — Position relative du pendule P et de la colonne C : $\varphi > \pi : 2$ et $T < T_1$.
 $\varphi < \pi : 2$, pendule en retard (avance inférieure à $\pi : 2$).

(g) La valeur de T :
$$T_1 = 2\pi\sqrt{M:C}$$

qui annule le dénominateur de $\text{tg } \varphi$ (éq. 7) est dite période de plus forte résonance, parce que l'énergie transmise (éq. 8) est alors maximum. Dans toutes les mesures de ce mémoire (sauf au § 6), c'est cette valeur T_1 que l'on détermine parce que :

a) Si $\text{tg } \varphi = \infty$, $\varphi = \pi : 2$, le cercle gradué M (fig. 2) tourne d'un angle facile à mesurer.

b) Au voisinage de $\varphi = \pi : 2$, les variations de φ sont considérables par rapport à celles de T (§ 8, c) : d'où grande précision de la méthode.

Les courbes x et y présentent pour $\varphi = \pi : 2$ la disposition de la figure 9.

6. Mode opératoire. Variation du décalage φ et de l'amplitude x_0 en fonction de la période T du pendule conique. — Remplissons d'eau le tube de $d = 2$ cm. Avant de lancer le pendule, la manivelle Ce' est placée dans la direction CO (fig. 7) (bielle dans le prolongement de la manivelle), puis, par une rotation de $\pi : 2$ du cercle M (fig. 2), dans la direction CA . Les ménisques S et S' sont au repos dans le même plan horizontal Δ, Δ' (sur la figure 2, Δ et Δ' ne sont pas sur la même horizontale; la branche S du tube est en arrière du plan de la figure pour que le faisceau lumineux LD ne soit pas intercepté par S' ; Δ, Δ' sont confondus sur la figure 10). La section O du plongeur est dans le plan Δ' : les variables x, y, z sont comptés à partir de Δ et Δ' . En résumé quand la bielle est en CA (fig. 7), $x = y = z = 0$.

Sur l'image du plan tangent au ménisque S, on amène le fil horizontal du réticule du cathétomètre C : par exemple, la lecture de son vernier donne $g_0 = 4,78$ cm. (*fig. 3*). Sur le disque M (*fig. 2*), on lit la graduation que vise la lunette V et on règle le doigt d pour que l'étincelle éclate quand le disque a tourné de $\pi : 2$.

On lance le pendule conique avec une période T quelconque ($T = 1^{\text{m}},947$, tableau 5, ligne 3). Soit $g = 4,59$, la graduation du vernier quand le réticule coïncide avec l'image instantanée du ménisque S, éclairé par l'étincelle de rupture qui éclate quand le pendule conique est dans la position représentée par P (*fig. 3*). L'écart en distance est $e = 4,78 - 4,59 = 0,19$ cm. (ligne 3, colonne 4); l'écart en phase est φ , tel que $\cos \varphi = e : x_0 = 0,19 : 1,71 = + 0,109$. On obtient le point a (*fig. 6*) en portant la période T du pendule en abscisse, $\cos \varphi$ en ordonnées).

TABLEAU 5.

	Période T du pendule conique	g	gm	Ecart e	$\cos \varphi$	Amplitude x_0	Position sur la courbe $\cos \varphi$
1	2 ^m ,101	3,86	3,75	+ 0,92	+ 0,893	1,03	
2	1,938	<u>4,78</u>	3,05	0	0	1,73	Point o
3	1,947	4,59	3,04	+ 0,19	+ 0,109	1,74	Point a
4	1,972	4,22	3,08	+ 0,56	+ 0,329	1,70	
5	2,140	3,94	3,90	+ 0,84	+ 0,953	0,88	Point c
6	1,920	4,97	6,45	- 0,19	- 0,114	1,67	Point b
7	1,818	5,46	5,76	- 0,68	- 0,693	0,98	
8	1,446	4,95	4,99	- 0,17	- 0,944	0,18	Point e

Arrêtons le pendule, déplaçons la sphère S_1 (*fig. 2*) sur sa tige; à la nouvelle valeur de la période T du pendule correspond une autre valeur de φ : je détermine la courbe $\cos \varphi(T)$. Si T égale la période T_1 de la colonne, l'image du ménisque coïncide avec sa position d'équilibre $g = g_0$, $\varphi = \pi : 2$, $\cos \varphi = 0$ (point O). Si $T < T_1$, $\varphi > \pi : 2$, $\cos \varphi < 0$ (point b).

Dans chaque expérience, en éclairant par une forte lampe le verre dépoli D, on observe le maximum d'élongation gm (col. 3). L'amplitude x_0 (col. 6) est $4,78 - gm$: on détermine la courbe $x_0(T)$ (cloche dyssymétrique (*fig. 6*)). En écrivant le minimum de l'inverse de l'expression 6, on calcule la période :

$$(10) \quad T_3 = 2\pi \sqrt{M : (C - f^2 : 2M)},$$

pour laquelle x_0 est maximum. Celui-ci ne se produit pas pour (la valeur T_1 de T qui correspond au maximum de l'énergie fournie; cela résulte de l'expression de x_0 .

(proportionnelle à $T \sin \varphi$, éq. 6), qui, lorsque T croît, atteint son maximum après celui de $\sin \varphi$.

Les valeurs T_1, T_2, T_3 (éq. 9, 5 et 10), se classent comme l'indique la figure 6 :

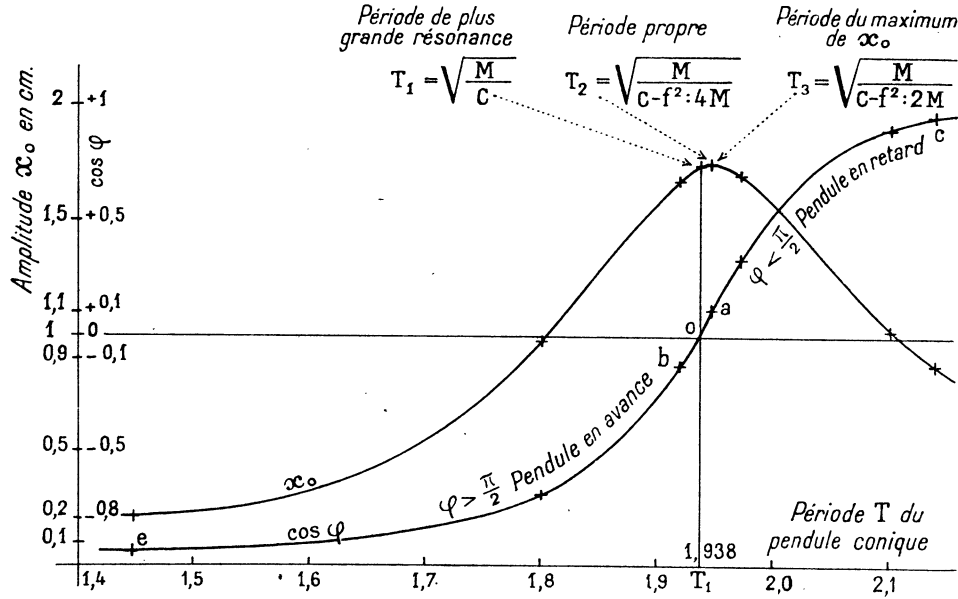


FIG. 6. — Amplitude x_0 et $\cos \varphi$ en fonction de T (eau).

$T_1 = 1^{\text{m}},938$ et T_3 est voisin de $1^{\text{m}},947$; T_2 est entre T_1 et T_3 ; la différence $T_3 - T_1$ est voisine de $0^{\text{m}},01$. Conformément à la théorie d'Helmholtz $T_3 - T_1$ croît avec la viscosité; pour un mélange eau-glycérine de densité 1,08, de viscosité $\eta_e = 1,8$ (vis-

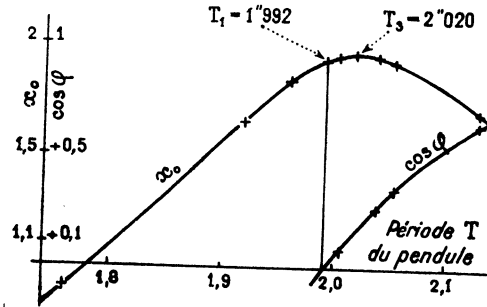


FIG. 6 bis. — Amplitude x_0 et $\cos \varphi$ en fonction de T pour un mélange eau-glycérine de $\eta_e = 1,8$.

cosité de Poiseuille par rapport à l'eau, § 12), $T_3 - T_1 = 0^{\text{m}},028$; alors que la courbe $\cos \varphi(T)$ a même allure que pour l'eau, la courbe en cloche $x_0(T)$ est plus dissymétrique (fig. 6 bis) (le diamètre et la course du plongeur ont été augmentés pour obtenir des amplitudes maxima voisines pour l'eau et le mélange eau-glycérine).

7. Mesure de la période T , de la colonne. — Fixons sur la fourchette du pendule conique un second doigt d' , distant de l'angle π du doigt d (*fig. 2*). Dans l'expérience précédente :

a) Si la période T du pendule égale la période T_1 de la colonne, le décalage φ (retard en phase) vaut $\pi : 2$. Les deux étincelles éclatent quand le ménisque passe dans sa position I d'équilibre (*fig. 4*). Dans le viseur du cathétomètre, les images I_1 (le ménisque monte) et I_2 (le ménisque descend) se confondent en I.

En fait, le niveau I est un peu au-dessous du niveau d'équilibre Δ , colonne au repos. Je mesure l'amplitude à partir du niveau I parce qu'il est repérable à tout instant, colonne en oscillation (§ 22, C).

b) Si le pendule est en avance (avance supérieure à $\pi : 2$), on a $\varphi > \pi : 2$. Alors $T < T_1$, I_1 est au-dessous de I_2 (position de la figure 4).

c) Si le pendule est en retard (avance inférieure à $\pi : 2$), $\varphi < \pi : 2$ et $T > T_1$, I_1 est au-dessus de I_2 .

