ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

MICHEL MARKIČ

# Transformantes nouveau véhicule mathématique. Synthèse des triquaternions de Combebiac et du système géométrique de Grassmann. Calcul des quadriquaternions

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série*, tome 1 (1937), p. 201-248
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1937_4_1__201_0>

# TRANSFORMANTES
## NOUVEAU VÉHICULE MATHÉMATIQUE
# SYNTHÈSE
## DES TRIQUATERNIONS DE COMBEBIAC
## ET DU SYSTÈME GÉOMÉTRIQUE DE GRASSMANN
## CALCUL DES QUADRIQUATERNIONS

Par MICHEL MARKIČ (Markitch)
Professeur émérite, Ljubljana (Yougoslavie).

*(Suite.)*

---

## CHAPITRE V

### Synthèses.

#### § 23. — Les triquaternions exprimés par nos symboles.

Nous écrivons d'une façon abrégée :

$$(x\lambda) = x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + x_3\lambda_3.$$

Pour les opérateurs de Combebiac, il est possible d'obtenir deux propositions :

$$\boxed{\text{I.} \qquad \mu = \mu; \qquad \omega = l + \Psi = l + l\mu = l(1 + \mu)}$$

et par échange de $l$ et $\mu$ :

$$\boxed{\text{II.} \qquad \mu' = l; \qquad \omega' = \mu + \mu l = \mu - \Psi.}$$

Ce procédé d'écriture satisfait à la loi des triquaternions. Nous retenons seulement le premier (**2**, pag. 15) :

$$1)\quad \omega^2 = 0, \qquad 2)\quad \mu^2 = 1, \qquad 3)\quad \omega\mu = \omega, \qquad 4)\quad \mu\omega = -\omega.$$

Au reste, les opérateurs sont commutatifs avec les vecteurs axiaux $\lambda_m$.
En nos symboles :

$$1)\quad (l+\Psi)^2 = l^2 + l\Psi + \Psi l + \Psi^2 = 1 + \mu - \mu - 1 = 0.$$
$$2)\quad \mu^2 = 1,$$
$$3)\quad (l+\Psi)\mu = l\mu + \Psi\mu = \Psi + l,$$
$$4)\quad \mu(l+\Psi) = \mu l + \mu\Psi = -\Psi - l.$$

Dans la forme des transformantes isomorphes, on a :

$$^{\circ}\mu = \mu_{01} + \mu_{10} - \mu_{23} - \mu_{32},$$
$$^{*}\mu = \mu_{01} + \mu_{10} + \mu_{23} + \mu_{32},$$
$$^{\circ}\omega = \mu_{03} + \mu_{30} + \mu_{12} + \mu_{21} - \mu_{02} + \mu_{20} + \mu_{31} - \mu_{13},$$
$$^{*}\omega = \mu_{03} + \mu_{30} - \mu_{12} - \mu_{21} + \mu_{02} - \mu_{20} + \mu_{31} - \mu_{13}.$$

Notons quelques identités employées souvent :

$$1)\quad {}^{\circ}\omega.\underline{^{*}}\omega = 2(\mu_{33} - \mu_{22} + \mu_{23} - \mu_{32}),$$
$$2)\quad {}^{\circ}\mu.\underline{^{*}}\mu = {}^{\circ}\mu.{}^{*}\mu = \mu_{00} + \mu_{11} - \mu_{22} - \mu_{33},$$
$$3)\quad {}^{\circ}\omega.\underline{^{*}}\mu = {}^{\circ}\omega.{}^{*}\mu = -\mu_{03} + \mu_{30} - \mu_{12} + \mu_{21} + \mu_{02} + \mu_{20} + \mu_{31} + \mu_{13},$$
$$4)\quad {}^{\circ}\mu.\underline{^{*}}\omega = -\mu_{20} + \mu_{13} + \mu_{31} - \mu_{02} - \mu_{30} - \mu_{12} + \mu_{03} + \mu_{21}.$$

*Note.* — Si ${}^{*}\omega = \Sigma\mu_{mn}$, $\underline{^{*}}\omega$ dénote :

$$W.\Sigma\mu_{mn} = \Sigma\mu_{nm}.$$

De plus :

$$1)\quad {}^{\circ}\omega.\underline{^{*}}\omega.\mu = -\mu_1 + \mu_0 - \mu_0 + \mu_1 = 0,$$
$$2)\quad {}^{\circ}\mu.\underline{^{*}}\mu.\mu = \mu_1,$$
$$3)\quad {}^{\circ}\omega.\underline{^{*}}\mu.\mu = \mu_2 + \mu_3 = \omega,$$
$$4)\quad {}^{\circ}\mu.\underline{^{*}}\omega.\mu = \mu_3 + \mu_2 = \omega;$$

$$5)\quad {}^{\circ}\omega.\underline{^{*}}\omega.\omega = -\mu_2 - \mu_3 - \mu_3 - \mu_2 + \mu_3 + \mu_2 + \mu_2 + \mu_3 = 0.$$
$$6)\quad {}^{\circ}\mu.\underline{^{*}}\mu.\omega = -\mu_2 - \mu_3 = -\omega,$$
$$7)\quad {}^{\circ}\omega.\underline{^{*}}\mu.\omega = -\mu_1 + \mu_0 - \mu_0 + \mu_1 = 0,$$
$$8)\quad {}^{\circ}\mu.\underline{^{*}}\omega.\omega = -\mu_0 - \mu_1 + \mu_1 + \mu_0 = 0;$$

9) $^{\circ}\omega . \mu = \mu_2 + \mu_3 = \omega$,
10) $^{*}\omega . \mu = - \mu_2 - \mu_3 = - \omega$,
11) $^{\circ}\omega . \omega = \mu_1 - \mu_0 + \mu_0 - \mu_1 = 0$,
12) $^{*}\omega . \omega = - \mu_1 - \mu_0 + \mu_0 + \mu_1 = 0$;

13) $^{\circ}\mu . \mu = \mu_0$,
14) $^{*}\mu . \mu = \mu_0$,
15) $^{\circ}\mu . \omega = - \mu_3 - \mu_2 = - \omega$,
16) $^{*}\mu . \omega = \mu_3 + \mu_2 = \omega$.

## § 24. — L'interprétation géométrique des trois systèmes.

Gaston Combebiac a exprimé (**2**, pag. 19) :

*a*) Le point de coordonnées $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}$ :

$$\mu x_0 + \omega(ix_1 + jx_2 + kx_3).$$

Nous écrivons :

$$m_e = x_0\mu + (x\lambda)\omega .$$

*b*) Un plan d'équation

$$\beta_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

est exprimé par

$$\omega\beta_0 + \mu(i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3).$$

Représentation plus brève, si $\alpha = (\alpha\lambda)$ :

$$p_e = \beta_0\omega + \alpha\mu .$$

*c*) De même s'exprime une droite avec les coordonnées linéaires

$$\frac{p_{01}}{\alpha_1} : \frac{p_{02}}{\alpha_2} : \frac{p_{03}}{\alpha_3} : \frac{p_{23}}{\beta_1} : \frac{p_{31}}{\beta_2} : \frac{p_{12}}{\beta_3}$$

par

$$i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3 + \omega(i\beta_1 + j\beta_2 + k\beta_3)$$

sous la condition :

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0 .$$

On peut plus brièvement écrire :

$$d_e = \alpha + \beta\omega, \qquad \alpha \perp \beta .$$

Les symboles électifs des produits de ces grandeurs « $r$ » sont G$r$ = un nombre ordinaire, L$r$ pour un point et une droite et P$r$ pour un plan. Voir (**2**, pag. 22.)

Avant d'aller plus loin dans notre dissertation, nous devons établir notre propre système des quadriquaternions ou le $\mu$-$\lambda$-système.

## § 25. — Les formes géométriques dans notre système.

Soient des vecteurs axiaux :

$$\xi = (x\lambda), \qquad \eta = (y\lambda), \qquad \vartheta = (t\lambda), \qquad \zeta = (z\lambda).$$

Alors si $m$ représente un point, $d$ une droite, $p$ un plan, $\Psi$ une partie d'espace, on a :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) | $1 = 1,$ | ou | $1 = \mu_0\lambda_0,$ | |
| 2) | $m = x_0\mu + l\xi,$ | » | $m = x_0\mu_1\lambda_0 + \mu_3(x\lambda),$ | |
| 3) | $d = \eta + \Psi\vartheta,$ | » | $d = \mu_0(y\lambda) + \mu_2(t\lambda),$ | $\eta \perp \vartheta,$ |
| 4) | $p = \mu\zeta + z_0 l,$ | » | $p = \mu_1(z\lambda) + \mu_3 z_0\lambda_0,$ | |
| 5) | $\Psi = l\mu;$ | » | $\Psi = \mu_2\lambda_0.$ | |

Ainsi $x_0\mu = m_0$, $\Psi\vartheta = d_0$, $\mu\zeta = p_0$ sont les formes fixes d'espace, qui renferment le point origine; $l\xi$, $\eta$, $z_0 l$ sont les formes vectorielles, c'est-à-dire les formes mouvantes et réprésentent successivement la différence de deux points; un parallélogramme, c'est la différence de deux droites limitées et la différence de deux plans. Ces parties vectorielles permettent des transformations conformes aux équations :

$$1)\quad m = m_0 + (-m_0 + m) = (m_0 - m_0) + m,$$
$$2)\quad d = d_0 + (-d_0 + d) = (d_0 - d_0) + d,$$
$$3)\quad p = p_0 + (-p_0 + p) = (p_0 - p_0) + p.$$

Nos symboles électifs pour les produits sont :

$G_0$ pour un nombre ordinaire, $G_1$ pour un point fixe, $G_2$ pour une droite fixe, $G_3$ pour un plan fixe et $G_4$ pour une partie d'espace tridimensionel.

Donc $G_1$, $G_2$, $G_3$ se décomposent en deux membres, un membre fixe passant par le point d'origine et un membre vectoriel : $G_n = F_n + V_n$ ou $G_n = G_{n1} + G_{n2}$, $n = 1, 2, 3$. $G_0$ et $G_4$ ne contiennent qu'un seul membre.

Tous ces symboles sont, comme S, V pour Hamilton et G, L, P chez Combebiac, transformantes électives, savoir :

$$G_0 \equiv \mu_{00}\lambda_{00}, \qquad G_1 \equiv \mu_{11}\lambda_{00} + \mu_{33}\Sigma\lambda_{nn},$$
$$G_4 \equiv \mu_{22}\lambda_{00}; \qquad G_2 \equiv (\mu_{22} + \mu_{00})\Sigma\lambda_{nn},$$
$$G_3 \equiv \mu_{11}\Sigma\lambda_{nn} + \mu_{33}\lambda_{00};$$
$$n = 1, 2, 3.$$

A cela :

$$F_1 \equiv \mu_{11}\lambda_{00}, \qquad V_1 \equiv \mu_{33}\Sigma\lambda_{nn},$$
$$F_2 \equiv \mu_{22}\Sigma\lambda_{nn}, \qquad V_2 \equiv \mu_{00}\Sigma\lambda_{nn},$$
$$F_3 \equiv \mu_{11}\Sigma\lambda_{nn}; \qquad V_3 \equiv \mu_{33}\lambda_{00}.$$

En somme huit symboles électifs différents, de sorte que deux symboles multipliés l'un par l'autre $= 0$, excepté $F_n G_n = F_n$, $V_n G_n = V_n$.

## § 26. — La comparaison des symboles de Combebiac pour les formes d'espace avec les nôtres.

Les symboles de Combebiac permettent deux différentes interprétations. Le même terme indique :

| | | | |
|---|---|---|---|
| chez Combebiac un point : | $m_c$, | dans notre système : | $m_0 + m_\infty + d_0$, |
| » une droite : | $d_c$, | » : | $d_\infty + m_\infty + d_0$, |
| » un plan : | $p_c$, | » : | $p_0 + p_\infty + m_0 p_\infty$; |

où $m_0$, $d_0$, $p_0$ représentent un point respectivement, une droite et un plan passant par le point origine, parties fixes; $m_\infty$, $d_\infty$, $p_\infty$ sont les parties vectorielles, $m_0 p_\infty$ un solide géométrique :

$$d_0 = m_0 m_\infty, \qquad m_0 + m_\infty = m, \qquad d_0 + d_\infty = d, \qquad p_0 + p_\infty = p.$$

De plus, $m_c$ et $m$ sont : 1) égaux à l'égard de la situation,

mais : 2) inégaux à l'égard de la composition.

Ils sont « non isomorphes », ou « hétéromorphes ». En symboles :

$$1)\quad m_e \,(=)\, m, \qquad\qquad 2)\quad m_e \,\{\mp\}\, m.$$

Le même vaut pour $d_e$, $d$ et pour $p_e$, $p$.

La multiplication des uns ou des autres opérateurs avec un nombre arbitraire (ordinaire ou imaginaire) ne change pas leur situation :

$$sm_e \,(=)\, m_e \ \text{resp.}\ sm \,(=)\, m; \ \text{aussi}\ -m \,(=)\, +m \ \text{et}\ i_n m \,(=)\, m, \ \text{etc.}$$

La composition des $m, d, p$, formes purement géométriques, suit les lois de Grassmann; la composition des $m_e$, $d_e$, $p_e$ est plutôt celle des dynames réfléchis. Voir (**2**, pag. 118, 119.)

Aussi dans les termes de Combebiac nous pouvons distinguer une partie fixe ou fixée et une partie vectorielle :

$$m_e = \mathrm{F}' m_e + \mathrm{V}' m_e, \qquad d_e = \mathrm{F}'' d_e + \mathrm{V}'' d_e, \qquad p_e = \mathrm{F}''' p_e + \mathrm{V}''' p_e.$$
$$\mathrm{F}' = \mathrm{F}_1,\quad \mathrm{F}'' = \mathrm{V}_2,\quad \mathrm{F}''' = \mathrm{F}_3;\quad \mathrm{V}' = \mathrm{V}_1 + \mathrm{F}_2,\quad \mathrm{V}'' = \mathrm{V}_1 + \mathrm{F}_2,\quad \mathrm{V}''' = \mathrm{V}_3 + \mathrm{G}_4.$$

On voit que dans $m_e$, $m$ et $p_e$, $p$ les parties fixes s'accordent et que les parties vectorielles se correspondent.

Dans $d_e$, $d$ les deux parties échangent leurs rôles, comme

$$(d_e = \vartheta + \omega\eta) \,(=)\, (d = \eta - \Psi\vartheta).$$

Ceci lié avec la différente interprétation des vecteurs $\eta$, $\vartheta$. Au premier cas $\eta$, $\vartheta$ sont vecteurs axiaux auxiliaires, au deuxième cas $\eta$, $\vartheta$ sont parallélogrammes. « $\vartheta$ » dans la première, $-\Psi\vartheta = \mu l \vartheta$, dans la deuxième équation, indiquent la direction de la droite; $\omega\eta$ et $\eta$ déterminent la distance de la droite au point origine.

La preuve suit dans le § 27, 1 b).

$\xi$, $l\xi$, $\omega\xi$ sont trois vecteurs différents : $\xi$ est un vecteur axial, $l\xi$ un vecteur polaire; $\omega\xi = (l + l\mu)\xi$ est, selon notre interprétation, $= l\xi - \mu l\xi = m_\infty - d_0$, $m_\infty$ et $d_0$ se rapportant à la même direction. Chez Study (**6**, pag. 27) $= \mathfrak{S}'' + \mathfrak{S}'$.

Le même facteur « $(1 + \mu)$ » convertit comme $\xi l$; ainsi $\xi l\mu = \xi\Psi$ dans $\xi\omega$; car $l(1 + \mu) = \omega$, et $\Psi(1 + \mu) = \omega = \mu_2 + \mu_3$.

Selon la conception de Combebiac $\xi$ est un vecteur axial auxiliaire, $l\xi$ n'existe pas et $\omega\xi$ est un vecteur incompréhensible, polaire et axial, comme $\mathrm{V}'\omega\xi = \mathrm{V}''\omega\xi$.

