Annales de la faculté des sciences de Toulouse

René Guigue

Sur certains problèmes de géodésiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 28 (1936), p. 189-210

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1936_3_28__189_0>

SUR CERTAINS PROBLÈMES DE GÉODÉSIQUES

Par M. René GUIGUE,

Professeur au Lycée Ampère, Lyon.

Dans ses excellentes *Leçons de Géométrie vectorielle,* M. Bouligand donne à ses lecteurs le conseil de s'attacher à traduire en notations vectorielles les relations que l'on rencontre dans l'étude des principaux problèmes de la Théorie des Surfaces, tels qu'ils sont exposés par exemple dans les ouvrages de Darboux. Dans bien des cas on sera amené ainsi, d'une manière presque automatique, à en mieux dégager le sens et à en pénétrer toute la portée.

C'est ce que je me propose de faire dans la Première partie de cette étude pour certaines questions concernant les géodésiques. J'y montre comment les méthodes vectorielles se prêtent aisément à la démonstration de la formule classique des géodésiques, des formules de Codazzi, du théorème de Gauss.

Ces méthodes nous seront encore utiles, dans la Seconde partie, pour la mise en équation du problème suivant : Déterminer les surfaces qui admettent une famille de géodésiques située sur des cylindres circulaires coaxiaux. La solution de ce problème dépend de l'intégration de l'équation de la chaleur. Ce cas n'est pas le seul où il en est ainsi.

Généralisant le problème précédent, j'ai déterminé une condition que doit vérifier une famille de courbes Γ du plan xoy pour que la détermination des surfaces qui admettent une famille de géodésiques dont les projections sur le plan xoy soient les courbes Γ, dépende de l'équation de la chaleur.

PREMIÈRE PARTIE

1. — On peut considérer une surface comme l'hodographe d'un vecteur $\mathbf{V}$ fonction de deux paramètres u et v.

Le vecteur $\mathbf{V}'_u$ est porté par la tangente à la courbe u (ou $v = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$), le vecteur $\mathbf{V}'_v$ par la tangente à la courbe v (ou $u = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$), le vecteur $\mathbf{V}'_u \wedge \mathbf{V}'_v$ par la normale à la surface, nous désignerons le vecteur-unité de la normale par $\mathbf{n}$.

Les coefficients E, F, G de l'élément linéaire ont les valeurs :

$$(1) \qquad \mathrm{E} = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \mathbf{V}'^2_u, \qquad \mathrm{F} = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = \mathbf{V}'_u . \mathbf{V}'_v, \qquad \mathrm{G} = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \mathbf{V}'^2_v.$$

Les coefficients de la seconde forme quadratique fondamentale s'écrivent :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{E}' &= \Sigma\, l \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial u}\right) = \mathbf{V}''_{uu} . \mathbf{n} = -\mathbf{V}'_u . \mathbf{n}'_u, \\ \mathrm{F}' &= \Sigma\, l \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v}\right) = -\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial u}\right) = \mathbf{V}''_{uv} . \mathbf{n} = -\mathbf{V}'_u . \mathbf{n}'_v = -\mathbf{V}'_v . \mathbf{n}'_u, \\ \mathrm{G}' &= \Sigma\, l \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial v}\right) = \mathbf{V}''_{vv} . \mathbf{n} = -\mathbf{V}'_v . \mathbf{n}'_v \end{aligned} \right.$$

(observer que $\mathbf{V}'_u . \mathbf{n} = 0, \ldots,$ l désigne l'un des cosinus directeurs de la normale.)

Nous introduisons 6 quantités m, m', m'', n, n', n'' par les formules :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} m &= \mathbf{V}'_u . \mathbf{V}''_{uu} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}, \\ m' &= \mathbf{V}'_u . \mathbf{V}''_{uv} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}, \\ m'' &= \mathbf{V}'_u . \mathbf{V}''_{vv} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}; \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} n &= \mathbf{V}'_v . \mathbf{V}''_{uu} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}, \\ n' &= \mathbf{V}'_v . \mathbf{V}''_{uv} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}, \\ n'' &= \mathbf{V}'_v . \mathbf{V}''_{vv} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}, \end{aligned} \right.$$

et 6 quantités nouvelles p, p', p'', q, q', q'' par les formules suivantes que l'on établit facilement si l'on tient compte de la formule bien connue de calcul vectoriel :

$$(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})(\mathbf{w}\wedge\mathbf{t}) = (\mathbf{u}\,.\,\mathbf{w})(\mathbf{v}\,.\,\mathbf{t}) - (\mathbf{u}\,.\,\mathbf{t})(\mathbf{v}\,.\,\mathbf{w});$$

