ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

H. ADAD

Recherches sur les surfaces plusieurs fois cerclées

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 27 (1935), p. 259-364
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1935_3_27__259_0>

RECHERCHES

SUR

LES SURFACES PLUSIEURS FOIS CERCLÉES

Par M. H. ADAD

Professeur au Lycée d'Alger.

INTRODUCTION

En géométrie euclidienne (ou projective), les surfaces plusieurs fois réglées sont celles de degrés 1 et 2.

En géométrie conforme, les surfaces du premier degré (sphères), et du second degré (cyclides) sont en général (voir *Exceptions*, chapitre IV) plusieurs fois cerclées. Mais il est facile de voir qu'il existe des surfaces (S) plusieurs fois cerclées, de degré conforme(1) > 2; l'exemple le plus simple est fourni par la surface engendrée par la translation d'un cercle dont le centre décrit un autre cercle : cette surface est en général du quatrième degré conforme. D'autres exemples ont été indiqués par Kœnigs(2) et par M. Vessiot(3). Dans deux notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*(4), Cosserat a donné une méthode pour déterminer toutes les surfaces (S); il les considère comme engendrées de deux façons par des coniques qui rencontrent toutes en deux points une conique fixe C; dans sa deuxième note, il cite un exemple de surface doublement cerclée du huitième degré(5).

---

(1) J'appelle degré conforme d'une surface algébrique, le degré de son équation en coordonnées pentasphériques; c'est aussi le nombre de points de rencontre (conformes) de la surface avec une droite isotrope (conforme) arbitraire.

(2) Voir plus loin, chapitre VIII.

(3) Voir plus loin, chapitre VIII.

(4) *Comptes rendus*, tome 130, 1900, pages 311 et 385.

(5) Il s'agit ici du degré euclidien; cette surface est du quatrième degré conforme; voir plus loin, chapitre VIII.

Dans ce travail, après avoir exposé, dans les chapitres I à IV, quelques résultats indispensables pour la suite (et dont la plupart sont d'ailleurs classiques), je montre qu'il existe trois grandes catégories de surfaces (S) : 1° Surfaces doublement cerclées du troisième degré (ou surfaces réglées-cerclées); 2° Surfaces triplement cerclées du troisième degré; 3° Surfaces doublement cerclées du quatrième degré. Je prouve, au chapitre VII, que les surfaces des deux premières catégories sont toutes imaginaires; au chapitre VIII, je détermine et j'étudie les surfaces réelles de la troisième catégorie.

Il y aurait lieu, plus généralement, d'étudier la classification, en géométrie projective, des surfaces sur lesquelles existent plusieurs familles de coniques. Mais ce problème semble beaucoup plus difficile que celui qui fait l'objet du présent travail.

Je tiens, avant de terminer, à exprimer toute ma reconnaissance à M. Vessiot, qui a bien voulu s'intéresser à mes recherches, et qui n'a cessé de me guider et de m'encourager; M. Cartan a bien voulu examiner mon travail et me donner quelques indications qui m'ont permis d'améliorer sensiblement la rédaction; je le prie de trouver ici l'expression de mes sentiments de vive gratitude.

CHAPITRE I

Classification des familles linéaires de sphères. Représentations paramétriques d'une droite isotrope et d'un cercle.

1. Généralités. — Rappelons d'abord quelques notions classiques relatives aux coordonnées pentasphériques. Dans un tel système de coordonnées, un *point conforme* (ou plus simplement un *point*) est défini par cinq coordonnées $x_1 \ldots x_5$ non toutes nulles, vérifiant la relation :

$$\sum x_i^2 = 0 .$$

Nous dirons que deux points sont distincts si les coordonnées x_i du premier ne sont pas proportionnelles aux coordonnées y_i du second (¹). Deux points x_i, y_i sont

---

(¹) La notion de point conforme n'est pas identique à celle de point euclidien. Passons en coordonnées cartésiennes par les formules :

$$\text{(C)} \qquad \frac{x}{x_1} = \frac{y}{x_2} = \frac{z}{x_3} = \frac{t}{x_4 + ix_5} .$$

Nous voyons qu'à tout point euclidien (x, y, z, t) nous pouvons faire correspondre le point conforme I $(0, 0, 0, 1, i)$. Nous dirons que les coordonnées de I sont les coordonnées conformes *singulières* du point euclidien. Si on laisse de côté le point I, auquel correspond, réciproquement, tout point de l'espace euclidien, on obtient les résultats suivants :

1° Si $x_4 + ix_5 \neq 0$, au point conforme $(x_1, \ldots, x_5)$ correspond par les formules (C) un point euclidien unique, situé à distance finie. Réciproquement, à tout point euclidien à distance finie correspond un point conforme bien déterminé, pour lequel $x_4 + ix_5$ n'est pas nul.

2° Lorsque $x_4 + ix_5 = 0$, on a $t = 0$ et le point euclidien est à l'infini ; on a de plus : $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Si donc x_1, x_2, x_3 ne sont pas nuls à la fois, le point est sur le cercle de l'infini ; si $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, le point est indéterminé dans le plan de l'infini.

Réciproquement, à tout point du plan de l'infini non situé sur le cercle de l'infini, ne correspond que le point I. Soit maintenant un point du cercle de l'infini : $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = i(u^2 + v^2)$, $t = 0$; on a : $x_1 = \lambda(u^2 - v^2)$, $x_2 = \lambda . 2uv$, $x_3 = \lambda i(u^2 + v^2)$, $x_4 = \lambda'$, $x_5 = i\lambda'$ (λ et λ' étant arbitraires). On obtient donc une infinité de points conformes dont les coordonnées dépendent linéairement d'un paramètre. [Cf. Darboux. *Principes de géométrie analytique*, Paris (1917), p. 387].

dits *orthogonaux* lorsque leurs coordonnées vérifient la relation :

$$\sum x_i y_i = 0 \text{ [2]}.$$

L'ensemble des points x_i qui satisfont à l'équation :

$$(1) \qquad \sum a_i x_i = 0,$$

où les a_i sont des constantes données, est appelé *sphère conforme* (ou plus simplement *sphère*).

Une sphère est dite de rayon non nul si $\Sigma a_i^2 \neq 0$, de rayon nul dans le cas contraire. Lorsque la sphère (1) est de rayon nul, on peut la considérer, soit comme un point (de coordonnées a_i), soit comme le lieu des points orthogonaux au point a_i, que l'on appelle alors le *centre* de la sphère [3].

Si on considère deux sphères distinctes de rayon non nul :

$$\sum a_i x_i = 0, \qquad \sum b_i x_i = 0,$$

---

[2] Étant donnés deux points euclidiens A et B, appelons A′ tout point conforme qui correspond à A, B′ tout point conforme qui correspond à B, par les formules (C) [chapitre I, note 1]; il est facile de déterminer les cas où A′ et B′ sont orthogonaux :

a) A et B sont à distance finie; A′ et B′ sont orthogonaux si AB = 0.

b) A est à distance finie, B à l'infini, hors du cercle ombilical : A′ et B′ ne sont jamais orthogonaux.

c) A est à distance finie, B sur le cercle ombilical : un des points B′ est orthogonal à A′.

d) A et B sont à l'infini, hors du cercle ombilical; A′ et B′ sont confondus, donc orthogonaux.

e) A et B sont à l'infini, A étant seul situé sur le cercle ombilical : tous les points A′ sont orthogonaux à B′.

f) A et B sont sur le cercle ombilical; s'ils sont distincts, un point A′ n'est jamais orthogonal à un point B′; s'ils sont confondus, tout point A′ est orthogonal à tout point B′.

[3] On sait qu'à toute sphère conforme correspond en géométrie euclidienne une sphère ou un plan. Réciproquement :

à une sphère euclidienne de rayon non nul, ou à un plan non isotrope, correspond une sphère conforme de rayon non nul;

à une sphère euclidienne de rayon nul ou à un plan isotrope correspond une sphère conforme de rayon nul;

au plan de l'infini correspond la sphère de rayon nul $x_4 + i\,x_5 = 0$.

Le *centre* d'un plan isotrope est le point où il touche le cercle de l'infini; le centre du plan de l'infini est un point quelconque de ce plan (puisqu'en géométrie conforme, c'est le point I).

on peut choisir les a_i et les b_i de façon que :

$$\sum a_i^2 = 1, \qquad \sum b_i^2 = 1.$$

L'angle V des deux sphères est alors défini par :

$$\cos V = \sum a_i b_i;$$

elles sont donc orthogonales lorsque

$$\sum a_i b_i = 0.$$

Si maintenant une des deux sphères est de rayon nul, on ne peut plus définir leur angle en général; mais nous conviendrons encore de dire qu'elles sont orthogonales si :

$$\sum a_i b_i = 0.$$

Une transformation conforme de l'espace équivaut à une substitution orthogonale effectuée sur les x_i :

$$x'_i = \sum_{k=1}^{5} \lambda_{ik} \cdot x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5).$$

Une telle transformation conserve Σx_i^2 et $\Sigma x_i y_i$ (x_i, y_i désignant deux systèmes de valeurs quelconques des variables initiales). Soient a_k les coefficients de l'équation d'une sphère, a'_i ceux de l'équation de la sphère transformée. On a :

$$a'_i = \sum_{k=1}^{5} \lambda_{ik} \cdot a_k,$$

ce qui montre qu'une sphère de rayon nul se transforme en sphère de rayon nul, et que deux sphères orthogonales se transforment en sphères orthogonales.

2. Faisceaux linéaires; intersection de deux sphères. — Nous classerons les faisceaux linéaires d'après le nombre de sphères de rayon nul qu'ils contiennent. Soient :

$$ax = 0, \qquad bx = 0\,(^1),$$

---

(1) Nous poserons pour abréger : $\Sigma a_i x_i = ax$ et la sphère $ax = 0$ sera appelée « la sphère a »; de même nous poserons $\Sigma x_i^2 = x^2$, etc...

les équations des sphères de base du faisceau. Une sphère quelconque du faisceau est de la forme :

$$\lambda a + \mu b \qquad (\lambda, \mu \text{ arbitraires}).$$

Les sphères de rayon nul sont données par :

$$\lambda^2 . a^2 + 2\lambda\mu . ab + \mu^2 . b^2 = 0. \tag{2}$$

Si la relation (2) *n'est pas une identité*, il y a dans le faisceau deux sphères de rayon nul, qui sont distinctes ou confondues suivant que le discriminant :

$$\Delta = (ab)^2 - a^2 . b^2$$

est différent de zéro, ou nul.

α) $\Delta \neq 0$. Prenons d'abord les deux sphères de rayon nul comme sphères de base, ce qui revient à supposer :

$$a^2 = b^2 = 0, \qquad ab \neq 0. \tag{3}$$

On peut faire en sorte que $ab = 2$.

Prenons maintenant comme nouvelles sphères de base :

$$a' = \frac{a+b}{2}, \qquad b' = \frac{a-b}{2i},$$

on a :

$$a'^2 = b'^2 = 1, \qquad a'b' = 0.$$

Les sphères a', b' étant de rayon non nul et orthogonales, peuvent être prises comme sphères de coordonnées, et on obtient pour l'équation du faisceau la forme réduite :

$$\lambda x_3 + \mu x_4 = 0. \tag{4}$$

Deux sphères quelconques du faisceau se coupent suivant la ligne :

$$x_3 = x_4 = 0, \tag{5}$$

que nous appellerons *cercle véritable*. On peut en effet, en utilisant les formules (C) [I, note 1], transformer cette ligne en un cercle :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Nous dirons que le faisceau (4) est un *faisceau de sphères sécantes*. Les sphères de rayon nul de ce faisceau ont pour équations :

$$x_3 \pm ix_4 = 0.$$

Les centres de ces sphères sont appelés les *foyers* du cercle (5). Ces deux points ne sont pas orthogonaux.

β) $\Delta = 0$. Prenons comme sphères de base la sphère de rayon nul du faisceau et une autre sphère quelconque. Nous aurons :

$$a^2 = ab = 0, \qquad b^2 \neq 0.$$

On peut toujours réduire l'équation de la sphère a à

$$x_4 - ix_5 = 0,$$

car on peut supposer que son centre est le point $(0, 0, 0, 1, -i)$. L'équation de la sphère b est alors de la forme :

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4(x_4 - ix_5) = 0.$$

On ne réduit pas la généralité en supposant :

$$b_1 = b_2 = b_4 = 0.$$

L'équation réduite du faisceau est donc :

(6) $$\lambda x_3 + \mu(x_4 - ix_5) = 0.$$

Deux sphères quelconques du faisceau ont en commun les deux lignes :

(7) $$\begin{cases} x_1 + ix_2 = x_3 = x_4 - ix_5 = 0, \\ x_1 - ix_2 = x_3 = x_4 - ix_5 = 0, \end{cases}$$

que nous appellerons des *droites isotropes conformes* [5] (ou plus simplement des *droites isotropes*); les formules (C) les transforment en effet en droites isotropes :

$$\begin{cases} x + iy = z = 0, \\ x - iy = z = 0, \end{cases}$$

passant par l'origine.

