

S. CARRUS

Problèmes relatifs aux courbes et aux surfaces dont la solution générale peut s'obtenir sans aucun signe de quadrature

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 28 (1936), p. 149-187

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1936_3_28_149_0

© Université Paul Sabatier, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Problèmes relatifs aux Courbes et aux Surfaces dont la solution générale peut s'obtenir sans aucun signe de quadrature.

Par M. S. CARRUS,

Professeur à la Faculté des Sciences d'Alger.

Lorsque l'on traite certaines questions relatives à une courbe générale ou à une surface générale, on peut être amené à la recherche d'intégrales, ou à l'intégration d'équations différentielles dépendant des fonctions arbitraires définissant la courbe ou la surface.

Bien souvent, on est amené à se demander si, profitant de la forme laissée indéterminée de ces fonctions, on ne pourrait pas les supposer données sous une forme telle (en leur laissant leur généralité), que la quadrature ou l'intégration fussent possibles.

Le cas le plus connu est celui de la recherche des développées d'une courbe gauche : si l'on donne le rayon de torsion de la courbe en fonction de l'arc, $T(s)$, pour déterminer les développées, il faut obligatoirement effectuer la quadrature $\int \frac{ds}{T}$, mais, si l'on suppose que le rayon de torsion a été donné sous la forme $T(s) = \frac{1}{v'(s)}$, $v(s)$ désignant, comme $T(s)$, une fonction arbitraire, alors, la quadrature peut être effectuée, et l'on obtient, sous une forme permettant d'en étudier commodément toutes les propriétés, tous les éléments des développées.

Ces questions reviennent, en somme, à la détermination *nette* (sans signe de quadrature ou sans intégration d'équations) de m fonctions satisfaisant à un système de n équations différentielles ($m < n$).

Le premier exemple que nous ayons rencontré dans nos recherches est celui de la détermination nette des trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces $f(x, y, z) = \rho$ quand ces trajectoires orthogonales sont des courbes planes (Th. de doct.).

On trouve que la fonction $f(x, y, z)$ doit satisfaire à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, mais, même sans avoir intégré cette équation et en supposant connue une de ces familles, nous avons pu mettre l'équation aux dérivées partielles extrêmement compliquée, sous une forme telle, que les trajectoires s'en déduisent immédiatement et explicitement.

Nous avons étudié dans des Mémoires précédents (*Journal de l'Éc. polyt.*) l'intégration de ces systèmes *incomplets* d'équations différentielles linéaires (m équations entre n fonctions inconnues d'une variable, $m < n$) et nous avons pu obtenir la solution générale du système au moyen de $(n - m)$ fonctions arbitraires, toutes les fonctions inconnues dépendant linéairement de ces fonctions arbitraires et de leurs dérivées.

Dans un autre Mémoire, nous avons pu aussi montrer comment l'on pouvait obtenir la solution de certains systèmes d'équations différentielles quelconques lorsque la différentielle de la variable indépendante ne figure pas dans les équations données. Tel est le cas de la recherche des fonctions satisfaisant à l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, c'est-à-dire la détermination nette d'une courbe générale et de son arc au moyen de fonctions arbitraires de la variable indépendante t .

Nous nous proposons dans cette étude de donner de nouvelles applications de ce genre de problèmes dont quelques-unes ont fait l'objet de Notes aux *C. R.*

Elle comprendra trois parties :

- I. Détermination de certaines surfaces générales (cône ou cylindre quelconque, surfaces de révolution, surfaces développables, surfaces réglées à plan directeur, surface réglée) et de l'arc de courbe *quelconque* de ces surfaces.
 - II. Surface de révolution générale et trajectoires de ses méridiennes.
 - III. Trajectoires successives des tangentes à une courbe quelconque (nous précisons ce que nous entendons par là).
-

APPLICATIONS

On sait que si l'on prend une courbe comme enveloppe de ses tangentes sous la forme

$$x \sin t - y \cos t - v'(t) = 0,$$

les coordonnées d'un point de cette courbe sont

$$x = v'' \cos t + v' \sin t,$$

$$y = v'' \sin t - v' \cos t.$$

L'arc de courbe a alors pour expression

$$\sigma = v + v''.$$

Ce sont là, en somme, les formules les plus générales donnant les fonctions satisfaisant à

$$dx^2 + dy^2 = d\sigma^2.$$

Sans faire appel à la définition géométrique, on peut obtenir ces formules de façon purement analytique par la méthode d'intégration que nous avons exposée.

1° Cône de révolution et arc de courbe quelconque de ce cône.

Nous nous proposons d'obtenir, sans signe de quadrature, les coordonnées d'un point d'une courbe quelconque d'un cône de révolution, et l'arc de cette courbe.

En prenant oz comme axe de révolution, on peut poser

$$x = az \cos \varphi, \quad y = az \sin \varphi.$$

On en déduit

$$d\sigma^2 = (a^2 + 1)dz^2 + a^2 z^2 d\varphi^2.$$

Si l'on pose provisoirement

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{a^2 + 1}}, \quad \varphi_1 = \frac{a\varphi}{\sqrt{a^2 + 1}},$$

on obtient

$$d\sigma_1^2 = dz^2 + z^2 d\varphi_1^2.$$

C'est l'expression de l'arc de courbe en coordonnées polaires. En posant

$$\xi = z \cos \varphi_1, \quad \eta = z \sin \varphi_1,$$

on obtient

$$d\xi^2 + d\eta^2 = d\sigma_1^2;$$

$v(t)$ désignant une fonction arbitraire de t , variable quelconque, on satisfera de la façon la plus générale à cette équation, en posant

$$\begin{aligned} \xi &= z \cos \varphi_1 = v'' \cos t + v' \sin t, \\ \eta &= z \sin \varphi_1 = v'' \sin t - v' \cos t, \\ \sigma_1 &= v + v''. \end{aligned}$$

En revenant à φ et s , on a

$$\begin{aligned} z \cos \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \varphi &= v'' \cos t + v' \sin t, \\ z \sin \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \varphi &= v'' \sin t - v' \cos t. \end{aligned}$$

Ces formules définissent z et φ , c'est-à-dire la courbe la plus générale du cône au moyen de la fonction arbitraire $v(t)$. L'arc de cette courbe a pour expression

$$\sigma = \sqrt{a^2 + 1} (v + v'').$$

On peut donc dire qu'une courbe *quelconque* d'un cône de révolution est rectifiable, c'est-à-dire peut être déterminée sans signe de quadrature, au moyen de la fonction *convenablement choisie*, qui détermine la courbe et de ses dérivées.

Il faut remarquer qu'une courbe donnée d'un cône peut être représentée d'une *infinité de manières* au moyen d'une certaine fonction (projection sur l'un des plans, combinaison quelconque de deux surfaces passant par elle); mais *si l'on choisit convenablement le mode de représentation*, on pourra obtenir, sans quadrature, l'arc de cette courbe.

Nous retrouverons cette propriété pour d'autres surfaces générales. (Nous n'avons pu obtenir une telle représentation pour les courbes d'une sphère.)

Si l'on pose $a = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$, on obtient le cône

$$z^2 = (n^2 - 1)(x^2 + y^2).$$

Sur ce cône, si on considère la courbe *quelconque*

$$z \cos \frac{\varphi}{n} = v'' \cos t + v' \sin t, \quad z \sin \frac{\varphi}{n} = v'' \sin t - v' \cos t,$$

l'arc de cette courbe a pour expression

$$\sigma = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} (v + v'').$$

Par exemple, si $v(t) = t \sin t$

l'arc de courbe

$$z \cos \frac{\varphi}{n} = 1 + \cos^2 t, \quad z \sin \frac{\varphi}{n} = \sin t \cos t - t,$$

a pour expression

$$\sigma = \frac{2n}{\sqrt{n^2 - 1}} \cos t.$$

2° Cylindre de révolution et arc de courbe quelconque.

De même (en prenant pour axe de révolution oz) soit le cylindre

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

En posant

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta,$$

on aura

$$d\sigma^2 = R^2 d\theta^2 + dz^2.$$

On satisfera de la façon la plus générale à cette identité en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} z = v'' \cos t + v' \sin t, \\ R\theta = v'' \sin t - v' \cos t, \\ \sigma = v + v''; \end{array} \right.$$

$v(t)$ pouvant désigner une fonction quelconque de t les deux premières peuvent définir une courbe quelconque du cylindre. L'arc de cette courbe est donné par $\sigma = v + v''$. On a donc, *sans quadrature, l'ensemble le plus général*, constitué par une courbe quelconque du cylindre (coordonnées) et l'arc de cette courbe.

Comme pour le cône, on peut dire que *toute courbe d'un cylindre est rectifiable*, c'est-à-dire que son arc peut être représenté au moyen des dérivées de la fonction qui peut définir cette courbe.

Par exemple si l'on prend $v(t) = t \sin t$, on a la courbe

$$z = 1 + \cos^2 t, \quad R\theta = \sin t \cos t - t.$$

L'arc de cette courbe a pour expression

$$s = 2 \cos t.$$

3° Cylindre quelconque et arc d'une courbe quelconque de ce cylindre.

Nous prendrons un axe oz parallèle aux génératrices du cylindre. Un arc de courbe quelconque a pour expression

$$(1) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\sigma^2 + dz^2,$$

en désignant par σ un arc de la courbe directrice du cylindre.