On peut ainsi vérifier en quelques secondes avec une grande précision, l'isochronisme du pendule conique (thèse, § 73), sans déterminer la valeur absolue de sa période.

La période T_1 de la colonne liquide se mesure de deux façons :

a) Par interpolation, en construisant point par point la courbe $\cos \varphi$ (§ précédent). La sphère S_1 du pendule conique étant déplacée sur sa tige, pour chaque position, on détermine T et $\cos \varphi$: la valeur T_1 correspond à $\cos \varphi = 0$ (point O, *fig. 6*).

b) Il est plus rapide de mesurer directement T_1 en modifiant d'une façon continue la période du pendule conique. Le fil de suspension, après avoir traversé à frottement dur une plaque métallique fixe, est soudé à la partie inférieure d'une vis que l'on translate par la rotation de son écrou, muni d'un volant. La période du pendule ayant été rendue voisine de T_1 par les déplacements *discontinus* de S_1 , la coïncidence des images I_1 et I_2 (*fig. 4*) est obtenue par la rotation *continue* du volant.

8. Précision de la méthode. — L'approximation sur T_1 résulte :

a) de la régularité du pendule conique isochrone : sa période est fixée à plus de 10^{-5} près (thèse, § 71).

b) de l'approximation sur la mesure de cette période. Avec un chronographe, l'erreur absolue est de l'ordre de $0''{,}2$; l'erreur relative est aussi petite que l'on veut, le pendule, qui entraîne un compte tour, étant entretenu indéfiniment. Par exemple, pour obtenir T à 10^{-4} près, l'expérience dure $2.000''$, soit une demi-heure.

c) de la précision avec laquelle on observe la superposition de l'image du ménisque sur le fil du réticule. Quand T varie de 1 : 200 ($T_0 = 1''{,}938$, $T_a = 1''{,}947$;

points O et a, *fig. 6*) l'image du ménisque se déplace de 0,190 cm. (tableau 5 ligne 3). Si le cathétomètre évalue 0,001 cm., on apprécie T à 1 : (200 × 200) = 1 : 40.000, pour une amplitude $x_0 = 1,73$ cm. Avec des amplitudes plus grandes, la précision de visée permet de mesurer T à 10^{-5} près.

d) de la régularité propre au phénomène de l'oscillation liquide. En théorie la période T_1 de la colonne dépend de ρ, g, l, s, s_2 , quantités toutes constantes. En réalité cette période dépend de la viscosité, mais si peu (les variations de la température du laboratoire étant lentes), que *l'image du ménisque reste indéfiniment en coïncidence avec le fil du réticule* : T_1 est alors fixée à 10^{-5} près.

En résumé pour les mesures relatives, pendule conique et colonne liquide ont des périodes définies et mesurables à 10^{-5} près : *les écarts accidentels des nombres expérimentaux sont inférieurs à cette limite.*

Pour les mesures absolues, ρ, g, l, s, s_2 sont déterminées à 1 : 5.000 près :

a') Le tube de cuivre, rempli de plomb, est cintré à chaud. Il est rectifié en y faisant progresser, en frappant latéralement avec un marteau de bois, une olive en fer, qui doit finalement y circuler à frottement doux. A chaque extrémité une bague sert de raccord à un tube de verre de même diamètre qui permet l'observation du ménisque. La longueur l du tube est mesurée en attachant, le long des profils interne et externe de l'arc de cercle, deux fils fins d'acier, ensuite placés devant le cathétomètre. Si l'erreur absolue est de 0,04 cm., pour une colonne de 200 cm., l'erreur relative est de 0,04 : 200 = 1 : 5.000.

b') La surface des sections s, s_2 est déterminée en versant dans le tube (obturé au-dessous du niveau étudié) un poids connu d'eau distillée et en mesurant au cathétomètre la hauteur de ce liquide, avec et sans plongeur. Le cathétomètre qui mesure les longueurs à 0,001 cm. près, donne, pour une hauteur de 5 cm. d'eau, les valeurs moyenne de s et s_2 à 0,001 : 5 = 1 : 5.000 près.

9. Influence de la propreté du tube. — Pour que le phénomène soit régulier, il faut que le liquide mouille parfaitement le verre, sinon T_1 et x_0 diminuent :

Tube	Plongeur	T_1	x_{0s}	x_{0i}
$d = 2$ cm.	$d = 0,746$ cm.			
Bien mouillé.	Bien mouillé.	2,016	1,75	1,75
Bien mouillé.	Mal mouillé.	2,014	1,78	1,79
Mal mouillé.	Mal mouillé.	1,992	1,58	1,64

L'erreur relative atteint 10^{-2} sur T et 10^{-1} sur x_0 ; l'amplitude inférieure x_{0i} diminue moins que l'amplitude supérieure x_{0s} .

Pour éviter d'avoir à décaper fréquemment le tube (avec de l'eau acidulée), on remplace parfois l'eau par de l'alcool à brûler. Son évaporation raccourcit la colonne, lentement avec l'entretien par capsule, vite avec le plongeur, surtout en été (deux gouttes par minute) : au lieu d'amener la période du pendule sur celle de la colonne, on fixe celle du pendule, la colonne étant un peu trop longue; pendant qu'elle se raccourcit par l'évaporation, on note sa longueur au moment de la coïncidence des images I_1 et I_2 (fig. 4).

10. Erreur systématique due à la transformation du mouvement circulaire en alternatif. — L'intégrale du mouvement relie, par la relation (6), l'amplitude x_0 à la force imposée et à la viscosité, par les relations (7) et (9), la période T_1 à M et à C : en particulier, T_1 est indépendant de l'amplitude x_0 , de la viscosité μ , du diamètre d du tube. *L'expérience ne vérifiant aucune de ces relations, ces divergences*

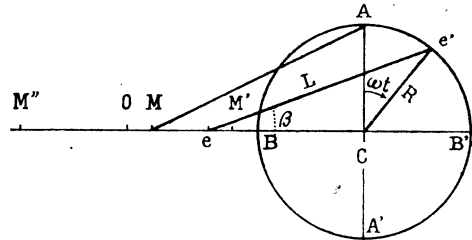


FIG. 7. — Manivelle Ce' et bielle ee' .

peuvent provenir d'erreurs systématiques introduites par l'entretien : bielle manivelle ou plongeur. Le mouvement circulaire uniforme du bouton de manivelle e' (fig. 2) est transmis au pendule simple P par la bielle $e'e$ (fig. 7). Soit M , la position de e quand e' est en A (position de départ du plongeur : $\gamma = 0$). Le point e oscille de M' à M'' : montrons que $MM'' > MM'$.

$$eC = L \cos \beta - R \sin \omega t = L[1 - (R^2 : 2L^2) \cos^2 \omega t] - R \sin \omega t.$$

$$\text{Si } t = 0, \quad MC = L[1 - (R^2 : 2L^2)],$$

d'où :

$$(11) \quad Me = MC - eC = R \sin \omega t - (R^2 : 4L)(1 - \cos 2\omega t);$$

$$\text{si } t = \pi : 2, \quad MM' = R(1 - R : 2L);$$

$$\text{si } t = -\pi : 2, \quad MM'' = -R(1 + R : 2L).$$

Par rapport au point M (plongeur dans sa position de départ), l'oscillation de e n'est pas symétrique, le plongeur descend plus qu'il ne monte, $\Delta R : R = R : 2L$, par défaut, puis par excès.

En remplaçant dans l'équation (3), $R \sin \omega t$ (y_0 est proportionnel à R), par l'expression (11), à l'intégrale (5) s'ajoutent des corrections x_1 et x_2 , qui se calculent aisément, comme $x = x_0 \sin(\omega t - \varphi)$, ces termes étant des intégrales particulières de l'équation avec second membre.

Vérifions ces résultats par l'expérience. La bielle L a 63 cm.; la manivelle Ce' est percée de six trous équidistants de 1,5 cm.; la dyssymétrie est maximum pour $Ce' = 9$ cm.; alors $\Delta R : R = R : 2L = 9 : 126 = 0,071$.

Remplissons le tube d'alcool. Si dans l'équation (3), on prend : $M = 550$ gr.; $s = 3$ cm²; $s_1 = 0,5$ cm²; $\varphi = 0,8$; $y_0 = 2,45$ cm.; $T = 2''$ et f tel que l'amplitude $x_0 = AT : 2\pi f = 2,2$ cm., les corrections calculées sont :

$$x_1 + x_2 = -0,008 + 0,003 \cos(2\omega t - \Sigma_1), \quad \text{avec } \text{tg } \Sigma_1 = -0,08.$$

Le second terme x_2 en $\cos(2\omega t - \Sigma_1)$, où Σ_1 est voisin de 0 ou π , ne trouble pas la période, puisqu'il s'annule pour $\omega t = \pi : 2$, au moment de la coïncidence de I_1, I_2 . Pour $\omega t = \pi$ et 2π , au moment où se mesure l'amplitude, x_2 est voisin de 0,003, presque négligeable puisque le cathétomètre n'évalue que 0,001 cm.

Le premier terme $x_1 = -0,008$, constant, représente un déplacement d'ensemble de la colonne, qui ne trouble pas sa période. Les images I_1, I_2 coïncident au-dessous du niveau Δ d'équilibre (fig. 4), à la distance x_1 .

Pour distinguer les effets de la dyssymétrie de l'oscillation du plongeur, de ceux de son mouvement relatif à l'eau [il ne tire pas comme il pousse(!)], croisons les expériences en attachant le fil f en α (position de la figure 2), puis en β , de l'autre côté du bras du pendule simple.