Le faisceau (6) sera dit : *faisceau de sphères tangentes.*

Supposons maintenant que l'équation (2) *soit une identité.* On a :

$$a^2 = ab = b^2 = 0.$$

Deux sphères quelconques du faisceau sont orthogonales et de rayon nul. On peut réduire une des sphères de base à :

$$x_4 - ix_5 = 0.$$

L'équation de l'autre est alors de la forme :

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4(x_4 - ix_5) = 0$$

avec :

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 0.$$

On peut toujours supposer $b_4 = 0$ et réduire l'équation à la forme :

$$x_1 + ix_2 = 0.$$

On obtient pour le faisceau la forme réduite :

$$\lambda(x_1 + ix_2) + \mu(x_4 - ix_5) = 0. \tag{8}$$

Les sphères ont en commun la droite isotrope double :

$$x_1 + ix_2 = x_3 = x_4 - ix_5 = 0. \tag{9}$$

Le faisceau (8) sera dit : *faisceau de rayon nul.*

Le centre de la sphère (8) a pour coordonnées : $(\lambda, \lambda i, 0\ \mu, -\mu i)$. Son lieu est donc la droite isotrope (9).

---

(5) Cette notion n'est pas identique à celle de droite isotrope euclidienne. (Voir plus loin, I, note 7).

TABLEAU RÉCAPITULATIF (6).

FAISCEAU DE SPHÈRES	FORME RÉDUITE	LIEU DES POINTS COMMUNS A TOUTES LES SPHÈRES	DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE
Sécantes (type I).	$\lambda x_3 + \mu x_4 = 0$.	Cercle véritable : $x_3 = x_4 = 0$.	Sphères passant par un cercle véritable donné.
Tangentes (type II).	$\lambda x_3 + \mu(x_4 - ix_5) = 0$.	Deux droites isotropes : $x_1 + ix_2 = x_3 = x_4 - ix_5 = 0$, $x_1 - ix_2 = x_3 = x_4 - ix_5 = 0$.	Sphères tangentes en un point donné à une sphère donnée de rayon non nul.
De rayon nul (type III).	$\lambda(x_1 + ix_2) + \mu(x_4 - ix_5) = 0$.	Une droite isotrope double : $x_1 + ix_2 = x_3 = x_4 - ix_5 = 0$.	Sphères de rayon nul passant par une droite isotrope donnée.

3. Applications. — a) *Représentation paramétrique d'une droite isotrope* (*conforme*). — Considérons les équations réduites (9). On peut poser :

$$(10) \qquad x_1 = u, \qquad x_2 = iu, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = v, \qquad x_5 = -iv,$$

On obtient donc une représentation paramétrique du premier degré. Si on effectue ensuite sur les x_j une transformation conforme arbitraire :

$$(11) \qquad x'_k = \sum_{i=1}^{5} \lambda_{kj} \cdot x_j,$$

(6) Si on se place au point de vue euclidien, on constate que deux sphères (ou plans) donnés définissent un faisceau de sphères tangentes dans les cas suivants : sphères de rayon non nul tangentes; sphères orthogonales dont l'une est de rayon nul; sphère de rayon non nul et plan non isotrope tangent; sphère de rayon nul et plan non isotrope passant par son centre; sphère de rayon non nul et plan isotrope asymptote; deux plans non isotropes parallèles, ou à intersection isotrope; deux plans dont l'un est isotrope, ainsi que leur intersection; plan non isotrope et plan de l'infini.

Ils définissent un faisceau de rayon nul dans les cas suivants : deux sphères de rayon nul dont les centres sont à distance nulle; sphère de rayon nul et plan isotrope tangent; deux plans isotropes parallèles; plan isotrope et plan de l'infini. Dans tous les autres cas, deux sphères (ou plans) donnés définissent un faisceau de sphères sécantes.

on obtient la représentation paramétrique d'une droite isotrope quelconque :

$$x'_k = (\lambda_{k1} + i\lambda_{k2}) \,.\, u + (\lambda_{k4} - i\lambda_{k5}) \,.\, v \,. \tag{12}$$

On peut écrire plus simplement :

$$x'_k = a_k \,.\, u + b_k \,.\, v, \tag{13}$$

et on a :

$$a^2 = ab = b^2 = 0 \,. \tag{14}$$

Réciproquement, étudions le lieu des points dont les coordonnées sont données par des formules telles que (13) [avec les conditions (14)]. Si le tableau $||a\ b||$ est de rang 1, les formules (13) définissent un point unique; si ce tableau est de rang 2, les sphères de rayon nul a et b sont distinctes et orthogonales, et x'_k sont les coordonnées du centre d'une sphère quelconque du faisceau (a, b); les formules (13) définissent donc une droite isotrope[7].

b) *Représentation paramétrique d'un cercle véritable.* — Considérons les équations réduites de ce cercle :

$$x_3 = x_4 = 0;$$

il faut leur adjoindre :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_5^2 = 0,$$

ce qui donne :

$$x_1 = u^2 - v^2. \qquad x_2 = 2uv, \qquad x_5 = i(u^2 + v^2) \,. \tag{15}$$

En faisant ensuite sur les x_j une transformation conforme quelconque, définie par les formules (11), on obtient la représentation paramétrique d'un cercle véritable quelconque :

$$x'_k = \lambda_{k1}(u^2 - v^2) + \lambda_{k2} \,.\, 2uv + \lambda_{k5} \,.\, i(u^2 + v^2) \,. \tag{16}$$

---

[7] Considérons la droite isotrope conforme définie par les formules (13) et (14), et passons en coordonnées cartésiennes par les formules (C); on obtient une droite isotrope lorsque $a_4 + ia_5$ et $b_4 + ib_5$ ne sont pas nuls à la fois; mais si $a_4 + ia_5 = b_4 + ib_5 = 0$, on obtient un point du cercle de l'infini; ceci pouvait être prévu, à cause des résultats obtenus ci-dessus (I, note 1).

Cette représentation est du second degré; on peut écrire plus simplement :

$$x'_k = l_k u^2 + m_k uv + n_k v^2 \tag{17}$$

avec

$$l_k = \lambda_{k1} + i\lambda_{k3}, \qquad m_k = 2\lambda_{k2}, \qquad n_k = -\lambda_{k1} + i\lambda_{k3},$$

d'où :

$$l^2 = 0, \qquad lm = 0, \qquad 2ln + m^2 = 0, \qquad mn = 0, \qquad n^2 = 0; \tag{18}$$

on a de plus $m^2 = 4$ (donc $m^2 \neq 0$).

Réciproquement, étudions le lieu des points définis par une représentation paramétrique telle que (17) [avec les conditions (18)].

1° Si $m^2 \neq 0$, on peut faire en sorte que $m^2 = 4$, et on voit de suite qu'on peut mettre les formules (17) sous la forme (16); on obtient donc un cercle véritable.

Remarquons que, dans ce cas, le tableau :

$$(\mathrm{T}) \qquad \| l_k \quad m_k \quad n_k \|$$

est de rang 3 : en effet, il a le même rang que le tableau $\| \lambda_{k1} \quad \lambda_{k2} \quad \lambda_{k3} \|$, et celui-ci est évidemment de rang 3.

2° Si $m^2 = 0$, on ne peut plus réduire les formules (17) à la forme (16). Mais on voit de suite que dans ce cas, (T) est de rang inférieur à 3 : en effet, un déterminant quelconque d'ordre 3, tiré de (T), est nul, comme on le voit en calculant son carré.

Alors, ou bien (T) est de rang 1, et les formules (17) représentent un point; ou bien (T) est de rang 2 ([8]), et on peut ramener les formules (17) à la forme :

$$x'_k = a_k \,.\, w + b_k \,.\, w';$$

on a donc une droite isotrope.

Nous obtenons donc l'important résultat suivant :

Pour que les formules (17) [*et* (18)] *ne représentent pas un cercle véritable, il faut et il suffit que* $m^2 = 0$.

Nous dirons dans ce cas que le cercle (17) est *dégénéré*.

([8]) Ce qui peut se produire dans deux cas : soit que la représentation paramétrique (17) soit impropre, soit que dans les formules (17), les x_i aient un facteur commun. On voit donc qu'une droite isotrope admet des représentations impropres du second degré.

D'après ce qui précède, un cercle dégénéré se réduit à une droite isotrope ou à un point.

Remarquons que les représentations paramétriques (13) et (17), supposées propres, sont possibles d'une infinité de manières; on peut en effet faire subir à u et v une transformation homographique quelconque.

Géométriquement, $\frac{u}{v}$ est le rapport anharmonique d'un point variable et de trois points fixes de la ligne, ces derniers correspondant aux valeurs $1, 0, \infty$ de $\frac{u}{v}$:

$$\frac{u}{v} = \left(\frac{u}{v}, 1, 0, \infty\right).$$

c) *Cercles-paraboles.* — En géométrie euclidienne, nous appellerons cercle-parabole un cercle (véritable) dont le plan est isotrope. Un tel cercle admet un seul point à l'infini : le point où son plan touche le cercle de l'infini.

Passons en coordonnées pentasphériques par les formules C (I, note 1), et exprimons les x_i en fonctions du second degré d'un paramètre u; $x_4 + ix_5$ devra être un carré parfait; on pourra même le réduire à une constante, en supposant que le point à l'infini du cercle corresponde à $u\infty$.

Remarquons qu'étant donné, en géométrie conforme, un cercle sous forme paramétrique [formules (17), (18)], on peut toujours passer en coordonnées cartésiennes de telle façon que ce cercle devienne un cercle-parabole.

En effet, soit

$$(19) \qquad \sum \lambda_k x_k = 0$$

l'équation d'une sphère de rayon nul telle que :

$$\sum \lambda_k (l_k u^2 + m_k u + n_k)$$

soit un carré parfait en u. Il suffira de prendre des axes cartésiens tels que la sphère (19) devienne le plan de l'infini.

Il est aisé de trouver des valeurs λ_k répondant à la question; on peut prendre par exemple :

$$\lambda_k = l_k,$$

comme on le vérifie immédiatement.

Enfin, il y a lieu de remarquer que si tout cercle-parabole peut être assimilé à une parabole à direction asymptotique isotrope, la réciproque n'est pas vraie : une parabole à direction asymptotique isotrope ne peut être considérée comme un cercle que si elle est située dans un plan isotrope.

4. Réseaux linéaires. — Une sphère quelconque du réseau est de la forme $\lambda a + \mu b + \nu c$, en désignant par a, b, c les sphères de base.

On ne peut avoir, quels que soient λ, μ, ν :

$$(\lambda a + \mu b + \nu c)^2 = 0,$$

car cela entraînerait :

$$a^2 = b^2 = c^2 = bc = ca = ab = 0,$$

et le tableau $||a_i \quad b_i \quad c_i||$ serait de rang < 3 (même raisonnement que plus haut : I, 3, b, 2°); les sphères a, b, c ne pourraient être prises comme sphères de base.

Un réseau linéaire contient donc toujours des sphères de rayon non nul. Prenons l'une d'elles comme sphère de base, on aura par exemple $a^2 \neq 0$. Comme on peut toujours remplacer les autres sphères de base b et c par $b + K.a$, $c + K'.a$ (K et K' désignant des arbitraires), on peut choisir K et K' de façon à avoir :

$$(b + Ka).a = 0, \qquad (c + K'a).a = 0.$$

Autrement dit, on peut supposer :

$$a^2 \neq 0, \qquad ab = ac = 0.$$

La sphère a, étant orthogonale à b et c, est orthogonale à toute sphère du faisceau (b, c); on peut donc, sans diminuer la généralité, réduire ce faisceau, et on est conduit aux types suivants, selon que le faisceau est du type I, II ou III :

RÉSEAUX	ÉQUATION RÉDUITE	POINTS COMMUNS A TOUTES LES SPHÈRES	DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE
Type I.	$\lambda x_3 + \mu x_4 + \nu x_5 = 0.$	Deux points distincts : $x_1 + ix_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0,$ $x_1 - ix_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0.$	Sphères passant par deux points donnés (non orthogonaux).
Type II.	$\lambda x_2 + \mu x_3 + \nu(x_4 - ix_5) = 0.$	Deux points confondus : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 - ix_5 = 0.$	Sphères tangentes en un point donné à un cercle véritable donné.
Type III.	$\lambda(x_1 + ix_2) + \mu x_3 + \nu(x_4 - ix_5) = 0.$	Une droite isotrope : $x_1 + ix_2 = x_3 + ix_4 = x_5 = 0.$	Sphères passant par une droite isotrope donnée.

5. Familles ∞^3. — Soient a, b, c, d les quatre sphères de base, $\lambda a + \mu b + \nu c + \rho d$ une sphère quelconque de la famille.