$w(\tau)$ désignant une fonction quelconque d'une *variable quelconque* τ , nous prendrons la courbe directrice sous la forme

$$I \quad x = w'' \cos \tau + w' \sin \tau, \quad y = w'' \sin \tau - w' \cos \tau,$$

c'est-à-dire comme enveloppe de ses tangentes.

L'arc de cette courbe aura pour expression

$$\sigma = w + w''.$$

D'autre part, on satisfera de la façon la plus générale à l'équation (1) en posant

$$II \quad \sigma = v'' \cos t + v' \sin t, \quad z = v'' \sin t - v' \cos t, \quad s = v + v'',$$

$v(t)$ désignant une fonction quelconque de la variable quelconque (t) . On a ainsi deux expressions de σ . En les égalant on obtient

$$(2) \quad w(\tau) + w''(\tau) = v'' \cos t + v' \sin t.$$

C'est là une relation purement algébrique que nous pouvons établir entre les variables t et τ .

Ainsi, donnons-nous deux fonctions *absolument quelconques* $v(t)$, $w(\tau)$. Entre les variables (t) , (τ) établissons la relation (2) qui définira par exemple τ en fonction de t .

Les formules 1 pourront représenter le cylindre le plus général. Sur ce cylindre, l'expression correspondante de z définit la courbe la plus générale. L'arc de cette courbe et l'arc projection ont pour expressions, sans quadrature

$$\sigma = w(\tau) + w''(\tau), \quad s = v(t) + v''(t).$$

La fonction w caractérise le cylindre, la fonction v caractérise la courbe. Avec la même interprétation que dans les cas précédents, on peut dire que *une courbe quelconque d'un cylindre quelconque est rectifiable*.

Si l'on veut pouvoir établir des applications, il suffit de prendre pour $w(\tau)$ ou pour $v(t)$ une fonction simple, telle que la relation (2) puisse être résolue soit par rapport à t , soit par rapport à τ .

Application. — Prenons $v(t) = t$.

Nous considérons le cylindre *quelconque*

$$x = w'' \cos \tau + w' \sin \tau, \quad y = w'' \sin \tau - w' \cos \tau.$$

Si l'on définit une nouvelle variable t par la relation

$$\sin t = w + w'', \quad t = \arcsin (w + w''),$$

l'arc de courbe décrit par le point

$$z = -\cos t, \quad x, y \quad \text{ou} \quad z = -\sqrt{1 - (w + w'')^2},$$

a pour expression

$$s = t = \arcsin (w + w'').$$

L'arc projection sera

$$\sigma = w + w''.$$

Par exemple si l'on prend $w = \cos 2\tau$, on obtient le cylindre

$$x = -4 \cos^3 \tau, \quad y = 4 \sin^3 \tau.$$

Sur ce cylindre, l'arc de courbe

$$z = -\sqrt{1 - 9 \cos^2 2\tau}$$

a pour expression

$$s = t = -\arcsin(3 \cos 2\tau).$$

L'arc projection est

$$\sigma = -3 \cos 2\tau.$$

4° Cône quelconque et arc d'une courbe quelconque.

Nous prendrons le sommet du cône à l'origine; la base est une courbe quelconque $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ dans le plan $z = 1$. Les coordonnées d'un point quelconque du cône seront

$$X = \lambda x, \quad Y = \lambda y, \quad Z = \lambda.$$

Lorsque ce point décrit une courbe quelconque du cône, les coordonnées d'un point du cône et l'arc de la courbe décrite dépendent de deux fonctions arbitraires d'une variable. Il faut donc avoir, au moyen de deux fonctions arbitraires, les coordonnées X, Y, Z et l'arc S .

On a

$$(1) \quad dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = d\sigma^2 + dZ^2 = dS^2,$$

en posant

$$(2) \quad d\sigma^2 = dX^2 + dY^2.$$

On satisfera de la façon la plus générale à la première en posant

$$(1) \quad Z = v'' \sin t - v' \cos t, \quad \sigma = v'' \cos t + v' \sin t, \quad S = v + v'',$$

v désignant une fonction quelconque.

On satisfera à la seconde en posant

$$(2) \quad X = w'' \cos \tau + w' \sin \tau, \quad Y = w'' \sin \tau - w' \cos \tau, \quad \sigma = w + w'',$$

w désignant une fonction quelconque de τ .

On a ainsi deux expressions de σ . En les égalant, on obtient

$$(3) \quad w + w'' = v'' \cos t + v' \sin t.$$

C'est une relation finie à établir entre les variables t, τ .

En définitive, donnons-nous deux fonctions arbitraires $v(t), w(\tau)$. Les ayant choisies, établissons la relation (3) qui définira l'une des variables en fonction de l'autre.

Nous aurons bien, au moyen de deux fonctions arbitraires, et sans signe de quadrature, l'ensemble le plus général formé par le cône et la courbe quelconque de ce cône.

Quant à la directrice, elle sera donnée par

$$x = \frac{X}{\lambda}, \quad y = \frac{Y}{\lambda}, \quad z = 1.$$

Application $w(\tau) = \tau$.

On aura

$$\begin{aligned} \tau &= v'' \sin t - v' \cos t, \\ \sigma &= \tau, \quad X = \sin \tau, \quad Y = -\cos \tau, \\ S &= v + v'', \quad \lambda = v'' \cos t + v' \sin t, \quad \sigma = \tau = v'' \sin t - v' \cos t. \end{aligned}$$

La courbe directrice est

$$x = \frac{\sin \tau}{v'' \cos t + v' \sin t}, \quad y = -\frac{\cos \tau}{v'' \cos t + v' \sin t}, \quad z = 1.$$

Si, sur ce cône quelconque, nous considérons la courbe

$$\begin{aligned} x &= \sin (v'' \sin t - v' \cos t), & y &= -\cos (v'' \sin t - v' \cos t), \\ z &= v'' \cos t + v' \sin t, \end{aligned}$$

l'arc de cette courbe a pour expression

$$S = v + v''.$$

5° Surface de révolution quelconque et arc d'une courbe quelconque.

En prenant oz comme axe de révolution, l'équation de la surface dépend d'une fonction arbitraire d'une variable, par exemple l'équation $z = f(x)$ de la courbe méridienne dans le plan xoz .

Considérons sur cette surface une courbe quelconque et soient r et θ les coordonnées polaires d'un point de la courbe projection sur le plan des xy . Cette courbe dépend d'une nouvelle fonction arbitraire d'une variable.

L'arc de cette courbe aura pour expression

$$(1) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 = d\sigma^2 + dz^2,$$

σ désignant l'arc projection.

$v(t)$ désignant une fonction quelconque d'une variable quelconque t , on satisfera de la façon la plus générale à l'équation (1) en posant

$$I \quad z = v'' \sin t - v' \cos t, \quad \sigma = v'' \cos t + v' \sin t, \quad s = v + v''.$$

Nous avons alors à satisfaire à $dx^2 + dy^2 = d\sigma^2$; $w(\tau)$ désignant une fonction arbitraire d'une variable quelconque τ , nous y satisferons de la façon la plus générale en posant

$$II \quad x = w'' \cos \tau + w' \sin \tau, \quad y = w'' \sin \tau - w' \cos \tau, \quad \sigma = w + w''.$$

Nous avons ainsi deux expressions de σ . Si nous les égalons, nous obtenons

$$(3) \quad w + w'' = v'' \cos t + v' \sin t.$$

Cette équation, *purement algébrique*, donnera la relation à établir entre les variables t et τ .

Cette relation étant ainsi établie, les formules

$$\begin{cases} r^2 = (w'' \cos \tau + w' \sin \tau)^2 + (w'' \sin \tau - w' \cos \tau)^2 = w''^2 + w'^2, \\ z = v'' \sin t - v' \cos t, \end{cases}$$

donneront r et z en fonction de t (par exemple), donc la surface de révolution. En y ajoutant les formules II, on a également x, y en fonction de t , c'est-à-dire une courbe de la surface.

Pour cette courbe, l'arc, et l'arc projection sont donnés sans quadrature par les formules

$$s = v + v'', \quad \sigma = w + w''.$$

On a bien ainsi au moyen de deux fonctions arbitraires v, w , l'ensemble le plus général formé par une surface de révolution quelconque, et une courbe quelconque de cette surface. L'arc de cette courbe est obtenu sans signe de quadrature.

Dans le cas actuel, les fonctions v et w ne se séparent pas.

Pour des applications, il suffira de prendre pour l'une des fonctions v ou w , une fonction simple de manière que la relation (3) puisse être résolue par rapport à τ ou à t .

Par exemple, si $w(\tau) = \tau \sin \tau$, $v(t)$ pouvant désigner une fonction arbitraire, on a la relation

$$2 \cos \tau = v'' \cos t + v' \sin t.$$

La surface de révolution est alors définie par

$$\begin{aligned} r^2 &= 1 + \tau^2 + 3 \cos^2 \tau - 2 \tau \sin \tau \cos \tau, \\ z &= v'' \sin t - v' \cos t. \end{aligned}$$

Elle peut être quelconque.

L'arc de courbe

$$x = 1 + \cos^2 \tau, \quad y = \sin \tau \cos \tau - \tau,$$

a pour expression

$$s = v + v'';$$

l'arc projection est

$$\sigma = v'' \cos t + v' \sin t.$$

Cas particulier où $t = \tau$.