	Théorie.	Expérience.
En α :	$x_1 = -0,008,$	$X_1 = -0,045;$
En β :	$x'_1 = +0,008,$	$X'_1 = -0,030.$

Alors que dans la théorie, en β , le déplacement est vers les x positifs (fig. 2), l'expérience donne un déplacement d'ensemble négatif : le plongeur tire le liquide plus qu'il ne le pousse et cet effet domine celui de la correction x_1 . Formons la différence $X' - X_1$ qui élimine l'effet du plongeur (égal dans X_1 et X'_1) et double celui de la correction (de signe contraire dans X_1 et X'_1) :

$$x'_1 - x_1 = +0,016, \quad X'_1 - X_1 = +0,015,$$

le déplacement d'ensemble expérimental vérifie la théorie.

1. Dans un prochain mémoire, on donnera les lignes de courant autour d'une sphère en translation dans l'eau, en milieu indéfini, pour $v = 0,1$ cm. sec. : la dyssymétrie des lignes de courant et des vitesses est manifeste, contrairement à la théorie de Stokes.

11. Étude de l'oscillation entretenue par le plongeur. — a) T_1 ne doit pas dépendre de la course y_0 du plongeur (éq. 9). Modifions y_0 en déplaçant le point d'attache du fil f (fig. 2), le long du bras x_j du pendule simple (j est l'arête du couteau) :

$$\begin{array}{lll} x_j = 8,0 \text{ cm.} & x'_j = 21,5 & x'_j : x_j = 2,70 \\ T_1 = 1,991 & T'_1 = 1,983 & \\ x_{oi} = 1,26 \text{ cm.} & x'_{oi} = 3,41 & x'_{oi} : x_{oi} = 2,70 \end{array}$$

Comme le veut la théorie x_0 est proportionnel à y_0 . Par contre, T_1 décroît de $8 : 2000 = 1 : 250$, quand x_0 triple : cette variation, que l'on retrouve dans la méthode d'entretien par pression sinusoïdale, n'est pas une erreur systématique due au plongeur.

b) T_1 ne doit pas dépendre de la hauteur immergée du plongeur. Dans un tube plein d'eau, de $d = 1,87 \text{ cm.}$, $s = 2,760 \text{ cm}^2$, plaçons successivement deux plongeurs :

Plongeur $d = 0,353 \text{ cm.}$;		$s_1 = 0,096 \text{ cm}^2$.	
Longueur immergée =	3,4 cm.	6,4	12,5
$T_1 =$	2,064	2,072	2,082
$x_{oi} =$	0,30 cm.	0,30	0,27
Plongeur $d = 0,850 \text{ cm.}$;		$s_1 = 0,568 \text{ cm}^2$.	
Longueur immergée =	3,8 cm.	9,3 (plongeur incliné)	9,3
$T_1 =$	1,992	1,992	1,992
$x_{oi} =$	2,00 cm.		1,82

Quand on enfonce le petit plongeur de 3,4 à 12,5 cm., la période croît de $1 : 100$. J'attribue ce résultat à l'augmentation de l'énergie cinétique (à laquelle M est proportionnel) puisque, autour du supplément de longueur immergée, de circulaire la section du liquide devient annulaire. L'augmentation du frottement interne explique la diminution de x_0 . De ces expériences résulte que pour un liquide peu visqueux le plongeur ne paraît pas introduire d'erreur systématique.

12. Erreur systématique introduite par le plongeur pour un liquide visqueux.

— La viscosité des mélanges eau-glycérine est déterminée par leur écoulement dans un tube de $l = 170 \text{ cm.}$ et de $d = 0,2 \text{ cm.}$ Je désigne par η_e le rapport de la viscosité du mélange à celle de l'eau (viscosité de Poiseuille par rapport à l'eau).

A) Modifions l'amplitude y_0 de la force appliquée en déplaçant le point d'attache α du fil (fig. 2) du plongeur de $d = 0,850$ cm., immergée de 6,4 cm. ($\tau_e = 22$) :

$\alpha j = 8,0$ cm.	$\alpha' j' = 14,3$	$\alpha'' j'' = 21,5$
$T = 1,423$	1,562	1,606
$x_{os} = 0,07$ cm.	0,16	0,25
$x_{oi} = 0,16$ cm.	0,31	0,50

T_1 croît avec y_0 .

b) Modifions la longueur immergée :

Petit plongeur $d = 0,353$ cm.;		$\alpha j = 14,3$ cm.	
Longueur immergée =	4,6 cm.	6,4	10
$T_1 =$	1,936	1,592	1,25
$x_{os} =$	0,05 cm.	0,04	
$x_{oi} =$	0,14 cm.	0,14	
Gros plongeur $d = 0,850$ cm.;		$\alpha j = 28$ cm.	
Longueur immergée =	3,2 cm.	6,4	9,8
$T_1 =$	1,820	1,662	1,30
$x_{os} =$	0,18	0,31	0,14
$x_{oi} =$	0,32	0,66	0,26

T_1 diminue quand augmente la longueur immergée.

B) Déterminons la période T_1 de la colonne pour des mélanges eau-glycérine de viscosité τ_e croissante :

$\tau_e =$	1,78	8,83	19,7	24,8	69,2
$T_1 =$	1,993	1,952	1,720	1,632	1,160

La période T_1 varie en sens inverse de la viscosité. Pour contrôler ce résultat, chauffons avec un bec Bunsen la paroi extérieure du tube en U (rempli d'eau). La période T du pendule conique restant constante pendant le chauffage :

- l'amplitude x_0 croît de 1,6 à 2,0 cm. (la viscosité décroît),
- les images I_1, I_2 du ménisque montent de 0,8 cm. (l'eau se dilate),
- l'image I_1 (le ménisque monte) passe au-dessus de I_2 , donc : $\varphi < \pi : 2$ et $T > T_1$ (fig. 4) : lorsque la viscosité diminue, la période T_1 de la colonne décroît, malgré son allongement.

C) On explique ces résultats contradictoires par trois effets superposés :

a) une augmentation de T_1 avec la viscosité (vérifiée plus loin) ;

b) une diminution de T_1 due à l'adhérence d'une lame de liquide sur la paroi du tube, à chaque bout. Pour une même valeur de x , cette lame annulaire est plus épaisse quand la colonne descend que lorsqu'elle monte. Soit t_1 et t_3 , t_2 et t_4 les instants du passage à la position d'équilibre Δ et aux maxima M et m (fig. 8, à gauche) pour un liquide non visqueux. Pendant la descente du liquide visqueux, le ménisque

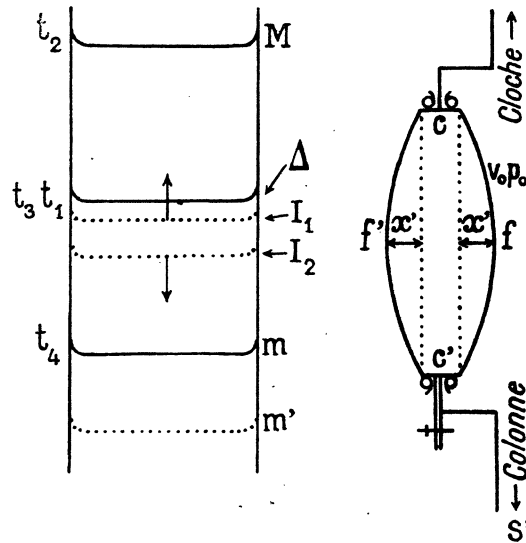


FIG. 8. — Oscillation d'un liquide visqueux.

passé aux temps t_3 et t_4 en I_2 et m' au-dessous de Δ et m . Pendant la montée, le ménisque passe à l'instant t_1 , en I_1 , entre Δ et I_2 , d'autant plus près de Δ que la vitesse d'écoulement de la lame est plus grande : I_1 est au-dessus de I_2 (fig. 4) : le pendule paraît en retard ; pour faire coïncider I_1 et I_2 , il faut accélérer le pendule, donc mesurer T_1 par défaut ;

c) une diminution de T_1 due à l'adhérence du liquide sur le plongeur, comme le montre la théorie des forces perturbatrices.

13. Trouble de période dû à de petites forces perturbatrices.

A) Si pour l'élongation x , la colonne reçoit de la force perturbatrice un accroissement de vitesse $\Delta x'$, la variation ΔT de la période est :

$$(12) \quad \Delta T = (x \Delta x') : (\omega^2 x_0^2).$$

De cette formule classique résulte que T_1 n'est pas troublée par :

a) deux impulsions égales et de signes contraires $+\Delta x'$ et $-\Delta x'$, appliquées pour la même élongation x ;

b) deux impulsions égales et de même signe appliquées pour des élongations de signe contraire $+x$ et $-x$;

c) la force d'entretien $N \sin \omega t$ (éq. 3), appliquée par le plongeur. Elle fournit pour chaque couple p, q de valeurs égales de x (fig. 9), deux impulsions $\Delta x'$, proportionnelles à y , égales et de signes contraires quand $\varphi = \pi : 2$. On retrouve ainsi par un procédé simpliste le résultat d'Helmholtz (§ 5).

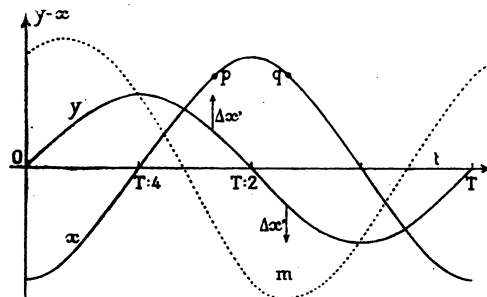


FIG. 9. — Trouble de période dû à de petites forces perturbatrices ;
 $y = N \sin \omega t$; $x = x_0 \sin (\omega t - \pi : 2)$.

B) Calculons l'immersion $y + z$ (fig. 2) du plongeur en ajoutant ys_2 aux deux membres de l'équation (2 bis) : $y + z = (y - x)s : s_2$. Construisons la courbe $y - x$ (fig. 9). La lame annulaire adhérente au plongeur diminue la dénivellation motrice : l'impulsion $\Delta x'$ est négative. Sa grandeur dépend de la longueur dont le plongeur sort du liquide (et de la durée depuis la sortie, puisque la lame s'écoule); le trouble maximum se produit près du minimum m de l'immersion, où $x > 0$; comme $\Delta x' < 0$, on a bien $\Delta T_1 < 0$.