Il est évident qu'il y a dans la famille des sphères de rayon non nul; en prenant l'une d'elles comme sphère de base et raisonnant comme pour les réseaux, on voit qu'on peut supposer :

$$a^2 \neq 0, \qquad ab = ac = ad = 0.$$

La sphère a est alors orthogonale à toutes les sphères du réseau (b, c, d) et on peut réduire ce réseau sans diminuer la généralité. On obtient seulement les deux types suivants (les réseaux du type III conduisant à une impossibilité) :

FAMILLES ∞^3	ÉQUATION RÉDUITE	POINTS COMMUNS A TOUTES LES SPHÈRES	DÉFINITION GEOMÉTRIQUE
Type I.	$\lambda x_2 + \mu x_3 + \nu x_4 + \rho x_5 = 0.$	Aucun point.	Sphères orthogonales à une sphère donnée (de rayon non nul).
Type II.	$\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 + \rho(x_4 - ix_5) = 0.$	Un point : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 - ix_5 = 0.$	Sphères passant par un point donné.

Remarque. — On vient de voir que les sphères orthogonales à une sphère donnée forment une famille linéaire ∞^3, qui est du type I ou II suivant que la sphère donnée a son rayon différent de zéro ou nul. Réciproquement étant donnée une famille linéaire ∞^3, il existe une sphère et une seule orthogonale à toutes les sphères de la famille; son rayon est différent de zéro si la famille est du type I, nul si elle est du type II.

Il existe de même une correspondance biunivoque entre les faisceaux et les réseaux. Les sphères orthogonales à un faisceau du type I (c'est-à-dire à un cercle véritable), forment un réseau du type I, dont toutes les sphères passent par les deux foyers du cercle, et réciproquement. De même les sphères orthogonales à un faisceau du type II (ou III) forment un réseau du type II (ou III), et réciproquement.

CHAPITRE II

Propriétés des droites isotropes.

1. Propriétés générales. — Soit une droite isotrope (conforme)

$$x_i = a_i u + b_i v .$$

Une sphère

$$mx = 0 ,$$

la rencontre en un point en général. Donc :

Toute droite isotrope qui a deux points sur une sphère y est contenue tout entière.

Par deux droites isotropes données, on peut toujours faire passer au moins une sphère[1]. Si on peut en faire passer deux S, S′, ces deux sphères définissent un faisceau de sphères tangentes, et les deux droites ont un point commun (au sens conforme). Réciproquement si deux droites isotropes ont un point commun, il passe par ces droites ∞^1 sphères[1]. Pour que deux droites isotropes déterminent une sphère unique S, il faut donc (et il suffit) qu'elles soient sans point commun [2] (conforme); S est alors de rayon non nul (car les droites isotropes d'une sphère de rayon nul passent par son centre)[3].

Considérons maintenant trois droites isotropes D_1, D_2, D_3.

a) Si elles se coupent deux à deux, elles passent nécessairement par un même point, et sont sur la sphère de rayon nul qui a ce point pour centre.

b) Si D_1 et D_2 par exemple n'ont aucun point commun mais rencontrent D_3, on voit que D_3 est sur la sphère (de rayon non nul) définie par D_1 et D_2; sur cette

---

(1) Ceci est évident si les droites sont données sous forme paramétrique du premier degré.

(2) Si deux droites isotropes D, Δ sont parallèles (au sens euclidien), les droites isotropes conformes qui leur correspondent : D′, Δ′ n'ont aucun point commun lorsque le plan (D, Δ) n'est pas isotrope, et sont sécantes dans le cas contraire.

A un point du cercle de l'infini et une droite isotrope correspondent deux droites isotropes conformes qui sont sécantes ou non suivant que le point est ou n'est pas sur la droite. A deux points du cercle de l'infini correspondent deux droites isotropes sécantes.

(3) Les sphères de rayon nul qui passent par une droite isotrope donnée, ont en effet leurs centres sur cette droite.

sphère, D_1 et D_2 sont génératrices de l'un des systèmes, D_3 fait partie de l'autre système.

c) Si deux des droites se rencontrent, mais ne coupent pas la troisième, les trois droites ne peuvent être sur une même sphère.

d) Si deux quelconques des trois droites ne se coupent pas, ou bien ce sont trois génératrices du même système d'une sphère de rayon non nul, ou bien elles ne sont pas sur une même sphère. Dans ce dernier cas, il existe une droite isotrope Δ et une seule qui les rencontre toutes trois : car la sphère (D_1, D_2) coupe D_3 en un point unique A, et Δ, devant passer par A, est la génératrice du second système de la sphère (D_1, D_2), menée par A (en appelant premier système celui auquel appartiennent D_1 et D_2).

2. Changements de coordonnées qui conservent une droite isotrope. — Soient $x_1, .. x_5$ les coordonnées pentasphériques d'un point. Dans la suite, nous poserons pour abréger :

$$x_1 + ix_2 = X_1, \quad x_1 - ix_2 = X_2, \quad x_3 + ix_4 = X_3, \quad x_3 - ix_4 = X_4, \quad x_5 = X_5.$$

Les X_k sont des combinaisons linéaires indépendantes des x_k, et on a :

$$X_1X_2 + X_3X_4 + X_5^2 = 0.$$

Une transformation conforme est de la forme :

$$X'_i = \sum_k m_{ik}X_k, \tag{1}$$

les m_{ik} étant tels que :

$$X'_1X'_2 + X'_3X'_4 + X'^2_5 = X_1X_2 + X_3X_4 + X_5^2. \tag{2}$$

Cela étant, remarquons que les équations de toute droite isotrope peuvent être réduites à la forme :

$$X_1 = X_3 = X_5 = 0\,(^1).$$

Les changements de coordonnées qui la conservent sont donnés par les formules (1) dans lesquelles on suppose :

$$m_{12} = m_{14} = m_{15} = m_{32} = m_{34} = m_{35} = m_{52} = m_{54} = 0. \tag{3}$$

---

(1) Cela résulte de la théorie des réseaux linéaires des sphères (réseaux du type III).

On montre facilement, en tenant compte de (2), que m_{11}, m_{13}, m_{31}, m_{33}, m_{51}, m_{53} demeurent arbitraires, avec la restriction évidente :

$$\Delta = m_{11}m_{33} - m_{31}m_{13} \neq 0. \tag{4}$$

Si l'on pose :

$$\left\{\begin{aligned} \Delta' &= m_{31}m_{53} - m_{33}m_{51}, \\ \Delta'' &= m_{51}m_{13} - m_{53}m_{11}, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

les autres coefficients sont donnés par les formules :

$$\left\{\begin{array}{lll} m_{21} = \dfrac{\Delta'.m_{51} - h.m_{31}}{\Delta}, & m_{22} = \dfrac{m_{33}}{\Delta}, & \\ m_{23} = \dfrac{\Delta'.m_{53} - hm_{33}}{\Delta}, & m_{24} = -\dfrac{m_{31}}{\Delta}, & m_{25} = \dfrac{2\varepsilon\Delta'}{\Delta}, \\ m_{41} = \dfrac{\Delta'' m_{51} + hm_{11}}{\Delta}, & m_{42} = -\dfrac{m_{13}}{\Delta}, & \\ m_{43} = \dfrac{\Delta'' m_{53} + hm_{13}}{\Delta}, & m_{44} = \dfrac{m_{11}}{\Delta}, & m_{45} = \dfrac{2\varepsilon\Delta''}{\Delta}, \\ m_{55} = \varepsilon = \pm 1, & & \end{array}\right. \tag{6}$$

h désignant un septième paramètre arbitraire.

3. Réduction des équations de deux droites isotropes D_1, D_2. — a) D_1 *et* D_2 *sont sécantes.* — Elles déterminent un faisceau de sphères tangentes dont on peut réduire l'équation à :

$$\lambda X_1 + \mu X_5 = 0;$$

on a alors :

$$\begin{array}{ll} D_1 & X_1 = X_3 = X_5 = 0, \\ D_2 & X_1 = X_4 = X_5 = 0. \end{array}$$

Les changements de coordonnées qui conservent D_1 et D_2 (5) s'obtiennent en supposant, dans les formules (6) :

$$m_{13} = m_{53} = 0 \qquad (\infty^5 \text{ transformations}).$$

---

(5) Il s'agit de ceux qui conservent individuellement D_1 et D_2; on en déduit facilement ceux qui échangent les deux droites.

b) D_1 *et* D_2 *n'ont aucun point commun.* — On peut supposer que la sphère (D_1, D_2) a pour équation :

$$X_5 = 0,$$

et que D_1 est une génératrice quelconque de cette sphère :

$$D_1 \qquad X_1 = X_3 = X_5 = 0.$$

D_2, génératrice du même système que D_1, a pour équations :

$$\lambda X_1 + \mu X_4 = \mu X_2 - \lambda X_3 = X_5 = 0$$

avec $\mu \neq 0$. En changeant X_2 en $X_2 + \frac{\lambda}{\mu} X_3$, et X_4 en $X_4 - \frac{\lambda}{\mu} X_1$, on ramène ces équations à la forme :

$$D_2 \qquad X_2 = X_4 = X_5 = 0.$$

Les changements de coordonnées qui conservent la forme réduite obtenue sont donnés par les formules (6) où l'on suppose :

$$m_{51} = m_{53} = h = 0 \qquad (\infty^4 \text{ transformations}).$$

4. Réduction des équations d'une droite isotrope D et d'un point P. — a) *Le point est hors de la droite.* — Il passe alors par P une droite isotrope unique D' rencontrant D, puisque la sphère de rayon nul de centre P coupe D en un seul point. En réduisant D, D', on obtient pour D et P les équations :

$$\begin{array}{ll} D & X_1 = X_3 = X_5 = 0, \\ P & X_1 = X_4 = X_5 = X_2 + \mu X_3 = 0. \end{array}$$

On voit facilement qu'on peut annuler μ, et la forme obtenue se conserve par les changements de coordonnées obtenus en supposant dans les formules (6) :

$$m_{13} = m_{53} = h = 0 \qquad (\infty^4 \text{ transformations}).$$

b) *Le point est sur la droite.* — On obtient immédiatement les équations réduites :

$$\begin{array}{ll} D & X_1 = X_3 = X_5 = 0, \\ P & X_1 = X_3 = X_5 = \lambda X_2 + \mu X_4 = 0, \end{array}$$

et on voit facilement qu'on peut annuler μ. Les changements de coordonnées qui conservent cette forme s'obtiennent en supposant dans les formules (6) :

$$m_{31} = 0 \qquad (\infty^6 \text{ transformations}).$$

5. Réduction des équations de trois droites isotropes D_1, D_2, D_3. — a) D_1, D_2, D_3 *se coupent deux à deux.* — Elles sont sur une sphère de rayon nul :

$$X_1 = 0.$$

Les équations d'une génératrice de cette sphère étant :

$$X_1 = X_3 + kX_5 = X_4 - \frac{1}{k} X_5 = 0$$

(k pouvant être nul ou infini), on voit qu'on peut réduire les équations de D_1, D_2, D_3 à la forme :

$$\begin{array}{ll} D_1 & X_1 = X_3 = X_5 = 0, \\ D_2 & X_1 = X_4 = X_5 = 0, \\ D_3 & X_1 = X_3 - X_5 = X_4 + X_5 = 0. \end{array}$$

Les changements de coordonnées qui conservent cette forme sont donnés par les formules (6) où l'on suppose :

$$m_{13} = m_{53} = m_{33} - m_{55} = m_{44} - m_{55} = 0 \qquad (\infty^4 \text{ transformations}).$$

b) D_1 *et* D_2 *ne se coupent pas, mais coupent* D_3. — Si D_1 et D_2 ont pour équations :

$$\begin{array}{ll} D_1 & X_1 = X_3 = X_5 = 0, \\ D_2 & X_2 = X_4 = X_5 = 0, \end{array}$$

D_3 fait partie de la sphère $X_5 = 0$; ses équations sont donc de la forme :

$$X_5 = \mu X_1 + \nu X_3 = \nu X_2 - \mu X_4 = 0;$$

on les ramène aisément à :

$$X_1 = X_4 = X_5 = 0.$$

La forme obtenue se conserve par les changements de coordonnées que l'on obtient en supposant, dans les formules (6) :

$$m_{51} = m_{53} = h = m_{13} = 0 \qquad (\infty^3 \text{ transformations}).$$

c) *Seules* D_1 *et* D_2 *se rencontrent.* — Réduisons D_1 et D_2 :

$$\begin{array}{ll} D_1 & X_1 = X_3 = X_5 = 0, \\ D_2 & X_1 = X_4 = X_5 = 0, \end{array}$$

D_3 fait partie de l'intersection de deux sphères de rayon non nul contenant respectivement D_1, D_2 :

$$\begin{cases} X_5 + \lambda X_1 + \mu X_3 = 0, \\ X_5 + \lambda' X_1 + \mu' X_4 = 0. \end{cases}$$

On a $\mu\mu' \neq 0$, sinon D_1, D_2, D_3 seraient sur une même sphère. Par un changement de coordonnées permis (c'est-à-dire conservant D_1, D_2), on peut annuler λ, λ'. Comme il faut que les sphères qui déterminent D_3 soient tangentes, on doit avoir :

$$\mu' = -\frac{1}{\mu}.$$

On peut supposer $\mu = 1$, et les équations de D_3 s'écrivent :

$$X_2 = X_3 + X_5 = X_4 - X_5 = 0.$$

On obtient les changements de coordonnées qui conservent cette forme en faisant, dans les formules (6) :

$$m_{13} = m_{53} = m_{33} - 1 = m_{31} + h = m_{51} + \varepsilon m_{31} = 0$$
$$(\infty^2 \text{ transformations}).$$

d) *Deux quelconques des trois droites ne se coupent pas.* — Réduisons D_1 et D_2 :

$$\begin{array}{ll} D_1 & X_1 = X_3 = X_5 = 0, \\ D_2 & X_2 = X_4 = X_5 = 0, \end{array}$$

D_3 fait encore partie de l'intersection de deux sphères de rayon non nul contenant respectivement D_1 et D_2.