Il faut et il suffit que les fonctions $v(t)$, $w(t)$ satisfassent à l'équation

$$w + w'' = v'' \cos t + v' \sin t.$$

On a ainsi *une seule* équation différentielle linéaire entre les deux fonctions v, w . Elle se traite des plus facilement (par intégrations successives) par la méthode que nous avons donnée et on obtient les formules les plus générales suivantes

$$v = \lambda'' + 4\lambda, \quad w = \lambda'' \cos t + 3\lambda' \sin t - 2\lambda \cos t,$$

λ désignant une fonction arbitraire de t .

En les substituant dans les expressions de r , z , x , y et après réductions, on obtient la surface

$$r^2 = \mu^2 + \mu'^2, \quad z = (\lambda^{iv} + 4\lambda'') \sin t - (\lambda'' + 4\lambda') \cos t,$$

où l'on a posé pour abrégé

$$\mu = (\lambda''' + \lambda') \cos t + 2(\lambda'' + \lambda) \sin t.$$

Cette surface de révolution peut être quelconque. Sur cette surface, l'arc de courbe

$$\begin{aligned} x &= \lambda^{iv} \cos^2 t + 2\lambda''' \sin t \cos t + \lambda''(2 + \cos^2 t) + 2\lambda' \sin t \cos t + 2\lambda, \\ y &= \lambda^{iv} \sin t \cos t - \lambda''' \cos 2t + \lambda'' \sin t \cos t - \lambda' \cos 2t, \end{aligned}$$

a pour expression

$$s = v + v'' = \lambda^{iv} + 5\lambda'' + 4\lambda.$$

Exemples : Si $\lambda(t) = t$, on a la surface de révolution

$$\begin{aligned} r^2 &= (\sin 2t + 2t)^2 + \cos^2 2t = 1 + 4t \sin 2t + 4t^2, \\ z &= -4 \cos t. \end{aligned}$$

Sur cette surface, on considère la courbe

$$x = \sin 2t + 2t, \quad y = -\cos 2t.$$

L'arc de courbe a pour expression

$$S = 4t.$$

2° Si $\lambda = e^t$, on a la surface de révolution

$$\begin{cases} r^2 = 20e^{2t}(1 + \cos^2 t + \sin 2t), \\ z = 5e^t(\sin t - \cos t). \end{cases}$$

Sur cette surface, l'arc de courbe

$$x = 2e^t(2 + \cos^2 t + \sin 2t), \quad y = 2e^t\left(1 - 2\cos^2 t + \frac{1}{2}\sin 2t\right),$$

a pour expression

$$S = 10e^t.$$

Remarque. — Dans le cas où $\tau = t$, la courbe gauche a pour équations

$$\begin{aligned} x &= \lambda^{iv} \cos^2 t + 2\lambda^{iii} \sin t \cos t + \lambda^{ii}(2 + \cos^2 t) + 2\lambda' \sin t \cos t + 2\lambda, \\ y &= \lambda^{iv} \sin t \cos t - \lambda^{iii} \cos 2t + \lambda^{ii} \sin t \cos t - \lambda' \cos 2t, \\ z &= \lambda^{iv} \sin t - \lambda^{iii} \cos t + 4\lambda^{ii} \sin t - 4\lambda' \cos t, \quad S = \lambda^{iv} + 5\lambda^{iii} + 4\lambda. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (\lambda^{iv} + 5\lambda^{iii} + 4\lambda') \cos^2 t, & \frac{dy}{dt} &= (\lambda^{iv} + 5\lambda^{iii} + 4\lambda') \sin t \cos t, \\ \frac{dz}{dt} &= (\lambda^{iv} + 5\lambda^{iii} + 4\lambda') \sin t. \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{dx}{ds} = \cos^2 t, \quad \frac{dy}{ds} = \sin t \cos t, \quad \frac{dz}{ds} = \sin t.$$

Quelle que soit λ , la courbe indicatrice des tangentes se projette sur le plan des xy suivant

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha.$$

Les courbes considérées sont donc toutes celles qui admettent cette courbe comme projection de l'indicatrice des tangentes.

6° Surface développable quelconque et courbe quelconque.

Nous définissons la surface développable par son arête de rebroussement et pour définir la courbe de cette surface, nous prendrons sur chaque tangente à partir du point de contact m , une longueur ρ qui pourra être une fonction quelconque de t , variable quelconque.

Si x, y, z sont les coordonnées du point de contact m , et si α, β, γ sont les cosinus directeurs de la tangente en m , les coordonnées du point M de la courbe sont

$$X = x + \rho\alpha, \quad Y = y + \rho\beta, \quad Z = z + \rho\gamma.$$

On aura

$$(1) \quad dS^2 = \Sigma(\alpha d\sigma + \alpha d\rho + \rho d\alpha)^2 = (d\sigma + d\rho)^2 + \frac{\rho^2}{R^2} d\sigma^2,$$

R désignant le rayon de courbure de l'arête en m , σ l'arc de l'arête.

Si nous posons provisoirement

$$(2) \quad \frac{\varphi}{R} d\sigma = d\psi,$$

la relation (1) devient

$$(1') \quad dS^2 = (d\sigma + d\varphi)^2 + d\psi^2,$$

t désignant une variable quelconque, on satisfera de la façon la plus générale à cette relation en posant

$$\text{II} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma + \varphi = v'' \cos t + v' \sin t, \\ \psi = v'' \sin t - v' \cos t, \\ S = v + v'', \end{array} \right.$$

v désignant une fonction quelconque de t .

Entre φ , σ et R , nous avons les deux relations

$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{R} d\sigma = d\psi &= (v' + v''') \sin t dt, \\ \sigma + \varphi &= v'' \cos t + v' \sin t. \end{aligned}$$

Entre ces deux relations, si nous éliminons φ , nous obtenons

$$\frac{1}{R} (v'' \cos t + v' \sin t - \sigma) \frac{d\sigma}{dt} = (v' + v''') \sin t$$

ou

$$(3) \quad \frac{1}{R} = \frac{v' + v'''}{v'' \cos t + v' \sin t - \sigma} \sin t \frac{dt}{d\sigma}.$$

Donnons-nous donc deux fonctions arbitraires de t , $\sigma(t)$, $v(t)$. Au moyen de ces deux fonctions, définissons le rayon de courbure de la courbe par la formule (3). Pour chaque détermination de la fonction $v(t)$ on aurait, pour l'arête de rebroussement, une relation entre R et σ .

Sur toute surface ainsi déterminée prenons, à partir du point de contact, la longueur

$$\varphi = v'' \cos t + v' \sin t - \sigma;$$

l'arc de cette courbe aura pour expression

$$S = v + v''.$$

L'arête de rebroussement ou la surface développable n'est pas entièrement définie. Elle dépend encore d'une fonction arbitraire.

On obtient ainsi au moyen de deux fonctions arbitraires v, σ , l'ensemble formé par une des surfaces de la famille et l'arc d'une courbe de cette surface.

Application. — Soit

$$v(t) = lt \sin t, \quad \sigma(t) = 2l \cos^2 t.$$

On aura

$$\frac{1}{R} = \frac{-2l \sin t}{l \sin^2 t} \times \sin t \times \frac{1}{-4l \sin t \cos t} = \frac{1}{2l \sin t \cos t}$$

ou

$$R = 2l \sin t \cos t, \quad \sigma = 2l \cos^2 t.$$

Entre le rayon de courbure et l'arc de courbe on a la relation

$$\sigma^2 + R^2 = 2l\sigma.$$

Sur toute surface développable dont l'arête de rebroussement satisfait à cette condition, si l'on prend sur la tangente à l'arête une longueur

$$\rho = l(1 + \cos^2 t) - 2l \cos^2 t = l \sin^2 t,$$

c'est-à-dire une longueur telle que

$$2\rho + \sigma = 2l;$$

l'arc de courbe ainsi décrit a pour expression

$$S = 2l \cos t.$$

7° Conoïde quelconque et arc de courbe quelconque de ce conoïde.

Nous prendrons un conoïde d'axe oz et de plan directeur xoy . En prenant des coordonnées polaires dans le plan des xy , les coordonnées d'un point de la surface peuvent se mettre sous la forme

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega, \quad z = \lambda(\omega),$$

$\lambda(\omega)$ pouvant être quelconque.

On définira une courbe quelconque de ce conoïde en donnant φ en fonction de ω . La courbe la plus générale du conoïde le plus général dépend donc de deux fonctions arbitraires d'une variable. L'arc de cette courbe est donné par

$$(1) \quad dS^2 = d\varphi^2 + \varphi^2 d\omega^2 + dz^2 = d\sigma^2 + dz^2.$$

On satisfera de la façon la plus générale à cette relation (1) en prenant

$$I \quad \sigma = v'' \cos t + v' \sin t, \quad z = v'' \sin t - v' \cos t, \quad S = v + v'',$$

v désignant une fonction quelconque de t , variable quelconque. On aura ensuite à résoudre

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2;$$

$w(\tau)$ désignant une fonction quelconque d'une variable quelconque τ , on y satisfera de la manière la plus générale en posant

$$II \quad x = w'' \cos \tau + w' \sin \tau, \quad y = w'' \sin \tau - w' \cos \tau, \quad \sigma = w + w''.$$

On a ainsi deux expressions de σ . Si on les égale, on obtient

$$(3) \quad w + w'' = v'' \cos t + v' \sin t.$$

Si l'on s'est donné deux fonctions arbitraires $v(t)$, $w(\tau)$, c'est là une relation *finie* à établir entre les variables t , τ . On en déduira alors

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{w'' \sin \tau - w' \cos \tau}{w'' \cos \tau + w' \sin \tau}, \quad z = v'' \sin t - v' \cos t,$$

qui donnent ω et z par exemple en fonction de τ , et *définissent le conoïde*.