Des expériences précédentes résultent que, pour un liquide visqueux, le plongeur introduit des erreurs systématiques; pour affirmer que ces erreurs sont négligeables pour des liquides peu visqueux, il faut contrôler cette méthode d'entretien.

Entretien par pression sinusoïdale.

14. Difficulté thermique du problème. — La pression $p = P \sin \omega t$ est transmise à l'un des ménisques S' , à travers un espace v_0 , nécessairement clos (fig. 10) : la colonne n'oscille plus à l'air libre comme dans l'entretien par plongeur. A la dénivellation proprement dite s'ajoute une seconde force de rappel $s\Delta p$, due à l'augmentation sx du volume v_0 :

$$(12 \text{ bis}) \quad pv = K, \quad p_0 \Delta v + v_0 \Delta p = 0, \quad \Delta p = -p_0 sx : v_0.$$

L'appareil qui crée la pression sinusoidale étant arrêté, l'équation du mouvement, dans l'hypothèse simpliste du déplacement en bloc, est :

$$l\delta s x'' = -2sx\delta g - s^2 x p_0 : v_0.$$

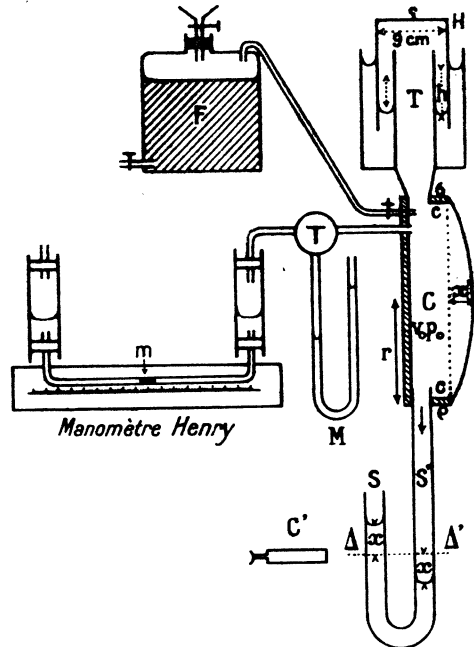


FIG. 10. — Entretien de la colonne SS' par la cloche H, à travers la capsule C.

La période T est fonction de v_0 :

$$T = 2\pi \sqrt{l : [2g + s p_0 : \delta v_0]};$$

$$\text{si } l = 260 \text{ cm.}, \quad \delta = 1, \quad g = 981, \quad s = 2,50 \text{ cm}^2;$$

$v_0 =$	100 cm ³	10 ³	10 ⁴	10 ⁵ (100 litres)	3.10 ⁵ (300 litres)	10 ⁶	∞
T =	0,63	1,512	2,142	2,268	2,288	2,292	2,293

Le trouble sur la période est notable jusqu'à 100 litres. Pour 300 litres il est de l'ordre de 1 : 400.

L'interposition du volume v_0 présente les inconvénients suivants :

a) l'appareil est un thermomètre à air : les variations de température provoquent un déplacement d'ensemble de la colonne qui rend difficile la lecture des coïncidences ; le trouble croît comme v_0 ;

b) la compression ayant une durée de 0",5 (si T = 2"), le parcours thermique est vraisemblablement plus voisin de l'adiabatique que de l'isotherme, mais il subsiste

une incertitude de 40 % (C : $c = 1,41$) sur la valeur P du maximum de pression : il est illusoire d'appliquer une correction incertaine sur le terme sp_0 : δv_0 qui est notable; *le trouble croît comme l'inverse de v_0* ;

c) la valeur de P n'intervient pas seule, mais bien la loi de la pression en fonction du temps. La perte de chaleur à la paroi à la fin de la compression, le gain à la fin de la détente, décalent la pression sinusoïdale : ces deux effets ne se compensant pas (éq. 12), la période de la colonne est modifiée d'une quantité inconnue.

15. Addition d'un volume fictif. — Pour interposer un volume v_0 , *aussi grand que l'on veut*, sans introduire les erreurs précédentes on utilise l'artifice suivant : le volume v_0 est l'intérieur d'une capsule C (*fig. 10*), formé d'un cylindre de tôle cc' dont l'une des bases (circulaire de rayon r) est constituée par une membrane de feuille anglaise f de tension A . Sous l'excès de pression Δp , la membrane devient une sphère de rayon R ; la flèche x' étant petite, on a :

$$\Delta p = 2A : R = 4Ax' : (r^2 + x'^2),$$

par approximation :

$$(13) \quad \Delta p = 4Ax' : r^2,$$

en négligeant x'^2 devant r^2 . Le volume v_0 est accru de la calotte sphérique Δv_1 :

$$\Delta v_1 = \pi x' (x'^2 + 3r^2) : 6,$$

par approximation :

$$(14) \quad \Delta v_1 = \pi x' r^2 : 2.$$

En éliminant x' entre les équations (13) et (14) :

$$(15) \quad \Delta v_1 = \pi r^4 \Delta p : 8A.$$

Soit p_0 la pression dans la capsule (égale ou non à la pression atmosphérique), quand le pendule est calé dans sa position de départ (§ 6); lorsque la colonne S monte de x , S' descend de x (*fig. 10*), la variation du volume v_0 est

$$\Delta v = sx + \Delta v_1 = sx + \pi r^4 \Delta p : 8A.$$

Dans le parcours isotherme, on a :

$$(16) \quad p_0 [sx + \pi r^4 \Delta p : 8A] + v_0 \Delta p = 0,$$

$$\Delta p = \frac{-p_0 sx}{v_0 + \pi r^4 p_0 : 8A} = \frac{-p_0 sx}{V}.$$

En comparant cette expression à la troisième équation (12 bis), on énonce la proposition générale : si l'on adjoint au volume v_0 un système déformable qui cède un volume proportionnel à la variation de pression ($\Delta v_1 = K \Delta p_0$), tout se passe, sous le rapport des variations de pression, comme si le volume était $V = v_0 + K p_0$: au volume réel v_0 s'ajoute le volume fictif $K p_0$.

L'incertitude thermique sur le parcours $p(l)$ ne porte plus que sur v_0 qui est rendu aussi petit que l'on veut devant $K p_0$. Dans ces expériences, $v_0 = 0,3$ litre, $K p_0 = 260$ litres : une incertitude relative de 10^{-1} sur v_0 devient 10^{-4} sur V .

Application A. — La cloche hydraulique H (fig. 10), de surface annulaire S (pour simplifier supposons égales les surfaces annulaires internes et externes) communique avec la capsule C. Pour la variation de pression Δp , qui crée la dénivellation ($\Delta p = h \rho g$), la cloche cède un volume :

$$\Delta v_1 = S \times h : 2 = \Delta p \times S : 2 \rho g, \quad K = S : 2 \rho g.$$

Le volume fictif est :

$$K p_0 = S p_0 : 2 \rho g.$$

Par exemple, pour une cloche de 16 cm. de diamètre, si l'on remplace le tube T par un tube fin : $S = 200 \text{ cm}^2$; comme $\rho = 1$, $p_0 = g \cdot 10^3$, on a : $K p_0 = 100$ litres. Une cloche aussi large ne pourrait servir que pour des mouvements lents, sinon l'expression (16) serait fautive à cause du décalage entre le niveau et la pression. Montrons qu'en réduisant à 1 cm. l'épaisseur de l'anneau liquide, ce décalage est négligeable et que l'on peut utiliser les déplacements sinusoidaux de cette cloche (suspendue par son crochet au fil f de la figure 2) pour créer la pression $P \sin \omega t$:

a) Lançons le pendule, éclairons la surface de la lame annulaire externe. Elle donne, par réflexion, un anneau lumineux mince qui s'élargit quand elle atteint le haut de sa course parce qu'elle mouille mal les surfaces latérales de la cloche : ce maximum est bien synchrone de l'étincelle de rupture;

b) Vérifions que ce décalage reste constant (donc nul) quand l'épaisseur varie de 0,2 à 1 cm. :

Diamètre de la cloche . . .	9 cm.	7,1 cm.
Épaisseur de l'anneau . . .	1,25 cm.	0,2 cm.
Période T_1 de la colonne.	$407,7 : 200 = 2,0385$	$631,9 : 310 = 2,0384$

Par contre, si l'on met la capsule en communication par un tube avec l'atmosphère, par suite du décalage de la pression : $\varphi < \pi : 2$; si le tube est fin ($l = 10 \text{ cm.}$, $d = 0,6 \text{ cm.}$) l'effet est presque négligeable; si par le robinet à trois voies T (fig. 10) on met la capsule en communication avec le manomètre à eau, celle-ci oscille, mais l'effet est nul.

Application B. — Si l'on utilise comme système déformable la membrane f (*fig. 10*), pour que l'expression (16) soit applicable, A doit être constant : la membrane idéale est une lame liquide de tension capillaire invariable. De telles lames n'ont pas donné une stabilité suffisante. Une membrane de collodium (fulmicoton : 5 gr., alcool à 95° : 20 gr., éther : 75 gr.), rendue élastique par l'addition de 5 % d'huile de ricin, fournit de magnifiques phénomènes de réactivité qui la rendent inutilisable. La baudruche donne des courbes analogues à celles de la feuille anglaise préférable pour sa solidité.

16. Recherche d'une membrane de caoutchouc de tension A constante. —

a) Pour que la relation (16) soit vérifiée il faut que Δp soit proportionnel à sx . Traçons la courbe $\Delta p : sx$ en fonction de Δp : pour un extrémum M (*fig. 11*) de cette courbe, seront corrigées les trois erreurs qui résultent de la variation de A , de la suppression de x^2 devant r^2 (éq. 13 et 14), de la sphéricité imparfaite de la calotte f .