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} p\,\mathrm{H}^2 = (\mathbf{V}''_{uu}\wedge\mathbf{V}'_v)\,.\,(\mathbf{V}'_u\wedge\mathbf{V}'_v) = m\,\mathrm{G} - n\,\mathrm{F},\\ p'\,\mathrm{H}^2 = (\mathbf{V}''_{uv}\wedge\mathbf{V}'_v)\,.\,(\mathbf{V}'_u\wedge\mathbf{V}'_v) = m'\,\mathrm{G} - n'\,\mathrm{F},\\ p''\mathrm{H}^2 = (\mathbf{V}''_{vv}\wedge\mathbf{V}'_v)\,.\,(\mathbf{V}'_u\wedge\mathbf{V}'_v) = m''\mathrm{G} - n''\mathrm{F};\\ \\ q\,\mathrm{H}^2 = (\mathbf{V}'_u\wedge\mathbf{V}''_{uu})\,.\,(\mathbf{V}'_u\wedge\mathbf{V}'_v) = n\,\mathrm{E} - m\,\mathrm{F},\\ q'\,\mathrm{H}^2 = (\mathbf{V}'_u\wedge\mathbf{V}''_{uv})\,.\,(\mathbf{V}'_u\wedge\mathbf{V}'_v) = n'\,\mathrm{E} - m'\,\mathrm{F},\\ q''\mathrm{H}^2 = (\mathbf{V}'_u\wedge\mathbf{V}''_{vv})\,.\,(\mathbf{V}'_u\wedge\mathbf{V}'_v) = n''\mathrm{E} - m''\mathrm{F}, \end{array}\right.$$

avec : $\mathrm{H}^2 = \mathrm{EG} - \mathrm{F}^2$.

Ces notations étant admises, nous allons établir maintenant la formule qui donne les lignes géodésiques d'une surface.

2. — Considérons le vecteur $\mathbf{V}''_{uu}$ et décomposons-le en trois autres portés par $\mathbf{V}'_u$, $\mathbf{V}'_v$ et $\mathbf{n}$.

$$\mathbf{V}''_{uu} = x\mathbf{V}'_u + y\mathbf{V}'_v + z\mathbf{n}\,.$$

En multipliant scalairement par $\mathbf{n}$, on obtient :

$$z = \mathrm{E}'.$$

En multipliant par $\mathbf{V}'_u$ on obtient :

$$m = \mathrm{E}x + \mathrm{F}y,$$

et en multipliant par $\mathbf{V}'_v$:

$$n = \mathrm{F}x + \mathrm{G}y.$$

Si l'on tient compte des relations (4) on a :

$$x = p, \qquad y = q\,.$$

En procédant de même pour $\mathbf{V}''_{uv}$, $\mathbf{V}''_{vv}$ on obtient les trois relations :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{V}''_{uu} = p\,\mathbf{V}'_u + q\,\mathbf{V}'_v + \mathrm{E}'\mathbf{n},\\ \mathbf{V}''_{uv} = p'\,\mathbf{V}'_u + q'\,\mathbf{V}'_v + \mathrm{F}'\mathbf{n},\\ \mathbf{V}''_{vv} = p''\mathbf{V}'_u + q''\mathbf{V}'_v + \mathrm{G}'\mathbf{n}. \end{array}\right.$$

Le plan osculateur à une courbe (L) tracée sur la surface est défini par les deux vecteurs $\mathbf{dV}$, $\mathbf{d^2V}$.

$$\mathbf{dV} = \mathbf{V}'_u\, du + \mathbf{V}'_v\, dv,$$
$$\mathbf{d^2V} = \mathbf{V}''_{uu}\, du^2 + 2\mathbf{V}''_{uv}\, du\, dv + \mathbf{V}''_{vv}\, dv^2 + \mathbf{V}'_u\, d^2u + \mathbf{V}'_v\, d^2v.$$

En tenant compte des formules (5), $\mathbf{d^2V}$ s'écrit :

$$\mathbf{d^2V} = (p\mathbf{V}'_u + q\mathbf{V}'_v + \mathrm{E}'\mathbf{n})\, du^2 + 2(p'\mathbf{V}'_u + q'\mathbf{V}'_v + \mathrm{F}'\mathbf{n})\, du\, dv$$
$$+ (p''\mathbf{V}'_u + q''\mathbf{V}'_v + \mathrm{G}'\mathbf{n})\, dv^2 + \mathbf{V}'_u\, d^2u + \mathbf{V}'_v\, d^2v.$$

Pour exprimer que la ligne (L) est une géodésique, il faut écrire que son plan osculateur contient la normale à la surface, ce qui se traduit par :

$$\mathbf{n} = \lambda\mathbf{dV} + \mu\mathbf{d^2V} \tag{6}$$

ou, en tenant compte des valeurs de $\mathbf{dV}$ et $\mathbf{d^2V}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} = {} & [\lambda du + \mu d^2v + \mu(p\, du^2 + 2p'\, du\, dv + p''\, dv^2)]\,\mathbf{V}'_u \\ & + [\lambda dv + \mu d^2u + \mu(q\, du^2 + 2q'\, du\, dv + q''\, dv^2)]\,\mathbf{V}'_v \\ & + \mu(\mathrm{E}'\, du^2 + 2\mathrm{F}'\, du\, dv + \mathrm{G}'\, dv^2)\,\mathbf{n}.\end{aligned}$$

Cette égalité vectorielle n'est possible que si les coefficients de $\mathbf{V}'_u, \mathbf{V}'_v$ sont nuls.

$$\lambda du + \mu d^2v + \mu(p\, du^2 + 2p'\, du\, dv + p''\, dv^2) = 0,$$
$$\lambda dv + \mu d^2u + \mu(q\, du^2 + 2q'\, du\, dv + q''\, dv^2) = 0.$$