Sur ce conoïde, les formules II donnent x , y , z en fonction de τ , c'est-à-dire la courbe du conoïde. L'arc de cette courbe sera

$$S = v + v'',$$

et l'arc projection

$$\sigma = v'' \cos t + v' \sin t.$$

On a bien ainsi, au moyen de deux fonctions arbitraires, l'ensemble formé par le conoïde le plus général et une courbe de ce conoïde (non séparables). L'arc de cette courbe sera

$$S = v + v''.$$

Pour donner des applications pratiques, il suffit de prendre pour l'une des fonctions $v(t)$, $w(\tau)$ une forme simple, telle que la relation (3) puisse être résolue par rapport à l'une des variables.

Par exemple encore, si $w(\tau) = \tau \sin \tau$.

On a la relation, entre t et τ ,

$$2 \cos \tau = v'' \cos t + v' \sin t.$$

Le conoïde a pour équation

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sin \tau \cos \tau - \tau}{1 + \cos^2 \tau}, \quad z = v'' \sin t - v' \cos t.$$

Sur ce conoïde, qui peut être quelconque, si l'on considère la courbe

$$x = 1 + \cos^2 \tau, \quad y = \sin \tau \cos \tau - \tau, \quad z = v'' \sin t - v' \cos t.$$

L'arc de cette courbe a pour expression

$$S = v + v''.$$

Cas particulier $t = \tau$.

Dans ce cas, v et w désignant deux fonctions de t , on doit avoir

$$w + w'' = v'' \cos t + v' \sin t.$$

Comme dans le cas de la surface de révolution, on peut poser, $\lambda(t)$ désignant une fonction arbitraire,

$$v = \lambda'' + 4\lambda, \quad w = \lambda'' \cos t + 3\lambda' \sin t - 2\lambda \cos t.$$

On aura la courbe

$$\begin{aligned} x &= \lambda^{iv} \cos^2 t + 2\lambda''' \sin t \cos t + \lambda''(2 + \cos^2 t) + 2\lambda' \sin t \cos t + 2\lambda, \\ y &= \lambda^{iv} \sin t \cos t - \lambda''' \cos 2t + \lambda'' \sin t \cos t - \lambda' \cos 2t, \\ z &= (\lambda^{iv} + 4\lambda''') \sin t - (\lambda^{iv} + 4\lambda') \cos t. \end{aligned}$$

Le conoïde a pour équations

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{y}{x}, \quad z = (\lambda^{iv} + 4\lambda''') \sin t - (\lambda^{iv} + 4\lambda') \cos t,$$

$\lambda(t)$ désignant une fonction arbitraire, c'est le conoïde le plus général. Sur ce conoïde, l'arc de courbe ci-dessus a pour expression

$$S = \lambda^{iv} + 5\lambda'' + 4\lambda.$$

Remarque. — Remarquons l'analogie des formules que nous avons obtenues dans le cas d'une surface de révolution, dans celui du cylindre et du cône, dans celui du conoïde.

Dans tous les cas, il faut poser

$$\begin{cases} x = w'' \cos \tau + w' \sin \tau = A, \\ y = w'' \sin \tau - w' \cos \tau = B, \\ z = v'' \sin t - v' \cos t = C, \end{cases}$$

$w(\tau)$ et $v(t)$ désignant deux fonctions arbitraires, t et τ deux variables liées par la relation finie

$$w + w'' = v'' \cos t - v' \sin t.$$

Dans tous les cas, l'arc projection σ et l'arc de courbe S sont donnés par

$$\sigma = v'' \cos t - v' \sin t, \quad S = v + v''.$$

Pour avoir la surface, dans le cas du cylindre il faut poser

$$x = A, \quad y = B.$$

Dans le cas du cône la directrice est donnée par

$$x = \frac{A}{C}, \quad y = \frac{B}{C}, \quad z = 1.$$

Dans le cas de la surface de révolution, il faut poser

$$x^2 + y^2 = A^2 + B^2 = r^2, \quad z = C.$$

Enfin dans le cas du conoïde d'axe oz , il faut poser

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{B}{A}, \quad z = C.$$

DEUXIÈME PARTIE

Représentation sans signe de quadrature de la surface de révolution la plus générale et des trajectoires de ses méridiennes.

Si $z = f(x)$ est l'équation de la méridienne dans le plan xoz , la projection sur le plan des xy des trajectoires des méridiennes sous l'angle α , est donnée, en coordonnées polaires, par

$$d\theta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{r} \sqrt{1 + f'^2} dr.$$

Le problème revient donc à déterminer les couples de fonctions θ et f liées par cette relation. Il suffit pour cela de les obtenir pour un angle α_0 quelconque, par exemple pour $\alpha = 45^\circ$.

Nous résoudrons donc l'équation

$$(1) \quad r^2 d\theta^2 = dr^2 + df^2.$$

Toutes les autres trajectoires s'obtiendront en remplaçant dans les formules θ par $\theta \operatorname{ctg} \alpha$.

Posons

$$(2) \quad x = r \operatorname{ch} \theta, \quad y = r \operatorname{sh} \theta.$$

Nous aurons

$$dy^2 - dx^2 = r^2 d\theta^2 - dr^2$$

et il suffira de résoudre

$$(3) \quad dy^2 - dx^2 = df^2;$$

$v(t)$ désignant une fonction quelconque d'une variable quelconque t , les formules les plus générales des fonctions x, y, f satisfaisant à cette équation sont

$$x = v'' \cos t + v' \sin t, \quad f = v'' \sin t - v' \cos t, \quad y = v + v''.$$

La surface de révolution et les courbes trajectoires de ses méridiennes sont donc données par

$$(4) \quad r \operatorname{ch} \theta = v'' \cos t + v' \sin t,$$

$$(5) \quad r \operatorname{sh} \theta = v + v'',$$

$$(6) \quad f = z = v'' \sin t - v' \cos t.$$

On en déduit

$$(7) \quad r^2 = (v'' \cos t + v' \sin t)^2 - (v + v'')^2.$$

Les formules (6) et (7) donnent r et $f = z$ en fonction de t (au moyen de la fonction arbitraire $v(t)$), donc la surface de révolution.

On a alors les trajectoires sous l'angle α par la formule

$$\operatorname{th} (\theta \operatorname{ctg} \alpha) = \frac{v + v''}{v'' \cos t + v' \sin t}.$$

(Elles se déduisent toutes de l'une d'elles par rotation autour de oz).

On a donc bien obtenu, sans signe de quadrature, la surface de révolution générale et les trajectoires de ses méridiennes.

Application : $v(t) = \cos^2 t$.

On a

$$r \operatorname{ch} \theta = -2 \cos^3 t, \quad r \operatorname{sh} \theta = 3 \sin^2 t - 1, \quad z = 2 \sin^3 t.$$

On a donc la surface de révolution (en posant $u = \sin t$)

$$r^2 = 4(1 - u^2)^2 - (3u^2 - 1)^2 = 3 - 6u^2 + 3u^4 - 4u^6,$$

$$z = 2u^3.$$

Sur cette surface, les trajectoires des méridiennes sont données par

$$\operatorname{th} \theta = -\frac{3u^2 - 1}{2(u^2 - 1)\sqrt{1 - u^2}} = -\frac{1 - 3u^2}{2(1 - u^2)\sqrt{1 - u^2}}.$$

TROISIÈME PARTIE

Trajectoires successives des tangentes à une courbe plane.

Nous nous proposons le problème suivant :

On donne une courbe plane quelconque C_0 . On prend les trajectoires sous un angle λ des tangentes à cette courbe. Soit C_1 l'une de ces trajectoires. On prend les trajectoires sous un angle μ des tangentes à C_1 , etc. *On demande de déterminer sans intégration d'équation, sans aucun signe de quadrature, toutes ces trajectoires successives et tous les arcs de ces trajectoires successives.*

Nous prendrons la courbe C_0 comme enveloppe de ses tangentes, dont l'équation générale est

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \pi(x), \quad [p(x) = \pi \cos \alpha].$$

Si X, Y sont les coordonnées d'un point d'une trajectoire, on doit avoir

$$(1) \quad Y = X \operatorname{tg} \alpha - \pi(x),$$

$$(2) \quad \frac{dY - \operatorname{tg} \alpha dX}{dX + \operatorname{tg} \alpha dY} = \operatorname{tg} \lambda.$$

Or

$$dY = \operatorname{tg} \alpha dX + \left(\frac{X}{\cos^2 \alpha} - \pi' \right) d\alpha.$$

En substituant dans l'équation (2), on obtient

$$X' \operatorname{tg} \lambda + X(\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \lambda - 1) = \pi' \cos^2 \alpha (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \lambda - 1)$$

ou

$$(3) \quad X' \sin \lambda \cos \alpha = (X - \pi' \cos^2 \alpha) \cos (\alpha + \lambda).$$

Si l'on se donnait la fonction $\pi(\alpha)$, il serait nécessaire d'intégrer cette équation. Mais la fonction $\pi(\alpha)$ pouvant être quelconque, nous allons la mettre sous une forme telle que l'intégration puisse se faire.

Par l'application de la méthode d'intégration par parties que nous avons exposée, on trouve que les *couples* de fonctions les plus *générales* satisfaisant à cette équation sont données par les formules

$$(4) \quad p = \pi \cos \alpha = v' \sin \lambda - v \cos \lambda,$$

$$(5) \quad X = -[v' \cos (\alpha + \lambda) + v \sin (\alpha + \lambda)],$$

v désignant une fonction arbitraire de α .