La cloche hydraulique H étant fixée, les variations de volume $\pm sx = \pm \Delta v$, sont obtenues par l'écoulement ou le remplissage du flacon F . La pression est mesurée par le manomètre à eau M et le manomètre Henry à bulle m (*fig. 10*).

b) Manomètre Henry au CCL'. — Son tube a un diamètre de $d = 0,2$ cm.; sa bulle subit, quand sa vitesse est grande, des déplacements du zéro qui atteignent 2 cm., mais qui deviennent négligeables pour des vitesses inférieures à 5 cm. sec. (ces déplacements persistent lorsque la longueur de la bulle croît de 0,4 à 4 cm. et que le diamètre du tube diminue de 0,2 à 0,1 cm. La pression d'un centimètre d'eau correspond à une course de 13,0 cm. de la bulle.

c) Hystérésis et réactivité de la membrane de caoutchouc. — Si l'on déforme fortement la membrane f le robinet T étant fermé, quand on l'ouvre, la pression reste la même : par exemple, elle passe de 13,58 cm. Henry à 13,70 pour revenir après 5' à 13,60, légère variation qui provient de l'échauffement de l'air par la membrane déformée. La meilleure preuve de l'absence d'hystérésis est le manque de réactivité, qu'indique la fixité de la bulle.

d) Quoique la membrane f ne soit pas ligaturée dans son plan de symétrie sur le cylindre cc' , il y a symétrie des courbes de pression et de dépression (x négatif et positif).

e) Traçons sur un morceau de feuille anglaise (1 cm² pèse 4,8 cgr.) des circonférences de $d = 19, 18, 15, 10$ cm.; étirons-les successivement sur la capsule de $d = 20$ cm. Pour les faibles extensions 19 : 20 et 18 : 20 il n'y a pas de maximum, mais la forme rectiligne de la courbe 19 : 20 permet son utilisation autour de $\Delta p = 0$ (la pression p_0 de la cloche est la pression atmosphérique), en prenant pour A la

valeur donnée par le point A_0 (fig. 11). L'excès de pression et de dépression, produit par l'augmentation de A en fin de course de la cloche, donne sur la période de la colonne un trouble nul (éq. 12) et sur l'amplitude une erreur par défaut de 2 %.

La courbe 15 : 20 permet l'emploi correct de l'expression (16) : avant de lancer le pendule, soufflons de l'air dans sa capsule pour rendre sa pression voisine de 65 cm. Henry = 1 cm. eau ; pour les oscillations de la cloche autour de ce maximum M (fig. 11), A sera constant.

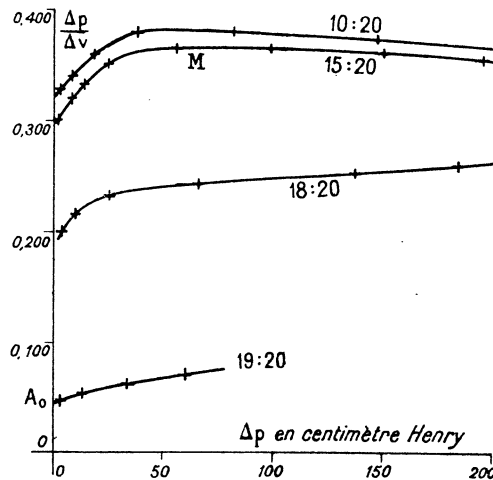


FIG. 11. — Recherche d'un point M où la membrane de caoutchouc est assimilable à une lame liquide de tension capillaire $\Lambda = \text{constante}$.

La nécessité d'opérer sous pression ou dépression est avantageuse pour l'étude de l'oscillation liquide dans un tube droit, plongé dans un bassin : dans sa position d'équilibre, le ménisque ne se confond plus avec la surface libre du bassin.

Pour opérer à la pression atmosphérique, la membrane restant sous pression, il faut la doubler (fig. 8, à droite).

17. Équation du mouvement. — Lorsque la colonne S monte de x (fig. 10), la variation de volume résulte de la descente S' , de la variation de la flèche x' de la membrane et de la descente $y_0 \sin \omega t$ de la cloche de surface S :

$$\Delta v = +sx + \pi r^4 \Delta p : 8\Lambda + S y_0 \sin \omega t.$$

L'équation (16) devient :

$$\Delta p = \frac{p_0(-sx + S y_0 \sin \omega t)}{v_0 + \pi r^4 p_0 : 8\Lambda} = \frac{p_0(-sx + S y_0 \sin \omega t)}{V}.$$

Le travail de la pression imposée Δp , dans le déplacement virtuel δx , est

$$d\mathcal{C} = s \Delta p \cdot \delta x,$$

dans l'équation (3) il faut supprimer l'action du plongeur ($s_1 = 0$, $s_2 = s$) et ajouter $s \Delta p$:

$$(17) \quad \frac{4}{3} l s \rho x'' + 8 \pi r l x' + 2 s \rho g x = s \Delta p = \frac{s p_0 (-s x + S y_0 \sin \omega t)}{V},$$

$$\frac{4}{3} l s \rho x'' + 8 \pi r l x' + x \left[2 s \rho g + \frac{p_0 s^2}{V} \right] = \frac{p_0 S y_0 s}{V} \sin \omega t = P s \sin \omega t,$$

où $P = p_0 S y_0 / V$ est la pression maximum donnée directement par la lecture du manomètre. La période T_1 est :

$$(18) \quad T_1 = 2 \pi \sqrt{\frac{4 l \rho : 3}{2 \rho g + p_0 s : V}}.$$

II. — Résultats.

18. Comparaison des deux méthodes d'entretien. — a) Plongeur. — Alcool à brûler de densité $\rho = 0,84$, section de tube $s = 3,14 \text{ cm}^2$, longueur $l = 187,0 \text{ cm}$., amplitude $x_0 = 2,7 \text{ cm}$., période du pendule pour la coïncidence $T_1 = 1'',9480$, rapport des surfaces $s : s_2 = 1,2380$.

L'équation (9) donne :

$$T_{1e} = 1'',9480 = 2 \pi \sqrt{\frac{4 l s \rho : 3}{s \rho g (1 + s : s_2)}} = 2 \pi \sqrt{\frac{4 l : 3}{2 g}} \times \sqrt{\frac{2}{1 + s : s_2}}.$$

La période de la colonne, corrigée du trouble apporté par le plongeur, est :

$$T_{1c} = 2 \pi \sqrt{\frac{4 l : 3}{2 g}} = 1'',9480 \sqrt{\frac{1 + s : s_2}{2}} = 2'',05973.$$

b) Capsule. — Pour les mêmes valeurs de ρ , s , l , la période du pendule pour la coïncidence est $T'_1 = 2'',0520$. L'équation 18 donne :

$$T'_{1e} = 2'',0520 = 2 \pi \sqrt{\frac{4 l : 3}{2 g}} \times \sqrt{\frac{1}{1 + (p_0 s) : (2 \rho g V)}}.$$

La pression dans la capsule étant celle de l'atmosphère : $p_0 = 1033 \text{ cm. eau}$; on

détermine $\Delta p : \Delta v = 0,0525$ cm. Henry = 0,00404 cm. eau; le volume V (éq. 16) est :

$$\Delta p : \Delta v = \rho_0 : V, \quad 0,00404 = 1033 : V, \quad V = 257 \text{ litres.}$$

La période de la colonne, *corrigée du trouble apporté par la capsule*, est :

$$T'_{1e} = 2\pi \sqrt{\frac{4l:3}{2g}} = 2'',0520 \sqrt{1 + \frac{P_0 s}{2 \rho g V}} = 2'',06041.$$

La capsule diminue T' de 0',0084, en valeur relative de 0,004; cette correction étant calculée à 10^{-3} près, l'erreur possible sur T , due à la capsule n'est que de $4 \cdot 10^{-6}$: *la méthode de la pression sinusoidale imposée (capsule) est plus exacte que celle du plongeur.*

Entre les deux méthodes, l'écart relatif sur T n'est que :

$$(2,0604 - 2,0597) : 2 = 0,0003.$$

La valeur théorique de T , dans le déplacement en bloc, est (éq. 3 bis) :

$$T_b = 2\pi \sqrt{l:2g} = 1'',9397;$$

dans la distribution parabolique des vitesses (éq. 3) :

$$T_p = 2\pi \sqrt{1,3333 l:2g} = 1,1555 \times 1'',9397;$$

l'expérience donne :

$$T = 2'',0597 = 1,0618 \times 1'',9397,$$

plus voisin de T_b que de T_p .

Dans les paragraphes suivants, les mesures étant relatives, je conserve les périodes T_{1e} de plus grande résonance (fournies par l'expérience), sans calculer les périodes corrigées T'_{1e} .

19. Variation de la période avec le diamètre D . — Remplissons d'alcool à brûler, de densité $\delta = 0,84$, deux tubes de $d = 1,1$ et 2 cm. :

D = 1,1 cm.	l = 187,00	$x_0 = 1,42$	$T_1 = 2'',148$	$l^\circ = 23^\circ$
D = 2,0 cm.	186,84	1,60	2'',040	22°

Si l'on néglige les petites corrections qui résultent des différences de l et de x_0 , quand le diamètre croît de 1,1 à 2,0 cm., la diminution relative de période est $\Delta T_1 : T_1 = (2,148 - 2,040) : 2 = 0,05$.

20. Variation de la période avec l'amplitude x_0 . — Avec le même alcool, modifions la force appliquée en déplaçant le pied de bielle sur la manivelle (bielle B, *fig. 2*) :

Tube de $d = 2,0$ cm. ($l = 187$ cm.).

Longueur de la manivelle en cm.	Amplitude supérieure en cm.	Amplitude inférieure en cm.	Période T_1 en sec.	Pression maximum P en cm. Henry	$\frac{PT_1}{x_0}$
1,5	0,850	0,850	2,050	2,6	6,27
3,0	1,650		2,044		
4,5	2,640		2,039	8,1	6,27

Quand l'amplitude triple, la diminution relative de période est

$$\Delta T_1 : T_1 = (2,050 - 2,039) : 2 = 0,005.$$

Tube de $d = 1,10$ cm. ($l = 194$ cm.).