Malgré cette différence de conception, on peut transformer $m_e$, $d_e$, $p_e$ en les correspondantes $m$, $d$, $c$. A savoir :

$$\mathfrak{G}_1 m_e = m, \qquad \mathfrak{G}_2 d_e = d, \qquad \mathfrak{G}_3 p_e = p$$

et vice versa

$$\mathcal{L}_1 m = m_c, \qquad \mathcal{L}_2 d = d_c, \qquad \mathcal{L}_3 p = p_c.$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{G}_1 = \mu_{11}\lambda_{00} + \mu_{33}\Sigma\lambda_{nn}, & \mathcal{L}_1 = \mu_{11}\lambda_{00} + (\mu_{33} + \mu_{23}).\Sigma\lambda_{nn}, \\ \mathcal{G}_2 = -\mu_{02}\Sigma\lambda_{nn} + \mu_{20}\Sigma\lambda_{nn}, & \mathcal{L}_2 = +(\mu_{30} + \mu_{20})\Sigma\lambda_{nn} - \mu_{02}\Sigma\lambda_{nn}, \\ \mathcal{G}_3 = \mu_{11}\Sigma\lambda_{nn} + \mu_{32}\lambda_{00}; & \mathcal{L}_3 = \mu_{11}\Sigma\lambda_{nn} + (\mu_{33} + \mu_{23})\lambda_{00}. \\ \multicolumn{2}{c}{n = 1, 2, 3.} \end{array}}$$

A présent le rôle double du $\omega\xi$ apparaît dans l'expression $(V_1 + F_2)\omega\xi = \omega\xi$ :

$$1)\quad \mathcal{G}_1\omega\xi = \mu_3(x\lambda) = l\xi; \qquad 2)\quad \mathcal{G}_2\omega\xi = -\mu_0(x\lambda) = -\xi.$$

1) vecteur polaire, 2) vecteur axial.

Au moyen de ces transformantes il est possible que tous les résultats du calcul des triquaternions restent en vigueur et après la transformation concordent, comme nous le montrerons à propos du même thème, avec les résultats trouvés d'après nos points de vue.

## § 27. — **Produits.**

Nous mettons à l'avance la comparaison avec les formules de Combebiac (**2**, pag. 22).

| | $mm'$ | $dd'$ | $pp'$ | $md$ | $mp$ | $dp$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $G_0$ | + | + | + | o | o | o |
| $G_1$ | o | o | o | — | o | + |
| $G_2$ | — | — | — | o | + | o |
| $G_3$ | o | o | o | + | o | — |
| $G_4$ | o | + | o | o | — | o |
| | $m'm$ | $d'd$ | $p'p$ | $dm$ | $pm$ | $pd$ |

Le signe « + » signifie « commutatif ». Le signe « — » signifie le changement de signe lors du renversement des deux facteurs. Le signe « o » veut dire : le produit est identiquement égal à zéro. Par exemple :

$$G_0 mm' = G_0 m'm, \qquad G_1 mm' = G_1 m'm \equiv 0, \qquad G_2 mm' = -G_2 m'm, \qquad \text{etc.}$$

1) *Produit de deux points.*

$$m = x_0\mu + l\xi, \qquad \xi = (x\lambda), \qquad \lambda_1 = i, \qquad \lambda_2 = j, \qquad \lambda_3 = k.$$
$$m' = x'_0\mu + l\xi', \qquad \xi' = (x'\lambda); \qquad V \equiv V_2, \qquad S \equiv G_0.$$
$$mm' = x_0x'_0 + x'_0\Psi\xi - x_0\Psi\xi' + \xi\xi';$$
$$m'm = x'_0x_0 + x_0\Psi\xi' - x'_0\Psi\xi + \xi'\xi.$$

$$\text{1 a)} \quad G_0 mm' = G_0 m'm = x_0x'_0 + S\xi\xi'.$$

*Discussion.* — Si $G_0 mm' = 0$, on a

$$x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 = x_0x'_0$$

ou

$$\frac{x_1}{x_0}\cdot\frac{x'_1}{x'_0} + \frac{x_2}{x_0}\cdot\frac{x'_2}{x'_0} + \frac{x_3}{x_0}\cdot\frac{x'_3}{x'_0} = 1,$$

c'est-à-dire que :

Si le point $x'$ est arrêté, alors les points $x$ se trouvent dans un plan, ils forment un champ planaire de points. Ce plan est un polaire du point $x'$ en relation avec une sphère $K_0$, c'est-à-dire une sphère dont le centre est le point origine et dont le rayon est égal à l'unité, ou comme on dit encore : les points $x$ et $x'$ ($m$ et $m'$) sont dans ce cas « conjugués ».

Si $G_0 mm' > 0$, le terme mérite un nom spécial, peut-être « excès polaire » de deux points.

Si les points coïncident, alors l'excès polaire devient la « potence » d'un de ces points relativement à la sphère $K_0$.

$$\text{1 b)} \quad G_2 mm' = -G_2 m'm = V\xi\xi' + \Psi(x'_0\xi - x_0\xi') = d.$$

$d$ est un segment de la droite passante par $m$ et $m'$ dans la direction $m \rightarrow m'$, comme chez Grassmann :

$$l\xi = -e_0 + e_1, \qquad l\xi' = -e_0 + e_2,$$
$$V.\xi l.l\xi' = V.\xi\xi' = (-e_0 + e_1)(-e_0 + e_2) = e_0e_1 + e_1e_2 + e_2e_0,$$

en posant, pour la simplicité, les poids des points $x_0$ et $x'_0 = 1$.

Alors

$$\Psi(\xi-\xi')=-\mu l(\xi-\xi')=e_0(l\xi'-l\xi)=e_0[-e_0+e_2-(-e_0+e_1)]=e_0e_2-e_0e_1.$$

Ainsi

$$G_2.mm'=(e_0e_1+e_1e_2+e_2e_0)+(e_0e_2-e_0e_1)=e_1e_2.$$

Or

$$\begin{aligned}V.\xi\xi'+\Psi(x'_0\xi-x_0\xi')&=\lambda_3(x_1x'_2-x_2x'_1)+\lambda_2(x_3x'_1-x_1x'_3)+\lambda_1(x_2x'_3-x_3x'_2)\\&+\Psi[\lambda_3(x_3x'_0-x_0x'_3)+\lambda_2(x_2x'_0-x_0x'_2)+\lambda_1(x_1x'_0-x_0x'_1)].\end{aligned}$$

Selon Study (**6**, pag. 128) :

$$\begin{aligned}&x_0x'_1-x'_0x_1=p_{01}, &&x_2x'_3-x'_2x_3=p_{23},\\&x_0x'_2-x'_0x_2=p_{02}, &&x_3x'_1-x'_3x_1=p_{31},\\&x_0x'_3-x'_0x_3=p_{03}, &&x_1x'_2-x'_1x_2=p_{12}.\end{aligned}$$

D'après cela :

$$G_2mm'=kp_{12}+jp_{31}+ip_{23}-\Psi(kp_{03}+jp_{02}+ip_{01})\equiv\eta-\Psi.\vartheta=d.$$

Au contraire, chez Combebiac, on a :

$$\begin{aligned}d_c&=\alpha_1i+\alpha_2j+\alpha_3k+\omega(\beta_1i+\beta_2j+\beta_3k)\\&=p_{01}i+p_{02}j+p_{03}k+\omega(p_{23}i+p_{31}j+p_{12}k)=\vartheta+\omega\eta.\end{aligned}$$

Tout différent est le résultat de $m_c m'_c$. Nous écrivons au lieu de G, L, P : $C_0$, $C_1$ resp. $C_2$, $C_3$. Alors si $m_c=x_0\mu+\omega\xi$, $m'_c=x'_0\mu+\omega\xi'$, on a

$$C_0m_cm'_c=x_0x'_0 \qquad \text{et} \qquad C_2m_cm'_c=\omega(x'_0\xi-x_0\xi'),$$

vecteur tout comme le produit de deux points réfléchis.

Il faut encore remarquer que dans les deux cas $G_2$ et $C_2$, si dans les termes $\eta-\Psi\vartheta$ et $\vartheta+\omega\eta$, $\eta$ et $\vartheta$ ne sont pas mutuellement perpendiculaires, ils représentent un complexe linéaire équivalent à deux segments linéaires gauchis.

1 c) $\qquad G_1mm'\equiv 0, \qquad G_3mm'\equiv 0, \qquad G_4mm'\equiv 0.$

En général, on peut dire que

$$G_s.m_1m_2\ldots m_n\equiv 0,$$

si $s$ est un nombre pair et $n$ un nombre impair;
» $s$ » impair » $n$ » pair.

2) *Trois points.*

$$m_1 = x_0\mu + l\xi\,,$$
$$m_2 = y_0\mu + l\eta\,,$$
$$m_3 = z_0\mu + l\zeta\,.$$

$$\text{2 a)}\quad G_3 . m_1 m_2 m_3 = \mu(z_0 V\xi\eta - y_0 V\xi\zeta + x_0 V\eta\zeta) + lS\xi\eta\zeta = p\,.$$

Ici $p$ est un plan passant par les points $m_1$, $m_2$, $m_3$ avec un tenseur égal à la double aire du triangle $m_1 m_2 m_3$.

La position positive est $m_1 \rightarrow m_2 \rightarrow m_3 \rightarrow m_1$.

Ceci devient évident, si on fait attention au dogme § 209 (**1**, pag. 123) et § 101 (**1**, pag. 55).

On obtient ce résultat plus simplement par le calcul de Grassmann. Nous simplifions le calcul en posant

$$x_0 = y_0 = z_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad m_n = e_n; \qquad n = 1, 2, 3, \qquad \mu = e_0\,.$$

Alors

$$G_3 m_1 m_2 m_3 = e_1 e_2 e_3\,.$$

D'autre part, on a :

$$V\xi\eta = V . l\xi . l\eta = (-e_0 + e_1)(-e_0 + e_2)\,.$$

De même

$$V\eta\zeta = (-e_0 + e_2)(-e_0 + e_3)\,,$$
$$V\zeta\xi = (-e_0 + e_3)(-e_0 + e_1)\,.$$

Par conséquent :

$$\mu(V\xi\eta + V\eta\xi + V\zeta\xi) = e_0 e_1 e_2 + e_0 e_2 e_3 + e_0 e_3 e_1\,.$$

De plus

$$l . S\xi\eta\zeta = l\xi . l\eta . l\zeta = (-e_0 + e_1)(-e_0 + e_2)(-e_0 + e_3)$$
$$= -e_0 e_2 e_3 - e_1 e_0 e_3 - e_1 e_2 e_0 + e_1 e_2 e_3\,.$$

La somme $= e_1 e_2 e_3$.

*N. B.* — La somme des quatre vecteurs axiaux représentant les quatre faces du tétraèdre $e_0 e_1 e_2 e_3$ est égale à zéro, car ils sont parallèlement mobiles dans l'espace entier. Cela ne vaut pas pour la somme de quatre faces mobiles seulement dans leurs plans fixes. *Cf.*

$$\begin{gathered}(e_0 e_1 + e_1 e_2 + e_2 e_0) + (e_0 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_0) \\ + (e_0 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_0) + (e_1 e_3 + e_3 e_2 + e_2 e_1) = 0 .\end{gathered}$$

Mais :

$$e_0 e_1 e_2 + e_0 e_2 e_3 + e_0 e_3 e_1 + e_1 e_3 e_2 \neq 0 .$$

Si par exemple le point $m_1$ se trouve sur la droite $G_2 m_2 m_3$, alors le produit $G_3 . m_1 m_2 m_3 = 0$, comme on obtient de suite, si on égalise $m_1 = c_2 m_2 + c_3 m_3$, où $c_2$ et $c_3$ sont des nombres ordinaires.

De nouveau une autre chose chez Combebiac; ici $m_c$ et $d_c$ dans $C_3 m_c d_c$ jouent le même rôle qu'un point réfléchi et respectivement une droite réfléchissante passant par ce point $m_c$, parce que leur produit est $\bar{p}_c$ perpendiculaire sur $d_c$ au point $m_c$.

$$2\text{ b)} \quad G_1 . m_1 m_2 m_3 = m'_2 .$$

$$m'_2 = \mu(z_0 S\xi\eta - y_0 S\xi\zeta + x_0 S\eta\zeta + x_0 y_0 z_0) + l(y_0 z_0 \xi - x_0 z_0 \eta + x_0 y_0 \zeta + V\xi\eta\zeta)$$

et comme

$$V\xi\eta\zeta = \xi S\eta\zeta - \eta S\xi\zeta + \zeta S\xi\eta \qquad (1, \text{pag. } 48) :$$

$$\boxed{\begin{aligned} m'_2 = \mu(z_0 S\xi\eta - y_0 S\xi\zeta + x_0 S\eta\zeta + x_0 y_0 z_0) \\ + l(\xi G_0 m_2 m_3 - \eta G_0 m_3 m_1 + \zeta G_0 m_1 m_2) .\end{aligned}}$$

De plus

$$\begin{gathered} m'_2 = c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3 + c_4 \mu = (c_1 x_0 + c_2 y_0 + c_3 z_0 + c_4)\mu + l(c_1 \xi + c_2 \eta + c_3 \zeta) . \\ c_1 x_0 + c_2 y_0 + c_3 z_0 + c_4 = z_0 S\xi\eta - y_0 S\xi\zeta + x_0 S\eta\zeta + x_0 y_0 z_0 .\end{gathered}$$

Ceci est :

$$\begin{aligned} c_1 &= y_0 z_0 + S\eta\zeta = G_0 m_2 m_3 , \\ c_2 &= -(x_0 z_0 + S\zeta\xi) = - G_0 m_3 m_1 , \\ c_3 &= x_0 y_0 + S\xi\eta = G_0 m_1 m_2 , \\ c_4 &= z_0 S\xi\eta - y_0 S\xi\zeta + x_0 S\eta\zeta + x_0 y_0 z_0 \\ &\quad - x_0 y_0 z_0 - x_0 S\eta\zeta + x_0 y_0 z_0 + y_0 S\zeta\xi - x_0 y_0 z_0 - z_0 S\xi\eta = 0 .\end{aligned}$$

Le point $m'_2$ est alors en relation numérique avec $m_1$, $m_2$, $m_3$ et est dérivable non plus que de ces trois points; alors le point se trouve dans le plan $G_3.m_1m_2m_3$.

On obtient par échange circulaire des indices :

$$\boxed{\begin{aligned} m'_2 &= G_1.m_1m_2m_3 = m_1G_0m_2m_3 - m_2G_0m_3m_1 + m_3G_0m_1m_2, \\ m'_3 &= G_1.m_2m_3m_1 = m_2G_0m_3m_1 - m_3G_0m_1m_2 + m_1G_0m_2m_3, \\ m'_1 &= G_1.m_3m_1m_2 = m_3G_0m_1m_2 - m_1G_0m_2m_3 + m_2G_0m_3m_1. \end{aligned}}$$

*Cf.* la formule analogue de Hamilton (**1**, pag. 48, § 90) :

$$V\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta.$$

La somme donne :

$$\begin{aligned} &\underline{G_1.m_1m_2m_3} + G_1.m_2m_3m_1 + G_1.m_3m_1m_2 \\ &\qquad = \underline{m_1G_0m_2m_3 - m_2G_0m_3m_1 + m_3G_0m_1m_2} + 2m_2G_0m_3m_1. \end{aligned}$$

Comme les termes soulignés s'annulent, on a :

$$G_1m_2m_3m_1 + G_1m_3m_1m_2 = 2m_2G_0m_3m_1$$

ou

$$\boxed{m'_3 + m'_1 = 2m_2G_0m_3m_1.}$$

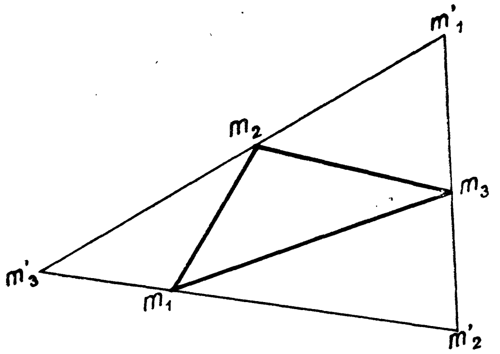

FIG. 6.