On a ensuite

$$Y = X \operatorname{tg} \alpha - \pi(\alpha).$$

Si la fonction π est donnée, il faut calculer la fonction $v(\alpha)$ par l'équation (4) et la substituer dans l'équation (5).

Calcul de l'arc. — On a

$$dY = \operatorname{tg} \alpha dX + \frac{1}{\cos^2 \alpha} (X - \pi' \cos^2 \alpha).$$

En substituant la valeur de dX déduite de (3), on obtient après réductions

$$(6) \quad \cos \alpha dY = \frac{X - \pi' \cos^2 \alpha}{\sin \lambda} \sin (\alpha + \lambda) dx.$$

Des équations (3) et (6), on déduit d'ailleurs

$$\frac{dY}{dX} = \operatorname{tg} (\alpha + \lambda)$$

comme cela devait être. De ces équations, on déduit encore en désignant par S_1 l'arc de trajectoire

$$dS_1 = \frac{X - \pi' \cos^2 \alpha}{\sin \lambda \cos \alpha} dx = \frac{X'}{\cos (\alpha + \lambda)} dx.$$

Or de (5) on tire

$$X' = -(v'' + v) \cos (\alpha + \lambda).$$

Finalement

$$dS_1 = -(v + v'') dx.$$

En changeant légèrement de notation et posant $v = w'$, on pourra intégrer et on aura

$$S_1 = -(w + w'')$$

et l'équation (4) devient

$$\pi \cos \alpha = p(\alpha) = w'' \sin \lambda - w' \cos \lambda.$$

Or, la fonction $p(\alpha)$ pouvant être arbitrairement choisie, l'angle λ étant fixé à l'avance, donnons-nous $p(\alpha)$ sous la forme

$$p(\alpha) = \varphi_0'' \sin \lambda - \varphi_0' \cos \lambda,$$

φ_0 désignant une fonction arbitraire de α . Nous laissons ainsi à $p(\alpha)$, c'est-à-dire à la courbe C_0 , tout son caractère de généralité.

Pour déterminer w , on aura alors à résoudre

$$(7) \quad w'' \sin \lambda - w' \cos \lambda = \varphi_0'' \sin \lambda - \varphi_0' \cos \lambda.$$

A une constante près, qui n'a aucune influence, la solution de cette équation est donnée par

$$(8) \quad w = \varphi_0 + k \sin \lambda e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda} \quad (k = c^{\text{te}} \text{ arb.}).$$

On aura ensuite X en substituant dans (5), puis Y

$$\text{II} \quad \begin{cases} X = -[\varphi_0' \sin(\alpha + \lambda) + \varphi_0'' \cos(\alpha + \lambda)] - k \operatorname{ctg} \lambda \cos \alpha e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda}, \\ Y = \varphi_0' \cos(\alpha + \lambda) - \varphi_0'' \sin(\alpha + \lambda) - k \operatorname{ctg} \lambda \sin \alpha e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda}. \end{cases}$$

Résumé. — Pour un angle λ choisi à l'avance, nous considérons la courbe C_0 , enveloppe de

$$x \cos \alpha - y \sin \alpha = \varphi_0'' \sin \lambda - \varphi_0' \cos \lambda,$$

φ_0 désignant une fonction arbitraire de α .

Les trajectoires sous l'angle λ de ces tangentes sont données par les formules II, k désignant une constante arbitraire.

L'arc S_1 de l'une de ces trajectoires a pour expression

$$(9) \quad S_1 = \varphi_0 + \varphi_0'' + \frac{k}{\sin \lambda} e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda}.$$

On a bien ainsi sans aucune intégration d'équation, sans aucun signe de quadra-

ture, les couples les plus généraux fournis par une courbe C_0 , les courbes C_1 trajectoires des tangentes sous l'angle λ , et l'arc S_1 de l'une de ces trajectoires.

Quant à l'arc S de C_0 , il est donné par

$$\frac{ds}{dx} = p + p'' = (\varphi_0''' + \varphi_0'') \sin \lambda - (\varphi_0''' + \varphi_0') \cos \lambda.$$

Par suite

$$(10) \quad s = (\varphi_0''' + \varphi_0') \sin \lambda - (\varphi_0'' + \varphi_0) \cos \lambda.$$

Relation entre s et S_1 . — Entre (9) et (10), on peut éliminer le groupement $\varphi_0 + \varphi_0''$. On a

$$S_1' = \varphi_0' + \varphi_0''' + \frac{k \cos \lambda}{\sin^2 \lambda} e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda}.$$

En substituant dans (10), on obtient simplement après réductions

$$(11) \quad s = S_1' \sin \lambda - S_1 \cos \lambda.$$

Cette relation est *indépendante* de la courbe C_0 et de k , c'est-à-dire de celle des trajectoires considérées. En désignant par R_1 le rayon de courbure de C_1 , on peut l'écrire

$$R_1 \sin \lambda = s + S_1 \cos \lambda.$$

Relation entre les rayons de courbure.

En dérivant l'équation (11), r désignant le rayon de courbure de C_0 , R_1' désignant le rayon de courbure de la développée de C_1 , on obtient

$$(12) \quad r = R_1' \sin \lambda - R_1 \cos \lambda.$$

Cette relation est indépendante de la courbe donnée, de celle des trajectoires considérées.

Trajectoires secondes. — Cherchons à son tour les trajectoires sous l'angle μ des tangentes à l'une quelconque des courbes C_1 .

ξ et η désignant les coordonnées courantes, l'une des tangentes à C_1 a pour équation

$$(\xi - X) \sin (\alpha + \lambda) - (\eta - Y) \cos (\alpha + \lambda) = 0$$

ou (β désignant l'angle de la tangente avec ox)

$$\xi \sin \beta - \eta \cos \beta = X \sin \beta - Y \cos \beta = p_1(\beta).$$

En remplaçant x et y par leurs expressions II, on trouve simplement

$$(13) \quad p_1(\beta) = -\varphi'_0(x) - k \cos \lambda e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda}.$$

(Il faudrait remplacer α par $(\beta - \lambda)$ au second membre).

Si l'on voulait avoir, sans intégration, les trajectoires de l'une des courbes C_1 (correspondant à k_1), comme on a obtenu celles de C_0 , il faudrait mettre $p_1(\beta)$ sous la forme

$$p_1(\beta) = \psi'' \sin \mu - \psi' \cos \mu,$$

ψ désignant une fonction de β ou de $(\beta - \lambda)$. Il faut donc poser

$$\psi'' \sin \mu - \psi' \cos \mu = -\varphi'_0(\beta - \lambda) - k_1 \cos \lambda e^{(\beta - \lambda) \operatorname{ctg} \lambda}.$$

on en déduit en intégrant

$$\varphi_0(\beta - \lambda) = \psi \cos \mu - \psi' \sin \mu - k_1 \sin \lambda e^{(\beta - \lambda) \operatorname{ctg} \lambda},$$

c'est-à-dire

$$(14) \quad \varphi_0(x) = \psi(x) \cos \mu - \psi'(x) \sin \mu - k_1 \sin \lambda e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda}.$$

L'expression de p_0 s'obtiendrait alors en substituant dans $p_0(x)$

$$p_0(x) = \varphi_0'' \sin \lambda - \varphi_0' \cos \lambda.$$

Or, après réductions, on obtient simplement

$$(15) \quad p_0(x) = -\cos \lambda \cos \mu [\psi''' \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \mu - \psi''(\operatorname{tg} \lambda + \operatorname{tg} \mu) + \psi'].$$

Ce résultat est tout à fait remarquable, parce que cette forme nécessaire de $p_0(x)$ est indépendante de k_1 , c'est-à-dire de celle des trajectoires C_1 que l'on a considérée.

Réciproquement, $\psi_0(x)$ désignant une fonction donnée, et pour des angles λ et μ choisis à l'avance, supposons que nous nous donnions $p_0(x)$ sous la forme

$$p_0(x) = -\cos \lambda \cos \mu [\psi_0''' \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \mu - \psi_0''(\operatorname{tg} \lambda + \operatorname{tg} \mu) + \psi_0'].$$

Nous allons déterminer les trajectoires premières et secondes.

En posant pour abrégé

$$(16) \quad u_0 = \psi_0' \cos \mu - \psi_0' \sin \mu,$$

on peut écrire

$$(15') \quad p_0 = u_0'' \sin \lambda - u_0' \cos \lambda.$$

Trajectoires premières. — D'après la forme (15') de p_0 les trajectoires premières ont pour équation

$$\begin{cases} X_1 = -[u_0'' \cos(\alpha + \lambda) + u_0' \sin(\alpha + \lambda)] - k \operatorname{ctg} \lambda \cos \alpha e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda}, \\ Y_1 = [u_0' \cos(\alpha + \lambda) - u_0'' \sin(\alpha + \lambda)] - k \operatorname{ctg} \lambda \sin \alpha e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda}. \end{cases}$$

Trajectoires secondes. — Prenons l'une de ces trajectoires correspondant à la constante k_1 . Pour la tangente à cette trajectoire en un point, en posant $\beta = \alpha + \lambda$, la distance $p_1(\beta)$ est donnée par la formule (13). Ici

$$(13') \quad p_1(\beta) = -u_0' - k_1 \cos \lambda e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda}.$$

En remplaçant u_0 par sa valeur,

$$(17) \quad p_1(\beta) = \psi_0'' \sin \mu - \psi_0' \cos \mu - k_1 \cos \lambda e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda}.$$

Au second membre, il faudrait remplacer α par $(\beta - \lambda)$.