Longueur de la manivelle	Amplitude x_0	Période T_1
4,5	1,54	2",180
9	3,25	2",158

La diminution de période est plus rapide pour le petit tube que pour le gros : quand x_0 double, $\Delta T_1 : T_1 = 0,01$.

21. Variation de la période avec la viscosité γ_1 . — La longueur de la bielle étant de 9 cm., j'utilise des solutions eau-glycérine dont la viscosité de Poiseuille par rapport à l'alcool, est 8,5 puis 31 :

	Longueur de la bielle	Distance Δl	Amplitude supérieure x_{os}	Amplitude inférieure x_{oi}	Période T_1 en sec.
Alcool à brûler $\gamma_1 = 1$	4,5	0	2,640	2,640	2,039
Eau-glycérine $\gamma_1 = 8,5$	9	0,04	1,020	1,065	2,133
Eau-glycérine $\gamma_1 = 31$	9	0,01	0,275	0,290	2,020

A) Lorsque la viscosité croît de 1 à 8,5 $\Delta T : T = (2,133 - 2,039) : 2 = 0,047$: la période varie dans le même sens que la viscosité, ce que confirme le résultat qualitatif déjà obtenu en chauffant la paroi extérieure du tube avec un bec Bunsen (§ 12, B).

Lorsque la viscosité croît de 8,5 à 31, T_1 diminue : la période varie au sens contraire de la viscosité. On explique ce résultat, inverse du précédent, par deux effets qui se superposent :

a) La période varie dans le même sens que la viscosité par suite de la modification de la loi des vitesses des tubes coaxiaux ;

b) La lame liquide adhérente à la paroi du tube, plus épaisse à la descente qu'à la montée diminue la période (§ 12, C) ; à partir d'une certaine viscosité ce second effet l'emporte.

B) Les images des ménisques coïncident en I au-dessous de leur position Δ d'équilibre. En valeur absolue le déplacement ΔI le plus petit correspond à la solution la plus visqueuse, mais le rapport du déplacement à l'amplitude $\Delta I : x_0$ est sensiblement invariable.

C) L'amplitude inférieure x_{0i} est plus grande que la supérieure x_{0s} (ces amplitudes sont mesurées à partir du niveau d'équilibre Δ , colonne en repos et non à partir du niveau de la coïncidence des images I, § 7, a). I est 0,15 mm. au-dessous de Δ .

22. Variation de la période avec la longueur l de la colonne. — Avec l'alcool dans le tube de $d = 1,10$ cm. :

$$\begin{array}{llllll} l_1 = 106,06 \text{ cm.} & x_{0i} = 1,76 & T_1 = 1'',577 & T^2 : l = 0,0234 & T : x_0 l = 85 \cdot 10^{-4} \\ l_2 = 194,02 & x_{0s} = 1,50 & T_2 = 2'',180 & 0,0245 & 74 \cdot 10^{-4} \end{array}$$

D'après la théorie (§ 5), T est proportionnel à \sqrt{l} , donc $T^2 : l$ doit être constant ; ici $T^2 : l$ varie comme l : quand l croît de 106 à 194 cm., la variation relative est 0,04 pour T^2 et 0,02 pour T . Essayons d'expliquer cet écart par une distribution des vitesses différente dans les bouts (de longueur l_0) et dans la colonne (de longueur $l - 2l_0$). Soient m et n les valeurs du coefficient M (éq. 3) pour chaque distribution de vitesse :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2ml_0 + n(l - 2l_0)}{2g}}$$

ou bien :

$$T^2 \times 2g : 4\pi^2 = nl - 2l_0(n - m);$$

en remplaçant dans cette équation T et l par les deux couples de nombres du tableau, on calcule :

$$n = 1,28, \quad 2l_0(1,28 - m) = 12.$$

Le coefficient m ne pouvant être inférieur à l'unité (§ 4) sa valeur est comprise entre 1 et 1,28; le minimum de l_0 est 21 cm. pour $m = 1$. Comme l'observation des bouts montre que le trouble ne dépasse guère 2 cm. de hauteur, celui-ci ne peut expliquer la variation de $T^2 : l$ en fonction de l : la loi des vitesses dans la colonne dépend de sa longueur.

22 bis. Étude du frottement interne. Viscosité de Poiseuille η et viscosité calculée η' . — A) *Énergie absorbée par le frottement interne.* Dans le cas de la distribution parabolique des vitesses, le travail du frottement dans le déplacement dx (§ 4, c), est :

$$(19) \quad d\bar{C} = 8\pi\eta l x' dx = f x' dx,$$

où η est la viscosité de Poiseuille, définie par l'écoulement dans un tube fin. Dans le mouvement des tubes liquides coaxiaux :

$$(20) \quad x = x_0 \sin(\omega t - \Sigma), \quad x' = x_0 \omega \cos(\omega t - \Sigma),$$

l'on peut faire $\Sigma = 0$ en changeant l'origine des temps, puisque la force appliquée n'intervient pas dans ce calcul; le travail du frottement par période :

$$\int_0^T f x' dx = \int_0^T f x_0 \omega \cos \omega t \cdot x_0 \omega \cos \omega t dt = \frac{f x_0^2 \omega^2 T}{2} = \frac{2 \pi^2 x_0^2 f}{T},$$

est proportionnel à $x_0^2 : T$ et non à x_0^2 .

B) *Énergie fournie par l'entretien.* La force imposée $F = N \sin \omega t$, fournit par période le travail :

$$(21) \quad \int_0^T F dx = \int_0^T N \sin \omega t \cdot x_0 \omega \cos(\omega t - \Sigma) dt = N \pi x_0 \sin \Sigma.$$

Écrivons l'égalité du travail fourni et absorbé :

$$(22) \quad 2 \pi x_0 f = N T \sin \Sigma,$$

expression qui lie x_0 et N , déjà trouvée dans l'intégrale d'Helmholtz (§ 5). Connaissant N , T , x_0 , l on peut calculer γ'_1 (éq. 21 et 22) :

$$(23) \quad \gamma'_1 = \frac{f}{2\pi l} = \frac{NT}{2\pi x_0 \cdot 8\pi l} = \frac{\rho g s_1 y_0 s' T : s_2}{158 x_0 l} \quad \text{ou} \quad \frac{PsT}{158 x_0 l}$$

suivant que la force est appliquée par le plongeur ou par la cloche hydraulique. Si nos hypothèses étaient exactes on devrait retrouver pour γ'_1 la valeur γ_1 fournie par l'écoulement (Poiseuille).

23. Énergie absorbée dans l'oscillation non entretenue. — Créons une forte pression sur l'un des bouts de la colonne; laissons-la osciller librement; mesurons les amplitudes inférieures successives : x_0 , x'_0 , x''_0 etc. : l'amortissement $x'_0 : x_0$, qui vaut $e^{-fT : 2M}$, permet le calcul de f et de γ'_1 . Sans méthode optique appropriée, la mesure des amplitudes est grossière et l'on ne calcule que l'ordre de grandeur de γ'_1 : on trouve que γ'_1 est quatre fois plus grand que γ_1 .

24. Comparaison de la viscosité calculée dans les deux méthodes d'entretien. — La colonne liquide (alcool de densité 0,88, de viscosité absolue $\gamma_1 = 0,016$) est entretenue successivement par :

A) Le plongeur de $d = 0,850$, immergé de 2 cm. :

$$\begin{aligned} d = 2 \text{ cm.} \quad s = 3,14 \text{ cm}^2 \quad \rho = 0,88 \quad g = 980 \quad s_1 : s_2 = 0,22 \\ y_0 = 2,87 \text{ cm.} \quad T = 1'',950 \quad x_0 = 2,26 \text{ cm.} \quad l = 187 \text{ cm.} \\ \gamma'_1 = \frac{\rho g s_1 y_0 s' T : s_2}{158 x_0 l} = 0,060. \end{aligned}$$

B) La cloche donnant une pression maximum de 0,620 cm. dans le manomètre rempli du même alcool :

$$\begin{aligned} P = 0,620 \delta g = 0,620 \times 0,88 \times 980 = 535 \\ d = 2 \text{ cm.} \quad s = 3,14 \text{ cm}^2 \quad T = 2'',060 \quad x_0 = 1,95 \text{ cm.} \quad l = 187,2 \text{ cm.} \\ \gamma'_1 = \frac{PsT}{158 x_0 l} = 0,060. \end{aligned}$$

Les deux méthodes donnent la même viscosité calculée, quatre fois supérieure à celle que définit l'écoulement. Pour une immersion de 2 cm., le plongeur n'accroît pas les frottements, ce qui est conforme aux résultats précédents : x_0 est indépendant de l'immersion (§ 11, b), x_0 est proportionnel à y_0 (§ 11, a).

25. Variation de la viscosité calculée γ' avec le diamètre d du tube. — La longueur de la bielle est 4,5 cm. pour le tube de $d = 1,1$ cm. et 3,0 cm. pour le tube de $d = 2,0$ cm. Les pressions maxima P, proportionnelles aux déplacements de la cloche, sont 4,5 K et 3 K :

Tube de $d = 1,1$ cm. ;		$s = 0,95$ cm ² .	
$P = 4,5$ K	$T = 2''$,144	$x_0 = 1,45$	$l = 187$
$\gamma' = K'PsT : x_0 = 6,32$ K''		$\gamma' : d = 5,7$ K''.	

Tube de $d = 2$ cm. ;		$s = 3,14$ cm ² .	
$P = 3$ K	$T = 2''$,040	$x_0 = 1,68$	$l = 187$
$\gamma' = K'PsT : x_0 = 11,4$ K''		$\gamma' : d = 5,7$ K''.	