Ces deux sphères, nécessairement tangentes, ont en commun une deuxième droite isotrope Δ qui rencontre forcément D_1 et D_2; on peut donc réduire les équations de Δ à la forme :

$$X_2 = X_3 = X_5 = 0 \qquad [\text{cf. ci-dessus : II, 5, b)}].$$

Nous nous bornerons au cas où D_1, D_2, D_3 ne sont pas cosphériques. Alors D_3, se trouvant sur une sphère (D_1, Δ) et sur une sphère (D_2, Δ), a pour équations :

$$X_5 + \lambda X_3 = X_5 + \mu X_2 = 0$$

avec $\lambda\mu \neq 0$. On peut d'ailleurs réduire λ et μ à l'unité. On a donc :

$$D_3 \qquad X_5 + X_2 = X_5 + X_3 = X_5 - X_1 - X_4 = 0.$$

Les changements de coordonnées qui conservent cette forme s'obtiennent en faisant, dans les formules (6) :

$$m_{51} = m_{53} = h = m_{31} = m_{11} - 1 = m_{33} - 1 = 0$$

(∞^1 transformations).

6. Réduction de la figure formée par deux droites isotropes D_1, D_2 et un point A. — Nous nous bornerons au cas où ces trois éléments ne sont pas cosphériques : pour cela il est nécessaire que D_1, D_2 ne se coupent pas. Leurs équations sont donc :

$$D_1 \qquad X_1 = X_3 = X_5 = 0,$$
$$D_2 \qquad X_2 = X_4 = X_5 = 0.$$

On peut mener par A une droite isotrope Δ ne rencontrant ni D_1, ni D_2. D'après les résultats du paragraphe précédent, A aura pour équations :

$$X_5 + X_2 = X_5 + X_3 = X_5 - X_1 - X_4 = X_1 - X_4 + \mu X_5 = 0,$$

et on peut, par un changement de coordonnées permis, les ramener à la forme :

$$X_1 = X_2 = X_3 - X_5 = X_4 + X_5 = 0,$$

qui se conserve si, laissant fixes X_3, X_4, X_5, on change X_1 en $m_{11}X_1$ et X_2 en $\frac{1}{m_{11}}X_2$. (∞_1 transformations).

7. Réduction d'un quadrilatère isotrope. — Si (D_1, D_2) et (D_3, D_4) sont les couples de côtés opposés, on peut réduire D_1, D_2, D_3 à la forme :

$$D_1 \qquad X_1 = X_3 = X_5 = 0,$$
$$D_2 \qquad X_2 = X_4 = X_5 = 0,$$
$$D_3 \qquad X_1 = X_4 = X_5 = 0,$$

et D_4 a pour équations :

$$X_5 = \mu X_1 + \nu X_3 = \nu X_2 - \mu X_4 = 0.$$

Comme elle ne coupe pas D_3, $\nu \neq 0$. On voit facilement qu'on peut annuler μ, et on a :

$$D_4 \qquad X_2 = X_3 = X_5 = 0.$$

La forme réduite obtenue se conserve par les changements de coordonnées :

$$X'_1 = m_{11} X_1, \qquad X'_2 = \frac{1}{m_{11}} X_2, \qquad X'_3 = m_{33} X_3, \qquad X'_4 = \frac{1}{m_{33}} X_4, \qquad X'_5 = X_5$$

(∞^2 transformations).

Remarquons que les figures étudiées dans ce chapitre n'ont aucun invariant conforme : deux figures de même espèce sont donc équivalentes, et le sont même d'une infinité de manières.

CHAPITRE III

Étude des cercles cosphériques à trois cercles donnés.

Soient C, C′, C″ les trois cercles donnés, supposés véritables. Appelons Γ tout cercle (véritable) cosphérique à C, C′, C″.

1. Cas général : deux quelconques des cercles C, C′, C″ ne sont pas cosphériques. — Écrivons les équations des trois cercles :

$$C \begin{cases} ax = 0, \\ bx = 0, \end{cases} \qquad C' \begin{cases} a'x = 0, \\ b'x = 0, \end{cases} \qquad C'' \begin{cases} a''x = 0, \\ b''x = 0. \end{cases}$$

Soit Γ l'un des cercles cherchés; les sphères (C, Γ), (C′, Γ) et (C″, Γ) doivent appartenir à un même faisceau linéaire. Les équations de ces sphères sont respectivement :

$$(\lambda a + \mu b)x = 0, \qquad (\nu a' + \rho b')x = 0, \qquad (\sigma a'' + \tau b'')x = 0,$$

et λ et μ ne sont pas nuls à la fois, ν et ρ non plus, σ et τ non plus. Pour que les sphères considérées fassent partie d'un même faisceau, il faut que l'on puisse trouver trois nombres h, k, l non tous nuls, tels que l'on ait :

$$(1) \qquad \begin{cases} h(\lambda a_i + \mu b_i) + k(\nu a'_i + \rho b') + l(\sigma a''_i + \tau b''_i) = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, 5). \end{cases}$$

Il faut même ici $hkl \neq 0$, sinon deux des cercles C, C′, C″ seraient cosphériques, contrairement à l'hypothèse.

Or, les premiers membres des équations de six sphères n'étant jamais indépendants, il existe au moins un système de relations de la forme :

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha a_i + \beta b_i + \alpha' a'_i + \beta' b'_i + \alpha'' a''_i + \beta'' b''_i = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, 5). \end{cases}$$

Si le tableau $||a \quad b \quad a' \quad b' \quad a'' \quad b''||$ est de rang 5, ce système est unique. De plus on n'a pas $\alpha = \beta = 0$, ni $\alpha' = \beta' = 0$, ni $\alpha'' = \beta'' = 0$. On peut alors prendre :

$$h\lambda = \alpha, \qquad h\mu = \beta, \qquad k\nu = \alpha', \qquad k\rho = \beta', \qquad l\sigma = \alpha'', \qquad l\tau = \beta'',$$

et on voit qu'il existe un cercle Γ unique répondant à la question [1]. Ce cercle a pour équations :

$$(\alpha a + \beta b)x = 0, \qquad (\alpha' a' + \beta' b')x = 0. \qquad (\alpha'' a'' + \beta'' b'')x = 0.$$

Si maintenant le tableau $||a \quad b \quad a' \quad b' \quad a'' \quad b''||$ est de rang 4, il existe deux systèmes indépendants de relations telles que (2) :

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha a_i + \beta b_i + \alpha' a'_i + \beta' b'_i + \alpha'' a''_i + \beta'' b''_i = 0, \\ \gamma a_i + \delta b_i + \gamma' a'_i + \delta' b'_i + \gamma'' a''_i + \delta'' b''_i = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5). \end{cases}$$

D'ailleurs on a :

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \qquad \alpha'\delta' - \beta'\gamma' \neq 0, \qquad \alpha''\delta'' - \beta''\gamma'' \neq 0,$$

sinon deux des cercles C, C', C'' seraient cosphériques. De là résulte que les sphères :

$$A = \alpha a + \beta b, \qquad B = \gamma a + \delta b,$$

sont distinctes et peuvent servir à définir le cercle C. De même C' peut être défini par :

$$A' = \alpha' a' + \beta' b', \qquad B' = \gamma' a' + \delta' b',$$

et C'' par :

$$A'' = \alpha'' a'' + \beta'' b'', \qquad B'' = \gamma'' a'' + \delta'' b''.$$

Les équations (3) s'écrivent :

$$A_i + A'_i + A''_i = 0, \qquad B_i + B'_i + B''_i = 0,$$

et les équations de C, C', C'' deviennent :

$$C \begin{cases} Ax = 0, \\ Bx = 0, \end{cases} \qquad C' \begin{cases} A'x = 0, \\ B'x = 0, \end{cases} \qquad C'' \begin{cases} (A + A')x = 0, \\ (B + B')x = 0. \end{cases}$$

---

[1] L'existence de ce cercle a déjà été signalée par G. DARBOUX, *C. R. Ac. Sc.*, Paris, tome 92 (1881), p. 447.

Remarquons que les sphères A, B, A′, B′ sont linéairement distinctes (sinon C et C′ seraient cosphériques).

Le système (1) auquel il faut satisfaire s'écrit alors :

$$h(\lambda A_i + \mu B_i) + k(\nu A'_i + \rho B'_i) + l[\sigma(A_i + A'_i) + \tau(B_i + B'_i)] = 0,$$

et on a nécessairement :

$$h\lambda + l\sigma = h\mu + l\tau = k\nu + l\sigma = k\rho + l\tau = 0,$$

ou

$$\lambda = -\frac{l}{h}\sigma, \qquad \mu = -\frac{l}{h}\tau, \qquad \nu = -\frac{l}{k}\sigma, \qquad \rho = -\frac{l}{k}\tau.$$

Un cercle Γ a donc pour équations :

$$(\sigma A + \tau B)x = 0, \qquad (\sigma A' + \tau B')x = 0.$$

Il y a donc ∞^1 cercles Γ, dont le lieu est la cyclide :

$$Ax \,.\, B'x - Bx \,.\, A'x = 0\ (^2).$$

Il nous reste à étudier les cas particuliers où deux au moins des cercles C, C′, C″ sont cosphériques. On peut employer pour traiter cette question la même méthode analytique que dans le cas général, mais pour abréger, j'exposerai la solution sous forme géométrique.

2. C et C′ **sont sur une même sphère** S **qui ne contient pas** C″. — Si les trois cercles ont deux points communs A et B (ou sont tangents en un point A), les cercles Γ sont les ∞^2 cercles qui passent par A et B (ou qui sont tangents en A aux trois cercles.)

Dans le cas contraire, soient A et B les points communs (distincts ou confondus) à C et C′. Un cercle Γ; ou bien passe par A et B, mais alors il ne coupe C″ en deux points que si A, B, C″ sont sur une même sphère, et il se trouve alors sur cette sphère S′ [on obtient alors ∞^1 cercles Γ formant sur la sphère S′ un faisceau linéaire]; ou bien ne passe pas par A et B, et alors il est sur S et passe par les

(2) On trouvera au *Bulletin des Sc. Math.*, 1880, p. 348-384, une démonstration géométrique de ce théorème due à Darboux.

Voir aussi : Demartres, *Bull. Sc. Math.*, 1888, p. 176-177.

points de rencontre (distincts ou confondus) de C'' avec S [ici encore on a ∞^1 cercles Γ formant sur S un faisceau linéaire] (3).

3. C, C', C'' **sont sur une même sphère** S. — Les ∞^3 cercles Γ de la sphère S répondent à la question ; ce sont en général les seuls cercles qui conviennent. Il y a exception si C, C', C'' ont deux points communs A et B (distincts ou confondus) : dans ce cas, il existe une autre famille de cercles Γ : les ∞^2 cercles passant par A et B (4).

---

(3) Si les trois cercles ont pour équations :

$$(C) \quad ax = bx = 0, \qquad (C') \quad ax = cx = 0, \qquad (C'') \quad dx = ex = 0,$$

le cas général est celui où le tableau $\|a \ \ b \ \ c \ \ d \ \ e\|$ est de rang 5 ; si ce tableau est de rang 4, les points A et B et le cercle C'' sont sur une même sphère; s'il est de rang 3, les cercles C, C', C'' ont deux points communs.

(4) Si les trois cercles ont pour équations :

$$(C) \quad ax = bx = 0, \qquad (C') \quad ax = cx = 0, \qquad (C'') \quad ax = dx = 0,$$

le cas général est celui où le tableau $\|a \ \ b \ \ c \ \ d\|$ est de rang 4 ; si ce tableau est de rang 3, C, C', C'' ont deux points communs.

CHAPITRE IV

Classification des cyclides [1].