Par conséquent les points

$m'_3$, $m'_1$ et $m_2$,

pareillement

$m'_1$, $m'_2$ » $m_3$,
$m'_2$, $m'_3$ » $m_1$

se trouvent sur une droite (*fig. 6*).

Autres dérivations :

$$\begin{aligned} G_1.m_1m_2m_3 &= G_1.m_1(G_0m_2m_3 + G_2m_2m_3); \\ G_2.m_2m_3 &= (y_0\mu + l\eta)(z_0\mu + l\zeta) = \psi(z_0\eta - y_0\zeta) + V\eta\zeta; \\ G_1(m_1.G_2m_2m_3) &= G_1(x_0\mu + l\xi)[\Psi(z_0\eta - y_0\zeta) + V\eta\zeta] \\ &= -l(x_0z_0\eta - x_0y_0\zeta) + \mu(z_0S\xi\eta - y_0S\xi\zeta) + l.V.\xi V\eta\zeta. \end{aligned}$$

En considérant

$$l.\mathrm{V}.\xi\mathrm{V}\eta\zeta = l(\zeta\mathrm{S}\xi\eta - \eta\mathrm{S}\xi\zeta) \qquad (\mathbf{1}, \text{pag. } 48, \S\ 90).$$

on obtient finalement :

$$\boxed{\mathrm{G}_1(m_1\mathrm{G}_2m_2m_3) + \mathrm{G}_1(m_2\mathrm{G}_2m_3m_1) + \mathrm{G}_1(m_3\mathrm{G}_2m_1m_2) = 0.}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{G}_1.m_1m_2m_3 + \mathrm{G}_1.m_2m_3m_1 + \mathrm{G}_1.m_3m_1m_2\\ &\qquad = m_1\mathrm{G}_0m_2m_3 + m_2\mathrm{G}_0m_3m_1 + m_3\mathrm{G}_0m_1m_2.\end{aligned}}$$

$$\boxed{\mathrm{G}_1(m_1\mathrm{G}_2m_2m_3) = m_3\mathrm{G}_0m_1m_2 - m_2\mathrm{G}_0m_3m_1.}$$

*Cf.* la formule analogue de Hamilton :

$$\mathrm{V}.\alpha\mathrm{V}\beta\gamma = \gamma\mathrm{S}\alpha\beta - \beta\mathrm{S}\gamma\alpha \qquad (\mathbf{1}, \text{pag. } 48, \S\ 90).$$

Il suit de la formule ci-dessus que les points suivants sont placés sur une ligne droite, de même qu'ils sont dans une relation numérique :

$$\begin{array}{ccc} m_2'', & m_3, & m_2; \\ m_3'', & m_1, & m_3; \\ m_1'', & m_2, & m_1; \\ m_1'', & m_2'', & m_3''. \end{array}$$

Nous désignons $\mathrm{G}_1(m_1,\ \mathrm{G}_2m_2m_3)$ par $m_2''$. Par conséquent

$$\mathrm{G}_1(m_2\mathrm{G}_2m_3m_1) = m_3'',$$
$$\mathrm{G}_1(m_3\mathrm{G}_2m_1m_2) = m_1''.$$

Plus haut, nous avons trouvé que, de même, les points suivants se trouvent sur une droite :

$$\begin{array}{ccc} m_3', & m_1', & m_2; \\ m_1', & m_2', & m_3; \\ m_2', & m_3', & m_1. \end{array}$$

De l'équation :

$$G_1 . m_1 m_2 m_3 = G_1 . m_1 G_0 m_2 m_3 + G_1 . m_1 G_2 m_2 m_3$$

il résulte aussi que les points :

$$\begin{array}{ccc} m'_2, & m_1, & m''_2; \\ m'_3, & m_2, & m''_3; \\ m'_1, & m_3, & m''_1 \end{array}$$

sont situés sur une droite (*fig.* 7).

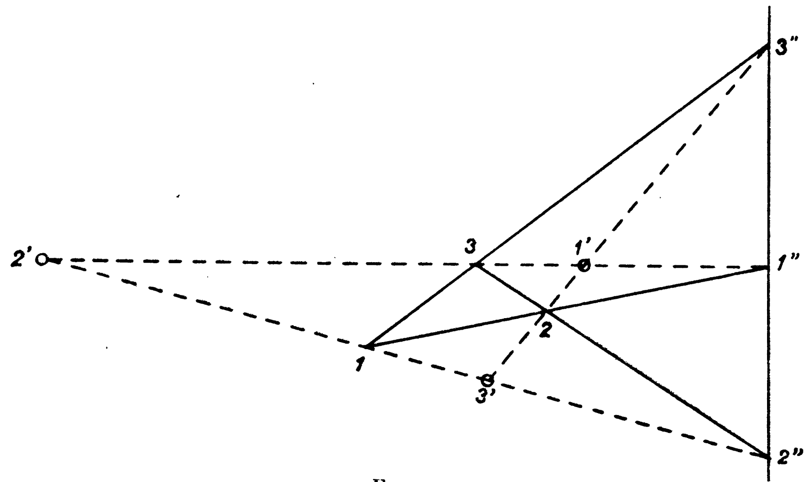


Fig. 7.

Pour désigner les points dans la figure, on a adopté seulement les indices inférieurs et supérieurs.

Pour la mnémotechnique : dans une suite positive 1,2 resp. 2,3 et 3,1 « *m* » sans retouche a le premier indice, les « *m* » avec une et deux retouches ont le deuxième indice; ce sont les « *m* » situés sur une droite. Chacune des quatre droites désignées avec les traits continus renferme trois points; chacune des trois droites désignées avec traits mixtes renferme quatre points.

*N. B.* — L'analogie entre les formules de Hamilton et les nôtres n'est pas l'effet d'un hasard. Non seulement les deux formules sus-mentionnées, mais toutes les autres formules de notre système se transforment immédiatement en formules de Hamilton, si on pose $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

2 c) $\quad G_0 . m_1 m_2 m_3 \equiv 0, \qquad G_2 . m_1 m_2 m_3 \equiv 0, \qquad G_4 . m_1 m_2 m_3 \equiv 0.$

3) *Quatre points facteurs.*

$$m_1 = z_1\mu + l\eta_1,$$
$$m_2 = z_2\mu + l\eta_2,$$
$$m_3 = z_3\mu + l\eta_3,$$
$$m_4 = z_4\mu + l\eta_4.$$

3 a) $G_4 . m_1 m_2 m_3 m_4 = \Psi S(-z_1\eta_2\eta_3\eta_4 + z_2\eta_1\eta_3\eta_4 - z_3\eta_1\eta_2\eta_4 + z_4\eta_1\eta_2\eta_3)$.

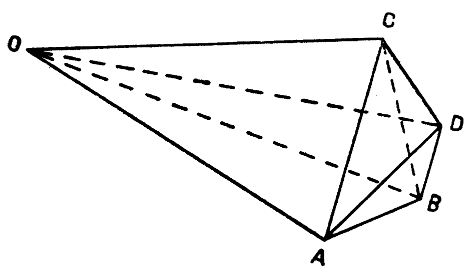

FIG. 8.

$V_\alpha$ = vecteur axial auxiliaire.

$V_\alpha . OA = \eta_1$, $\quad O = \mu$, (V. *fig. 8.*)

$V_\alpha . OB = \eta_2$, $\quad A = m_1$,

$V_\alpha . OC = \eta_3$, $\quad B = m_2$,

$V_\alpha . OD = \eta_4$, $\quad C = m_3$,

$D = m_4$.

D'après (**1**, pag. 54, 55, § 100) $S\alpha\beta\gamma$ est égal au volume du parallélépipède dont les trois arêtes $= \alpha, \beta, \gamma$, ou au sextuple volume de la pyramide, dont les arêtes sont $\alpha, \beta, \gamma$.

Si on égalise $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 1$ et si on change la suite de quelques $m_n$, on a :

$$G_4 . m_1 m_2 m_3 m_4 = \Psi S(\eta_3\eta_2\eta_4 + \eta_1\eta_3\eta_4 + \eta_2\eta_1\eta_4 - \eta_2\eta_1\eta_3)$$
$$= 6 \text{ tétr. ABCD} = 6 (\text{tétr. OCBD} + \text{tétr. OACD} + \text{tétr. OBAD} - \text{tétr. OBAC}).$$

*Conclusion.* — Si deux points coïncident ou si les quatre points sont placés dans un plan, alors :

$$G_4 . m_1 m_2 m_3 m_4 = 0.$$

On peut le démontrer en posant $\eta_4 = \eta_1$ et $z_4 = z_1$ ou d'une manière générale :

$$\eta_4 = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3 \qquad \text{et} \qquad z_4 = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3.$$

On a de plus :

$$\boxed{G_4 . m_1 m_2 m_3 m_4 = G_4[m_1(G_3 m_2 m_3 m_4)]}$$

et

$$\boxed{G_4 . m_1 m_2 m_3 m_4 = G_4(G_2 m_1 m_2 . G_2 m_3 m_4) .}$$

On peut le prouver en remarquant que

$$m_2 m_3 m_4 = G_1 m_2 m_3 m_4 + G_3 m_2 m_3 m_4 ,$$

que

$$m_r m_s = G_0 m_r m_s + G_2 m_r m_s$$

et en annulant les membres identiquement égaux à zéro.

3-b) $$G_0 . m_1 m_2 m_3 m_4 = z_1 z_2 z_3 z_4 + S . \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4$$
$$+ S(z_1 z_2 . \eta_3 \eta_4 - z_1 z_3 . \eta_2 \eta_4 + z_1 z_4 . \eta_2 \eta_3 + z_2 z_3 . \eta_1 \eta_4 - z_2 z_4 . \eta_1 \eta_3 + z_3 z_4 . \eta_1 \eta_2) .$$

Premier changement de forme :

Comme on a

$$S . \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 = S . \eta_1 (S \eta_2 \eta_3 \eta_4 + V \eta_2 \eta_3 \eta_4) = S . \eta_1 V \eta_2 \eta_3 \eta_4$$
$$= S \eta_1 \eta_2 . S \eta_3 \eta_4 - S \eta_1 \eta_3 . S \eta_2 \eta_4 + S \eta_1 \eta_4 . S \eta_2 \eta_3$$

(**1**, pag. 48, § 90), on a aussi

$$G_0 . m_1 m_2 m_3 m_4 = z_1 z_2 z_3 z_4 + S . \eta_3 \eta_4 (z_1 z_2 + S \eta_1 \eta_2) - S \eta_2 \eta_4 (z_1 z_3 + S \eta_1 \eta_3)$$
$$+ S \eta_2 \eta_3 (z_1 z_4 + S \eta_1 \eta_4) + z_2 z_3 S \eta_1 \eta_4 - z_2 z_4 S \eta_1 \eta_3 + z_3 z_4 S \eta_1 \eta_2 .$$

Deuxième changement de forme :

$$G_0 . m_1 m_2 m_3 m_4 = G_0(m_1 . G_1 m_2 m_3 m_4 + m_1 . G_3 m_2 m_3 m_4) = G_0(m_1 . G_1 m_2 m_3 m_4),$$

puisque $G_0 mp \equiv 0$.

A cause de

$$G_1 . m_2 m_3 m_4 = m_2 . G_0 m_3 m_4 - m_3 G_0 m_4 m_2 + m_4 G_0 m_2 m_3 ,$$

il vient finalement :

$$\boxed{G_0 . m_1 m_2 m_3 m_4 = G_0 m_1 m_2 . G_0 m_3 m_4 - G_0 m_1 m_3 . G_0 m_4 m_2 + G_0 m_1 m_4 . G_0 m_2 m_3 .}$$

Si les quatre points sont les sommets d'un tétraèdre polaire, comme c'est le cas pour les quatre unités complexes de notre système

$$G_0 . m_1 m_2 m_3 m_4 = 0 .$$

Par exemple :

$$m_4 = \mu = \nu_4, \qquad m_1 = \nu_1 = l\lambda_1, \qquad m_2 = \nu_2 = l\lambda_2, \qquad m_3 = \nu_3 = l\lambda_3,$$
$$z_4 = 1, \qquad z_1 = z_2 = z_3 = 0, \qquad \eta_4 = 0, \qquad \eta_1 = \lambda_1, \qquad \eta_2 = \lambda_2, \qquad \eta_3 = \lambda_3 .$$

Comme $G_1 . m_2 m_3 m_4 = m'_3$, un point, alors le $G_0$ produit de quatre points se réduit dans le $G_0$ produit de deux points.

Autre changement de forme :

$$\begin{aligned} G_0 . m_1 m_2 m_3 m_4 &= G_0[(G_0 m_1 m_2 + G_2 m_1 m_2)(G_0 m_3 m_4 + G_2 m_3 m_4)] \\ &= \underline{G_0 m_1 m_2 . G_0 m_3 m_4} + G_0(G_2 m_1 m_2 . G_2 m_3 m_4) \\ &= \underline{G_0 m_1 m_2 . G_0 m_3 m_4} - G_0 m_1 m_3 G_0 m_4 m_2 + G_0 m_1 m_4 G_0 m_2 m_3 \end{aligned}$$

car

$$G_0 G_2 = 0, \qquad G_0 G_0 = G_0 .$$

Par conséquent

$$\boxed{G_0(G_2 m_1 m_2 . G_2 m_3 m_4) = - G_0 m_1 m_3 . G_0 m_4 m_2 + G_0 m_1 m_4 . G_0 m_2 m_3 .}$$

Pour $G_0 m_1 m_2 . G_0 m_3 m_4 = 0$ il vient

$$G_0 . m_1 m_2 m_3 m_4 = G_0(G_2 m_1 m_2 . G_2 m_3 m_4) .$$

3 c) $$\begin{aligned} G_2 . m_1 m_2 m_3 m_4 = {} & V(\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 + z_1 z_2 . \eta_3 \eta_4 - z_1 z_3 . \eta_2 \eta_4 + z_1 z_4 . \eta_2 \eta_3 \\ & \qquad + z_2 z_3 . \eta_1 \eta_4 - z_2 z_4 . \eta_1 \eta_3 + z_3 z_4 . \eta_1 \eta_2) \\ & + \Psi V(- z_1 . \eta_2 \eta_3 \eta_4 + z_2 . \eta_1 \eta_3 \eta_4 - z_3 . \eta_1 \eta_2 \eta_4 + z_4 . \eta_1 \eta_2 \eta_3 \\ & \qquad - z_1 z_2 z_3 . \eta_4 + z_1 z_2 z_4 . \eta_3 - z_1 z_3 z_4 . \eta_2 + z_2 z_3 z_4 . \eta_1) = g . \end{aligned}$$

$$V . \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 = V . \eta_1 (V \eta_2 \eta_3 \eta_4 + S \eta_2 \eta_3 \eta_4) .$$

Développant $V . \eta_1 S \eta_2 \eta_3 \eta_4$ d'après la formule (**1**, pag. 49, § 92) :

$$\delta S \alpha\beta\gamma = V \alpha\beta . S \gamma\delta + V \beta\gamma . S \alpha\delta + V \gamma\alpha . S \beta\delta$$

et les vecteurs $V\eta_2\eta_3\eta_4$ etc., selon (1, pag. 48, § 90, 2), en écrivant brièvement au lieu des quantités ordinaires $G_0 m_n m_s = r_{ns}$ nous trouvons :

$$\boxed{\begin{aligned} V_2 . g = V\eta_1\eta_2 . r_{34} - V\eta_1\eta_3 . r_{42} + V\eta_1\eta_4 . r_{23} \\ + V\eta_2\eta_3 . r_{14} + V\eta_3\eta_4 . r_{12} + V\eta_4\eta_2 . r_{13} .\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_2 g = \Psi(\eta_1 . \mu F_1 m_2 m_3 m_4 - \eta_2 . \mu F_1 m_1 m_3 m_4 \\ + \eta_3 . \mu F_1 m_1 m_2 m_4 - \eta_4 . \mu F_1 m_1 m_2 m_3) .\end{aligned}}$$

De plus on doit avoir

$$\begin{aligned} G_2 . m_1 m_2 m_3 m_4 = c_{12} G_2 m_1 m_2 + c_{13} G_2 m_1 m_3 + c_{14} G_2 m_1 m_4 \\ + c_{34} G_2 m_3 m_4 + c_{42} G_2 m_4 m_2 + c_{23} G_2 m_2 m_3 .\end{aligned}$$

En développant les $G_2 m_n m_s$ et comparant $\Sigma c_{ns} G_2 m_n m_s$ avec les relations susnommées, on trouve pour les $c_{ns}$ les expressions :

$$c_{12} = r_{34}, \quad c_{13} = -r_{42}, \quad c_{14} = r_{23}, \quad c_{23} = r_{14}, \quad c_{34} = r_{12}, \quad c_{42} = r_{13}$$

et de cela :

$$\boxed{\begin{aligned} G_2 . m_1 m_2 m_3 m_4 = G_2 m_1 m_2 . r_{34} - G_2 m_1 m_3 . r_{42} + G_2 m_1 m_4 . r_{23} \\ + G_2 m_3 m_4 . r_{12} + G_2 m_4 m_2 . r_{13} + G_2 m_2 m_3 . r_{14} .\end{aligned}}$$

De cette formule, on conclut de suite : Si les quatre points forment un tétraèdre polaire, alors $G_2 . m_1 m_2 m_3 m_4 = 0$, puisque tous les $r_{ns} = 0$.