Multiplions ces deux relations respectivement par dv et du et retranchons. Il vient :

$$du\, d^2v - dv\, d^2u - \begin{vmatrix} p\, du^2 + 2p'\, du\, dv + p''\, dv^2 & du \\ q\, du^2 + 2q'\, du\, dv + q''\, dv^2 & dv \end{vmatrix} = 0.$$

Nous obtenons ainsi l'équation des géodésiques que nous mettrons sous la forme habituellement adoptée en la multipliant par H^2 et en remplaçant les quantités telles que $\mathrm{H}^2 p$, $\mathrm{H}^2 p'$ ... par leurs valeurs déduites des formules (4), ce qui nous conduit à :

$$\mathrm{H}^2(du\, d^2v - dv\, d^2u) - \begin{vmatrix} m\, du^2 + 2m'\, du\, dv + m''\, dv^2 & \mathrm{E}\, du + \mathrm{F}\, dv \\ n\, du^2 + 2n'\, du\, dv + n''\, dv^2 & \mathrm{F}\, du + \mathrm{G}\, dv \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

On peut encore parvenir à l'équation (7) en remplaçant la relation (6) par la suivante :

$$(6') \qquad \mathbf{d^2V\,dV\,n} = 0,$$

qui, elle aussi, exprime que le vecteur $\mathbf{n}$ est dans le plan osculateur de la courbe $\mathbf{L}$.

3. — Établissons maintenant les formules connues sous le nom de « Formules de Codazzi ».

Par dérivation des relations (2) qui donnent E', F', G', on verra facilement que l'on a :

$$\frac{\partial E'}{\partial v} - \frac{\partial F'}{\partial u} = (\mathbf{n}'_v \,.\, \mathbf{V}''_{uu}) - (\mathbf{n}'_u \,.\, \mathbf{V}''_{uv}),$$

$$\frac{\partial G'}{\partial u} - \frac{\partial F'}{\partial v} = (\mathbf{n}'_v \,.\, \mathbf{V}''_{uv}) - (\mathbf{n}'_u \,.\, \mathbf{V}''_{vv}),$$

ce qui, par le moyen des formules (5), devient :

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial E'}{\partial v} - \frac{\partial F'}{\partial u} &= p'E' + (q'-p)\,F' - q\,G', \\ \frac{\partial G'}{\partial u} - \frac{\partial F'}{\partial v} &= q'G' + (p'-q'')F' - p''E'. \end{aligned} \right.$$

4. — Les Méthodes vectorielles se prêtent également bien à la démonstration du Théorème de Gauss.

Si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre la courbure totale en deux points correspondants est la même pour les deux surfaces.

La courbure totale étant donnée par la formule :

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{E'G' - F'^2}{H^4},$$

il suffit de démontrer que l'expression $E'G' - F'^2$ ne dépend que des coefficients E, F. G de l'élément linéaire et de leurs dérivées partielles par rapport à u et v.

Résolvons les équations (5) par rapport à :

$$E'\mathbf{n}, \qquad F'\mathbf{n}, \qquad G'\mathbf{n}$$

$$(5') \qquad \left\{ \begin{aligned} E'\mathbf{n} &= \mathbf{V}''_{uu} - p\;\mathbf{V}'_u - q\;\mathbf{V}'_v, \\ F'\mathbf{n} &= \mathbf{V}''_{uv} - p'\,\mathbf{V}'_u - q'\,\mathbf{V}'_v, \\ G'\mathbf{n} &= \mathbf{V}''_{vv} - p''\mathbf{V}'_u - q''\mathbf{V}'_v. \end{aligned} \right.$$

Multiplions scalairement la première et la troisième des relations (5), élevons la seconde au carré scalaire et retranchons. Le premier membre de la relation obtenue est $E'G' - F'^2$. Le second membre est un polynôme homogène et du second degré par rapport aux dérivées partielles premières et secondes du vecteur $\mathbf{V}$. Nous distinguerons dans ce second membre trois sortes de termes : 1° ceux où figure un produit de deux dérivées premières de $\mathbf{V}$; 2° ceux où figure un produit d'une dérivée première et d'une dérivée seconde; 3° ceux où figure un produit de deux dérivées secondes.

D'après les relations (1), (3) et (4) les termes des deux premières catégories sont des fonctions de E, F, G et de leurs dérivées premières par rapport à u et v.

Les termes de la troisième catégorie sont :

$$\mathbf{V}''_{uu} \cdot \mathbf{V}''_{vv} - \mathbf{V}''^{2}_{uv},$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial v}(\mathbf{V}''_{uu} \cdot \mathbf{V}'_{v}) - \frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{V}''_{uv} \cdot \mathbf{V}'_{v}),$$

ou encore d'après (3)

$$\frac{\partial n}{\partial v} - \frac{\partial n'}{\partial u} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}.$$

Ces termes dépendent donc des dérivées secondes de E, F, G.

DEUXIÈME PARTIE

---

5. — Le Problème que nous allons étudier au cours de cette deuxième partie est le suivant :

Déterminer les surfaces qui admettent une famille de géodésiques dont on se donne les projections orthogonales (Γ) *sur un plan donné.*

Nous prendrons ce plan pour plan xoy.