Le frottement double quand le diamètre double : le rapport $\gamma' : d$ est invariable. Alors que dans l'écoulement, le frottement (pour la même vitesse moyenne x' , éq. 2 ter) est indépendant du diamètre, il lui est ici proportionnel : le frottement paraît localisé près de la surface latérale du tube, à laquelle il est proportionnel.

26. Variation de la viscosité calculée γ' avec l'amplitude x_0 . — En augmentant l'amplitude γ_0 de la cloche, faisons croître x_0 ; calculons PT : x_0 , proportionnel à γ' (éq. 23) : quand x_0 croît de 0,85 cm. à 2,64 cm., ce rapport (colonne 6, tableau du § 20), reste sensiblement invariable.

27. Variation de la viscosité calculée γ' avec la viscosité de Poiseuille γ . — Remplissons le tube de $d = 2$ cm., successivement d'alcool puis d'un mélange eau-glycérine dont la viscosité de Poiseuille par rapport à l'alcool, est 15,2 :

Alcool $\gamma = 1$	$T = 2,15$	$x_0 = 2,05$	$l = 188$	$T : x_0 = 1,05$
Eau-glycérine $\gamma = 15,2$	2,25	0,205	188	10,9

Quand la viscosité de Poiseuille est 15,2 fois plus grande, l'amplitude est 10 fois plus petite : la viscosité calculée γ' , proportionnelle à $T : x_0$ (éq. 23), croît moins vite que la viscosité de Poiseuille.

28. Variation de la viscosité calculée γ' avec la longueur l de la colonne. — La viscosité calculée γ' , théoriquement proportionnelle à $T : x_0 l$ (éq. 23), diminue de 85 à 74 quand la longueur croît de 106 à 194 cm., (colonne 5, tableau du § 22). Essayons d'expliquer cet écart par un frottement supplémentaire dans l'arrondi et

les deux bouts. Soit l_0 la longueur de la colonne qui absorberait la même énergie que ces trois frottements hypothétiques :

$$x_{01}(l_1 + l_0) : T_1 = x_{02}(l_2 + l_0) : T_2,$$

équation qui donne $l_0 = 35$ cm.

La perte de charge, dans le régime hydraulique a été déterminé par du Buat pour un tube arrondi :

$$P = \frac{U^2}{2g} \cdot \frac{l}{204 R} \sqrt{\frac{d}{R}},$$

expression dont la forme résulte de considérations théoriques et dont le coefficient 204 est empirique. Dans mon expérience, l'arrondi est une demi-circonférence de rayon $R = 0,15$ m., de longueur $l = \pi R$; le diamètre d du tube étant de 0,011 m., on a : $P = 0,004 U^2 : 2g$, la perte d'énergie n'est que les 4 : 1.000 de l'énergie cinétique. Il est vraisemblable que cette perte est aussi négligeable dans le régime visqueux, où nous opérons. Le trouble des filets aux bouts de la colonne ne dépasse pas une hauteur voisine du diamètre : ces trois effets ne peuvent expliquer la variation de $T : x_0 l$ avec l (comparer § 22).

III. — Étude des filets.

29. Passage du régime visqueux au régime hydraulique. — Pour l'écoulement dans un tube fin, la vitesse moyenne x' pour le changement de régime a été donnée par Reynolds :

$$x' = 2000 \gamma : \rho R.$$

Par exemple pour l'eau à 20° ($\gamma = 0,01$, $\rho = 1$), si le rayon R du tube est 0,91 cm., on trouve $x' = 22$ cm. sec. La colonne a sa vitesse maximum $x'_m = x_0 \omega$ (éq. 20) quand le ménisque traverse sa position d'équilibre; si $T = 2''$ ($\omega = 2\pi : T = \pi$), elle atteint cette vitesse si l'amplitude du départ est égale à $x_0 = x'_m : \omega = 22 : \pi = 8$ cm.

Déposons une goutte de paraffine chaude sur le bout d'un cristal cylindrique de permanganate; suspendons-le par cette extrémité sous la surface du ménisque : en se dissolvant, il donne un filet coloré de 0,1 cm. de diamètre, qui descend lentement et reste net sur une hauteur de plus 30 cm., tandis que sa base s'étale en une proue de diamètre croissant. Par une pression convenable, amenons la colonne à la distance x_0 de son niveau d'équilibre et laissons-la librement osciller : le *filet coloré ne se détruit que pour une valeur de x_0 supérieure à 24 cm., triple de celle fournie par Reynolds.*

30. Coloration d'un filet. — *a)* Entretenons la colonne : sans se diffuser, le filet présente, pour chaque maximum du ménisque, une accumulation de solution colorée, amorce d'une sphère qui se précise après une descente de 3 cm. Ces sphères se séparent en trains de deux, qui se rapprochent, la première P absorbant la seconde S (*fig. 12*). Ce phénomène s'obtient, sans oscillation, en trempant périodiquement un cristal de permanganate dans l'eau ; il s'explique par une dépression en *a*, derrière la première sphère P.

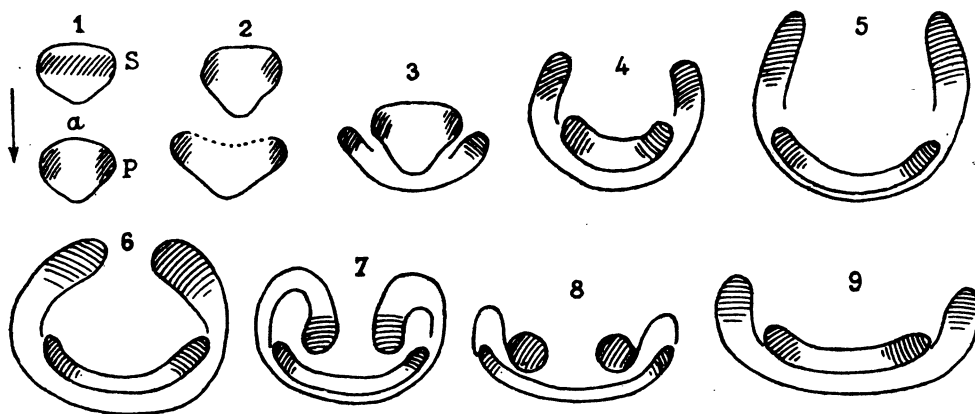


FIG. 12. — Attraction et absorption de sphères liquides.

Ces sphères ne subissent pas de déformations périodiques, synchrones de la colonne : la partie centrale de celle-ci se déplace en bloc contrairement à la loi parabolique des vitesses.

b) Pour colorer un filet fin, on laisse tomber un cristal sphérique de $d = 0,05$ cm., en inclinant un peu le tube pour que le cristal, à moitié descente, touche sa paroi : le filet reste net pendant 30 oscillations, puis se diffuse lentement. Près de la paroi, avant la fin de la montée, le point *m* (*fig. 13*) monte encore quand *n* commence à descendre. Le filet prend la position *cd* dans la descente, *c'd'* dans la montée : le point *c*, voisin du tube, est en avance de phase sur le point *d*.

Un bout de fil de cocon, abandonné près de la paroi, descend lentement, alternant, pour chaque demi-oscillation, les directions *cd*, *c'd'*.

31. Coloration d'une section. — Si l'on superpose deux liquides différents (eau-essence de térébenthine), leur surface de séparation *S* est très nette mais les forces qui résultent de la capillarité et de la différence des densités empêchent les déformations de *S* dues à l'oscillation : les deux colonnes sont autonomes.

Colorons par quelques gouttes de ptaleïne deux solutions aqueuses, légèrement l'une basique et l'autre acide. Remplissons le tube à moitié avec la seconde (la plus dense) et, chaque ménisque étant recouvert d'une légère rondelle de liège, amenons

l'autre solution par deux mèches. Dans ce remplissage symétrique, les rondelles s'élèvent en restant sur les ménisques, remontant les mèches qu'à la fin je retire avec elles. — Par ce procédé on peut aussi amener sans mélange de l'eau sur une solution de permanganate, mais la surface S de contact n'est pas aussi nette.

Lançons le pendule; pour des amplitudes de 3 cm., la surface S (*fig. 13*) reste nette pendant 100 oscillations; les densités des deux solutions étant voisines, si la forme de S est légèrement modifiée (l'existence des tourbillons aux bouts indique que le déplacement en bloc qu'indique la *fig. 13* n'est pas rigoureux), les directions

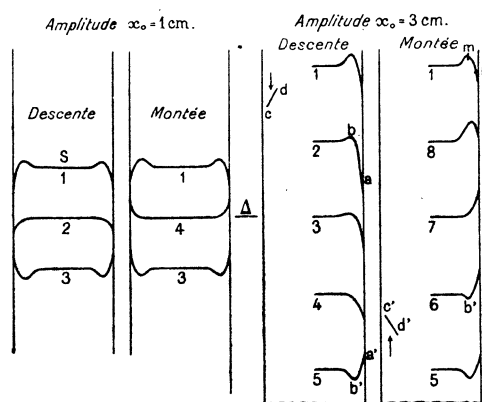


FIG. 13. — Coloration d'une section.

des vitesses sont les mêmes que pour une colonne homogène : les formes ab , $a'b'$ correspondent bien à celles (cd , $c'd'$) déjà trouvées pour les filets; les tubes coaxiaux voisins de la paroi sont en avance de phase sur la partie centrale qui se déplace en bloc.

32. Étude du bout de la colonne. — *a*) Pendant une oscillation d'amplitude $x_0 = 1,6$ cm., avec des pinces fines, je trempe, pendant un instant très bref, un cristal de permanganate dans la colonne en s (*fig. 14*). Le tore tourbillon, de révolution autour de l'axe Δ du tube, a un sens de rotation différent pendant la descente (tourbillon D) et pendant la montée (tourbillon M). Les vitesses de rotation du tore sur lui-même sont maxima quand la colonne passe par sa position d'équilibre; en valeur absolue elles sont plus grandes pendant la descente que pendant la montée : d'où résulte un mouvement moyen d'ensemble dans le sens D , la particule a revenant en b après une oscillation complète. Pour des amplitudes de plusieurs centimètres, la rotation du tore dans le sens D persiste près de la ligne centrale du tore même pendant la montée. Le tourbillon ne descend pas, au-dessous du ménisque, à une distance plus grande que le diamètre du tube.