On peut facilement constater en écrivant $d_{ns}$ pour $G_2 m_n m_s$ :

$$\boxed{G_2 . d_{12} d_{34} = d_{14} . r_{23} - d_{13} . r_{42} + d_{23} . r_{14} - d_{24} . r_{13}}$$

car

$$G_2 . m_1 m_2 m_3 m_4 = G_2 [(G_0 + G_2) m_1 m_2 . (G_0 + G_2) m_3 m_4] .$$

La formule quaternionnienne analogue se laisse directement dériver de ceci, si on pose $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$; alors $G_0$ devient S, $G_2$ devient V, $G_2 m_1 m_2 = V\eta_1\eta_2$, $G_0 m_1 m_2 = S\eta_1\eta_2$ etc.

En effet

$$V(V\eta_1\eta_2 . V\eta_3\eta_4) = V\eta_1\eta_4 S\eta_2\eta_3 - V\eta_1\eta_3 S\eta_4\eta_2 + V\eta_2\eta_3 S\eta_1\eta_4 - V\eta_2\eta_4 S\eta_1\eta_3$$

Car (**1**, pag. 48) :

$$V.V\alpha\beta V\gamma\delta = \delta S\alpha\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta\delta$$

et (**1**, pag. 49, § 92, 4) :

$$\delta S\alpha\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta\delta = V\alpha\delta . S\beta\gamma - V\alpha\gamma . S\delta\beta + V\beta\gamma . S\alpha\delta - V\beta\delta . S\alpha\gamma .$$

Pareillement on trouve :

$$\boxed{G_2(m_1 G_3 m_2 m_3 m_4) = d_{34} . r_{12} + d_{42} . r_{13} + d_{23} . r_{14} .}$$

La condition que $g$, en général étant un complexe linéaire, représente une droite, est manifestement

$$S[(\Psi^2 F_2 g) . V_2 g] = o .$$

Dénommant le coefficient de $\eta_4$ :

$$\text{« } \mu F_1 m_2 m_3 m_4 \text{ »} = z_2 S\eta_3\eta_4 - z_3 S\eta_2\eta_4 + z_4 S\eta_2\eta_3 + z_2 z_3 z_4 ,$$

une quantité ordinaire, par $s_1$ et ainsi les autres coefficients de $\eta_n$ par $s_n$, on a :

$$S(\Psi^2 F_2 g . V_2 g) = (\eta_1 s_1 + \eta_2 s_2 + \eta_3 s_3 + \eta_4 s_4) . (V\eta_1\eta_2 c_{12} + V\eta_1\eta_3 c_{13} + V\eta_1\eta_4 c_{14} + V\eta_2\eta_3 c_{23} + V\eta_3\eta_4 c_{34} + V\eta_4\eta_2 c_{42})$$

et après réduction :

$$\begin{aligned} &= S . \eta_1\eta_2\eta_3( \quad s_1 c_{23} - s_2 c_{13} + s_3 c_{12}) \\ &+ S . \eta_1\eta_2\eta_4(- s_1 c_{42} - s_2 c_{14} + s_4 c_{12}) \\ &+ S . \eta_1\eta_3\eta_4( \quad s_1 c_{34} - s_3 c_{14} + s_4 c_{13}) \\ &+ S . \eta_2\eta_3\eta_4( \quad s_2 c_{34} + s_3 c_{42} + s_4 c_{23}) = o . \end{aligned}$$

3 d) $G_1 . m_1 m_2 m_3 m_4 \equiv o ,$

$G_3 . m_1 m_2 m_3 m_4 \equiv o .$

4) *Autres produits.*

Des autres produits, nous mentionnons seulement $p_1 p_2$. Le terme $G_2 p_1 p_2$ ne représente pas, comme chez Combebiac, la ligne d'intersection, mais la polaire de cette ligne. Il faut donc multiplier le produit $G_2 p_1 p_2$ par $\Psi$ pour obtenir la ligne d'intersection des deux plans. Car

$$G_2 . p_1 p_2 = G_2 . \Psi^4 p_1 p_2 = G_2 . \Psi(-\Psi) p_1 p_2 = G_2 . (\Psi p_1 . \Psi p_2) = G_2 m_1 m_2 .$$

## § 28. — Le « facteur polarisant » : $\Psi$.

Par la multiplication avec $\Psi$ un point devient un plan, une droite de nouveau une droite, un plan un point; un nombre ordinaire devient un solide et un solide se transforme en un nombre ordinaire.

A savoir, multiplié par $\Psi$ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $1$ | devient | 1) $\Psi$, |
| 2) | $m = x_0 \mu + l \xi$ | » | 2) $p' = x_0 l - \mu \xi$, |
| 3) | $d = \eta + \Psi \vartheta$ | » | 3) $d' = \Psi \eta - \vartheta$, |
| 4) | $p = \mu \zeta + z_0 l$ | » | 4) $m' = l \zeta - z_0 \mu$, |
| 5) | $\Psi$ | » | 5) $-1$. |

Ainsi « $\Psi$ » joue dans notre système le rôle égal comme le « trait de complément » chez Grassmann.

De même $p'$, $d'$, $m'$, aussi $\Psi$, $-1$ sont formes polaires de
$m$, $d$, $p$, $1$, $\Psi$ relativement à la sphère $K_0$.

Comme conséquence il résulte une nouvelle notion paradoxale : la polaire d'un nombre ordinaire est un solide et vice-versa. Il faut naturellement, dans cette notion, distinguer :

$$\Psi m_1 . \Psi m_2 . \Psi m_3 . \Psi m_4 = p'_1 . p'_2 . p'_3 . p'_4 = m_1 . m_2 . m_3 . m_4 .$$

A présent nous pouvons traiter l'excès polaire si est $= 0$ (§ 27, 1 a).

$G_0 m_1 m_2 = 0$ d'après notre méthode :

$$G_4 . (\Psi m_1 . m_2) = G_4 . (x_0 l - \mu \xi)(y_0 \mu + l \eta) = \Psi (x_0 y_0 + S \xi \eta) = 0 .$$

Ceci est le volume $G_4.(\Psi m_1.m_2) = 0$, autrement dit $m_2$ est « incident » avec le plan $\Psi m_1$ et vice-versa :

$$G_4.(\Psi m_2.m_1) = G_4.(y_0 l - \mu\eta)(x_0\mu + l\xi) = \Psi(x_0 y_0 + S\eta\xi) = 0.$$

On dit aussi que les deux points $m_1$, $m_2$ sont « conjugués ».

*Tétraèdres polaires*, au premier abord seulement à l'égard de la situation des parties constituantes des tétraèdres, non pas à l'égard de leurs tenseurs.

*Relations* entre ces tenseurs ou poids : $\gamma$, $\gamma_n$, $\gamma_{rs}$ etc. Soit

$$\Psi m_1 = p_1, \qquad G_3 m_2 m_3 m_4 = p_{234} = p_{(1)}.$$

Les deux plans coïncidents ne diffèrent que par un nombre ordinaire comme coefficient. Nous écrivons :

$$\Psi m_1 = p_1 = \gamma_1 p_{234}, \qquad \Psi m_n = p_n = \gamma_n p_{(n)},$$

de sorte que « $n$ » et « $(n)$ » forment une permutation positive des indices 1, 2, 3, 4.

$G_2.m_1 m_2 = d_{12}$, etc., $\Psi d_{12} = \gamma_{12} d_{34}$, en général $\Psi.d_{rs} = \gamma_{rs} d_{(rs)}$, les quatre indices $rs(rs)$, formant de même une permutation positive.

$$G_4.m_n p_n = m_n.\Psi m_n = -m_n^2.\Psi = \gamma_{nn}\Psi.$$

Par contre :

$$G_4 m_1 m_2 m_3 m_4 = \gamma.\Psi,$$
$$G_4.d_{rs}\Psi d_{rs} = \gamma_{rsrs}.\Psi.$$

Alors résultent les relations suivantes :

$$\boxed{\begin{gathered} \gamma_n\gamma = \gamma_{nn}, \qquad \gamma_{rs}\gamma = \gamma_{rsrs}, \qquad \gamma_{(rs)}\gamma = \frac{1}{\gamma_r\gamma_s}, \qquad \gamma_{(rs)}\gamma\cdot\gamma_r\cdot\gamma_s = 1, \\ -\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma^2 = 1, \qquad \gamma = \pm\sqrt{-(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)^{-1}}, \\ \gamma_{rs} = -\frac{1}{\gamma_{(rs)}}, \qquad \gamma_{rs} = -\gamma_r\gamma_s\gamma, \qquad \gamma_{rsrs} = \gamma_{rs}\gamma = -\gamma_r\gamma_s\gamma^2. \end{gathered}}$$

Ainsi tous les tenseurs se laissent exprimer par $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$.

*Exemple* :

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \mu + l(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \\ m_2 &= \mu + l(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3), \\ m_3 &= \mu + \frac{1}{2} l(3\lambda_1 - \lambda_3), \\ m_4 &= \mu + \frac{1}{4} l(3\lambda_1 + \lambda_3). \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{4}{3}, \\ \gamma_2 &= -\frac{4}{3}, \\ \gamma_3 &= -1, \\ \gamma_4 &= \frac{1}{4}, \qquad \gamma = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

*Tétraèdre polaire complet* dans l'espace fini (ou infini). Complet veut dire : polaire aussi à l'égard des tenseurs, mais sans égard pour le signe.

$$\begin{aligned} m_1 &= x_0\mu + l\xi, & \Psi m_1 &= x_0 l - \mu\xi, \\ m_2 &= y_0\mu + l\eta, & \Psi m_2 &= y_0 l - \mu\eta, \\ m_3 &= z_0\mu + l\zeta, & \Psi m_4 &= z_0 l - \mu\zeta, \\ m_4 &= t_0\mu + l\vartheta; & \Psi m_4 &= t_0 l - \mu\vartheta. \end{aligned}$$

$$\Psi m_4 = -\gamma_4 G_3 . m_1 m_2 m_3;$$

de plus

$$t_0 l - \mu\vartheta = \gamma_4[-\mu(z_0 V\xi\eta - y_0 V\xi\zeta + x_0 V\eta\zeta) - lS\xi\eta\zeta].$$

$$\begin{aligned} &1)\quad t_0 = -\gamma_4 S\xi\eta\zeta, \\ &2)\quad \vartheta = \gamma_4(\ z_0 V\xi\eta + y_0 V\zeta\xi + x_0 V\eta\zeta); \end{aligned}$$

$$\Psi m_1 = \gamma_1 G_3 . m_2 m_3 m_4 :$$

$$\begin{aligned} &3)\quad x_0 = \gamma_1 S\eta\zeta\vartheta, \\ &4)\quad \xi = \gamma_1(-\ t_0 V\eta\zeta - z_0 V\vartheta\eta - y_0 V\zeta\vartheta); \end{aligned}$$

$$\Psi m_2 = -\gamma_2 G_3 . m_3 m_4 m_1 :$$

$$\begin{aligned} &5)\quad y_0 = -\gamma_2 S\zeta\vartheta\xi, \\ &6)\quad \eta = \gamma_2(\ x_0 V\zeta\vartheta + t_0 V\xi\zeta + z_0 V\vartheta\xi); \end{aligned}$$

$$\Psi m_3 = \gamma_3 G_3 . m_4 m_1 m_2 :$$

$$\begin{aligned} &7)\quad z_0 = \gamma_3 S\vartheta\xi\eta, \\ &8)\quad \zeta = \gamma_3(-y_0 V\vartheta\xi - x_0 V\eta\vartheta - t_0 V\xi\eta). \end{aligned}$$

Il y a là 16 équations scalaires du troisième degré avec 16 scalaires inconnus : $x_n$, $y_n$, $z_n$, $t_n$; $n = 1, 2, 3, 0$. Les $\gamma$-tenseurs $= \pm 1$.

Une solution par exemple :

$$m_n = \nu_n, \qquad n = 1, 2, 3, 4; \qquad \gamma_4 = +1, \qquad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = -1.$$

## § 29. — Comparaison avec l'étude de Grassmann « Ausdehnungslehre ».

### 1) *Le produit extérieur.*

Nous avons vu que le terme $G_2 m_1 m_2$ correspond au produit extérieur de Grassmann, ce que nous voulons écrire : $m_1 \times m_2$.

Également

$$G_3 . m_1 m_2 m_3 = G_3(m_1 . G_2 m_2 m_3) = m_1 \times m_2 \times m_3 .$$

Il faut que l'index de G soit égal au nombre des facteurs ponctuels.

Évidemment une droite équivaut à deux et un plan à trois facteurs ponctuels.

En plus

$$G_4 . m_1 m_2 m_3 m_4 = G_4 . \{ m_1 [G_3(m_2 . G_2 m_3 m_4)] \} = s . \Psi ,$$

où $s$ est un nombre scalaire.

Par contre, chez Grassmann,

$$m_1 \times m_2 \times m_3 \times m_4 = s$$

et si les facteurs sont unités complexes :

$$\nu_4 \times \nu_1 \times \nu_2 \times \nu_3 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = e_0 e_1 e_2 e_3 = 1 .$$

Pour exprimer ce terme avec nos symboles, si le plus grand nombre entier qui se trouve dans la fraction $\frac{n}{4}$ est désigné par $\left(\frac{n}{4}\right)$, il faut poser :

$$m_1 \times m_2 \times \ldots m_n = \Psi^{3r} G_n(m_1 m_2 \ldots m_n) ;$$

$n =$ nombre des facteurs ponctuels, $r = \left(\frac{n}{4}\right)$, $\qquad n \leqq 4$.

Au lieu de cela, on peut directement substituer 1 pour $\Psi$; symbole $[\Psi] = 1$. Si la substitution doit être répétée $m$ fois, en symbole $[\Psi]^m = [\Psi^m]$, alors $[\Psi^m]$ a l'effet égal à la multiplication avec $(-\Psi)^m = \Psi^{3m}$. Donc :

$$(\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^m = (\nu_4 \nu_1 \nu_2 \nu_3)^m . \Psi^{3m} = \Psi^m . \Psi^{3m} = 1 .$$

*2) La multiplication intérieure.*

La multiplication intérieure est proprement aussi une multiplication extérieure, à savoir une multiplicatiou extérieure des symboles de Grassmann et de leurs suppléments. Chez Grassmann les symboles sont suppléés à l'unité, car il met à priori $\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1$, par conséquent $\varepsilon_n | \varepsilon_n = 1$, $n = 0, 1, 2, 3$. Dans notre système les symboles sont suppléés à $\Psi$ et premièrement la multiplication extérieure $\nu_n \times | \nu_n$ donne $1$, $n = 1, 2, 3, 4$, tandis que $\nu_n . | \nu_n = \Psi$.