Si l'on prend pour paramètres u et v les variables x et y, l'équation (7) des géodésiques s'écrit :

$$(7') \qquad (1 + p^2 + q^2)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = (p\,dy - q\,dx)(r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2).$$

On peut se donner la famille de courbes (Γ) sous la forme d'une équation différentielle :

$$(9) \qquad y' = \varphi(x, y).$$

L'équation (7′) devient :

$$(10) \qquad (p\varphi - q)(r + 2s\varphi + t\varphi^2) = (\varphi'_x + \varphi\varphi'_y)(1 + p^2 + q^2).$$

Donc les surfaces qui admettent une famille de géodésiques dont les projections sur le plan xoy sont les courbes (Γ), sont des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du second ordre (10). Les caractéristiques de cette équation du type parabolique sont précisément les courbes (Γ). Cette équation ne paraît guère devoir se prêter à des développements ultérieurs.

6. — Avant d'envisager notre problème dans toute sa généralité, nous allons développer deux cas particuliers. Ce sont les cas où les géodésiques données sont situées sur des plans passant par une même droite ou sur des cylindres circulaires de même axe.

La droite commune aux plans dans le premier cas, l'axe commun des cylindres dans le second seront pris pour axe oz. Ici il sera commode d'utiliser les coordonnées cylindriques.

Les équations de l'une des surfaces cherchées seront alors :

$$(11) \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = F(r, \theta).$$

Les coefficients E, F, G ont les valeurs :

$$(12) \qquad E = 1 + F_r^2, \qquad F = F_r F_\theta, \qquad G = r^2 + F_\theta^2.$$

Les coefficients m, m', m'', n, n', n'' sont ici :

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} m &= F_r F_{rr}, \\ m' &= F_r F_{r\theta}, \\ m'' &= F_r F_{\theta\theta} - r; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} n &= F_\theta F_{rr}, \\ n' &= r + F_\theta F_{r\theta}, \\ n'' &= F_\theta F_{\theta\theta}. \end{aligned}\right.$$

I) Si l'on se place dans le premier cas, pour traduire le fait que les courbes $\theta = c^{te}$ sont des géodésiques, on écrira que :

$$(\mathbf{V}'_r \wedge \mathbf{V}'_\theta) \cdot (\mathbf{V}'_r \wedge \mathbf{V}''_{rr}) = 0,$$

ou :

$$H^2 q = nE - mF = 0,$$

ou bien encore, d'après (13) et (12) :

$$(14) \qquad F_{rr} F_\theta = 0.$$

Cette équation se décompose en deux autres :

1° $F_\theta = 0$, z est fonction de r seul, les surfaces cherchées sont de révolution autour de oz.

2° $F_{rr} = 0$. Les surfaces sont des surfaces réglées à directrice rectiligne oz, d'équations :

$$z = rf(\theta) + g(\theta),$$

où f et g désignent des fonctions arbitraires de θ.

II) Dans le second cas, on est conduit à l'équation :

$$(\mathbf{V}'_r \wedge \mathbf{V}'_\theta)(\mathbf{V}''_{\theta\theta} \wedge \mathbf{V}'_\theta) = 0,$$

qui indique que les courbes $r = c^{te}$ sont des géodésiques, ou encore :

$$H^2 p'' = m''G - n''F = 0,$$

et enfin :

$$rF_r F_{\theta\theta} = r^2 + F_\theta^2. \tag{15}$$

L'équation (15) paraît d'une intégration malaisée. Nous ferons seulement à son propos la remarque suivante. Si on l'écrit :

$$xpt = x^2 + q^2, \tag{15'}$$

en utilisant les notations habituelles, on verra aisément que la transformation d'Ampère permet de la mettre sous forme d'une équation complètement linéaire par rapport aux dérivées premières et secondes, car elle devient ainsi :

$$T + \frac{X}{X^2 + Y^2} P = 0. \tag{16}$$

Il est remarquable de signaler que l'équation :

$$T - \frac{X}{X^2 + Y^2} P = 0, \tag{16'}$$

est réductible à l'équation de la chaleur par un changement de variables alors que l'équation (16) ne l'est pas [1].

Les deux problèmes particuliers que nous venons de considérer pouvaient aussi être étudiés en partant de l'équation (10) : le premier en faisant $\varphi(x, y) = \dfrac{y}{x}$, ce qui remplace (10) par :

$$(py - qx)(rx^2 + 2sxy + ty^2) = 0$$

(équation que l'on intégrera aisément) ; le second en remplaçant $\varphi(x, y)$ par $-\dfrac{x}{y}$, ce qui donne :

$$(px + qy)(y^2r - 2xys + x^2t) = (x^2 + y^2)(1 + p^2 + q^2).$$

Cette équation prend la forme (15) par le changement de variables :

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

---

[1] Voir : *L'Enseignement Mathématique*, 1934, Lignes asymptotiques et Équation de la Chaleur, p. 331.

7. — Revenons à notre problème général du paragraphe 5.

Si l'on veut que les courbes $u = c^{te}$ soient des géodésiques pour la surface :

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v),$$

il faut, en raisonnant toujours de la même façon que :

$$(\mathbf{V}'_u \wedge \mathbf{V}'_v)(\mathbf{V}''_{vv} \wedge \mathbf{V}'_v) = 0$$

ou :

$$m''G - n''F = 0,$$

ce qui donne, en remplaçant m'' et n'' par leurs valeurs, d'après (3) :

$$G\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right) - \frac{F}{2}\frac{\partial G}{\partial v} = 0.$$

ce que l'on peut encore écrire :

$$(17) \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{\sqrt{G}}\right) = \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.$$

Dans ce qui suit, il sera commode d'envisager la question ainsi :

Soit : $\varphi(x, y) = u$ la famille des courbes planes (Γ) qui seront dans le plan xoy les projections orthogonales d'une famille de géodésiques des surfaces cherchées.