En conservant α , nous devons mettre le second membre sous la forme

$$v_0'' \sin \mu - v_0' \cos \mu.$$

En supposant $\mu - \lambda \neq 0$, si nous posons

$$(18) \quad \varphi_1 = \psi_0 + a e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda} - \frac{k_1 \sin^2 \lambda}{\sin(\mu - \lambda)} e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda},$$

on aura bien identiquement

$$\varphi_1'' \sin \mu - \varphi_1' \cos \mu = \psi_0'' \sin \mu - \psi_0' \cos \mu - k_1 \cos \lambda e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda} = p_1(\beta)$$

quelle que soit a . On peut donc prendre $a = 0$.

La formule

$$(18') \quad \varphi_1 = \psi_0 - \frac{k_1 \sin^2 \lambda}{\sin(\mu - \lambda)} e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda}$$

définit φ_1 ; on aura alors

$$(17') \quad p_1(\beta) = \varphi_1'' \sin \mu - \varphi_1' \cos \mu.$$

Puisque $p_1(\beta)$ est de cette forme, les trajectoires secondes ont pour équation

$$X_2 = -[\varphi_1'' \cos(\beta + \mu) + \varphi_1' \sin(\beta + \mu)] - k_2 \operatorname{ctg} \mu \cos \beta e^{\alpha \operatorname{ctg} \mu}.$$

En substituant l'expression (18') de φ_1 , on obtient

$$X_2 = -[\psi'_0 \sin(\beta + \mu) + \psi''_0 \cos(\beta + \mu)] + \frac{k_1 \cos \lambda}{\sin(\mu - \lambda)} \cos(\alpha + \mu) e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda} \\ - k_2 \operatorname{ctg} \mu \cos(\alpha + \lambda) e^{\alpha \operatorname{ctg} \mu}.$$

On en déduit

$$Y_2 = [\psi'_0 \cos(\beta + \mu) - \psi''_0 \sin(\beta + \mu)] + \frac{k_1 \cos \lambda}{\sin(\mu - \lambda)} \sin(\alpha + \mu) e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda} \\ - k_2 \operatorname{ctg} \mu \sin(\alpha + \lambda) e^{\alpha \operatorname{ctg} \mu}.$$

Résumé. — En résumé, nous avons d'abord

$$p_0 = \varphi''_0 \sin \lambda - \varphi'_0 \cos \lambda.$$

Pour une trajectoire k_1 , on en déduit

$$p_1 = -\varphi'_0 - k_1 \cos \lambda e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda}.$$

Si l'on fait la transformation

$$\varphi_0 = \psi_0 \cos \mu - \psi'_0 \sin \mu,$$

p_0 et p_1 deviendront

$$p_0 = -\sin \lambda \sin \mu \psi''_0 + \sin(\lambda + \mu) \psi''_0 - \cos \lambda \cos \mu \psi'_0 \\ = -\cos \lambda \cos \mu [\psi''_0 \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \mu - \psi''_0 (\operatorname{tg} \lambda + \operatorname{tg} \mu) + \psi'_0].$$

$$p_1 = \psi''_0 \sin \mu - \psi'_0 \cos \mu - k_1 \cos \lambda e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda}.$$

Posons enfin

$$\varphi_1 = \psi_0 - k_1 \frac{\sin^2 \lambda}{\sin(\mu - \lambda)} e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda}.$$

On aura finalement

$$p_1 = \varphi''_1 \sin \mu - \varphi'_1 \cos \mu.$$

On pourra déduire les trajectoires C_2 de la courbe C_1 considérée, comme on a déduit les trajectoires C_1 de C_0 .

Généralisation. — Ces résultats nous permettent de généraliser et d'avoir *sans intégration d'équation, ni quadrature*, les trajectoires successives, du 1^{er}, 2^e, 3^e. ... ordre et les arcs de ces trajectoires.

Nous désignerons par p_0, p_1, p_2, \dots les distances de l'origine aux tangentes à la courbe de départ C_0 , aux tangentes à l'une des trajectoires C_i sous l'angle λ_0 aux tangentes à l'une des trajectoires C_2 de C_1 sous l'angle λ_1, \dots

Nous supposons d'abord *tous les angles* $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ *différents*.

Nous allons en déduire les expressions successives de p_0 , si l'on veut avoir toutes ces trajectoires jusqu'à l'ordre n (et les arcs de ces trajectoires) et de même de p_1, p_2, \dots

Nous prendrons des fonctions successives $\varphi_0, \psi_0, \theta_0, \gamma_0, \omega_0, \dots, \zeta_0, \dots$ (Nous prenons cette notation pour éviter de doubles indices et les premières formules seront suffisantes pour la généralisation.)

φ_0 désignant une fonction arbitraire, nous prenons d'abord p_0 sous la forme

$$p_0 = \varphi_0'' \sin \lambda_0 - \varphi_0' \cos \lambda_0.$$

Pour avoir les trajectoires secondes, il faut faire la transformation

$$\varphi_0 = \psi_0 \cos \lambda_1 - \psi_0' \sin \lambda_1.$$

Il faudra poser ensuite

$$\psi_0 = \theta_0 \cos \lambda_2 - \theta_0' \sin \lambda_2,$$

$$\theta_0 = \gamma_0 \cos \lambda_3 - \gamma_0' \sin \lambda_3,$$

$$\dots \dots \dots$$

Expressions successives de φ_0 . — En substituant la valeur de ψ_0 , on obtient

$$\varphi_0 = \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 [\theta_0'' \operatorname{tg} \lambda_1 \operatorname{tg} \lambda_2 - \theta_0' (\operatorname{tg} \lambda_1 + \operatorname{tg} \lambda_2) + \theta_0].$$

Nous écrirons désormais $c_0 c_1 \dots s_0 s_1 \dots t_0 t_1$ au lieu de $\cos \lambda_0, \sin \lambda_0, \operatorname{tg} \lambda_0, \dots$. En substituant l'expression de θ_0 en fonction de γ_0 , on obtient

$$\varphi_0 = -c_1 c_2 c_3 [\gamma_0''' t_1 t_2 t_3 - \gamma_0'' \Sigma t_1 t_2 + \gamma_0' \Sigma t_1 - \gamma_0].$$

La généralisation est évidente et immédiate

$$\varphi_0 = (-1)^k c_1 c_2 \dots c_k [v_0^k t_1 t_2 \dots t_k - v_0^{k-1} S_{k-1} + v_0^{k-2} S_{k-2} \dots + (-1)^k v_0],$$

si l'on a introduit la $k^{\text{ième}}$ fonction v_0 , et en désignant par S_i la somme des produits des tangentes i à i .

Expressions successives de p_0 . — On a d'abord

$$p_0 = c_0 (\varphi_0'' t_0 - \varphi_0').$$

En substituant φ_0 en fonction de ψ_0 ,

$$p_0 = -c_0 c_1 [\dots t_0 t_1 - \psi_0''(t_0 + t_1) + \psi_0'].$$

C'est le même calcul que pour φ_0 . On obtient

$$p_0 = (-1)^k c_0 c_1 \dots c_k [v_0^{k-1} S_k - v_0^{k+1} S_{k-1} \dots + (-1)^{k+1} v_0'].$$

Expressions successives de p_1 . — Nous avons vu qu'en posant

$$(18') \quad \varphi_1 = \psi_0 - \frac{k_1 \sin^2 \lambda}{\sin(\mu - \lambda)} e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0},$$

ou, plus simplement, en prenant une relation de la forme

$$(18'') \quad \varphi_1 = \psi_0 + a_1 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0},$$

on obtenait

$$p_1(\beta) = \varphi_1'' \sin \lambda_1 - \varphi_1' \cos \lambda_1.$$

on peut alors obtenir les trajectoires secondes sous l'angle λ_1 . Pour l'une de ces trajectoires la distance p_2 est

$$p_2(\gamma) = -\varphi_1' - k_2 \cos \lambda_1 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_1}.$$

Elle est de la forme

$$p_2(\gamma) = -\psi_0' + b_0' e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0} + b_1' e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_1} = \theta_0'' \sin \lambda_1 - \theta_0' \cos \lambda_1 + b_0' e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0} + b_1' e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_1}.$$

On la mettra sous la forme

$$p_2(\gamma) = \varphi_2'' \sin \lambda_2 - \varphi_2' \cos \lambda_2$$

par un changement

$$\varphi_2 = \theta_0 + b_0 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0} + b_1 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_1},$$

b_0' et b_1' étant bien définis en fonction de b_0, b_1 , c'est-à-dire de h_1, h_2 . (Ces résultats supposent $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ différents.) On peut continuer.