Un petit cristal suspendu en c , donne un filet cd qui, après la montée, devient ced avec point anguleux en e , après la descente suivante passe en $ce'd'$, après quelques oscillations prend la forme mn .

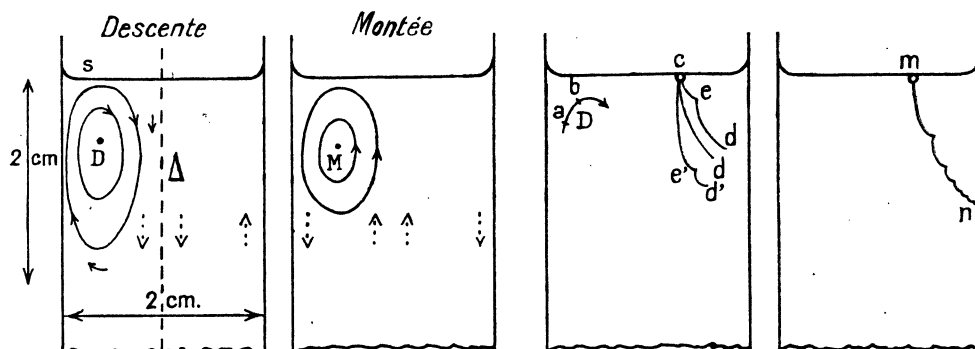


FIG. 14. — Tourbillon dans le bout de la colonne.

b) Le tourbillon est antérieur au décalage. Au bas d'un tube droit de $d = 2$ cm., on fixe un tuyau de caoutchouc muni d'un robinet. Des cristaux de permanganate c (fig. 15), collés au-dessous d'un bout d'allumette b dont la dimension horizontale est

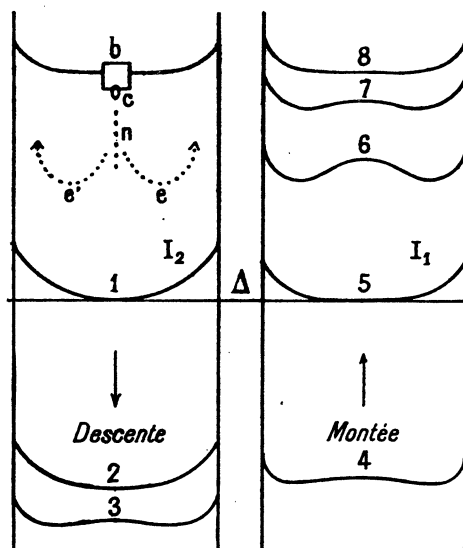


FIG. 15. — Déformation du ménisque.

un peu inférieure au diamètre du tube, donnent une nappe colorée n . Ouvrons lentement le robinet : dans le régime varié on observe l'enroulement ee' ; le régime permanent atteint, il n'y a plus de tourbillon. Celui-ci existe donc dès la première oscillation, avant tout décalage.

c) Le tourbillon favorise le décalage. Le mouvement (*fig. 14*) indiqué par les flèches pointillées (en fin de descente et de montée), est dans le sens d'une avance en phase des couches voisines de la paroi.

d) Au moment du passage par la position Δ d'équilibre, le ménisque est plus bombé pendant la descente (*fig. 15*, position 1), que pendant la montée (position 5). Aux instants t_1, t_2 (*fig. 8*), réalisons la coïncidence I_1, I_2 pour l'une des colonnes : elle a lieu un peu au-dessous de Δ . Aux mêmes instants t_1, t_2 , pour l'autre colonne, I_1 est au-dessus de I_2 de quelques millièmes de cm. En toute rigueur, la période T_1 de la colonne est obtenue quand les distances $I_1 I_2$ sont égales pour les deux colonnes.

Le ménisque est particulièrement déformé (pos. 6) avant la fin de la montée.

33. Explication de l'avance en phase des tubes périphériques. — Montrons qu'il ne peut y avoir à la fois distribution parabolique des vitesses et synchronisme des tubes coaxiaux. Supposons cette double condition vérifiée pour le premier quart d'oscillation : au moment du passage par leur position d'équilibre les vitesses des tubes voisins de l'axe sont supérieures aux vitesses des tubes périphériques. Pendant que la colonne se déplace de sa position d'équilibre à son maximum d'élongation, les tubes coaxiaux sont soumis :

a) A une force de rappel (due à la dénivellation du liquide et à la pression imposée), qui est une fonction du temps, la même pour tous les tubes.

b) A des frottements internes dont la résultante, pour le tube compris entre les cylindres de rayons r et $r + dr$, est § 4, c :

$$df = -\alpha l \cdot 2\pi r dr = -8\tau x' [1 : R^2] l \cdot 2\pi r dr,$$

puisque dans l'équation du § 4 il faut remplacer dx par la longueur l de la colonne. Ce frottement est la même fonction du temps [par la vitesse moyenne $x'(t)$], pour tous les tubes ayant même section $2\pi r dr$ et même volume $l \cdot 2\pi r dr$.

Tous les tubes étant soumis aux mêmes forces, ceux qui sont près de la paroi, ayant une vitesse inférieure à ceux voisins de l'axe, s'arrêteront les premiers, et sous l'action de la force de rappel, repartiront en sens inverse avant que les autres n'aient atteint leur maximum d'élongation.

Représentons les tubes coaxiaux [par des pendules simples ayant tous la même longueur l . Ils peuvent être synchrones, quoique ayant des amplitudes différentes, parce que la force de rappel est fonction de leurs élongations. Ici, pour le bout qui monte, le liquide se déverse du centre vers la périphérie et vice-versa pour le bout qui descend; le ménisque reste sensiblement horizontal : la force du rappel est la même pour tous les tubes; le synchronisme est impossible.

34. Relation entre le décalage, la période et la viscosité calculée. — L'avance en phase des tubes périphériques rend le mouvement plus voisin de l'oscillation en bloc : l'énergie cinétique est plus petite que pour la distribution parabolique; la période est diminuée. Au voisinage des maxima d'élongation, le taux $dv : dr$ est plus grand que pour le synchronisme : d'où l'augmentation apparente de la viscosité calculée. L'examen des filets montre que l'avance des tubes périphériques augmente quand d et x_0 croissent et que η décroît : d'où les variations de T et η' , résumés dans le tableau suivant (pour comparer ces variations, on les ramène, *en supposant la proportionnalité*, à leurs valeurs lorsque la variable double) :

Le décalage est augmenté lorsque :

D croît — si D double :	$\frac{\Delta T}{T} = -0,055,$	$\frac{\Delta \eta'}{\eta'} = +2,0;$
x_0 croît — si x_0 double :	$\frac{\Delta T}{T} = -0,010,$	$\frac{\Delta \eta'}{\eta'} = +0,00;$
η décroît — si η devient $\frac{\eta}{2}$:	$\frac{\Delta T}{T} = -0,006,$	$\frac{\Delta(\eta' : \eta)}{\eta' : \eta} = +0,5;$
l décroît — si l devient $\frac{l}{2}$:	$\frac{\Delta(T : \sqrt{l})}{T : \sqrt{l}} = -0,025,$	$\frac{\Delta \eta'}{\eta'} = +0,16.$

35. Position du problème mathématique. — Soit $X(t)$ l'élongation de la surface libre et $x(r, t)$, celle d'un tube élémentaire du rayon r . Les valeurs de X et x sont liées par la relation : $\pi R^2 X = \int_0^R 2\pi r x dr$.

Pour le tube élémentaire, on a :

$$\begin{aligned} \text{force vive} &= 2\pi r dr \cdot l \rho x'^2 : 2, \\ \text{travail de la pesanteur} &= -2\pi r dr \cdot x' dt \cdot \rho g 2X, \\ \text{travail des frottements} &= 2\pi \eta l \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial x'}{\partial r} \right) dr \cdot x' dt, \\ \text{travail d'entretien} &= 2\pi r dr \cdot a \sin \omega t \cdot x' dt. \end{aligned}$$

Le théorème des forces vives sous sa forme différentielle donne :

$$(24) \quad r l \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \eta l \left[\frac{\partial^2 x}{\partial r \partial t} + r \frac{\partial^2 x}{\partial r^2 \partial t} \right] + \frac{2r \rho g}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r x dr = a r \sin \omega t;$$

l'inconnue $x(r, t)$ est définie par une équation du troisième ordre, dont les coefficients contiennent r et où x figure dans une intégrale définie.

La fonction x , de période T , s'annule pour $r = R$; elle est donc de la forme :

$$x(r, t) = x_1(r) \sin [\omega t - \varphi_1(r)] + x_2(r) \sin [2\omega t - \varphi_2(r)] + \dots$$

Essayons de satisfaire à l'équation (24) par des expressions simples : la solution

$$x = a(R^2 - r^2) \sin (\omega t - \Sigma)$$

ne vérifie pas cette équation ; la solution :

$$x = x_1(r) \sin [\omega t - \varphi_1(r)] = a(r) \sin \omega t + b(r) \cos \omega t$$

conduit à un système d'équation linéaire, à coefficients contenant les variables, avec second membre constant. Les développements en série de a , b , autour du point $r = 0$, en fonction de a_0 , b_0 , a'_0 , b'_0 , sont alternés et lentement convergents : il est difficile de comparer cette solution aux résultats de l'expérience.

Dans un prochain mémoire, on étudiera l'oscillation dans un tube droit, plongeant dans un bassin : grâce à la dépression de la capsule C (*fig. 10*) le ménisque de la colonne est au-dessus de la surface libre du bassin. On étudiera les troubles apportés sur la période et le frottement par les ajutages et les diaphragmes. Après photographie du mouvement des tubes coaxiaux, on donnera les valeurs empiriques des coefficients de la solution de l'éq. 20.