Désignons par $\psi(x, y) = v$ la famille des trajectoires orthogonales (T) des courbes (Γ) dans le plan xoy. (C'est ainsi que nous avons fait dans le paragraphe 6.)

Les surfaces que nous voulons obtenir seront donc données par les 3 équations :

$$(18) \qquad \varphi(x, y) = u, \qquad \psi(x, y) = v, \qquad z = z(u, v)$$

ou par l'équation unique :

$$(18') \qquad z = z[\varphi(x, y), \ \psi(x, y)].$$

En différentiant les deux premières équations (18) on a

$$du = \varphi_x dx + \varphi_y dy, \qquad dv = \psi_x dx + \psi_y dy,$$

d'où l'on déduit :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u}&=\frac{\psi_y}{\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x},\\ \frac{\partial x}{\partial v}&=\frac{-\varphi_y}{\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x};\end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial u}&=\frac{-\psi_x}{\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x},\\ \frac{\partial y}{\partial v}&=\frac{\varphi_x}{\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on écrit que les courbes $\varphi(x, y)=u$, $\psi(x, y)=v$ sont orthogonales, on a d'abord :

$$(20)\qquad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}=0$$

ou :

$$(20')\qquad \varphi_x\psi_x+\varphi_y\psi_y=0.$$

Les coefficients F et G de l'élément linéaire deviennent ainsi :

$$F=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},\qquad G=\frac{\varphi_x^2+\varphi_y^2}{(\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x)^2}+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Nous poserons :

$$(21)\qquad \lambda^2=\frac{\varphi_x^2+\varphi_y^2}{(\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x)^2}$$

et nous exprimerons λ en fonction de u et v au moyen des deux premières équations (18).

On peut donc écrire ;

$$G=\lambda^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

L'équation (17) devient maintenant :

$$(22)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\frac{\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{\lambda^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2}}=\frac{\partial\sqrt{\lambda^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2}}{\partial u}.$$

En développant cette équation, on obtient :

$$(23)\qquad \lambda\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial\lambda}{\partial u}\left[\lambda^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]+\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.$$

En définitive *pour avoir les surfaces admettant pour géodésiques des courbes qui se projettent sur le plan* xoy *suivant les courbes* (Γ), $\varphi(x, y) = u$, *nous aurons à intégrer l'équation* (23) *où* λ *désigne une fonction de* u *et* v *donnée par* (21). *Dans cette dernière* ψ *est une fonction de* x *et* y *donnée par l'intégration de* (20').

Comme l'intégration de cette équation paraît être en général malaisée, nous reprendrons l'équation (22) et nous constaterons qu'elle exprime que :

$$\frac{\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{\lambda^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2}} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}$$

sont les dérivées partielles par rapport à u et v d'une même fonction $\Phi(u, v)$.

On peut donc écrire :

$$\frac{\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{\lambda^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2}} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \qquad \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v}, \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \lambda^2.$$

En posant $z = i\zeta$ les équations précédentes deviennent :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 = \lambda^2. \tag{24}$$

Les équations précédentes auxquelles doivent satisfaire les fonctions ζ et Φ de u et v sont précisément celles que vérifient x et y considérées comme fonctions de u et v puisque l'on a ;

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} = 0, \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 = \lambda^2,$$

d'après (20) et (21).

Adjoignons aux équations (24) l'équation :

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 = \mu^2,$$

où μ désigne une nouvelle fonction inconnue de u et v, de telle sorte que la fonction ζ (qui multipliée par i donne la fonction cherchée z de u et v) et la fonction Φ (qui doit être considérée comme une fonction inconnue auxiliaire) seront données par le système d'équations aux dérivées partielles :

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2=\mu^2,\\ &\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}+\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}=0,\\ &\left(\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2=\lambda^2,\end{aligned}\right.$$

pourvu que l'on sache déterminer la fonction μ. C'est donc sur ce dernier point que nous allons porter notre attention.

Les équations (25) entraînent que :

$$(26)\qquad d\zeta^2+d\Phi^2=\mu^2du^2+\lambda^2dv^2.$$

Le premier membre de cette égalité représente le carré de l'élément linéaire du plan et par conséquent la surface dont l'élément linéaire a pour carré :

$$\mu^2du^2+\lambda^2dv^2,$$

doit avoir une courbure nulle.

La formule[1]

$$K=\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}-\frac{\partial G}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{2\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right),$$

nous permet de traduire cette condition sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda\mu}\frac{\partial\lambda^2}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\lambda\mu}\frac{\partial\mu^2}{\partial v}\right)=0$$

ou, en simplifiant :

$$(27)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\mu}{\partial v}\right)=0.$$

---

[1] Voir par exemple : A. BUHL, *Formules stokiennes*, p. 53.

L'équation (27) nous permettra donc de calculer μ. Il en résulte qu'en dernière analyse *la solution de notre problème réside dans l'intégration de l'équation* (27). Mais ici encore nous serons arrêté en général par la difficulté de trouver des solutions de cette équation.