En définitive, on a successivement

$$\begin{aligned} p_1 &= \varphi_1'' \sin \lambda_1 - \varphi_1' \cos \lambda_1, \\ p_2 &= \varphi_2'' \sin \lambda_2 - \varphi_2' \cos \lambda_2, \\ p_3 &= \varphi_3'' \sin \lambda_3 - \varphi_3' \cos \lambda_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

au moyen des transformations de la forme

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \psi_0 + a_0 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0}, \\ \varphi_2 &= \theta_0 + b_0 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0} + b_1 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_1}, \\ \varphi_3 &= \gamma_0 + c_0 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0} + c_1 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_1} + c_2 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_2}, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

En substituant dans p_1 l'expression de φ_1 , on obtient

$$p_1 = \sin \lambda_1 \psi_0'' - \cos \lambda_1 \psi_0' + a_0 \frac{\cos \lambda_0}{\sin^2 \lambda_0} \sin (\lambda_1 - \lambda_0) e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0}.$$

Elle est de la forme

$$p_1 = \psi_0'' \sin \lambda_1 - \psi_0' \cos \lambda_1 + A_0 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0}.$$

Quand on substituera les fonctions $\theta_0, \gamma_0 \dots$ il suffira de suivre les variations de la première partie de l'expression. C'est le problème résolu pour φ_0 et p_0 . Il en sera de même de p_2 à un groupe près de termes de la forme

$$B_0 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0} + B_1 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_1}.$$

et ainsi de suite.

Ces résultats ne sont valables que si tous les angles sont différents.

Remarques sur les variables.

Ayant obtenu les expressions successives de $\varphi_0, \varphi_1 \dots$ et par suite de $p_0, p_1 \dots$, φ_0 dépendra de la variable α , φ_1 de la variable $\beta = \alpha + \lambda_0$, φ_2 de la variable $\gamma = \beta + \lambda_1 = \alpha + \lambda_0 + \lambda_1$, etc...

Cas où tous les angles ne sont pas différents.

Nous avons d'abord

$$p_0 = \varphi_0'' \sin \lambda_0 - \varphi_0' \cos \lambda_0.$$

Cette forme permet d'obtenir les trajectoires sous l'angle λ_0 . Nous avons fait ensuite la transformation

$$\varphi_0 = \psi_0 \cos \lambda_1 - \psi_0' \sin \lambda_1.$$

Il en résulte

$$p_0 = -c_0 c_1 [\psi_0''' t_0 t_1 - \psi_0'' (t_0 + t_1) + \psi_0'].$$

Cette formule est valable même si $\lambda_0 = \lambda_1$.

On a alors pour une trajectoire C_1

$$p_1 = -\varphi'_0 - k_1 \cos \lambda_0 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0} = \psi''_0 s_0 - \psi'_0 c_0 - h_1 c_0 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0}.$$

Si l'on veut avoir les trajectoires de C_1 sous l'angle λ_1 , il faudrait mettre p_1 sous la forme

$$p_1 = \varphi''_1 s_1 - \varphi'_1 c_1.$$

Nous avons vu que si $\lambda_1 \neq \lambda_0$ il fallait faire la substitution

$$\varphi_1 = \psi_0 - k_1 \frac{\sin^2 \lambda_0}{\sin (\lambda_1 - \lambda_0)} e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0}.$$

Mais si $\lambda_1 = \lambda_0$ il faudra faire la substitution

$$\varphi_1 = \psi_0 - k_1 \alpha \cos \lambda_0 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0}.$$

On aura de toutes façons

$$p_1 = \varphi''_1 s_1 - \varphi'_1 c_1.$$

On pourra avoir les trajectoires secondes.

Pour une de ces trajectoires,

$$p_2 = -\varphi'_1 - k_2 c_1 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_1}.$$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_0$ elle est de la forme

$$p_2 = -\psi'_0 + a_2 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0} + b_2 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_1}.$$

Mais si $\lambda_1 = \lambda_0$ elle est de la forme

$$p_2 = -\psi'_0 + (a_2 \alpha + b_2) e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0}.$$

On a posé ensuite

$$\psi_0 = \theta_0 \cos \lambda_2 - \theta'_0 \sin \lambda_2.$$

Si $\lambda_0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2$, en faisant une transformation de la forme

$$\varphi_2 = \theta_0 + a'_2 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0} + b'_2 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_1},$$

on mettra p_2 sous la forme

$$p_2 = \varphi_2'' \sin \lambda_2 - \varphi_2' \cos \lambda_2$$

et on pourra en déduire les trajectoires troisièmes.

Mais si $\lambda_2 = \lambda_1$, au terme $b_2' e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_1}$ il faudra substituer un terme $b_2' \alpha e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_1}$.

De même si $\lambda_2 = \lambda_0$, au terme $a_2' e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0}$ il faudra substituer un terme $a_2' \alpha e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0}$.

Enfin si l'on avait eu $\lambda_0 = \lambda_1$, on aurait

$$p_2 = -\psi_0' + (a_2 \alpha + b_2) e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0} = \theta_0'' \sin \lambda_2 - \theta_0' \cos \lambda_2 + (a_2 \alpha + b_2) e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0}.$$

Pour mettre p_2 sous la forme $\varphi_2'' \sin \lambda_2 - \varphi_2' \cos \lambda_2$, si $\lambda_2 \neq \lambda_0$, il faut faire une substitution de la forme

$$\varphi_2 = \theta_0 + (a_2' \alpha + b_2') e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0}.$$

Mais si $\lambda_2 = \lambda_0 = \lambda_1$, il faudra faire une substitution de la forme

$$\varphi_2 = \theta_0 + (a_0'' \alpha^2 + b_2'' \alpha) e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0}.$$

De toutes façons, on aura

$$p_2 = \varphi_2'' \sin \lambda_2 - \varphi_2' \cos \lambda_2$$

et on pourra obtenir les trajectoires sous l'angle λ_2 .

Pour l'une de ces trajectoires, on aura

$$p_3 = -\varphi_2' - h_3 \cos \lambda_2 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_2}.$$

Si $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ sont différents, elle est de la forme

$$p_3 = -\theta_0' + a_3 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0} + b_3 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_1} + c_3 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_2},$$

avec les transformations que nous avons données pour les deux premiers termes.

Mais alors on a posé

$$\theta_0 = \gamma_0 \cos \lambda_3 - \gamma_0' \sin \lambda_3,$$

$$p_3 = \gamma_0'' s_3 - \gamma_0' c_3 + a_3 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0} + b_3 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_1} + c_3 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_2}.$$

Il faut mettre ce résultat sous la forme

$$p_3 = \varphi_3'' \sin \lambda_3 - \varphi_3' \cos \lambda_3.$$

Si $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont tous différents, on aura la transformation

$$\varphi_3 = \gamma_0 + a_3' e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0} + b_3' e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_1} + c_3' e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_2}.$$

Si $\lambda_3 = \lambda_2$, le terme $c'_3 e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_2}$ doit être remplacé par un terme $c'_3 x e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_2}$, de même si $\lambda_3 = \lambda_1$ ou $\lambda_3 = \lambda_0$.

Si l'on avait eu $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1$, les deux derniers termes devraient être remplacés par

$$(b''_3 x^2 + c''_3 x) e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_1}.$$

Enfin si l'on avait eu $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_0$, il faudrait faire la transformation

$$(a''_3 x^3 + b''_3 x^2 + c''_3 x) e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0}.$$

On voit finalement que pour mettre p_n sous la forme

$$p_n = \varphi''_n \sin \lambda_n - \varphi'_n \cos \lambda_n,$$

il faudra faire une substitution

$$\varphi_n = v_0 + \pi_0(x) e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0} + \pi_1(x) e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_1} + \dots + \pi_i(x) e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_i}.$$

Si k_0 des angles des trajectoires sont égaux à λ_0 , π_0 sera un polynôme de degré $k_0 - 1$ en x , et de même pour les autres polynômes.

La fonction φ_n dépendra de n constantes arbitraires, les constantes définissant les trajectoires $C_1 C_2 \dots C_n$. On pourra avoir les trajectoires sous l'angle λ_n .

Remarques.

Il est remarquable que, pour des trajectoires sous des angles $\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_n$, la forme de la fonction p_0 est la même quel que soit l'ordre dans lequel on considère ces trajectoires.

De même, la fonction p_1 sera la même quel que soit l'ordre des trajectoires ultérieures $\lambda_1 \lambda_2 \dots$ et ainsi de suite.

Application. Calcul effectif.

Nous avons établi que, si l'on considère les trajectoires successives sous les angles $\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$, si u_0, v_0 sont les dernières fonctions introduites par les substitutions successives

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \psi_0 \cos \lambda_1 - \psi'_0 \sin \lambda_1, \\ \psi_0 &= \theta_0 \cos \lambda_2 - \theta'_0 \sin \lambda_2, \\ &\dots\dots\dots \\ t_0 &= u_0 \cos \lambda_{n-1} - u'_0 \sin \lambda_{n-1}, \\ u_0 &= v_0 \cos \lambda_n - v'_0 \sin \lambda_n, \end{aligned}$$

Identifions alors les deux formes de p_n . On aura d'une part

$$p_n = -u'_0 - e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0} (\pi_0 \operatorname{ctg} \lambda_0 + \pi'_0) - \dots - e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_k} (\pi_k \operatorname{ctg} \lambda_k + \pi'_k) \\ - k_n \cos \lambda_{n-1} e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_{n-1}},$$

et d'autre part

$$v''_0 \sin \lambda_n - v'_0 \cos \lambda_n + \sin \lambda_n \Sigma e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0} (q_0 \operatorname{ctg}^2 \lambda_0 + 2q'_0 \operatorname{ctg} \lambda_0 + q''_0) \\ - \cos \lambda_n \Sigma e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0} (q_0 \operatorname{ctg} \lambda_0 + q'_0).$$

En vertu de l'expression de u_0 , il reste seulement

$$- \Sigma e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0} (\pi_0 \operatorname{ctg} \lambda_0 + \pi'_0) - k_n \cos \lambda_{n-1} e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_{n-1}} \\ = \Sigma e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0} [\sin \lambda_n (q_0 \operatorname{ctg}^2 \lambda_0 + 2q'_0 \operatorname{ctg} \lambda_0 + q''_0) - \cos \lambda_n (q_0 \operatorname{ctg} \lambda_0 + q'_0)].$$

Or la parenthèse du second membre s'écrit

$$\frac{\operatorname{ctg} \lambda_0}{\sin \lambda_0} \sin (\lambda_n - \lambda_0) (q_0 \operatorname{ctg} \lambda_0 + q'_0) + (q'_0 \operatorname{ctg} \lambda_0 + q''_0) \sin \lambda_n \\ = \operatorname{ctg} \lambda_0 \left[\frac{q_0 \operatorname{ctg} \lambda_0}{\sin \lambda_0} \sin (\lambda_n - \lambda_0) + q'_0 \sin \lambda_n \right] + \left[\frac{q'_0 \operatorname{ctg} \lambda_0}{\sin \lambda_0} \sin (\lambda_n - \lambda_0) + q''_0 \sin \lambda_n \right].$$

Nous poserons pour abrégé

$$\frac{q_0 \operatorname{ctg} \lambda_0}{\sin \lambda_0} \sin (\lambda_n - \lambda_0) + q'_0 \sin \lambda_n = r_0.$$

Le coefficient de $e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_0}$ est donc $r_0 \operatorname{ctg} \lambda_0 + r'_0$.