Soit la cyclide d'équation :

$$(1) \qquad \sum a_{ik} x_i x_k = 0 \qquad (a_{ik} = a_{ki}).$$

On peut aussi écrire cette équation :

$$(2) \qquad \sum a_{ik} x_i x_k + s \sum x_i^2 = 0,$$

s désignant un paramètre arbitraire.

Le premier membre de (2) est décomposable en une somme de carrés indépendants en nombre au plus égal à 5. Mais on peut choisir s de façon que ce nombre ne dépasse pas 4 ; il suffit de prendre pour s une racine de l'équation obtenue en annulant le discriminant du premier membre de (2). Cette équation sera appelée dans la suite l'*équation en* s de la cyclide considérée.

Si l'on obtient par ce procédé quatre carrés indépendants, l'équation (2) prend la forme :

$$(3) \qquad S\Sigma' - \Sigma S' = 0.$$

S, S', Σ, Σ' désignant les premiers membres d'équations de sphères.

Dans le cas de trois carrés, on est conduit à la forme :

$$(3') \qquad S\Sigma' - \Sigma^2 = 0;$$

c'est la forme (3) où $S' = \Sigma$.

S'il y a moins de trois carrés, la cyclide se décompose.

---

[1] Nous ne faisons que reprendre, en nous plaçant à un point de vue un peu différent, une question traitée depuis longtemps par G. Loria (*Mem. della Reale Acc. delle Sc. di Torino*, 2e série, t. XXXVI, 1885).

Une décomposition telle que (3) met en évidence sur la cyclide deux familles de cercles :

$$\Gamma \begin{cases} S = \lambda \Sigma, \\ S' = \lambda \Sigma', \end{cases} \qquad C \begin{cases} S = \mu S', \\ \Sigma = \mu \Sigma', \end{cases}$$

et tout cercle Γ est cosphérique à tout cercle C, la sphère (C, Γ) ayant pour équation :

$$S - \lambda \Sigma - \mu S' + \lambda \mu \Sigma' = 0.$$

Nous obtenons ainsi une réciproque du théorème du chapitre précédent [2].

On sait [3] que si l'équation en s n'a que des racines simples, on peut ramener l'équation de la cyclide à :

$$\sum a_{ii} x_i^2 = 0,$$

ou :

$$\sum a_{ii} x_i^2 + s \sum x_i^2 = 0.$$

Les racines de l'équation en s sont donc égales à $-a_{ii}$; comme elles sont dis-

---

(2) Il est facile de montrer que réciproquement, tout cercle (véritable) de la cyclide provient d'une décomposition telle que (3); d'une manière plus précise, si le cercle $S = S' = 0$ est situé sur la cyclide, l'équation de celle-ci est de la forme (3). En effet, on peut toujours ramener les équations du cercle considéré à la forme : $X_1 = X_2 = 0$. Écrivons que la cyclide $\Sigma a_{ik} X_i X_k = 0$ contient ce cercle; on obtient la relation :

$$a_{33} X_3^2 + a_{44} X_4^2 + a_{55} X_5^2 + a_{34} X_3 X_4 + a_{35} X_3 X_5 + a_{45} X_4 X_5 = 0,$$

qui doit être vérifiée pour tous les systèmes de valeurs de X_3, X_4, X_5 satisfaisant à $X_3 X_4 + X_5^2 = 0$. Cela donne les relations :

$$a_{33} = a_{44} = a_{35} = a_{45} = a_{55} - a_{34} = 0.$$

L'équation de la cyclide est alors :

$$a_{11} X_1^2 + a_{22} X_2^2 + a_{55} X_5^2 + a_{12} X_1 X_2 + a_{13} X_1 X_3 + a_{14} X_1 X_4 + a_{15} X_1 X_5 + a_{23} X_2 X_3$$
$$+ a_{24} X_2 X_4 + a_{25} X_2 X_5 + a_{55} X_3 X_4 + s(X_1 X_2 + X_3 X_4 + X_5^2) = 0,$$

et en prenant $s = -a_{55}$, on la ramène bien à la forme :

$$X_1 \Sigma' - X_2 \Sigma = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La considération de l'équation en s conduit donc à la détermination de tous les cercles non dégénérés de la cyclide.

(3) Voir G. Darboux. *Principes de géométrie analytique*, pages 434-445.

tinctes, on obtient cinq décompositions telles que (3), ce qui fournit les dix familles de cercles de la surface. Nous dirons dans ce cas qu'on a une *cyclide générale*.

Il reste à étudier les cas où l'équation en s a des racines multiples. Darboux a montré que la cyclide est alors l'inverse d'une quadrique. On est donc ramené à chercher une classification conforme des quadriques (autres que les sphères).

1. Cônes. — Prenons des axes de coordonnées cartésiennes passant par le sommet O du cône. Si on passe en coordonnées pentasphériques par les formules :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} X_1 = -(x^2+y^2+z^2), & X_2 = 1, & X_3 = x+iy, \\ X_4 = x-iy, & X_5 = z, & \end{array} \right.$$

l'équation conforme de la surface ne contient que X_3, X_4, X_5.

Discutons l'intersection du cône donné avec le cône isotrope de sommet O.

1[re] Catégorie. — *Cône contenant quatre génératrices isotropes distinctes.* — Ces quatre droites étant concourantes, on peut réduire leurs équations à la forme :

$$\begin{array}{ll} D_1 & X_1 = X_3 = X_5 = 0, \\ D_2 & X_1 = X_4 = X_5 = 0, \\ D_3 & X_1 = X_3 + kX_5 = X_4 - \frac{1}{k}X_5 = 0, \\ D_4 & X_1 = X_3 - \frac{1}{k}X_5 = X_4 + kX_5 = 0, \end{array}$$

et ramener l'équation du cône à la forme :

$$(5) \qquad \mu(X_5^2 + X_3X_4) + X_5(X_3+X_4) - \left(k - \frac{1}{k}\right)X_3X_4 = 0.$$

Racines de l'équation en s :

$$0 \text{ (double)}; \qquad k - \frac{1}{k} - \mu; \qquad k - \mu; \qquad -\frac{1}{k} - \mu.$$

A la racine nulle correspondent les génératrices rectilignes. A chacune des autres racines correspondent deux familles de cercles. Il y a donc sept familles de cercles (1).

(1) Nous considérons les génératrices rectilignes comme des cercles; on peut obtenir géométriquement les six autres familles en coupant le cône par des plans parallèles à deux des droites D_i.

2e CATÉGORIE. — *Cône tangent au cône isotrope* O. — Soient :

$$
\begin{array}{ll}
D_1 & X_1 = X_3 = X_5 = 0, \\
D_2 & X_1 = X_4 = X_5 = 0, \\
D_3 & X_1 = X_3 - X_5 = X_4 + X_5 = 0,
\end{array}
$$

les équations réduites des trois génératrices isotropes du cône, D_3 étant la génératrice de contact. On voit facilement (théorie des faisceaux linéaires de quadriques) que l'équation du cône est de la forme :

$$x^2 + y^2 + z^2 + \mu(x^2 + y^2 - z^2 + 2iyz) = 0,$$

ou en coordonnées pentasphériques :

$$X_5^2(1 - \mu) + X_3X_4(1 + \mu) + \mu X_5(X_3 - X_4) = 0. \tag{6}$$

Racines de l'équation en s :

$$0 \text{ (double)}; \qquad -1 \text{ (double)}; \qquad -1 - \mu.$$

A $s = 0$ correspondent les génératrices rectilignes; à $s = -1$, deux familles de cercles passant par le point :

$$X_1 = X_2 = X_3 - X_5 = X_4 + X_5 = 0.$$

En prenant ce point pour pôle d'inversion, c'est-à-dire en posant :

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
X_1 = x' + iy', & X_2 = x' - iy', & X_3 + X_4 = 2z', \\
X_3 - X_4 - 2X_5 = -2, & & 2X_5 = 1 - x'^2 - y'^2 - z'^2,
\end{array}
\right. \tag{7}
$$

on obtient :

$$\mu(z'^2 - 1) - (x'^2 + y'^2) = 0,$$

ce qui montre qu'un cône de deuxième catégorie équivaut, en géométrie conforme, à une quadrique de révolution à centre unique. La surface a cinq familles de cercles.

3e CATÉGORIE. — *Cône bitangent au cône isotrope* O. — Soient :

$$
\begin{array}{ll}
D_1 & X_1 = X_3 = X_5 = 0, \\
D_2 & X_1 = X_4 = X_5 = 0,
\end{array}
$$

les génératrices de contact. Le cône a pour équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 + \mu z^2 = 0.$$

Il est de révolution et a pour équation conforme :

$$X_3X_4 + (1 + \mu)X_5^2 = 0. \tag{8}$$

Racines de l'équation en s :

$$0 \text{ (double)}; \qquad -1 \text{ (double)}; \qquad -1-\mu.$$

$s = 0$ donne les génératrices rectilignes; $s = -1$ fournit des cercles passant par les points :

$$X_1 = X_2 = X_5 = 0.$$

Si on passe en coordonnées cartésiennes par les formules :

$$\left\{\begin{array}{lll} X_1 = x' + iy', & X_2 = x' - iy', & X_3 = 1, \\ X_4 = -(x'^2 + y'^2 + z'^2), & X_5 = z', & \end{array}\right. \tag{9}$$

on obtient l'équation :

$$x'^2 + y'^2 - \mu z'^2 = 0,$$

ce qui donne un deuxième cône de révolution, transformé conforme du premier. Il y a quatre familles de cercles.

4e Catégorie. — *Cône osculateur au cône isotrope* O. — Soient :

$$\left\{\begin{array}{ll} D_1 & X_1 = X_3 = X_5 = 0, \\ D_2 & X_1 = X_4 = X_5 = 0, \end{array}\right.$$

les génératrices isotropes du cône, D_1 étant la génératrice de contact. L'équation du cône est :

$$x^2 + y^2 + z^2 + z(x + iy) = 0,$$

ou :

$$X_5^2 + X_3(X_4 + X_5) = 0. \tag{10}$$

Racines de l'équation en s :

$$0 \text{ (double)}; \qquad -1 \text{ (triple)}.$$

A $s = 0$ correspondent les génératrices rectilignes. Pour $s = -1$, on obtient deux familles de cercles passant par le point :

$$X_1 = X_2 = X_3 = X_5 = 0.$$

En passant en coordonnées cartésiennes par les formules (9), on obtient :

$$x'^2 + y'^2 - z' = 0,$$

c'est-à-dire l'équation d'un paraboloïde de révolution, transformé conforme du cône donné.

Il y a trois familles de cercles.

5ᵉ Catégorie. — *Cône surosculateur au cône isotrope* O. — Soit

$$D_1 \qquad X_1 = X_3 = X_5 = 0,$$

la génératrice de contact. Le cône a pour équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 + (x + iy)^2 = 0,$$

ou :

$$(11) \qquad X_3 X_4 + X_5^2 + X_3^2 = 0.$$

Racines de l'équation en s :

$$0 \text{ (double)}; \qquad -1 \text{ (triple)}.$$

Pour $s = 0$, on a les génératrices rectilignes. Pour $s = -1$, on obtient une famille de cercles tangents entre eux au point :

$$X_1 = X_2 = X_3 = X_5 = 0.$$

Si on passe en coordonnées cartésiennes par les formules (9), on obtient :

$$x'^2 + y'^2 - 1 = 0,$$

équation d'un cylindre de révolution, transformé conforme du cône donné.

2. Quadriques à centre unique. — Prenons comme origine des coordonnées le sommet du cône asymptote. Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation de ce cône. Celle de la quadrique est :

$$f(x, y, z) + h = 0,$$

h désignant une constante, qu'on peut supposer égale à 1 par une homothétie de centre O.

En coordonnées pentasphériques, on obtient pour le cône :

$$F(X_3, X_4, X_5) = 0, \tag{12}$$

et pour la quadrique :

$$F(X_3, X_4, X_5) + X_2^2 = 0. \tag{12'}$$

Donc aux cinq sortes de cônes correspondent autant de sortes de quadriques à centre unique. Dans chaque cas les surfaces (12), (12') ont la même équation en s.

1re Catégorie. — Équation :

$$\mu(X_3X_4 + X_5^2) + X_5(X_3 + X_4) - \left(k - \frac{1}{k}\right)X_3X_4 + X_2^2 = 0. \tag{13}$$

huit familles de cercles.

2e Catégorie. — Équation :

$$X_5^2(1 - \mu) + X_3X_4(1 + \mu) + \mu X_5(X_3 - X_4) + X_2^2 = 0. \tag{14}$$

C'est la transformée conforme, par les formules (7), de :

$$\mu(z'^2 - 1) - 2ix'y' - 2y'^2 = 0,$$

qui est aussi une quadrique à centre de deuxième catégorie. Il y a six familles de cercles.