Nous écrivons mieux, au lieu du trait de supplément, $\Psi$ avec les indices des symboles suivants :

$$\Psi_1 \nu_1, \qquad \Psi_4 \nu_4, \qquad \Psi_{12}\nu_1\nu_2, \qquad \Psi_{123}\nu_1\nu_2\nu_3, \qquad \text{etc.}$$

La cause est que chez Grassmann les symboles « | » ne sont pas en tous cas les mêmes grandeurs. Car

$$|\varepsilon_0 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3, \qquad |\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -\varepsilon_0, \qquad ||\varepsilon_0 = -\varepsilon_0, \qquad || = -1.$$

Par contre

$$|(\varepsilon_0\varepsilon_1) = \varepsilon_2\varepsilon_3, \qquad |(\varepsilon_2\varepsilon_3) = \varepsilon_0\varepsilon_1, \qquad ||(\varepsilon_0\varepsilon_1) = \varepsilon_0\varepsilon_1, \qquad || = +1.$$

Tous les symboles « | » ne peuvent pas être grandeurs identiques; eux-mêmes dépendent des symboles adhérés.

Le calcul montre que

a)
$$\begin{matrix} \Psi\nu_4 = \gamma_4 . \nu_1\nu_2\nu_3, & \Psi\nu_1 = \gamma_1 . \nu_4\nu_3\nu_2, \\ \Psi\nu_2 = \gamma_2 . \nu_4\nu_1\nu_3, & \Psi\nu_3 = \gamma_3 . \nu_4\nu_2\nu_1; \end{matrix} \quad \left\{ \begin{matrix} \gamma_4 = -1, \\ \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = +1. \end{matrix} \right.$$

Comme $\gamma_n^2 = +1$,

$$\gamma_4\Psi\nu_4 = \nu_1\nu_2\nu_3, \qquad \gamma_4\Psi = \Psi_4;$$

en général $\gamma_n\Psi = \Psi_n$.

Pareillement :

$$\Psi\nu_4\nu_1 = \gamma_{41}\nu_2\nu_3, \qquad \gamma_{41}\Psi\nu_4\nu_1 = \nu_2\nu_3, \qquad \gamma_{41}\Psi = \Psi_{41}, \qquad \text{etc.}$$

b) Une expression uniforme en tous cas pour « | » est possible seulement par une transformante.

Si nous écrivons :

$$\nu_m = \mathfrak{g}_m, \qquad \nu_m\nu_n = \mathfrak{g}_{mn}, \qquad \nu_m\nu_n\nu_r = \mathfrak{g}_{mnr},$$

alors .

$$\begin{aligned}«\,|\,» = \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{123,4} - \mathfrak{g}_{423,1} - \mathfrak{g}_{431,2} - \mathfrak{g}_{412,3}\\ - \mathfrak{g}_{4,123} + \mathfrak{g}_{1,423} + \mathfrak{g}_{2,431} + \mathfrak{g}_{3,412}\\ + \mathfrak{g}_{41,23} + \mathfrak{g}_{42,31} + \mathfrak{g}_{43,12} + \mathfrak{g}_{12,43} + \mathfrak{g}_{23,41} + \mathfrak{g}_{31,42}.\end{aligned}$$

A cela il est :

$$\mathfrak{g}_{41,23} = - \mathfrak{g}_{14,23} = - \mathfrak{g}_{41,23}, \qquad \mathfrak{g}_{123,4} = - \mathfrak{g}_{213,4}, \qquad \text{etc.}$$

$\mathfrak{g}^2 \neq +1$, $\neq -1$, premièrement $\mathfrak{g}^4 = +1$.

La relation $\quad |(m_1 \times m_2 \times \ldots) = |m_1 \times |m_2 \times | \ldots$

subsiste, mais non $\quad |(m_1 m_2 \ldots) = |m_1 . |m_2 . | \ldots$

Avant de donner un exemple, nous stipulons que :

$$(m_1 \times m_2 \times \ldots m_n) = [m_1 m_2 \ldots m_n];$$
$$\nu_4 \times \nu_1 \times \nu_2 \times \nu_3 = 1 = [\Psi], \qquad \nu_4\nu_1\nu_2\nu_3 = \Psi.$$

Il faut bien distinguer $\Psi$ et $[\Psi]$.
Par contre on peut constater que :

$$\nu_m \times \ldots \nu_n = \nu_m \ldots \nu_n, \qquad \text{si} \quad n < 4.$$

De plus $\nu_m\nu_n$ permettent une transposition, comme $\varepsilon_m\varepsilon_n$; c'est-à-dire $\nu_m\nu_n = - \nu_n\nu_m$, $m \neq n$; pas $m_r m_s$!

Nous écrivons encore $< n > = \left(\dfrac{n}{4}\right)$, le plus grand nombre entier. En plus :

$$\Psi^{3<n>} G_n = G_{\varphi'(n)} \Psi^{3<n>}, \qquad \varphi'(n) = n - 4<n>;$$
$$\varphi'(n) = n', \qquad n'' = \varphi(n') = 4 - \varphi'(n) = 4 - n + 4<n>.$$

De cette manière selon

$$\Psi^{3<n>} G_n = G_{n-4<n>} . \Psi^{3<n>} = \Psi^{3<n>} . G_{\varphi<n>}(n - 4<n>),$$
$$\begin{aligned}m_1 \times m_2 \times \ldots m_n = [m_1 m_2 \ldots m_n] = \Psi^{3<n>} G_n . m_1 m_2 \ldots m_n\\ = G_{n-4<n>} . \Psi^{3<n>} = \Psi^{3<n>} G_{4-n+4<n>} . m_1 m_2 \ldots m_n.\end{aligned}$$

*Exemple :*

$$\mathfrak{g}(\nu_1 \times \nu_2) = \mathfrak{g}\nu_1 \times \mathfrak{g}\nu_2 = (-\nu_4 \times \nu_2 \times \nu_3) \times (\nu_4 \times \nu_1 \times \nu_3) = -G_3\nu_4\nu_2\nu_3 \times G_3\nu_4\nu_1\nu_3$$
$$= G_{6-4<6>}\Psi^{3<6>}(-G_3\nu_4\nu_2\nu_3).G_3\nu_4\nu_1\nu_3 = G_2.\Psi^3(-\nu_4\nu_2\nu_3.\nu_4\nu_1\nu_3)$$
$$= G_2\Psi^3.\nu_4\nu_1\nu_2\nu_3.\nu_4\nu_3 = G_2\Psi^3.\Psi.\nu_1\nu_2 = G_2\nu_1\nu_2 = \nu_1\nu_2.$$

D'autre part

$$(-\nu_4 \times \nu_2 \times \nu_3) \times (\nu_4 \times \nu_1 \times \nu_3) = (\nu_4 \times \nu_1 \times \nu_2 \times \nu_3) \times (\nu_4 \times \nu_3) = \nu_4 \times \nu_3,$$

s'accordant avec le résultat direct :

$$\mathfrak{g}(\nu_1 \times \nu_2) = \nu_4 \times \nu_3.$$

3) *Le produit régressif.*

C'est : $m_1 \times m_2 \times \ldots m_n, \qquad n > 4.$

Ces produits ne sont plus associatifs comme les produits progressifs, où $n \lesseqq 4$.

Seulement en cas que les associations comprennent des facteurs différents, on peut les grouper et comprendre autrement de sorte que les nouvelles associations sont du même genre, c'est-à-dire renfermant tous les facteurs différents.

Ainsi : $(\varepsilon_0\varepsilon_3\varepsilon_2)(\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_3) = (\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)(\varepsilon_0\varepsilon_3) = \varepsilon_0\varepsilon_3.$

Comme $G_5$, $G_6$, ..., n'ont aucun sens, les facteurs doivent être compris par $G_n$ en associations renfermant seulement quatre facteurs ou moins. S'il résulte un éventuel $G_n$, $n > 4$, il faut le réduire selon la règle $n'' = \varphi^{<n>}(n - 4 < n >)$. Mais « $n$ » dans $\Psi^{3<n>}$ ne permet aucune réduction.

4) *Les sommes chez Grassmann.*

On a $[d + m] = d$, comme $\infty + 1 = \infty$ ; en général $[p + d + m + 1] = p$. Nous y ajoutons le facteur de polarité $\Psi$, solide géométrique, quoique $\Psi$ chez Grassmann n'existe pas. Il doit être $[\Psi + p] = \Psi$. Nous avons enfin :

a) $[m_1m_2m_3m_4] = \Psi^{3<4>}[G_4 + G_2 + G_0]m_1m_2m_3m_4 = \Psi^{3<4>}G_4.m_1m_2m_3m_4$;

b) $[p_1p_2] = \Psi^{3<6>}[G_2 + G_0]p_1p_2 = \Psi^{3<6>}G_2p_1p_2, \qquad G_4p_1p_2 \equiv 0$;

c) $[dp] = \Psi^{3<5>}[G_3 + G_1]dp = \Psi^{3<5>}G_3dp$;

d) $[p_1p_2p_3] = [p_1G_2p_2p_3]$. Le traitement se poursuit comme en c).

Tous les résultats sont en accord avec le calcul sus-mentionné :

a) $\Psi^{3<4>} G_{4-4+4<4>}$,

b) $\Psi^{3<6>} G_{4-6+4<6>}$,

c) $\Psi^{3<5>} G_{4-5+4<5>}$,

d) comme c).

Nous avons montré que nous pouvons représenter la multiplication extérieure et intérieure par nos procédés. Nous nous contentons des constatations énoncées. La multiplication intérieure dans notre système est complètement superflue, comme dans nos quadriquaternions nous possédons un moyen de représenter sans accessoires les mêmes résultats que la multiplication intérieure. Les produits de nos symboles, de plus que quatre facteurs, sont régressifs par eux-mêmes. Ils forment un groupe limité.

Si Grassmann parle de deux différents genres de multiplication, alors nous pouvons aussi, avec les $G_n$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$, considérer cinq différents genres de multiplication. Il y a donc cinq multiplications spéciales, opposées à la multiplication intégrale $G = G_0 + G_1 + G_2 + G_3 + G_4$.

Les produits de la dernière sont associatifs, tandis que naturellement les assemblements des facteurs, par $G_n$ particuliers en général, ne peuvent pas être associatifs.

Pareilles multiplications spéciales sont juste les multiplications extérieures et intérieures chez Grassmann, les produits vectoriels et scalaires chez Hamilton et les symboles G, L, P chez Combebiac.

## CHAPITRE VI

# Applications diverses.

### § 30. — Exercices.

1) *Exercice premier.* — Il est donné deux points $m$ et $m'$ et leur ligne de liaison $d$.

Trouver un plan $p$ perpendiculaire à la droite $d$ en un point de la droite, par exemple $m$.

1 a) Première méthode :

$$m = x_0\mu + l\xi, \qquad m' = x'_0\mu + l\xi';$$
$$G_2 mm' = V\xi\xi' + \Psi(x'_0\xi - x_0\xi') = d = V\xi\xi' - \Psi(x_0\xi' - x'_0\xi).$$

L'équation du plan recherché est

$$p = \mu(x'_0\xi - x_0\xi') + lc.$$

Le nombre scalaire $c$ est à rechercher. Il doit être :

$$G_4 mp = 0;$$
$$G_4 mp = -\Psi x_0 c + \Psi(x'_0\xi^2 - x_0 S\xi\xi') = 0;$$
$$c = \frac{x'_0\xi^2 - x_0 S\xi\xi'}{x_0};$$

$$\boxed{p = \mu(x'_0\xi - x_0\xi') + \frac{1}{x_0}\cdot l(x'_0\xi^2 - x_0 S\xi\xi').}$$

1 b) Deuxième méthode : Traduction des résultats du calcul triquaternionnien dans notre système (**2**, pag. 118, 119) :

$$m_c = x_0\mu + \omega\xi, \qquad m'_c = x'_0\mu + \omega\xi';$$
$$d_c = (x_0\xi' - x'_0\xi) + \omega V\xi\xi';$$
$$m_c d_c = x_0\mu(x_0\xi' - x'_0\xi) - x_0\omega V\xi\xi' + \omega\xi(x_0\xi' - x'_0\xi);$$
$$C_3 . m_c d_c = x_0\mu(x_0\xi' - x'_0\xi) + \omega(x_0 S\xi\xi' - x'_0\xi^2) = p_c;$$

$$\boxed{\mathfrak{G}_3 C_3 m_c d_c = sp, \qquad s = -x_0.}$$

2) *Exercice deuxième.* — On donne une droite $d$ et un plan $p$ perpendiculaire sur celle-ci : Trouver le point d'intersection.

$$p = \mu\zeta + z_0 l, \qquad d = \eta + \Psi\zeta; \qquad p \perp d, \qquad \eta \perp \zeta;$$
$$m_0 = \mu + l\xi; \qquad \xi \text{ est à rechercher.}$$

2 a) On doit avoir : $\quad G_3 m_0 d = 0 \quad$ et $\quad G_4 m_0 p = 0$.

$$G_3 m_0 d = \mu\eta + lS\xi\eta + \mu V\xi\zeta = 0,$$
$$G_4 m_0 p = z_0(-\Psi) + \Psi S\xi\zeta = 0, \qquad z_0 = S\xi\zeta;$$
$$G_3 m_0 d = (\eta + V\xi\zeta)\mu + lS\xi\eta = 0, \qquad \eta + V\xi\zeta = 0, \qquad \eta = V\zeta\xi;$$
$$\eta + z_0 = V\zeta\xi + S\zeta\xi = \zeta\xi;$$
$$\xi = \zeta^{-1}\eta + z_0\zeta^{-1}.$$

*N. B.* — On a $S\zeta^{-1}\eta = 0$, comme $\eta \perp \zeta$.

$S\xi\eta = 0$ s'ensuit aussi par $S\xi\eta = S\zeta^{-1}\eta^2 + z_0 S\zeta^{-1}\eta$.

$$\boxed{m_0 = \mu + l(\zeta^{-1}\eta + z_0\zeta^{-1}).}$$

2 b) $$p_e = \mu\zeta + z_0\omega, \qquad d_e = -\zeta + \omega\eta;$$
$$C_1 p_e d_e = -\mu\zeta^2 - z_0\omega\zeta - \omega V\zeta\eta;$$
$$\mathcal{G}_1 C_1 p_e d_e = -[\mu\zeta^2 + l(z_0\zeta + V\zeta\eta)] = sm_0, \qquad s = -\zeta^{-2}.$$

3) *Exercice troisième.* — On donne un plan $p$ et un point $m$ situé dans celui-ci. Rechercher la perpendiculaire tombant en ce point $d_1$.

3 a) $$m = x_0\mu + l\xi, \qquad d = \eta + \Psi\vartheta, \qquad \eta \perp \vartheta;$$
$$p = G_3 md = \mu(x_0\eta + V\xi\vartheta) + lS\xi\eta.$$

Comme $d_1$ est perpendiculaire sur $p$, on trouve alors son équation

$$d_1 = \eta_1 + \Psi\vartheta_1 = \eta_1 + \Psi(x_0\eta + V\xi\vartheta), \qquad \eta_1 \perp \vartheta_1.$$

$\eta_1$ est à rechercher.

*N. B.* — Comme $d_1 \perp d$, $S\vartheta\vartheta_1$ doit être $= 0$ ou $x_0 S\eta\vartheta + S(V\xi\vartheta.\vartheta) = 0$; donc $S\eta\vartheta = 0$, comme plus haut.

Selon la première méthode $G_3 md_1 = 0$.

$$\begin{aligned} G_3 md_1 &= x_0 \eta_1 \mu + lS\xi\eta_1 + \mu(x_0 V\xi\eta + V.\xi V\xi\vartheta) \\ &= \mu(x_0\eta_1 + x_0 V\xi\eta + \vartheta.\xi^2 - \xi S\xi\vartheta) + lS\xi\eta_1 = 0; \\ & x_0\eta_1 + x_0 V\xi\eta + \vartheta.\xi^2 - \xi S\xi\vartheta = 0; \\ & \eta_1 = \frac{1}{x_0}\xi S\xi\vartheta - \frac{1}{x_0}\vartheta.\xi^2 - V\xi\eta. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{d_1 = \left(\frac{1}{x_0}\xi S\xi\vartheta - \frac{1}{x_0}\vartheta.\xi^2 - V\xi\eta\right) + \Psi(x_0\eta + V\xi\vartheta).}$$

En même temps l'équation $S\xi\eta_1 = 0$ est satisfaite. On peut aussi vérifier que $d_1$ est une droite, comme $\eta_1 \perp \vartheta_1$.