Ici nous devons distinguer deux cas :

A : $\lambda_{n-1} = \lambda_j$,

B : λ_{n-1} est différent de tous les λ_j précédents.

A $\lambda_{n-1} = \lambda_j$.

L'avant-dernier angle de trajectoire considérée λ_{n-1} est égal à l'un des angles précédents $\lambda_{n-1} = \lambda_j$.

En égalant de part et d'autre les coefficients des exponentielles, nous aurons la formule de récurrence

$$(\pi_i + r_i) \operatorname{ctg} \lambda_i + \pi'_i + r'_i = 0.$$

Comme ni π_i , ni r_i ne renferment de terme en $e^{-\alpha \operatorname{ctg} \lambda_i}$ la seule solution possible est

$$E_1 \quad -\pi_i = r_i = q_i \frac{\operatorname{ctg} \lambda_i}{\sin \lambda_i} \sin (\lambda_n - \lambda_i) + q'_i \sin \lambda_n.$$

Cette formule permet de calculer le polynôme π_i au moyen du polynôme q_i . Elle est valable pour tout indice i , sauf pour $i = j$. Dans ce cas-là, il s'ajoute au premier membre le terme

$$-k_n \cos \lambda_{n-1} e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_{n-1}} = -k_n \cos \lambda_j e^{\alpha \operatorname{ctg} \lambda_j}.$$

On doit avoir

$$(\pi_j + r_j) \operatorname{ctg} \lambda_j + (\pi'_j + r'_j) + k_n \cos \lambda_j = 0.$$

On en déduit

$$E_2 \quad -\pi_j = r_j + k_n \sin \lambda_j = q_j \frac{\operatorname{ctg} \lambda_j}{\sin \lambda_j} \sin (\lambda_n - \lambda_j) + q'_j \sin \lambda_n + k_n \sin \lambda_j.$$

Ces deux formules donnent tous les polynômes $\pi_0 \pi_1 \dots \pi_k$ (sauf π_j) d'une part et π_j .

En général, on voit que les polynômes π_i sont du même degré que les polynômes q_i .

Mais si le dernier angle considéré λ_n est égal à l'un des précédents λ_i , la formule E_1 se simplifie et donne dans ce cas

$$-\pi_i = q'_i \sin \lambda_i.$$

Le polynôme π_{ij} est d'un degré inférieur d'une unité au degré du polynôme q_i .

A En résumé si $\lambda_{n-1} = \lambda_j$ on calculera les polynômes π_i, π_j par les deux formules

$$E_1 \quad -\pi_i = q_i \frac{\operatorname{ctg} \lambda_i}{\sin \lambda_i} \sin (\lambda_n - \lambda_i) + q'_i \sin \lambda_n,$$

$$E_2 \quad -\pi_j = q_j \frac{\operatorname{ctg} \lambda_j}{\sin \lambda_j} \sin (\lambda_n - \lambda_j) + q'_j \sin \lambda_n + k_n \sin \lambda_j;$$

B λ_{n-1} est différent de tous les autres angles précédemment introduits.

Le calcul est le même. La formule E_1 s'appliquera quel que soit λ_n , à tous les polynômes $\pi_0, \pi_1 \dots \pi_k$. Elle se simplifiera si le dernier angle λ_n est égal à l'un des angles précédents $\lambda_n = \lambda_j$. Alors le degré de π_i sera diminué d'une unité (par rapport à celui de q_i).

La formule E, s'appliquera à π_{n-1} . Comme q_{n-1} est une constante, il en est de même de π_{n-0} .

De proche en proche, on calculera donc les fonctions $\varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}, \dots$

Ayant calculé par exemple la fonction φ_k , on peut écrire

$$p_k = \varphi_k'' \sin \lambda_k - \varphi_k' \cos \lambda_k.$$

On peut avoir les trajectoires d'ordre $(k + 1)$ sous l'angle λ_k .

On aura sans signe de quadrature les arcs de ces trajectoires

$$S_{i+1} = \varphi_i + \varphi_i'' + \frac{k_{i+1}}{\sin \lambda_i} e^{x \operatorname{ctg} \lambda_i}.$$

Le problème posé est donc entièrement résolu.

Application.

Supposons qu'on veuille obtenir les trajectoires première, deuxième et troisième d'une courbe sous les angles $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\pi}{4}$. On posera successivement

$$p_0 = \varphi_0'' \sin \lambda_0 - \varphi_0' \cos \lambda_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\varphi_0'' - \varphi_0'),$$

$$\varphi_0 = \psi_0 \cos \lambda_1 - \psi_0' \sin \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\psi_0 - \psi_0'),$$

$$\psi_0 = \theta_0 \cos \lambda_2 - \theta_0' \sin \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\theta_0 - \theta_0').$$

Étant donnée une fonction *arbitraire* θ_0 , on prendra comme courbe C_0 l'enveloppe des droites

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha - p_0(x) = 0,$$

avec

$$p_0(x) = \frac{1}{4} \sqrt{2} [\theta_0'' - 3\theta_0''' + 3\theta_0'' - \theta_0'].$$

Trois des angles étant égaux, on prendra φ_2 sous la forme

$$\varphi_2 = \theta_0 + (A x^2 + B x) e^x$$

(un terme en $C e^x$ n'ayant aucune influence).

On a donc

$$q_0 = A x^2 + B x.$$

Nous calculerons π_0 par la formule E_2 qui se réduit à

$$-\pi_0 = q'_0 \sin \lambda_2 + k_2 \sin \lambda_2 = (2A\alpha + B + k_2) \sin \lambda_2.$$

On a donc

$$\varphi_1 = \psi_0 - (2A\alpha + B + k_2) \sin \lambda_2 e^\alpha,$$

$$\varphi_1 = \psi_0 - (2A\alpha + B + k_2) \frac{\sqrt{2}}{2} e^\alpha.$$

On peut prendre simplement

$$\varphi_1 = \psi_0 - A\alpha\sqrt{2}e^\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\theta_0 - \theta'_0) - A\alpha\sqrt{2}e^\alpha.$$

Ayant $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$, on a alors les trajectoires X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3 par les formules générales

$$X_3 = - \left[\varphi'_2 \sin \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right) + \varphi''_2 \cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right) \right] - k_3 \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) e^\alpha,$$

$$Y_3 = + \left[\varphi'_2 \cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right) - \varphi''_2 \sin \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right) \right] - k_3 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) e^\alpha.$$

On aura donc ces trajectoires pour des courbes dépendant de la fonction arbitraire θ_0 .

Par exemple, si $\theta_0 = e^{2\alpha}$, on prend les trajectoires successives (sous les angles $\frac{\pi}{4}$) de la courbe C_0 enveloppe des droites.

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha - \frac{1}{2} \sqrt{2} e^{2\alpha} = 0.$$

En posant $\varphi_0 = \frac{1}{2} e^{2\alpha}$, on peut écrire

$$p_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{2\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\varphi''_0 - \varphi'_0) = \varphi''_0 \sin \frac{\pi}{4} - \varphi'_0 \cos \frac{\pi}{4}.$$

Les trajectoires premières sont donc

$$X_1 = - \left[\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right] e^{2\alpha} - k_1 \cos \alpha e^\alpha,$$

$$Y_1 = + \left[\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) - 2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right] e^{2\alpha} - k_1 \sin \alpha e^\alpha.$$

D'autre part, comme $\psi_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{2x}$, on a

$$\varphi_2 = e^{2x} + (A\alpha^2 + B\alpha)e^x,$$

$$\varphi_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{2x} - A\alpha\sqrt{2}e^x.$$

On a donc les trajectoires seconde et troisième

$$X_2 = -\left[\varphi_1' \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \varphi_1'' \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] - k_2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)e^x,$$

$$Y_2 = +\left[\varphi_1' \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \varphi_1'' \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] - k_2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)e^x,$$

et de même X_3, Y_3 , φ_2 remplaçant φ_1 ,

$$X_3 = -\left[\varphi_2' \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right) + \varphi_2'' \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right)\right] - k_3 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)e^x,$$

$$Y_3 = -\left[\varphi_2' \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right) - \varphi_2'' \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right)\right] - k_3 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)e^x.$$