3e Catégorie. — Équation :

$$X_3X_4 + (1 + \mu)X_5^2 + X_2^2 = 0. \tag{15}$$

Quadrique de révolution ; transformée conforme, par les formules (9), du cône de deuxième catégorie :

$$\mu z'^2 - 2iy'(x' - iy') = 0.$$

Cinq familles de cercles.

4^e CATÉGORIE. — Équation :

$$X_5^2 + X_3(X_4 + X_5) + X_2^2 = 0. \tag{16}$$

Transformée par (9) de la surface :

$$2iy'(x' - iy') - z' = 0,$$

laquelle est un paraboloïde dont un plan directeur est isotrope, l'intersection des plans directeurs ne l'étant pas. Il y a quatre familles de cercles.

5^e CATÉGORIE. — Équation :

$$X_5^2 + X_3 X_4 + X_3^2 + X_2^2 = 0. \tag{17}$$

Transformée par (9) de la surface :

$$2iy'(x' - iy') - 1 = 0,$$

laquelle est un cylindre dont un plan directeur est isotrope, l'intersection des plans directeurs ne l'étant pas.

3. Systèmes de deux plans (non parallèles). — a) *Les plans sont distincts. — Si leur intersection n'est pas isotrope*, il y a trois cas possibles.

Supposons que l'intersection soit l'axe des z :

$$X_3 = X_4 = 0.$$

Les deux plans peuvent être isotropes :

$$X_3 . X_4 = 0, \tag{18}$$

ou non isotropes :

$$(X_3 + kX_4)\left(X_3 + \frac{1}{k} X_4\right) = 0, \tag{19}$$

ou encore, l'un d'entre eux peut être isotrope :

$$X_3(X_3 + X_4) = 0. \tag{20}$$

Si leur intersection est isotrope, il n'y a plus que deux cas, car il est impossible que les deux plans soient isotropes. Si l'intersection a pour équations :

$$x + iy = z = 0,$$

ou :

$$X_1 = X_3 = X_5 = 0,$$

et si un des plans est isotrope, on a :

$$X_3 . X_5 = 0; \tag{21}$$

si aucun des plans n'est isotrope, on a :

$$(X_5 + X_3)(X_5 - X_3) = 0. \tag{22}$$

b) *Les deux plans sont confondus.* — Les formes réduites possibles sont évidemment :

$$X_5^2 = 0, \tag{23}$$

$$X_3^2 = 0. \tag{24}$$

4. Cylindres à centres. — Un tel cylindre a pour équation :

$$PQ + a = 0,$$

P, Q étant les premiers membres des équations des plans asymptotes, a une constante qu'on peut réduire à -1 par une homothétie ayant son centre O sur l'intersection de P et Q. (O est l'origine des coordonnées.) On obtient la classification suivante :

1^{re} CATÉGORIE. — Équation :

$$X_3 X_4 - X_2^2 = 0. \tag{25}$$

Cylindre de révolution. Racines de l'équation en s :

$$0 \text{ (triple)}; \qquad -1 \text{ (double)}.$$

Les formules (9) transforment ce cylindre en un cône de cinquième catégorie :

$$z'^2 + 2x'(x' - iy') = 0.$$

Il y a deux familles de cercles.

2^e CATÉGORIE. — Équation :

$$X_3(X_3 + X_4) - X_2^2 = 0. \tag{26}$$

Racines de l'équation en s :

$$0 \text{ (triple)}; \qquad -1 \text{ (double)}.$$

Les formules (9) transforment la surface en une quadrique à centre unique de cinquième catégorie :

$$z'^2 + 2x'(x' - iy') - 1 = 0.$$

Il y a trois familles de cercles.

3e Catégorie. — Équation :

$$(X_3 + kX_4)\left(X_3 + \frac{1}{k}X_4\right) - X_2^2 = 0. \tag{27}$$

Cylindre général. Racines de l'équation en s :

$$0 \text{ (triple)}; \qquad -\frac{(k-1)^2}{k}; \qquad -\frac{(k+1)^2}{k}.$$

Il y a cinq familles de cercles.

4e Catégorie. — Équation :

$$X_3X_5 - X^2 = 0. \tag{28}$$

Racine de l'équation en s :

$$0 \text{ (quintuple)}.$$

Une seule famille de cercles : les génératrices rectilignes (isotropes). Par les formules (9), on obtient un cylindre parabolique à plan directeur et à génératrices isotropes :

$$(x' - iy')^2 - z' = 0.$$

5e Catégorie. — Équation :

$$X_5^2 - X_3^2 - X_2^2 = 0. \tag{29}$$

Racines de l'équation en s :

$$0 \text{ (quadruple)}; \qquad -1.$$

Deux familles de cercles, en comptant les génératrices rectilignes, lesquelles sont isotropes.

5. Paraboloïdes. — Leur équation est de la forme :

$$PQ + R = 0,$$

P, Q, R désignant les premiers membres des équations de trois plans formant un vrai trièdre.

On obtient facilement la classification suivante :

1^re Catégorie. — Équation :

$$X_3 X_4 + X_2 X_5 = 0. \tag{30}$$

Paraboloïde de révolution ; on peut le transformer en cône de quatrième catégorie. Il possède trois familles de cercles.

Racines de l'équation en s :

$$0 \text{ (triple)}; \qquad -1 \text{ (double)}.$$

2^e Catégorie. — Équation :

$$X_3(X_3 + X_4) + X_2 X_5 = 0. \tag{31}$$

Racines de l'équation en s :

$$0 \text{ (triple)}; \qquad -1 \text{ (double)}.$$

On peut transformer la surface en quadrique à centre unique de quatrième catégorie ; elle a quatre familles de cercles.

3^e Catégorie. — Équation.

$$(X_3 + kX_4)\left(X_3 + \frac{1}{k}X_4\right) + X_2 X_5 = 0. \tag{32}$$

Paraboloïde général. Racines de l'équation en s :

$$0 \text{ (triple)}; \qquad -\frac{(k-1)^2}{k}; \qquad -\frac{(k+1)^2}{k}.$$

Six familes de cercles.

4ᵉ CATÉGORIE. — Équation.

(33) $$X_3X_5 + X_2X_4 = 0.$$

Racine de l'équation en s :

$$0 \text{ (quintuple)}.$$

Deux familles de cercles (les génératrices rectilignes).

5ᵉ CATÉGORIE. — Équation :

(34) $$X_5^2 - X_3^2 + X_2X_4 = 0.$$

Racines de l'équation en s :

$$0 \text{ (quadruple)}; \qquad -1.$$

Quatre familles de cercles.

6. Cylindres paraboliques. — La forme générale de l'équation est

$$P^2 + R = 0,$$

P, R étant les premiers membres d'équations de plans sécants.

1ʳᵉ CATÉGORIE. — Équation :

(35) $$X_5^2 + X_2(X_3 + X_4) = 0.$$

Racines de l'équation en s :

$$0 \text{ (quadruple)}; \qquad -1.$$

Génératrices non isotropes ; trois familles de cercles.

2ᵉ CATÉGORIE. — Équation :

(36) $$X_5^2 + X_2X_3 = 0.$$

Génératrices isotropes. Par le changement de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{lll} X_1 = \frac{1}{2}(X'_4 + iX'_1) + 2(X'_3 + iX'_2), & X_2 = X'_3 - iX'_2, & \\ X_3 = -(X'_3 + iX'_2), & X_4 = -\frac{1}{2}(X'_4 - iX'_1) + 2(X'_3 - iX'_2), & X_5 = X'_5, \end{array}\right.$$

on obtient :

$$X_5'^2 - X_3'^2 - X_2'^2 = 0,$$

c'est-à-dire un cylindre à centres de cinquième catégorie.

Racines de l'équation en s :

$$0 \text{ (quadruple)}; \qquad -1.$$

Deux familles de cercles.

3e Catégorie. — Équation :

$$X_3^2 + X_2 X_4 = 0. \tag{37}$$

Génératrices non isotropes. Racine de l'équation en s :

$$0 \text{ (quintuple)}.$$

Une seule famille de cercles : les génératrices rectilignes.

4e Categorie. — Équation :

$$X_3^2 + X_2 X_5 = 0. \tag{38}$$

Génératrices isotropes. Racine de l'équation en s :

$$0 \text{ (quintuple)}.$$

Une seule famille de cercles : les génératrices rectilignes.

Tableau récapitulatif. — Dans ce tableau, la signification des abréviations employées est la suivante :

K = cône ; Q = quadrique à centre unique ;

Γ = cylindre à centres ; P = paraboloïde ; Γ' = cylindre parabolique.

L'indice indique la catégorie ; par exemple K_3 signifie : cône de troisième catégorie.

TYPE	Ordres de multiplicité des racines de l'équation en s.	Nombre de familles de cercles.	Nombre de points singuliers.	Nombre d'invariants conformes.	DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE
C_1	1, 1, 1, 1, 1	10	0	3	Cyclide générale.
C_2	2, 1, 1, 1	8	1	2	Q_1
C_3	2, 1, 1, 1	7	2	2	K_1
C_4	2, 2, 1	6	2	1	Q_2
C_5	2, 2, 1	5	3	1	Q_3, K_2
C_6	2, 2, 1	4	4	1	K_3, cyclide de Dupin.
C_7	3, 1, 1	6	1	1	P_3
C_8	3, 1, 1	5	1	1	Γ_3
C_9	3, 2	4	2	0	Q_4, P_2
C_{10}	3, 2	3	3	0	K_4, P_1
C_{11}	3, 2	3	2	0	Q_5, Γ_2
C_{12}	3, 2	2	3	0	K_5, Γ_1
C_{13}	4, 1	4	1	0	P_5
C_{14}	4, 1	3	1	0	Γ'_1
C_{15}	4, 1	2	∞	0	Γ_5, Γ'_2
C_{16}	5	2	1	0	P_4
C_{17}	5	1	∞	0	Γ_4, Γ'_4
C_{18}	5	1	1	0	Γ'_3

Remarques. — 1° Les quadriques de révolution équivalent respectivement aux cônes K_2, K_3, K_4, K_5. On peut montrer que la surface engendrée par un cercle tournant autour d'une droite quelconque non située dans son plan, équivaut au cône K_1. On a donc le théorème suivant :

Toute surface de révolution engendrée par un cercle (ou une droite) tournant autour d'un axe, est la transformée conforme d'un cône à base circulaire.

2° Les points singuliers (conformes) d'une surface :

$$f(x_1, \ldots, x_5) = 0$$

(f étant homogène en $x_1, \ldots, x_5$) sont ceux qui vérifient les équations :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \rho \cdot x_i \qquad (i = 1, \ldots, 5),$$

ρ désignant un coefficient de proportionnalité.

Ces équations expriment qu'au point $M(x_i)$ le faisceau des sphères tangentes à la surface :

$$\sum_i \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu x_i\right) . \xi_i = 0$$

est indéterminé. (ξ_i désignent les coordonnées courantes).

CHAPITRE V

Généralités sur les surfaces plusieurs fois cerclées.

Dans ce chapitre et dans les suivants, nous déterminerons et nous étudierons les surfaces sur lesquelles on peut tracer au moins deux familles de cercles. Ces familles seront supposées simples, c'est-à-dire que par chaque point de la surface (sauf peut-être certains points exceptionnels), il passera un cercle et un seul de chaque famille. Nous connaissons déjà des surfaces répondant à la question : ce sont celles dont l'équation conforme est du premier degré (sphères) ou du second degré (cyclides, à l'exclusion toutefois des types C_{17} et C_{18}). Nous allons donc chercher les surfaces de degré conforme supérieur à 2, qui sont doublement cerclées (au moins).

1. Représentation paramétrique. — Soit donc S une surface plusieurs fois cerclée. Nous supposerons pour l'instant les deux familles composées de cercles non dégénérés (¹) (sauf peut-être certains cercles exceptionnels), et nous nous bornerons au cas où tout cercle de la première famille n'a qu'un point commun avec chaque cercle de la seconde (²).

Soient C_1, C_2, deux cercles $u = c^{te}$, Γ un cercle $t = c^{te}$, coupant C_1 en M_1 et C_2 en M_2. Lorsque C_1 et C_2 restant fixes, Γ varie sur la surface, M_1 et M_2 sont en correspondance biunivoque.

Nous allons montrer que M_1 et M_2 se correspondent aussi algébriquement.

Pour cela, remarquons d'abord que S est algébrique. En effet, soient :

$$ax = bx = 0, \tag{1}$$

les équations d'un cercle Γ assujetti à rencontrer les cercles $C_1, C_2, \ldots$ de la famille C (pratiquement il suffit de prendre cinq cercles C_k arbitraires). Les a_i et

---

(¹) Le cas où tous les cercles d'une famille seraient dégénérés sera étudié plus loin (chapitre VI).