Abandonnant le cas général, nous allons envisager maintenant deux cas particuliers dans lesquels la solution du problème pourra être poussée un peu plus loin.

8. — Supposons que la fonction λ définie par (21) ne dépende que de la seule variable v. Alors, en posant $\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \lambda'$, (23) se réduit à :

$$\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{\lambda'}{\lambda}\frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0.$$

Cette équation se décompose en deux autres :

$$\text{a)} \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \qquad\qquad z = z(v);$$

$$\text{b)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{\lambda'}{\lambda}\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Effectuons le changement de variable $v' = \varpi(v)$.
Alors :

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v'}\varpi', \qquad\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial v'^2}\varpi'^2 + \frac{\partial z}{\partial v'}\varpi''.$$

L'équation précédente devient :

$$\varpi'^2\frac{\partial^2 z}{\partial v'^2} = \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\varpi' - \varpi''\right)\frac{\partial z}{\partial v'}.$$

Choisissons ϖ de façon que :

$$\frac{\varpi''}{\varpi'} = \frac{\lambda'}{\lambda}, \qquad\qquad \text{soit : } \varpi = \int \lambda\, dv,$$

alors :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v'^2} = 0, \qquad\qquad z = v'\Phi(u) + \Psi(u)$$

et en revenant à la variable v :

$$z = \Phi(u)\int \lambda dv + \Psi(u),$$

Φ et ψ désignant deux fonctions arbitraires.

Le cas où les courbes (Γ) sont situées dans des plans passant par l'axe oz (1re partie du paragraphe 6) rentre dans la question actuelle.

9. — Un autre cas important est celui où λ ne dépend que de la variable u. Alors (23) s'écrit :

$$\lambda \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \lambda'\left[\lambda^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right],$$

λ' désignant la dérivée de λ par rapport à u.

En prenant λ pour variable au lieu de u, cette équation devient :

$$(15'')\qquad \lambda \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \lambda^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Aux notations près cette équation est analogue à l'équation (15) obtenue dans le cas où les courbes (Γ) étaient des cercles concentriques (2e partie du paragraphe 6) et appelle donc les mêmes remarques. Le cas présent est donc une généralisation du problème étudié en (6, II).

L'équation (27) s'écrit ici :

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2} - \frac{\lambda\lambda'}{\mu^2}\frac{\partial \mu}{\partial u} = -\lambda''\mu^{-1}.$$

C'est une équation de la forme :

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2} + \frac{f(u)}{\mu^2}\frac{\partial \mu}{\partial u} = \mu^{-1}g(u).$$

Un changement de variable de la forme $u' = \alpha(u)$ permet de l'écrire (en remettant u à la place de u') :

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2} + \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial \mu}{\partial u} = \mu^{-1}h(u).$$

Nous avons déjà rencontré cette équation dans une autre étude([1]) et nous avons montré que son intégration peut se ramener à l'intégration de l'équation de même forme mais dépourvue de second membre.

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2} + \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial \mu}{\partial u} = 0. \tag{28}$$

Nous avons aussi constaté que la connaissance d'une solution de l'équation (28) entraîne la connaissance d'une équation de la forme :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + f(u, v)\frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

réductible à l'équation de la chaleur par un changement de variables, et encore qu'à toute solution de l'équation de la chaleur on peut faire correspondre une intégrale de (28) par la règle suivante :

Soit $y' = f(x, y)$ une intégrale de l'équation :

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Formons $\dfrac{\partial y'}{\partial y}$ que nous exprimerons en fonction de x et de y' au moyen de la relation $y' = f(x, y)$ sous la forme $\varphi(x, y')$. La fonction φ ainsi obtenue est une intégrale de l'équation :

$$(\beta) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0\text{([2])}.$$

On peut donc affirmer que *dans le cas où λ ne dépend que de u la solution de notre problème de géodésiques dépend uniquement de l'intégration de l'équation de la chaleur.*

([1]) *Sur certaines équations aux dérivées partielles du 2e ordre du type parabolique, L'Enseignement Mathématique*, 1935, p. 347.

([2]) Voici quelques applications de cette règle :

1er exemple. — Prenons la solution $y' = y^2 - 2x$ de l'équation (α). Elle donne : $\dfrac{\partial y'}{\partial y} = 2y$, or $y = (y' + 2x)^{\frac{1}{2}}$. Donc $\varphi(x, y') = 2(y' + 2x)^{\frac{1}{2}}$ doit être une solution de (β), ce que l'on vérifie facilement.

2e exemple. — La solution $y' = e^{a^2x}\cos ay$ de (α) donne la solution $a(e^{2a^2x} - y'^2)^{\frac{1}{2}}$ de (β).

3e exemple. — De même la solution $y' = e^{-a^2x+ay}$ de (α) conduit à la solution y' pour (β).

En particulier, lorsque les courbes (Γ) sont des cercles concentriques, l'équation (27) devient :

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial \theta^2} - \frac{r}{\mu^2}\frac{\partial \mu}{\partial r} = 0.$$

Cette dernière s'écrira :

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial \mu}{\partial \rho} = 0$$

en posant : $\rho = -\log r$.