3 b)

$$\begin{aligned} p_c &= \mu(x_0\eta + V\xi\vartheta) + \omega S\xi\eta; \\ m_c &= x_0\mu + \omega\xi; \\ C_2.m_c p_c &= x_0^2\eta + x_0 V\xi\vartheta + \omega(x_0 V\xi\eta + V.\xi V\xi\vartheta); \\ G_{12} C_2 m_c p_c &= (x_0 V\xi\eta + \vartheta.\xi^2 - \xi S\xi\vartheta) - \Psi(x_0^2\eta + x_0 V\xi\vartheta) = sd_1, \qquad s = -x_0. \end{aligned}$$

4) *Exercice quatrième.* — On donne une droite $d$ et un point $m$ au dehors. Il faut trouver un plan $p_0$ passant par ce point et étant perpendiculaire à la droite $d$.

$$\begin{aligned} & m = x_0\mu + l\xi; \qquad d = \eta + \Psi\vartheta, \qquad \eta \perp \vartheta; \\ & p_0 = \mu\vartheta + lc; \qquad c = ? \\ & G_1.mp_0 = 0 = \Psi(-cx_0 + S\xi\vartheta), \qquad c = \frac{1}{x_0}S\xi\vartheta; \end{aligned}$$

$$\boxed{p_0 = \vartheta\mu + \frac{1}{x_0}lS\xi\vartheta.}$$

5) *Exercice cinquième.* — On donne une droite $d$. Trouver une droite $d_0$ perpendiculaire à la droite $d$ en passant par un point $m$.

$d_0$ est manifestement la ligne d'intersection de $p_0$ et $p$ :

$$\begin{aligned} p_0 &= \vartheta\mu + \frac{1}{x_0}S\xi\vartheta; \\ p &= x_0\eta\mu + \mu V\xi\vartheta + lS\xi\eta = G_3 md = \mu(x_0\eta + V\xi\vartheta) + lS\xi\eta; \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} d_0 = G_2.\Psi p_0 p &= \left(\vartheta S\xi\eta - \eta S\xi\vartheta - V\xi\vartheta.\frac{1}{x_0}.S\xi\vartheta\right) \\ &+ \Psi(x_0 V\vartheta\eta + \vartheta S\vartheta\xi - \xi.\vartheta^2). \end{aligned}}$$

6) *Exercice sixième.* — On donne une droite $d$ et un point $m$. Rechercher le point de chute $m_0$ et le point réfléchi sur la droite $d$ (*fig. 9*).

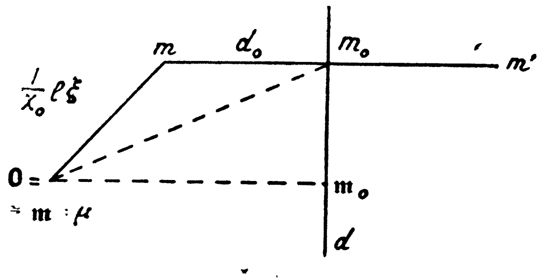


FIG. 9.

$$m' = {}^s d . m, \qquad d_0 \perp d,$$

$$d = \eta_1 + \Psi \vartheta, \qquad S \vartheta \eta_1 = 0;$$

$$d_0 = \vartheta S \xi \eta_1 - \eta_1 S \xi \vartheta - V \xi \vartheta . S \xi \vartheta + \Psi (x_0 V \vartheta \eta_1 + \vartheta S \vartheta \xi - \xi . \vartheta^2);$$

$$m'_0 \,(=)\, m_0, \qquad m'_0 = \mu + l \left[ \frac{1}{x_0} \xi + c_0 (x_0 V \vartheta \eta_1 + \vartheta S \vartheta \xi - \xi . \vartheta^2) \right], \qquad c_0 = ?$$

$$G_3 . m'_0 d = \mu \eta_1 + l \left[ \frac{1}{x_0} S \xi \eta_1 - c_0 S \xi \eta_1 . \vartheta^2 \right]$$
$$+ \mu \left[ \frac{1}{x_0} V \xi \vartheta + c_0 x_0 V (V \vartheta \eta_1 . \vartheta) - c_0 V \xi \vartheta . \vartheta^2 \right] = 0 .$$

De là :

6') $$\frac{1}{x_0} S \xi \eta_1 - c_0 S \xi \eta_1 . \vartheta^2 = 0, \qquad c_0 = \frac{1}{x_0 \vartheta^2};$$

6'') $$\eta_1 + \frac{1}{x_0} V \xi \vartheta - c_0 V \xi \vartheta . \vartheta^2 + c_0 x_0 V (V \vartheta \eta_1 . \vartheta) = 0$$
$$= \eta_1 + \frac{1}{x_0} V \xi \vartheta - c_0 V \xi \vartheta . \vartheta^2 + c_0 x_0 \vartheta . V \eta_1 \vartheta - c_0 x_0 \eta_1 \vartheta^2; \qquad \textit{N. B.} : V \eta_1 \vartheta = 0 .$$

Donc :

$$\eta (1 - c_0 x_0 \vartheta^2) + \frac{1}{x_0} V \xi \vartheta - c_0 V \xi \vartheta . \vartheta^2 = 0$$
$$= \eta (1 - c_0 x_0 \vartheta^2) + V \xi \vartheta \left( \frac{1}{x_0} - c_0 \vartheta^2 \right) = 0, \qquad c_0 = \frac{1}{x_0 \vartheta^2}$$ comme dans 6'.

Pour que $m_0, m, m'$ aient des poids égaux, nous mettons $x_0 m'_0 = m_0$. Il vient alors

$$m_0 = x_0\mu + l(\xi + x_0 V\vartheta^{-1}\eta + \vartheta^{-1}S\vartheta\xi - \xi):$$

$$\boxed{m_0 = x_0\mu + l(x_0 V\vartheta^{-1}\eta + \vartheta^{-1}S\vartheta\xi);}$$

$$m' = 2m_0 - m = 2x_0\mu + 2l(\vartheta^{-1}S\vartheta\xi + x_0 V\vartheta^{-1}\eta) - x_0\mu - l\xi:$$

$$\boxed{m' = x_0\mu + 2l(\vartheta^{-1}S\vartheta\xi + x_0 V\vartheta^{-1}\eta - \xi).}$$

Pour $\xi = 0$ on obtient :

$$\boxed{\mathbf{m}_0 = x_0\mu + lx_0 V\vartheta^{-1}\eta;}$$

$$\boxed{\mathbf{m}' = x_0\mu + 2lx_0 V\vartheta^{-1}\eta.}$$

On a en $m_0$, $\mathbf{m}_0$ deux points de la droite $d$.

7) *Exercice septième.* — On donne deux droites $d_1$ et $d_2$. Trouver la perpendiculaire commune $d$.

$$d_1 = \eta_1 + \Psi\vartheta_1, \qquad d_2 = \eta_2 + \Psi\vartheta_2, \qquad d = \eta + \Psi\vartheta;$$
$$\eta_1 \perp \vartheta_1, \qquad \eta_2 \perp \vartheta_2, \qquad \eta \perp \vartheta.$$

Évidemment $\vartheta = V\vartheta_1\vartheta_2$, puisque $\vartheta$ est perpendiculaire sur l'une et l'autre droite.

Pour trouver seulement $\eta$.

$$7')\quad G_4 . dd_1 = 0, \qquad 7'')\quad G_4 . dd_2 = 0;$$
$$7')\quad G_4 dd_1 = \Psi(S\eta\vartheta_1 + S\vartheta\eta_1) = \Psi[S\eta\vartheta_1 + S(V\vartheta_1\vartheta_2 . \eta_1)] = 0,$$
$$7'')\quad G_4 dd_2 = \Psi(S\eta\vartheta_2 + S\vartheta\eta_2) = \Psi[S\eta\vartheta_2 + S(V\vartheta_1\vartheta_2 . \eta_2)] = 0;$$
$$7')\quad S\eta\vartheta_1 = S\vartheta_2\vartheta_1\eta_1, \qquad 7'')\quad S\eta\vartheta_2 = S\vartheta_2\vartheta_1\eta_2.$$

Or d'après (**1**, pag. 49) :

$$\eta S\vartheta_1\vartheta_2\vartheta = V\vartheta_1\vartheta_2 . S\vartheta\eta + V\vartheta_2\vartheta . S\vartheta_1\eta + V\vartheta\vartheta_1 . S\vartheta_2\eta = V\vartheta_2\vartheta . S\vartheta_1\eta + V\vartheta\vartheta_1 . S\vartheta_2\eta ;$$

$$N.\ B.\ :\ S\vartheta\eta = 0 .$$

$$\boxed{\begin{gathered}\eta = V\vartheta_2\vartheta . \frac{S\vartheta_2\vartheta_1\eta_1}{S\vartheta_1\vartheta_2\vartheta} + V\vartheta\vartheta_1 . \frac{S\vartheta_2\vartheta_1\eta_2}{S\vartheta_1\vartheta_2\vartheta}, \qquad \vartheta = V\vartheta_1\vartheta_2 ,\\ d = \eta + \Psi\vartheta .\end{gathered}}$$

$$V\vartheta_2\vartheta = \quad V . \vartheta_2 V\vartheta_1\vartheta_2 = \quad \vartheta_2 S\vartheta_1\vartheta_2 - \vartheta_1 . \vartheta_2^2 ;$$

$$V\vartheta\vartheta_1 = -V . \vartheta_1 V\vartheta_1\vartheta_2 = -\vartheta_2 . \vartheta_1^2 + \vartheta_1 S\vartheta_1\vartheta_2 .$$

8) *Exercice huitième.* — Il faut découvrir le point d'intersection $m_1$ de deux droites se coupant $d$ et $d_1$.

$$d = \eta + \Psi\vartheta, \qquad d_1 = \eta_1 + \Psi\vartheta_1, \qquad \eta \perp \vartheta, \qquad \eta_1 \perp \vartheta_1 ;$$

$$m_1 = \mu + l\xi_1 ; \qquad \xi_1 = ?$$

$$8')\quad G_3 . d_1 m_1 = 0 = \eta_1\mu + lS\eta_1\xi_1 - \mu V\vartheta_1\xi_1 ;$$

$$8'')\quad G_3 . d\ m_1 = 0 = \eta\ \mu + lS\eta\ \xi_1 - \mu V\vartheta\ \xi_1 .$$

$$8')\quad \eta_1 - V\vartheta_1\xi_1 = 0, \qquad S\eta_1\xi_1 = 0 ;$$

$$8'')\quad \eta\ - V\vartheta\ \xi_1 = 0, \qquad S\eta\ \xi_1 = 0 .$$

$$8')\quad \eta_1 = V\vartheta_1\xi_1, \qquad \eta_1 + s_1 = \vartheta_1\xi_1, \qquad \xi_1 = \vartheta_1^{-1}\eta_1 + s_1\vartheta_1^{-1} ;$$

$$8'')\quad \eta\ = V\vartheta\ \xi_1, \qquad \eta\ + s\ = \vartheta\ \xi_1, \qquad \xi_1 = \vartheta^{-1}\eta\ + s\ \vartheta^{-1} .$$

La multiplication de $\xi_1$ dans l'équation 8') avec $\eta_1$ donne $S\xi_1\eta_1 = 0$. De la même manière la multiplication de $\xi_1$ dans l'équation 8'') avec $\eta$ donne $S\eta_1\xi = 0$. Elles sont alors triviales.

Pour cela nous multiplions $\xi_1$ de la première équation avec $\eta$ et $\xi_1$ de la deu xième équation avec $\eta_1$ et nous recevons :

$$8')\quad S\eta\ \xi_1 = S\eta\ \vartheta_1^{-1}\eta_1 + s_1 . S\eta\ \vartheta_1^{-1} = 0, \qquad s_1 = -\frac{S\eta\vartheta_1^{-1}\eta_1}{S\eta\vartheta_1^{-1}} ;$$

$$8'')\quad S\eta_1\xi_1 = S\eta_1\vartheta_1^{-1}\eta\ + s\ . S\eta_1\vartheta^{-1} = 0, \qquad s\ = -\frac{S\eta_1\vartheta^{-1}\eta}{S\eta_1\vartheta^{-1}} .$$

$$\boxed{\begin{gathered} m_1 = \mu + l\xi_1 ;\\ \xi_1 = \vartheta_1^{-1}\eta_1 - \frac{S\eta\vartheta_1^{-1}\eta_1}{S\eta\vartheta_1^{-1}} . \vartheta_1^{-1} ;\\ \xi_1 = \vartheta^{-1}\eta - \frac{S\eta_1\vartheta^{-1}\eta}{S\eta_1\vartheta^{-1}} . \vartheta^{-1} .\end{gathered}}$$

La condition pour que les deux droites $d$ et $d_1$ se coupent, est

$$G_4 d d_1 = \Psi(S\eta\vartheta_1 + S\eta_1\vartheta) = 0.$$

## § 31. — Réflexions.

On a

$$1)\ \ {}^s m_0 . m = m', \qquad 2)\ \ {}^s p . m = m', \qquad 3)\ \ {}^s d . m = m'.$$

$$1)\ \ m = \mu + l\xi, \qquad m_0 = \mu + l\xi_0;$$

$$\boxed{m' = 2m_0 - m = \mu + l(2\xi_0 - \xi),}$$

car : $m + m' = 2m_0$.

*N. B.* — Si $m$ et $m_0$ ont des poids différents, il faut les mettre sur poids égaux par multiplication avec scalaires convenables.

$$2)\ \ m = \mu + l\xi, \qquad p = \mu\zeta + zl;$$

$$\boxed{m' = \mu + l[\xi + 2(z - S\zeta\xi)\zeta^{-1}].}$$

Cette relation a été trouvée en déterminant $c$ de l'équation

$$G_4 p m_0 = G_4(\mu\zeta + zl).[\mu + l(\xi + c\zeta)]$$

et le substituant dans l'équation

$$m' = \mu + l(\xi + 2c\zeta);$$

$m_0$ est le point de chute de $m$ sur $p$.

$$3)\ \ \boxed{m' = \mu + l(2\vartheta^{-1}S\vartheta\xi + 2V\vartheta^{-1}\eta - \xi);} \qquad \begin{array}{l} m = \mu + l\xi, \\ d = \eta - \Psi\vartheta, \qquad \eta \perp \vartheta. \end{array}$$

On obtient les mêmes résultats en utilisant le calcul des triquaternions.

$$1)\ \ m'_c = m_{0c}.m_c.m_{0c}^{-1}, \qquad m_c = \mu + \omega\xi, \qquad m_{0c} = \mu + \omega\xi_0, \qquad m_{0c}^{-1} = m_{0c};$$

$$2)\ \ m'_c = p_c.m_c.p_c^{-1}, \qquad p_c = \mu\zeta + \omega z, \qquad p_c^2 = \zeta^2, \qquad p_c^{-1} = p_c.\frac{1}{\zeta^2};$$

$$3)\ \ m'_c = d_c.m_c.d_c^{-1}, \qquad d_c = \vartheta + \omega\eta, \qquad d_c^{-1} = d_c.\frac{1}{\vartheta^2}.$$

Dans tous les cas on obtient $\mathcal{G}_1 m_c = m'$, comme ci-dessus.