(²) Si tout cercle d'une famille est bisécant à tout cercle de l'autre, S est une cyclide (chapitre III).

les b_i sont liés entre eux par des conditions algébriques (la condition pour que deux cercles se rencontrent est algébrique par rapport aux coefficients de ces cercles); soit (Σ) le système formé par ces conditions, au nombre de cinq; on peut leur adjoindre (puisqu'on suppose le cercle Γ véritable) les conditions supplémentaires :

$$a^2 = 1, \qquad b^2 = 1, \qquad ab = 0, \tag{2}$$

qui expriment que a_i, b_i sont des coordonnées normales des sphères a et b, et que ces sphères sont orthogonales; mais comme par Γ on peut faire passer une infinité de couples de sphères orthogonales, on peut ajouter une condition supplémentaire : par exemple supposer que la sphère a soit orthogonale à une sphère donnée. On obtient donc pour les a_i et les b_i un système (Σ') de neuf équations à dix inconnues.

Puisque par hypothèse le cercle (1), où les a_i, b_i vérifient les conditions (Σ'), engendre la surface S, on obtient l'équation de S en éliminant les a_i et les b_i entre les équations (1) et les conditions (Σ'). On a bien ainsi une équation algébriqne.

Sur S, les cercles rencontrant C_1, C_2, ... ne peuvent former qu'une ou plusieurs familles à un paramètre(³). On peut donc résoudre le système (Σ') en exprimant neuf des inconnues en fonction de la dixième et d'un paramètre lié à celle-ci par une relation algébrique(⁴); en modifiant un peu le langage, on peut dire que les équations (1) peuvent être mises sous la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{5} \lambda_i(t, v) \,.\, x_i = 0, \\ &\sum_{i=1}^{5} \mu_i(t, v) \,.\, x_i = 0, \end{aligned} \right. \tag{3}$$

avec :

$$H(t, v) = 0, \tag{4}$$

λ_i, μ_i et H étant des polynômes, t et v des paramètres. Cherchons les points de rencontre du cercle Γ défini par (3) avec C_1 et C_2. Faisons pour cela une représentation paramétrique du second degré de chacun de ces cercles :

$$\left\{ \begin{aligned} &C_1 \qquad x_i = \varphi_i(w), \\ &C_2 \qquad x_i = \Psi_i(w'). \end{aligned} \right. \tag{5}$$

(³) On sait en effet (DARBOUX, *Bull. Sc. Math.*, 1880, p. 348) qu'il ne peut y avoir sur une surface (la sphère exceptée), plus de dix familles de cercles.

(⁴) Cf. J. SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. I, page 162 (Paris, 1877).

La valeur de w qui correspond au point M_1 de rencontre de C_1 et Γ est la racine (unique) commune aux deux équations :

$$(6)\qquad \begin{cases} \sum \lambda_i(t, v) \cdot \varphi_i(w) = 0, \\ \sum \mu_i(t, v) \cdot \varphi_i(w) = 0. \end{cases}$$

On la trouve en annulant le P. G. C. D. (qui par hypothèse est de premier degré) des polynômes (6); ce qui donne une équation de la forme :

$$(7)\qquad \alpha(t, v) \cdot w + \beta(t, v) = 0 \qquad (\alpha,\ \beta \text{ polynômes}).$$

De même la valeur de w' qui correspond au point M_2 de rencontre de C_2 et Γ est donnée par une équation de la forme :

$$(8)\qquad \alpha'(t, v) \cdot w' + \beta'(t, v) = 0,$$

où α' et β' sont des polynômes.

Le nombre w défini par (7) dépend du cercle Γ choisi; s'il n'en dépendait pas, C_1 couperait tous les cercles Γ au même point; on pourrait toujours remplacer C_1 par un autre cercle C'_1 ne possédant plus cette propriété; on voit donc qu'on peut toujours supposer que les valeurs w, w' définies par (7) et (8) ne sont pas des constantes.

La relation cherchée entre w, w' s'obtient en éliminant t et v entre (4), (7) et (8); cette relation est donc algébrique et même, d'après ce qui précède, homographique. Le rapport anharmonique de quatre valeurs quelconques de w est donc égal à celui des valeurs correspondantes de w'; autrement dit, quatre cercles fixes de l'une des familles coupent un cercle variable de l'autre en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.

Considérons alors trois cercles C_1, C_2, C_3 de la première famille et trois cercles Γ_1, Γ_2, Γ_3 de la seconde. Appelons A_{ik} le point de rencontre de C_i avec Γ_k.

Un cercle C quelconque de la première famille est alors défini par trois points α_1, α_2, α_3 situés respectivement sur Γ_1, Γ_2, Γ_3 et tels que :

$$(\alpha_1 A_{11} A_{21} A_{31}) = (\alpha_2 A_{12} A_{22} A_{32}) = (\alpha_3 A_{13} A_{23} A_{33}) = \lambda.$$

Un cercle Γ de la seconde famille est défini de même par trois points β_1, β_2, β_3 situés respectivement sur C_1, C_2, C_3 et tels que :

$$(\beta_1 A_{11} A_{12} A_{13}) = (\beta_2 A_{21} A_{22} A_{23}) = (\beta_3 A_{31} A_{32} A_{33}) = \mu.$$

Le point M de rencontre de C et Γ (qui est un point quelconque de la surface), est tel que :

$$(M\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = (\beta_1 A_{11} A_{12} A_{13}) = \mu.$$

Les coordonnées de M sont donc des polynômes du second degré en μ (voir I, 3, b), dont les coefficients sont linéaires par rapport aux coordonnées des points α_1, α_2, α_3 (qui correspondent respectivement à $\mu = 1$, $\mu = 0$, $\mu \infty$). Mais ces dernières sont elles-mêmes des polynômes du second degré en λ. Les coordonnées de M sont donc de la forme :

$$(9) \qquad x_i = a_i\lambda^2\mu^2 + b_i\lambda^2\mu + b'_i\lambda\mu^2 + c_i\lambda^2 + c'_i\mu^2 + c''_i\lambda\mu + d_i\lambda + d'_i\mu + e_i \text{ [5]}.$$

2. Quelques conséquences des formules (9). — Changeons de notations en remplaçant λ par u, μ par t; on a :

$$x_i = a_i u^2 t^2 + b_i u^2 t + \ldots + e_i.$$

Si on écrit que $\Sigma x_i^2 = 0$, on obtient 25 relations que doivent vérifier les coefficients :

$$(A)\quad \left\{\begin{array}{lllll}
a^2 = 0, & ab = 0, & ab' = 0, & 2ac + b^2 = 0, & 2ac' + b'^2 = 0,\\
ac'' + bb' = 0, & ad + bc'' + b'c = 0, & ad' + b'c'' + bc' = 0, & & bc = 0,\\
b'c' = 0, & 2ae + 2bd' + 2b'd + 2cc' + c''^2 = 0, & & & bd + cc'' = 0,\\
b'd' + c'c'' = 0, & c^2 = 0, & c'^2 = 0, & & be + cd' + c''d = 0,\\
b'e + c'd + c''d' = 0, & cd = 0, & c'd' = 0, & & 2ce + d^2 = 0,\\
2c'e + d'^2 = 0, & c''e + dd' = 0, & de = 0, & d'e = 0, & e^2 = 0.
\end{array}\right.$$

Nous utiliserons surtout dans la suite les coordonnées définies plus haut : II, 2. Nous poserons donc :

$$a_1 + ia_2 = A_1, \qquad a_1 - ia_2 = A_2, \qquad \ldots e_5 = E_5,$$

et nous aurons :

$$X_i = A_i u^2 t^2 + B_i u^2 t + \ldots + E_i.$$

Les relations (A) seront remplacées par des relations équivalentes en $A_1 \ldots E_5$. Par exemple les deux premières deviendront :

$$A_1 A_2 + A_3 A_4 + A_5^2 = 0,$$
$$A_1 B_2 + A_2 B_1 + A_3 B_4 + A_4 B_3 + 2 A_5 B_5 = 0, \text{ etc.}$$

[5] Le principe de cette démonstration m'a été indiqué par M. E. Vessiot. Voir aussi : G. KOENIGS, *Annales de l'Ec. Norm. Sup.*, 1888.

Le tableau (T) (I, 3, b) relatif à un cercle $t = c^{te}$, est :

$$||a_i t^2 + b_i t + c_i \qquad b'_i t^2 + c''_i t + d_i \qquad c'_i t^2 + d'_i t + e_i||.$$

Un cercle $t = c^{te}$ est dégénéré si t est racine de :

$$\sum (b'_i t^2 + c''_i t + d_i)^2 = 0,$$

ou :

$$(E_t) \qquad b'^2 . t^4 + 2b'c'' . t^3 + (2b'd + c''^2) . t^2 + 2c''d . t + d^2 = 0.$$

Le tableau (T) relatif à un cercle $u = c^{te}$ est :

$$||a_i u^2 + b'_i u + c'_i \qquad b_i u^2 + c''_i u + d'_i \qquad c_i u^2 + d_i u + e_i||.$$

Un cercle $u = c^{te}$ est dégénéré si u est racine de :

$$(E_u) \qquad b^2 . u^4 + 2bc'' . u^3 + (2bd' + c''^2) u^2 + 2c''d' . u + d'^2 = 0.$$

Comme nous laissons de côté le cas où l'une des équations E_t, E_u serait une identité, nous voyons que chaque famille contient en général quatre cercles dégénérés.

Les remarques suivantes vont nous permettre de simplifier beaucoup la discusssion :

a) Soient deux cercles de familles différentes, par exemple $u = 0$, $t = 0$. S'ils ne se rencontrent pas, les x_i s'annulent tous pour $u = t = 0$. Par suite chacun des cercles est dégénéré, et on a les théorèmes suivants :

1° Deux cercles non dégénérés de familles différentes se rencontrent toujours.

2° Il en est de même de deux cercles de familles différentes dont un seul est dégénéré. En particulier, si un cercle $u = c^{te}$ par exemple se réduit à un point, tous les cercles $t = c^{te}$ non dégénérés passent par ce point.

b) Si un cercle d'une des familles, par exemple $t = 0$, n'est pas rencontré par deux cercles de l'autre, par exemple $u\infty$, $u = 0$, les x_i s'annulent tous pour $(t = 0, u\infty)$ et pour $(t = u = 0)$, et le cercle $t = 0$ se réduit à un point. Donc :

1° Si un cercle d'une des familles n'est pas rencontré par deux cercles de l'autre, il se réduit à un point (les deux cercles en question sont d'ailleurs dégénérés).

2° Toute droite isotrope d'une des familles rencontre tous les cercles dégénérés de l'autre, sauf un au plus.

c) Si le cercle $t = 0$ ne rencontre ni $u\infty$, ni $u = 0$, ni $u = 1$, tous les éléments du tableau (T) relatif à $t = 0$ sont nuls. Mais ce cas ne peut se présenter ici, car cela entraînerait la dégénérescence de tous les cercles $u = c^{te}$.

d) Si à deux racines distinctes de E_u (ou de E_t) correspond une même droite isotrope, tous les cercles $t = c^{te}$ (ou $u = c^{te}$) sont dégénérés.

En effet, supposons par exemple que les cercles $u\infty$, $u = 0$ se réduisent à la droite isotrope :

$$X_1 = X_3 = X_5 = 0.$$

On aura :

$$(10) \qquad \begin{cases} A_1 = A_3 = A_5 = B_1 = B_3 = B_5 = C_1 = C_3 = C_5 = 0, \\ C'_1 = C'_3 = C'_5 = D'_1 = D'_3 = D'_5 = E_1 = E_3 = E_5 = 0. \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans les équations (A), on voit de suite que E_t est une identité.

On obtiendrait le même résultat si les cercles $u\infty$, $u = 0$ se réduisaient, l'un à une droite isotrope, l'autre à un point de cette droite; ou encore s'ils se réduisaient à deux points situés sur une même droite isotrope, ou à deux points confondus : car dans tous ces cas, les relations (10) ne cesseraient pas d'avoir lieu.

3. Recherche des cercles autres que les lignes coordonnées, éventuellement situés sur la surface. — Couper la surface S par un cercle :

$$(11) \qquad \begin{cases} \sum \lambda_i x_i = 0, \\ \sum \mu_i x_i = 0, \end{cases}$$

revient à établir entre u et t les deux relations :

$$(12) \qquad \begin{cases} \alpha\, u^2 t^2 + \beta\, u^2 t + \ldots = 0, \\ \alpha_1 u^2 t^2 + \beta_1 u^2 t + \ldots = 0, \end{cases}$$

où :

$$(13) \qquad \begin{cases} \alpha = \sum \lambda_i a_i, & \beta = \sum \lambda_i b_i, \ldots\ldots, \\ \alpha_1 = \sum \mu_i a_i, & \beta_1 = \sum \mu_i b_i, \ldots\ldots \end{cases}$$

Le cercle n'est situé sur S que si les équations (12) ont une infinité de solutions communes; il faut donc, soit que les premiers membres de (12) se décomposent et aient un facteur commun, soit qu'ils aient leurs coefficients proportionnels.