Dans le cas où λ est fonction de u seul, nous signalerons encore une intéressante propriété.

Écrivons que :

$$\lambda^2 = \frac{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}{(\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x)^2}$$

ne dépend pas de v :

$$\frac{\partial(\lambda^2)}{\partial v} = \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 0.$$

En tenant compte des formules (19) :

$$\varphi_y \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial x} - \varphi_x \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial y} = 0.$$

Un calcul qui ne présente pas de difficulté mais seulement quelque longueur, montre que la relation précédente s'écrit :

$$(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\mathrm{X}(\psi) - (\varphi_x\psi_x + \varphi_y\psi_y)\mathrm{X}(\varphi) = 0$$

en posant pour abréger :

$$\mathrm{X}(\psi) = \varphi_y^2\psi_{xx} - 2\varphi_x\varphi_y\psi_{xy} + \varphi_x^2\psi_{yy},$$
$$\mathrm{X}(\varphi) = \varphi_y^2\varphi_{xx} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + \varphi_x^2\varphi_{yy}.$$

Mais, puisque $\varphi_x\psi_x + \varphi_y\psi_y = 0$, on a finalement :

(29) $$\varphi_y^2\psi_{xx} - 2\varphi_x\varphi_y\psi_{xy} + \varphi_x^2\psi_{yy} = 0.$$

Il résulte de ce calcul que si λ est fonction de u seul, la fonction $\psi(x, y)$ est une solution commune des deux équations (20′) et (29).

L'équation $v = \psi(x, y)$ est alors susceptible d'une double interprétation géométrique :

1° Dans le plan xoy, $v = \psi(x, y)$ est l'équation de la famille des trajectoires orthogonales des courbes (Γ), $u = \varphi(x, y)$. C'est ce qu'exprime la condition (20′).

2° Dans l'espace, si l'on écrit z au lieu de v, $z = \psi(x, y)$ est l'équation d'une surface dont un système d'asymptotiques se projette sur le plan xoy suivant les courbes (Γ), $u = \varphi(x, y)$. C'est la condition traduite par l'équation (29).

Exemple. — La vérification du fait qui précède est aisée quand les courbes (Γ) sont les cercles concentriques : $u^2 = x^2 + y^2$. Les trajectoires orthogonales sont les droites $v = \text{arc tang } \dfrac{y}{x}$. L'équation (29) que vérifie ici la fonction ψ est :

$$y^2 r - 2xys + x^2 t = 0.$$

Au lieu d'envisager seulement le cas où λ est fonction de u seul, on peut considérer le cas un peu plus général où λ est le produit d'une fonction U de u par une fonction V de v :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 = \lambda^2 = U^2V^2.$$

Remplaçons le paramètre v par un autre v' tel que v' soit fonction de v. Ceci devient :

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v'}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v'}\right)^2\right]\left(\frac{dv'}{dv}\right)^2 = U^2V^2.$$

Donc, si on prend : $v' = \int V dv$,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v'}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v'}\right)^2 = U^2$$

et ce cas se ramène à celui où λ est fonction de u seul. Le même raisonnement montre que si λ est fonction de v seul, on peut remplacer le paramètre v par un autre v' fonction de v, de façon que la nouvelle valeur de λ soit une constante, par exemple l'unité.

10. — *a*) Notre problème de géodésiques nous conduit à chercher deux fonctions ζ et Φ qui vérifient le système :

$$(25) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 = \mu^2, \\ &\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0, \\ &\left(\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 = \lambda^2, \end{aligned} \right.$$

où λ est une fonction donnée et μ une fonction de u et v assujettie à la condition d'être solution de l'équation :

$$(27) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \mu}{\partial v}\right) = 0.$$

b) Remarquons que nous connaissons toujours *a priori* une solution de cette équation (27). En effet les deux fonctions x et y de u et v définies par les deux premières équations (18) sont telles que :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 = \lambda^2,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = 0;$$

donc, si on pose :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = \mu_0^2,$$

x et y sont solutions d'un système de la forme (25) et par suite μ_0 est une solution de (27).

En utilisant les formules (19), on voit d'ailleurs que μ_0 est donné par la formule :

$$(30) \qquad \mu_0^2 = \frac{\psi_x^2 + \psi_y^2}{(\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x)^2}.$$

c) Reprenons le système (25) où nous supposons maintenant que μ est une fonction bien déterminée de u et v solution de (27).

Si l'on dérive chacune des 3 équations du système (25) successivement par rapport à u et v, on obtient 6 équations linéaires par rapport aux dérivées secondes des fonctions inconnues ζ et Φ.