Pour réfléchir des plans et des droites, on a besoin de réfléchir les champs de points :

$$m = \mu + x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + \varphi(x_1, x_2)\lambda_3$$

et de même les séries de points :

$$m = \mu + x\lambda_1 + \varphi_1(x)\lambda_2 + \varphi_3(x)\lambda_3.$$

On réfléchit 3 (resp. 2 points) et on relie les points réfléchis à des plans (resp. droites).

$$\begin{aligned} {}^s m_0 . G_2 m_1 m_2 &= s_1 G_2 m'_1 m'_2 = s_1 G_2({}^s m_0 m_1 . {}^s m_0 m_2), \\ {}^s d . G_2 m_1 m_2 &= s_2 G_2 m'_1 m'_2 = s_2 G_2({}^s d m_1 . {}^s d m_2), \text{ etc.} \end{aligned}$$

## § 32. — La réflexion représentée par des transformantes.

On recherche les transformantes pour

$${}^s m_{0c}, \quad {}^s d_c, \quad {}^s p_c \quad \text{et} \quad {}^s m_0, \quad {}^s d, \quad {}^s p.$$

C'est

$${}^s m_0 . m = \mathcal{G}_1 . {}^s m_{0c} \mathfrak{L}_1 . m;$$

donc

$$\begin{aligned} {}^s m_0 &= \mathcal{G}_1 . {}^s m_{0c} . \mathfrak{L}_1, \\ {}^s d &= \mathcal{G}_1 . {}^s d_c . \mathfrak{L}_1, \\ {}^s p &= \mathcal{G}_1 . {}^s p_c . \mathfrak{L}_1. \end{aligned}$$

L'opérande est un point ou un champ de points, resp. une série de points.

Soient $q$ et $q'$ deux quaternions :

$$q_0 = Sq, \qquad q'_0 = Sq', \qquad q_1 = Vq, \qquad q'_1 = Vq';$$

alors

$$\boxed{\begin{gathered} (q + \omega q')^{-1} = \frac{Kq + \omega Kq'}{\omega[2q_0 q'_0 - 2S(q_1 q'_1)] + qKq}, \\ qKq = (Tq)^2, \qquad r = \omega[2q_0 q'_0 - 2S(q_1 q'_1)] + (Tq)^2 = \omega r_1 + r_2. \end{gathered}}$$

Argument :

$$(q+\omega q')(\mathrm{K}q+\omega\mathrm{K}q') = q\mathrm{K}q+\omega(q'\mathrm{K}q+q\mathrm{K}q') = r_2+\omega r_1,$$
$$(q'_0+q'_1)(q_0-q_1) = q'_0q_0+q'_1q_0-q'_0q_1-q'_1q_1,$$
$$(q_0+q_1)(q'_0-q'_1) = q_0q'_0-q_0q'_1+q_1q'_0-q_1q'_1,$$
$$q'\mathrm{K}q+q\mathrm{K}q' = 2q_0q'_0-2\mathrm{S}(q_1q'_1).$$

$$\boxed{\begin{gathered}(\mu q+\omega q')^{-1} = \frac{\mu\mathrm{K}q-\omega\mathrm{K}q'}{r},\\ r = q\mathrm{K}q+[2q_0q'_0-2\mathrm{S}q_1q'_1]\omega = r_2+\omega r_1.\end{gathered}}$$

Argument :

$$(\mu q+\omega q').(\mu\mathrm{K}q-\omega\mathrm{K}q') = q\mathrm{K}q+\omega(q'\mathrm{K}q+q\mathrm{K}q') = r_2+\omega r_1.$$

Comme $(r_2+\omega r_1)(r_2-\omega r_1) = r_2^2$, on obtient une deuxième forme des relations ci-dessus en amplifiant la fraction avec $r_2-\omega r_1$.

$$1)\quad {}^s m_{oc}.m_c = m'_c.$$

C'est

$$({}^0\mu+{}^0\omega.{}^0q'_1)({}^*\mu+{}^*\omega.{}^*q')(\mu_1\lambda_0+\omega\xi).$$
$$q=q_0=1,\quad q_1=0,\quad q'=q'_1,\quad q'_0=0,\quad r_1=0,\quad r=1.$$

Généralement :

$$^*(\mu q+\omega q') = {}^*(\mu q)+{}^*(\omega q') = {}^*\mu.{}^*q+{}^*\omega.{}^*q'.$$

Pareillement :

$$^*(\mu q+\omega q') \qquad \text{et} \qquad {}^0(\mu q+\omega q').$$

De plus :

$$\boxed{({}^0q_1+{}^*q_1)\lambda_0 = 2q_1.}$$

Voir la table III a) et b), § 22.

Donc :

$$\begin{aligned} m'_c = {}&{}^0\mu.{}^*\mu.\mu_1\lambda_0+{}^0\mu.{}^*\omega.\mu_1.{}^*q'.\lambda_0+{}^0\omega.{}^*\mu.\mu_1.{}^0q'_1.\lambda_0\\ &+{}^0\mu.{}^*\mu.\omega.\xi+{}^0\mu.{}^*\omega.\omega.{}^*q'_1.\xi+{}^0\omega.{}^*\mu.\omega.{}^0q'_1.\xi = \mu+\omega(2q'_1-\xi),\end{aligned}$$

en concordance avec le résultat antérieur § 31, 1). Voir aussi § 23.

$$2)\quad {}^{s}p_c . m_c = m'_c, \qquad p_c = \mu q_1 + \omega q'_0;$$

$$q_0 = 0. \qquad q_1 = \zeta, \qquad q'_0 = z, \qquad q'_1 = 0, \qquad r = -\zeta^2;$$

$$m'_c = ({}^{0}\mu . {}^{0}\zeta + {}^{0}\omega . z)(-{}^{*}\mu . {}^{*}\zeta - {}^{*}\omega . z)(\mu + \omega\xi) . \frac{1}{r}.$$

En effectuant les opérations on trouve le même résultat comme au § 31, 2). De cela suivent les identités :

$$\boxed{{}^{0}\zeta . {}^{*}\zeta . \lambda_0 = \zeta^2 . \lambda_0;}$$

$$\boxed{{}^{0}\zeta . {}^{*}\zeta . \xi = 2\zeta S\xi\zeta - \xi . \zeta^2 = \zeta\xi\zeta = V . \zeta\xi\zeta.}$$

*N. B.* : $\mu_1\lambda_0 . \lambda_0 = \mu_1\lambda_0 = \mu$; $\lambda_1\lambda_0 = \lambda_1$, etc.

Par contre : $\lambda_{11} . \lambda_0 = 0$, etc.

$$3)\quad {}^{s}d_c . m_c = m'_c, \qquad d_c = q_1 + \omega q'_1, \qquad S q_1 q'_1 = 0;$$

$$q_0 = 0, \qquad q_1 = \vartheta, \qquad q'_0 = 0, \qquad q'_1 = \eta;$$

$$d = \eta - \Psi\vartheta, \qquad d_c = \vartheta + \omega\eta, \qquad r = -\vartheta^2;$$

$$\eta = y_1\lambda_1 + y_2\lambda_2 + y_3\lambda_3, \qquad \vartheta = t_1\lambda_1 + t_2\lambda_2 + t_3\lambda_3;$$

$$m'_c = ({}^{0}\vartheta + {}^{0}\omega . {}^{0}\eta)(-{}^{*}\vartheta - {}^{*}\omega . {}^{*}\eta) . (\mu + \omega\xi) . \frac{1}{-\vartheta^2}.$$

Les opérations effectuées le résultat est le même comme au § 31, 3. Il résulte :

$$\boxed{({}^{0}\vartheta . {}^{*}\eta - {}^{0}\eta . {}^{*}\vartheta)\lambda_0 = V\vartheta\eta, \qquad \eta \perp \vartheta.}$$

## § 33. — **Les transformantes** : ${}^{s}m_0$, ${}^{s}p$, ${}^{s}d$.

$$m_0 = \mu + l\alpha, \qquad \alpha = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\lambda_3 = (\alpha\lambda),$$

$$m = \mu + l\xi; \qquad \xi = x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + x_3\lambda_3 = (x\lambda);$$

$$m'_c = \mu + \omega(2\alpha - \xi), \qquad m' = \mu + l(2\alpha - \xi).$$

Comme les transformantes sont des opérations associatives, on a

$$1)\quad {}^{s}m_0 . m = (\mathcal{G}_1 . {}^{s}m_{0c})\mathcal{L}_1 . m = \mathcal{G}_1({}^{s}m_{0c} . \mathcal{L}_1) . m.$$

Dans l'un et l'autre cas on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} m' &= [\mu_{11}\lambda_{00} + \mu_{31}(\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33})({}^{0}\alpha + \overset{*}{-}\alpha)\lambda_{00} \\ &\quad - \mu_{33}(\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33})] \cdot [\mu_1\lambda_0 + \mu_3(x\lambda)] \\ &= \mu_1\lambda_0 + \mu_3({}^{0}\alpha + \overset{*}{-}\alpha)\lambda_0 - \mu_3\xi . \end{aligned}}$$

1 a) Les transformantes de transcription sous conservation des règles de composition.

Si d'une manière générale on a

$$\mu_m\lambda_n = e_{(mn)}, \qquad (mn) = mt + n, \qquad t \overset{>}{=} 4,$$

cette notation est nécessaire pour que les indices différant les uns des autres, après la transformation, restent encore différents.

Alors

$$\mu_1\lambda_0 + \mu_3(x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + x_3\lambda_3) = e_{(10)} + x_1 e_{(31)} + x_2 e_{(32)} + x_3 e_{(33)} .$$

Si on désigne le point d'origine avec $e_0$, alors il y a :

$$N = e_{0\,(10)} + e_{1\,(31)} + e_{2\,(32)} + e_{3\,(33)} ;$$

par conséquent :

$$N(e_{(10)} + x_1 e_{(31)} + x_2 e_{(32)} + x_3 e_{(33)}) = e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 .$$

Si l'on accepte encore :

$$\text{« } e_{mn} = e_m ; e_n \text{ »} \qquad \text{et} \qquad \text{« } Ne_{mn} = Ne_m ; Ne_n \text{ »},$$

on trouve les transformantes correspondantes :

$$N . \mu_{11}\lambda_{00} = N . e_{(10)\,(10)} = Ne_{(10)} ; Ne_{(10)} = e_{00} .$$

Pareillement

$$\begin{aligned} N . \mu_{31}\lambda_{10} &= N . e_{(31)\,(10)} = e_{10} , \\ N . \mu_{31}\lambda_{20} &= N . e_{(32)\,(10)} = e_{20} , \\ N . \mu_{31}\lambda_{30} &= N . e_{(33)\,(10)} = e_{30} . \end{aligned}$$

D'où

$$m' = [e_{00} + 2(\alpha_1 e_{10} + \alpha_2 e_{20} + \alpha_3 e_{30}) - e_{11} - e_{22} - e_{33}] . (e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3),$$

en concordance avec § 16, I.

$$2)\quad {}^s p.m = m' = \mathcal{G}_1.{}^s p_c.\mathcal{L}_1.m;$$

$${}^s p = \mathcal{G}_1.{}^s p_c.\mathcal{L}_1, \qquad p = \mu\zeta + zl.$$

Il résulte :

$$\boxed{\begin{aligned} {}^s p = \{ & \mu_{11}[z_1^2(-\lambda_{00}) + z_2^2(-\lambda_{00}) + z_3^2(-\lambda_{00}) \\ & -\mu_{33}[z_1^2(-\lambda_{11}+\lambda_{33}+\lambda_{22}) + z_2^2(-\lambda_{22}+\lambda_{11}+\lambda_{33}) + z_3^2(-\lambda_{33}+\lambda_{22}+\lambda_{11}) \\ & + z_1 z_2(-2\lambda_{12}-2\lambda_{21}) + z_2 z_3(-2\lambda_{23}-2\lambda_{32}) + z_3 z_1(-2\lambda_{31}-2\lambda_{13})] \\ & + \mu_{31}.2z(z_1\lambda_{10}+z_2\lambda_{20}+z_3\lambda_{30})\}\frac{1}{\zeta^2}. \end{aligned}}$$

2 a) Transcription.

Au moyen de la même transcription N comme pour ${}^s m_0$ et pour $z = -h = -\alpha_0$, $z_1 = \alpha_1$, $z_2 = \alpha_2$, $z_3 = \alpha_3$ [c'est que $-z = h = \alpha_0$, comme nous avons posé $p = \mu\zeta + zl$, qui est égal à $\mu\zeta + (-z).(-l)$] on trouve la même relation qu'au § 16, III.

$$3)\quad d = \eta - \Psi\vartheta, \qquad d_c = \vartheta + \omega\eta.$$

Par le même procédé ${}^s d.m = m' = \mathcal{G}_1.{}^s d_c.\mathcal{L}_1.m$ et l'on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} d_s = \{ & \mu_{11}[(t_1^2+t_2^2+t_3^2)\lambda_{00} \\ & + \mu_{31}[\lambda_{30}.2(t_1y_2 - t_2y_1) + \lambda_{10}.2(t_2y_3 - t_3y_2) + \lambda_{20}.2(t_3y_1 - t_1y_3)] \\ & + \mu_{33}[\lambda_{11}(t_1^2-t_2^2-t_3^2) + \lambda_{22}(-t_1^2+t_2^2-t_3^2) + \lambda_{33}(-t_1^2-t_2^2+t_3^2) \\ & \quad + \lambda_{12}.2t_1t_2 + \lambda_{23}.2t_2t_3 + \lambda_{31}.2t_3t_1 \\ & \quad + \lambda_{21}.2t_2t_1 + \lambda_{32}.2t_3t_2 + \lambda_{13}.2t_1t_3]\}.\frac{1}{t_1^2+t_2^2+t_3^2}. \end{aligned}}$$

3 a) Transcription. Comme nous sommes partis de l'équation $d_c = \vartheta + \omega\eta$, et plus haut de

$$d_c = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k + \omega(\beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k),$$

il est à poser :

$$t_n = \alpha_n, \qquad y_n = \beta_n; \qquad n = 1, 2, 3.$$

Nous trouvons en employant N exactement l'équation de la droite réfléchissante, comme au § 16, II.

## § 34. — Autres réflexions.

Par la multiplication mutuelle de ${}^{s}m_1, {}^{s}m_2, \ldots, {}^{s}p_1, {}^{s}p_2, \ldots, {}^{s}d_1, {}^{s}d_2, \ldots,$ on peut représenter tous les mouvements (rotations, glissements, etc.) de points, de séries de points et de champs de points. Il serait intéressant de voir comment les réflexions se forment à partir des autres formes géométriques comme éléments.

Réflexion d'une droite par un point.

Nous écrivons pour $\mathcal{G}_n . {}^{s}m_{oc} . \mathcal{L}_n$ brièvement $\mathfrak{S}_{1n}$; $n = 1, 2, 3$. Alors :

$$\mathfrak{S}_{12} . G_2 m_1 m_2 = s . G_2(\mathfrak{S}_{11} m_1 . \mathfrak{S}_{11} . m_2); \qquad s = \text{un nombre scalaire.}$$

Ou encore :

$$sd' = sG_2 . m'_1 m'_2; \qquad m_1 = \mu + l\eta, \qquad m_2 = \mu + l\vartheta, \qquad m_0 = \mu + l\alpha;$$
$$m'_1 = \mu + l(2\alpha - \eta), \qquad m'_2 = \mu + l(2\alpha - \vartheta);$$
$$d' = 2V . \alpha(\eta - \vartheta) + \Psi(\vartheta - \eta) + V\eta\vartheta;$$
$$d = G_2 . m_1 m_2 = \Psi(\eta - \vartheta) + V\eta\vartheta .$$

Or :

$$\mathfrak{S}_{12} . G_2 m_1 m_2 = \mathcal{G}_2 . {}^{s}m_{oc} . \mathcal{L}_2 . G_2 m_1 m_2 .$$

On trouve :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathfrak{S}_{12} = {} & \mu_{00}(\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33}) + \mu_{02}(\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33})({}^{0}\alpha - {}^{*}\alpha)(\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33}) \\ & - \mu_{22}(\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33}) .\end{aligned}}$$

En effet : $\qquad \mathfrak{S}_{12} . d = d', \qquad s = +1 .$

C'est que

$$\boxed{\begin{aligned}& (\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33})({}^{0}\alpha - {}^{*}\alpha)(\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33}) \\ & \qquad = 2\alpha_1(\lambda_{32} - \lambda_{23}) + 2\alpha_2(\lambda_{13} - \lambda_{31}) + 2\alpha_3(\lambda_{21} - \lambda_{12}) .\end{aligned}}$$

$$\boxed{(\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33})({}^{0}\alpha - {}^{*}\alpha)(\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33}) . (\eta - \vartheta) = 2V . \alpha(\eta - \vartheta) .}$$

Une transformante uniforme pour tous les opérandes (point, droite et plan) est obtenue en comprenant $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_{n1} + \mathfrak{S}_{n2} + \mathfrak{S}_{n3}$.

Une signification plus générale est

$$\tau m_1,\ \tau m_2, \ldots\ \tau d_1,\ \tau d_2, \ldots\ \tau p_1,\ \tau p_2, \ldots$$

## § 35. — Transition vers les coordonnées ordinaires.

1 a) Un point en coordonnées ponctuelles.

$$m_x = x_0\mu + l\xi, \qquad m = \alpha_0\mu + l\alpha.$$

$$\boxed{G_2 . m m_x = 0.}$$

On a :

$$\Psi(x_0\alpha - \alpha_0\xi) + V\alpha\xi = 0.$$

Donc :

$$\text{A)}\quad x_0\alpha - \alpha_0\xi = 0, \qquad \text{B)}\quad V\alpha\xi = 0.$$

$$\text{A)}\quad x_0(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\lambda_3) = \alpha_0(x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + x_3\lambda_3);$$

$$x_0\alpha_1 = \alpha_0 x_1, \qquad x_0\alpha_2 = \alpha_0 x_2, \qquad x_0\alpha_3 = \alpha_0 x_3$$

ou

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \qquad \frac{x_2}{x_0} = \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \qquad \frac{x_3}{x_0} = \frac{\alpha_3}{\alpha_0}.$$

$$\text{B)}\quad V.\alpha\xi = V(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\lambda_3)(x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + x_3\lambda_3)$$
$$= (\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1)\lambda_3 + (\alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3)\lambda_2 + (\alpha_2 x_3 - \alpha_3 x_2)\lambda_1 = 0.$$

Là encore :

$$\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1 = 0, \qquad \alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3 = 0, \qquad \alpha_2 x_3 - \alpha_3 x_2 = 0,$$

comme à propos de A).

1 b) Une droite en coordonnées ponctuelles.

$$m_x = x_0\mu + l\xi, \qquad d = \alpha + \psi\beta, \qquad S\alpha\beta = 0.$$

$$\boxed{G_3 . d m_x = 0.}$$

$$G_3 . d m_x = \mu(x_0\alpha - V\beta\xi) + lS\alpha\xi = 0.$$

$$\text{A)}\quad x_0\alpha - V\beta\xi = 0, \qquad\qquad \text{B)}\quad S\alpha\xi = 0.$$

A) En développant $\alpha$ et $V\beta\xi$ on obtient trois équations :

$$x_0\alpha_1 = \beta_2 x_3 - \beta_3 x_2,$$
$$x_0\alpha_2 = \beta_3 x_1 - \beta_1 x_3,$$
$$x_0\alpha_3 = \beta_1 x_2 - \beta_2 x_1.$$

Ce sont les équations des projections de la droite sur les plans coordonnés. Elles ne sont pas indépendantes les unes des autres.

$$\text{B)}\quad S\alpha\xi = 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0.$$

C'est l'équation pour le plan renfermant la droite et le point origine.

En multipliant les équations A) successivement avec $x_1$, $x_2$, $x_3$, on obtient

$$x_0(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) = (\beta_2 x_3 - \beta_3 x_2)x_1 + (\beta_3 x_1 - \beta_1 x_3)x_2 + (\beta_1 x_2 - \beta_2 x_1)x_3 \equiv 0.$$

Alors B) est contenu dans A).

1 c) Un plan en coordonnées ponctuelles.

$$m_x = x_0\mu + l\xi, \qquad p = \mu\alpha + \alpha_0 l.$$

$$\boxed{G_4 . p m_x = 0.}$$

$$G_4 . p m_x = \Psi(\alpha_0 x_0 - S\alpha\xi) = 0;$$

ainsi donc

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0.$$

2 a) Un point en coordonnées linéaires.

$$m = \alpha_0\mu + l\alpha, \qquad d_{xy} = \xi + \Psi\eta, \qquad S\xi\eta = 0.$$

$$\boxed{G_3 . m d_{xy} = 0.}$$

$$G_3 . m d_{xy} = \mu(\alpha_0\xi + V\alpha\eta) + lS\alpha\xi = 0.$$

$$\text{A)}\quad \alpha_0\xi + V\alpha\eta = 0, \qquad\qquad \text{B)}\quad S\alpha\xi = 0.$$

$\xi$ et $V\alpha\eta$ développés donnent :

$$\alpha_0 x_1 + \alpha_2 y_3 - \alpha_3 y_2 = 0,$$
$$\alpha_0 x_2 + \alpha_3 y_1 - \alpha_1 y_3 = 0,$$
$$\alpha_0 x_3 + \alpha_1 y_2 - \alpha_2 y_1 = 0.$$

$$\text{B)}\quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0.$$

B) et contenu dans A), car

$$\alpha_0\alpha_1 x_1 + \alpha_1\alpha_2 y_3 - \alpha_1\alpha_3 y_2 + \alpha_0\alpha_2 x_2 + \alpha_2\alpha_3 y_1 - \alpha_1\alpha_2 y_3 + \alpha_0\alpha_3 x_3 + \alpha_3\alpha_1 y_2 - \alpha_3\alpha_2 y_1 \equiv 0.$$

*N. B.* — Les coordonnées linéaires d'ailleurs désignées avec $p_{mn}$ sont ici :

$$x_1 = p_{23}, \qquad y_1 = -p_{01},$$
$$x_2 = p_{31}, \qquad y_2 = -p_{02},$$
$$x_3 = p_{12}; \qquad y_3 = -p_{03}.$$

2 b) Une droite en coordonnées linéaires.

$$d = \alpha + \Psi\beta, \qquad d_{xy} = \xi + \Psi\eta, \qquad S\alpha\beta = 0, \qquad S\xi\eta = 0.$$

$$\boxed{G_4 . d d_{xy} = 0.}$$

$$G_4 . d d_{xy} = \Psi(S\beta\xi + S\alpha\eta) = 0.$$
$$S\beta\xi + S\alpha\eta = 0;$$

donc

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0 \qquad (\mathbf{6}, \text{pag. } 129) : (\mathfrak{L}\mathfrak{X}) = 0.$$

2 c) Un plan en coordonnées linéaires.

$$p = \mu\alpha + \alpha_0 l, \qquad d_{xy} = \xi + \Psi\eta, \qquad S\xi\eta = 0.$$
$$G_3 . p d_{xy} = \mu(\alpha_0\eta + V\alpha\xi) - l S\alpha\eta.$$

$$\text{A)}\quad \alpha_0\eta + V\alpha\xi = 0, \qquad \text{B)}\quad S\alpha\eta = 0.$$

A) donne :

$$\alpha_0 y_1 + \alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1 = 0,$$
$$\alpha_0 y_2 + \alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3 = 0,$$
$$\alpha_0 y_3 + \alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1 = 0.$$

B) donne :

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0.$$

3 a) Un point en coordonnées planaires.

$$m = \alpha_0 \mu + l\alpha, \qquad p_z = \mu\zeta + z_0 l;$$

$$z_n = \text{coordonnées planaires}, \qquad n = 0, 1, 2, 3.$$

$$\boxed{G_4 . m p_z = 0.}$$

$$G_4 . m p_z = \Psi(S\alpha\zeta - \alpha_0 z_0).$$

Donc

$$\alpha_0 z_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 = 0.$$

3 b) Une droite en coordonnées planaires.

$$d = \alpha + \Psi\beta, \qquad p_z = \mu\zeta + z_0 l, \qquad S\alpha\beta = 0.$$

$$\boxed{G_3 . d p_z = 0.}$$

$$G_3 . d p_z = \mu(V\alpha\zeta - z_0\beta) + lS\beta\zeta.$$

$$\text{A)} \quad V\alpha\zeta - z_0\beta = 0, \qquad \text{B)} \quad S\beta\zeta = 0.$$

A) donne :

$$\alpha_1 z_2 - \alpha_2 z_1 - z_0 \beta_3 = 0,$$
$$\alpha_3 z_1 - \alpha_1 z_3 - z_0 \beta_2 = 0,$$
$$\alpha_2 z_3 - \alpha_3 z_2 - z_0 \beta_1 = 0,$$

B) donne :

$$\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3 = 0.$$

3 c) Un plan en coordonnées planaires.

$$p = \mu\alpha + \alpha_0 l, \qquad p_z = \mu\zeta + z_0 l.$$

$$\boxed{G_2 . p p_z = 0.}$$

$$G_2 . p p_z = V\alpha\zeta + \Psi(\alpha_0\zeta - z_0\alpha).$$

$$\text{A)} \quad V\alpha\zeta = 0, \qquad \text{B)} \quad \alpha_0\zeta - z_0\alpha = 0.$$

A) donne :

$$\alpha_1 z_2 - \alpha_2 z_1 = 0, \qquad \alpha_3 z_1 - \alpha_1 z_3 = 0, \qquad \alpha_2 z_3 - \alpha_3 z_2 = 0;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \qquad \frac{z_3}{z_1} = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \qquad \frac{z_2}{z_3} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}.$$

B) donne :

$$\alpha_0 z_1 - z_0 \alpha_1 = 0, \qquad \alpha_0 z_2 - z_0 \alpha_2 = 0, \qquad \alpha_0 z_3 - z_0 \alpha_3 = 0;$$

$$\frac{z_1}{z_0} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \qquad \frac{z_2}{z_0} = \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \qquad \frac{z_3}{z_0} = \frac{\alpha_3}{\alpha_0}.$$

A) suit de B).

Il est à remarquer la symétrie des indices.

Voir la liste suivante. Les deux diagonales sont symétriques.

| $G_{n''}$ | $m_x$ | $d_{xy}$ | $p_z$ |
|---|---|---|---|
| $m$ | 2 | 3 | 4 |
| $d$ | 3 | 4 | 3 |
| $p$ | 4 | 3 | 2 |

Les indices $n = 4, 5, 6$ obéissent à la règle :

$$n'' = 4 - n + 4<n>.$$

La règle générale pour tous les indices, aussi 2, 3 est

$$n'' = \varphi^{<n>}(n - 4<n>), \qquad \text{où} \qquad \varphi(x) = 4 - x,$$

$$\varphi^2 = 1, \qquad \varphi^{-1} = \varphi, \qquad \varphi^{3<n>} = \varphi^{(2+1)<n>} = (\varphi^2 . \varphi)^{<n>} = \varphi^{<n>}.$$

# POSTFACE

Encore quelques mots sur le vaste champ de travail qui est ouvert à des applications de nos transformantes.

On a employé déjà fréquemment les transformantes, mais d'une manière occasionnelle et sans adopter l'unification des symboles; sans cette unification on ne peut pas embrasser la portée de ce véhicule mathématique.

Ainsi les symboles des quaternions de Hamilton S, V, K, ainsi que les symboles des triquaternions de Combebiac G, L, P ne sont que des transformantes électives.

Le trait de supplément de la doctrine de Grassmann et les quotients des couples de points

$$\bigwedge = \frac{\varepsilon_1\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3 \ldots}{e_1,\ e_2,\ e_3 \ldots} \text{ (3, pag. 76...., II)}$$

sont aussi des transformantes; sans compter que par l'emploi des transformantes la théorie des invariants prend une autre et nouvelle forme. Dans beaucoup d'autres domaines on peut employer les transformantes avec avantage.

Ainsi par exemple, le terme appelé « affinor » peut être représenté le plus simplement par les transformantes. La représentation usuelle est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{R} = \left( i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \circ (ii\sigma_x + ij\tau_{xy} + ik\tau_{xz} \\ + ji\tau_{xy} + jj\sigma_y + jk\tau_{yz} + ki\tau_{xz} + kj\tau_{yz} + kk\sigma_z) = \nabla \circ \Pi\,. \end{aligned}$$

$\Pi$ n'est autre chose que notre transformante :

$$\sigma_x e_{11} + \tau_{xy} e_{12} + \tau_{xz} e_{13} + \tau_{xy} e_{21} + \sigma_y e_{22} + \tau_{yz} e_{23} + \tau_{xz} e_{31} + \tau_{yz} e_{32} + \sigma_z e_{33}\,.$$

Ici $\sigma_m$, $\tau_{mn}$ sont des nombres ordinaires.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} e_1 + \frac{\partial}{\partial y} e_2 + \frac{\partial}{\partial z} e_3\,.$$

Il résulte de là, très simplement aussi, $\Pi \circ \nabla$.

Aussi les transformantes sont utiles dans les domaines les plus éloignés, par exemple, dans la logique mathématique. Pour une représentation exacte des relations syntactiques dans la syntaxe mathématique elles sont, à notre avis, tout à fait indispensables.

Un exemple de la logique mathématique.

Si C est l'étendue de tous les cas qui entrent en question, ainsi

$$C = e_{11} + e_{22} + \dots + e_{99},$$
$$A = e_{11} + e_{22} + \dots + e_{55},$$
$$B = e_{44} + e_{55} + e_{66} + e_{77}. \qquad (\textit{fig. 10.})$$

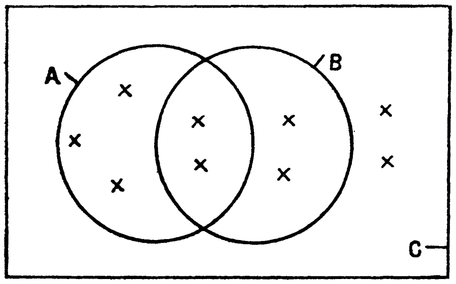


FIG. 10.

Alors il est manifeste que l'étendue commune est

$$A \,.\, B = (e_{11} + e_{22} + \dots + e_{55})(e_{44} + \dots + e_{77}) = e_{44} + e_{55}.$$

On peut vérifier que :

$$\text{L'étendue } \{A + B\} = A + B - AB\,;$$
$$\text{Non-A} = C - A, \quad CA = A, \quad \text{etc.}$$

Dans la syntaxe mathématique, la relation entre le substantif et l'adjectif est manifestement comme celle entre nos symboles avec l'indice simple et ceux avec deux indices, les transformantes électives.

Si nous désignons les catégories des trois genres grammaticaux (il existe aussi des langues avec plus et avec moins de ces catégories) avec

$$g_1 = \text{masculin}, \qquad g_2 = \text{féminin}, \qquad g_0 = \text{neutre},$$

comme par exemple en anglais, où le genre de l'adjectif n'est pas marqué, mais où naturellement le substantif et l'adjectif sont distingués (au moins d'après le sentiment), l'expression « red flower » doit être représentée en symboles mathématiques de la manière suivante : $r(g_{00} + g_{11} + g_{22}).Fg_0$.

Au contraire, en français, le genre pour la plupart des adjectifs a une forme différente; par exemple « belle fleur », où la forme mathématique devient la suivante : $bg_{22}.Fg_2$ ou, si l'on veut, $b(g_{00} + g_{11} + g_{22})g_{22}.Fg_2$ (F = flower, fleur, $r$ = red, $b$ = beau, ce qui provient des notions mentionnées),

La composition effectuée, on obtient un mot composé. *Cf.* en allemand : « roter Wein » = « $rg_{11}.Wg_1$ » et « Rotwein » = « $rWg_1$ ». On voit pourquoi ici « rot » ne peut pas être déterminé par un adverbe.

Une relation similaire comme entre le substantif et l'adjectif existe d'un côté entre l'adjectif et le verbe et d'autre côté entre les déterminations adverbiales. Les dernières contiennent une transformante de degré supérieur comme facteur.

Tous les travaux ultérieurs peuvent être accomplis sans plus grandes difficultés, puisque les problèmes les plus importants sont déjà résolus, à notre avis, dans l'exposé précédent.