Ces équations nous donneront donc :

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial u\partial v}, \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2},$$

en fonction de :

$$u, \quad v, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial u}, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial v}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial u}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial v}.$$

Donc si on connaît pour un système de valeurs de u et v les valeurs de ζ et Φ et de leurs dérivées premières, on pourra calculer les valeurs de leurs dérivées secondes et par de nouvelles différentiations celles de toutes leurs dérivées d'ordre supérieur. D'où la possibilité de former des développements en séries de Taylor des solutions de (25), les coefficients des termes de ces séries, c'est-à-dire les valeurs que prennent pour un système donné des valeurs u_0, v_0 des variables les fonctions ζ et Φ et leurs quatre dérivées premières étant seulement assujettis à satisfaire aux 3 équations (25), de telle sorte que les solutions formées dépendront de trois paramètres arbitraires.

d) A l'appui de ce qui précède, on pourra montrer que si ζ_1 et Φ_1 constituent une solution de (25) toutes les fonctions ζ et Φ telles que :

$$(31) \qquad \begin{cases} \zeta = a + \alpha\zeta_1 + \alpha'\Phi_1, \\ \Phi = b + \beta\zeta_1 + \beta'\Phi_1, \end{cases}$$

sont aussi des solutions de (25), les paramètres a, b étant arbitraires, et les paramètres α, α', β, β' étant liés par les relations :

$$(32) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = 1, \qquad \alpha'^2 + \beta'^2 = 1, \qquad \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0.$$

e) A propos du système (25), on pourra encore constater que l'équation :

$$(33) \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v} - \frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial u} = \lambda\mu = \frac{D(\zeta, \Phi)}{D(u, v)}$$

est une conséquence des trois équations de ce système.

f) Signalons aussi que notre système (25) rappelle celui que l'on a à considérer dans le problème suivant. Étudier la forme d'une surface définie par les six coefficients des deux formes quadratiques fondamentales E, F, G, E', F', G'[1].

---

[1] V. Vessiot, *Géométrie supérieure*, p. 62.

On a alors à chercher trois fonctions x, y, z de u et v, solutions du système formé par les six équations (α), (β) ci-après :

$$(\alpha) \qquad \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \mathrm{E}, \qquad \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \mathrm{F}, \qquad \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \mathrm{G},$$

$$(\beta) \qquad \Sigma \mathrm{A}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \mathrm{E}', \qquad \Sigma \mathrm{A}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \mathrm{F}', \qquad \Sigma \mathrm{A}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \mathrm{G}',$$

avec :

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(u, v)}, \quad \ldots\ldots$$

On montre que, si le système des équations (α), (β) admet une solution $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ définissant une surface (S), il admet aussi pour intégrales toutes les fonctions :

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= a + \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z, \\ \mathrm{Y} &= b + \beta x + \beta' y + \beta'' z, \\ \mathrm{Z} &= c + \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z, \end{aligned}\right.$$

qui définissent les surfaces obtenues en déplaçant (S) de toutes les façons possibles[1]; a, b, c sont des paramètres arbitraires, les α, β, γ vérifient six équations de la forme :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \qquad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \quad \ldots\ldots$$

Mais notre système (25) est plus simple puisqu'il ne comporte que deux fonctions inconnues au lieu de trois; les trois équations (β) n'interviennent pas dans (25), et de plus dans la seconde équation (α) la fonction F est identiquement nulle quand il s'agit de (25).

g) Le fait que les fonctions ζ et Φ entrent symétriquement dans le système (25) conduit à une remarque intéressante.

Si l'on connaît une solution de ce système :

$$\zeta_1(u, v), \qquad \Phi_1(u, v),$$

on aura deux surfaces S et Σ admettant une famille de géodésiques qui se projette

---

[1] Le système n'admet pas d'autres intégrales que celles-là, de sorte que la forme de la surface est entièrement définie par la donnée des six coefficients E, F, G, E', F', G' qui sont des invariants différentiels pour le groupe des mouvements dans l'espace.

sur le plan xoy suivant les courbes données (Γ). Les équations de ces surfaces sont :

$$(S) \qquad \varphi(x, y) = u, \qquad \psi(x, y) = v, \qquad z = i\,\zeta_1(u, v)$$

ou

$$z = i\,\zeta_1[\varphi(x, y), \psi(x, y)];$$

$$(\Sigma) \qquad \varphi(x, y) = u, \qquad \psi(x, y) = v, \qquad z = i\Phi_1(u, v)$$

ou

$$z = i\Phi_1[\varphi(x, y), \psi(x, y)].$$

h) Nous terminerons par la remarque suivante :

Désignons encore par $\zeta_1(u, v)$, $\Phi_1(u, v)$ une solution de (25) et posons :

$$(34) \qquad X = \zeta_1(u, v), \qquad Y = \Phi_1(u, v).$$

Résolvons les équations (34) par rapport à u et v et soit :

$$(35) \qquad u = \varphi_1(X, Y), \qquad v = \psi_1(X, Y)$$

les relations obtenues.

La première équation (35) définit dans le plan des XY une famille de courbes (Γ_1) dont les trajectoires orthogonales (T_1) sont données par la seconde équation (35).

Si l'on se propose maintenant de déterminer les surfaces admettant un système de géodésiques qui se projette sur le plan des XY suivant les courbes (Γ_1), on est amené à envisager le même système (25), chaque solution de ce système conduisant à deux des surfaces cherchées.

On pourra prendre en particulier la solution donnée par les deux premières équations (18) que l'on supposera résolues par rapport à x et à y en fonction de u et v. On voit donc que si l'on sait intégrer le système (25) où λ a une forme déterminée et où μ est une intégrale quelconque de (27), on saura par là même résoudre une infinité de problèmes de géodésiques du même genre. Ce sont tous ceux dans lesquels les familles de courbes (Γ) conduisent à la même fonction $\lambda(u, v)$. La connaissance d'une solution de (25) entraîne la connaissance de l'une de ces familles de courbes et réciproquement.