Étudions d'abord ce dernier cas; on peut trouver un nombre k tel que :

$$\alpha - k\alpha_1 = \ldots = \varepsilon - k\varepsilon_1 = 0, \tag{14}$$

c'est-à-dire :

$$\sum (\lambda_i - k\mu_i) a_i = 0, \qquad \ldots\ldots, \qquad \sum (\lambda_i - k\mu_i) e_i = 0,$$

ce qui entraîne :

$$\sum (\lambda_i - k\mu_i) x_i = 0; \tag{15}$$

la surface est une sphère; on peut éliminer ce cas.

Supposons maintenant que les premiers membres de (12) aient un facteur commun; ce facteur ne peut être que l'une des formes :

$$\begin{gathered}
\lambda t + \mu, \\
\lambda u + \mu, \\
\lambda ut + \mu u + \nu t + \rho, \\
(\lambda t^2 + \mu t + \nu) u + (\lambda' t^2 + \mu' t + \nu'), \\
(\lambda u^2 + \mu u + \nu) t + (\lambda' u^2 + \mu' u + \nu').
\end{gathered}$$

Les deux premières formes doivent être exclues, comme donnant les cercles déjà connus $t = c^{te}$, $u = c^{te}$. La quatrième peut être aussi exclue : en effet, tout cercle obtenu en annulant un facteur de cette forme, rencontre en deux points tout cercle $u = c^{te}$; si donc S admet une famille de cercles de cette espèce, c'est une cyclide. De même la cinquième forme peut être laissée de côté, pour une raison analogue.

En résumé, on peut se borner à la recherche des familles de cercles dont l'équation est de la forme :

$$\alpha ut + \beta u + \gamma t + \delta = 0 \qquad (\text{avec } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0). \tag{16}$$

Une sphère :

$$\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_5 X_5 = 0, \tag{17}$$

coupe la surface suivant une ligne définie par :

$$\mathcal{A} u^2 t^2 + \mathcal{B} u^2 t + \ldots + \mathcal{E} = 0, \tag{18}$$

où :

$$\mathcal{A} = \sum \lambda_i A_i, \qquad \ldots\ldots, \qquad \mathcal{E} = \sum \lambda_i E_i. \tag{19}$$

Si le premier membre contient un facteur de la forme (16), le quotient est de la forme :

$$\alpha_1 ut + \beta_1 u + \gamma_1 t + \delta_1 .$$

On a donc les égalités :

$$(20)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = \alpha\alpha_1, \qquad \mathcal{B} = \alpha\beta_1 + \beta\alpha_1, \qquad \mathcal{B}' = \alpha\gamma_1 + \gamma\alpha_1. \qquad \mathcal{C} = \beta\beta_1, \\ \mathcal{C}' = \gamma\gamma_1, \qquad \mathcal{C}'' = \alpha\delta_1 + \delta\alpha_1 + \beta\gamma_1 + \gamma\beta_1, \\ \mathcal{D} = \beta\delta_1 + \delta\beta_1, \qquad \mathcal{D}' = \gamma\delta_1 + \delta\gamma_1, \qquad \mathcal{E} = \delta\delta_1 . \end{cases}$$

Éliminons $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$. Pour cela distinguons trois cas :

a) Si $\alpha\gamma \neq 0$, on a :

$$\alpha_1 = \frac{\mathcal{A}}{\alpha}, \qquad \gamma_1 = \frac{\mathcal{C}'}{\gamma}, \qquad \beta_1 = \frac{\alpha\mathcal{B} - \beta\mathcal{A}}{\alpha^2}, \qquad \delta_1 = \frac{\gamma\mathcal{D}' - \delta\mathcal{C}'}{\gamma^2},$$

d'où :

$$(21)\quad \begin{cases} \mathcal{B}' = \dfrac{\alpha}{\gamma}\,\mathcal{C}' + \dfrac{\gamma}{\alpha}\,\mathcal{A}, \qquad \mathcal{C} = \dfrac{\beta}{\alpha^2}(\alpha\mathcal{B} - \beta\mathcal{A}), \\ \mathcal{D} = \dfrac{\beta}{\gamma^2}(\gamma\mathcal{D}' - \delta\mathcal{C}') + \dfrac{\delta}{\alpha^2}(\alpha\mathcal{B} - \beta\mathcal{A}), \qquad \mathcal{E} = \dfrac{\delta}{\gamma^2}(\gamma\mathcal{D}' - \delta\mathcal{C}'), \\ \mathcal{C}'' = \dfrac{\alpha}{\gamma^2}(\gamma\mathcal{D}' - \delta\mathcal{C}') + \dfrac{\delta}{\alpha}\,\mathcal{A} + \dfrac{\beta}{\gamma}\,\mathcal{C}' + \dfrac{\gamma}{\alpha^2}(\alpha\mathcal{B} - \beta\mathcal{A}). \end{cases}$$

b) Si $\alpha = 0$, d'où $\beta\gamma \neq 0$, on a :

$$\alpha_1 = \frac{\mathcal{B}}{\beta}, \qquad \beta_1 = \frac{\mathcal{C}}{\beta}, \qquad \gamma_1 = \frac{\mathcal{C}'}{\gamma}, \qquad \delta_1 = \frac{\gamma\mathcal{D}' - \delta\mathcal{C}'}{\gamma^2},$$

d'où :

$$(22)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = 0, \qquad \mathcal{B}' = \dfrac{\gamma}{\beta}\,\mathcal{B}, \qquad \mathcal{C}'' = \dfrac{\delta}{\beta}\,\mathcal{B} + \dfrac{\beta}{\gamma}\,\mathcal{C}' + \dfrac{\gamma}{\beta}\,\mathcal{C}, \\ \mathcal{D} = \dfrac{\beta}{\gamma^2}(\gamma\mathcal{D}' - \delta\mathcal{C}') + \dfrac{\delta}{\beta}\,\mathrm{C}, \qquad \mathcal{E} = \dfrac{\delta}{\gamma^2}(\gamma\mathcal{D}' - \delta\mathcal{C}'). \end{cases}$$

c) Si $\gamma = 0$, d'où $\alpha\delta \neq 0$, on a :

$$\alpha_1 = \frac{\mathcal{A}}{\alpha}, \qquad \delta_1 = \frac{\mathcal{E}}{\delta}, \qquad \gamma_1 = \frac{\mathcal{D}'}{\delta}, \qquad \beta_1 = \frac{\alpha\mathcal{B} - \beta\mathcal{A}}{\alpha^2},$$

d'où

$$(23)\quad \begin{cases} \mathcal{B}' = \dfrac{\alpha}{\delta}\mathcal{D}', & \mathcal{C} = \dfrac{\beta}{\alpha^2}(\alpha\mathcal{B} - \beta\mathcal{A}), \qquad \mathcal{C}' = 0, \\ \mathcal{C}'' = \dfrac{\alpha}{\delta}\mathcal{E} + \dfrac{\delta}{\alpha}\mathcal{A} + \dfrac{\beta}{\delta}\mathcal{D}'. & \mathcal{D} = \dfrac{\beta}{\delta}\mathcal{E} + \dfrac{\delta}{\alpha^2}(\alpha\mathcal{B} - \beta\mathcal{A}). \end{cases}$$

Les équations (21), (22) ou (23) sont alors au nombre de cinq, linéaires et homogènes par rapport à $\lambda_1, \dots \lambda_5$.

La condition nécessaire et suffisante pour que la ligne définie par (16) soit un cercle, est alors que ces cinq équations se réduisent à trois distinctes. Il faudra, dans chaque cas, déterminer α, β, γ, δ pour qu'il en soit ainsi.

CHAPITRE VI

Classification des surfaces plusieurs fois cerclées (1).

Les calculs étant très longs, je ne puis songer à les exposer en détail; je me bornerai ici à indiquer succinctement les méthodes suivies et les résultats obtenus.

1. Cas où une des équations E_u, E_t a au moins trois racines distinctes. — Si E_t par exemple a trois racines distinctes ∞, 0, 1; à ces racines correspondent des cercles dégénérés distincts [V, 2, remarque *d*)].

a) Si deux de ces cercles se réduisent à des points, ceux-ci ne peuvent être orthogonaux (même remarque), et la surface est l'inverse d'un cône du second degré, c'est-à-dire une cyclide particulière.

b) Si deux de ces cercles sont des droites isotropes D_1, D_2 et le troisième un point A (2), les cercles $u = c^{te}$ passent par A. Si D_1 et D_2 se coupent en B, il existe une sphère Σ contenant A, D_1, D_2; si les cercles $u = c^{te}$ passent par B, on a l'inverse d'un cône (3); s'ils ne passent pas par B, ils coupent D_1 et D_2 en des points distincts, et sont donc sur Σ. Le seul cas à examiner est donc celui où D_1 et D_2 ne se coupent pas, A n'étant d'ailleurs pas sur la sphère (D_1, D_2).

c) Supposons maintenant que les trois cercles soient des droites isotropes D_1, D_2, D_3. Alors : ou bien D_1, D_2, D_3 se coupent deux à deux; on peut réduire leurs équations à la forme canonique *a*) (II, 5), et un calcul facile montre que la surface est la sphère $X_1 = 0$ (4);

Ou bien D_1 et D_2, sans se couper, rencontrent D_3; on peut réduire les équations des trois droites à la forme canonique *b*) (II, 5), et on voit comme plus haut (4) que la surface est la sphère $X_5 = 0$;

Ou bien D_1 et D_2 seules se rencontrent;

Ou bien deux quelconques des trois droites ne se coupent pas, les trois droites n'étant pas sur une même sphère (5);

Nous n'examinerons donc que ces deux derniers cas.

---

(1) Autres que les cyclides.

(2) On peut supposer A hors de D_1 et D_2 [V, 2, remarque *d*)].

(3) En effet la droite AB n'est pas isotrope, sinon les cercles $u = c^{te}$ seraient tous dégénérés.

(4) Il suffit d'écrire que pour $t \infty$, $t = 0$, $t = 1$ on obtient respectivement D_1, D_2, D_3.

(5) Sinon la surface serait cette sphère.

1[er] Cas. — *Les cercles dégénérés sont deux droites isotropes et un point, non situés sur une même sphère.* — On peut supposer (II, 6) :

$$\begin{array}{ll} t\infty & X_1 = X_3 = X_5 = 0, \\ t = 0 & X_2 = X_4 = X_5 = 0, \\ t = 1 & X_1 = X_2 = X_3 - X_5 = X_4 + X_5 = 0. \end{array}$$

Cela donne entre les $A_i \ldots E_i$ 30 relations, auxquelles il faut adjoindre le système (A) (V, 2); de plus, les tableaux relatifs aux cercles $t\infty$, $t = 0$ doivent être de rang 2, le tableau $t = 1$ doit être de rang 1.

Remarquons qu'on peut se servir des changements de coordonnées permis (c'est-à-dire de ceux qui conservent les équations réduites des cercles $t\infty$, $t = 0$, $t = 1$) pour simplifier les équations trouvées. De plus, on peut, si E_u a moins de trois racines distinctes, faire sur le paramètre u une transformation homographique conservant les racines de E_u. Enfin on peut multiplier tous les coefficients $A_i \ldots E_i$ par un même nombre.

On est alors conduit aux résultats suivants ;

E_t a pour racine double $t = 1$.

Si E_u a quatre racines distinctes, on obtient une cyclide du type C_2; si elle a trois racines distinctes, une cyclide C_7 ou C_4; si elle a une racine triple, une cyclide C_9; si elle a deux racines doubles, une cyclide C_8 ou C_9; enfin il est impossible qu'elle ait une racine quadruple.

2[e] Cas. — *Les cercles dégénérés sont trois droites isotropes dont deux sont sécantes.* — On peut réduire leurs équations à :

$$\begin{array}{ll} t\infty & X_1 = X_3 = X_5 = 0, \\ t = 0 & X_1 = X_4 = X_5 = 0, \\ t = 1 & X_2 = X_3 + X_5 = X_4 - X_5 = 0. \end{array}$$

Cela donne entre les coefficients 27 relations, à adjoindre au système (A). La sphère $X_1 = 0$ coupe la surface suivant les cercles :

$$B_1 u^2 + C_1'' u + D_1' = 0.$$

1° *L'équation* $B_1 u^2 + C_1'' u + D_1' = 0$ *a deux racines distinctes* ($u\infty$, $u = 0$).

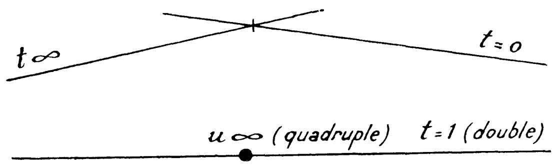
On peut montrer que E_t a nécessairement une racine double.

A) $t = 1$ *est racine double de* E_t. — On peut montrer que E_u admet nécessairement pour racine au moins double, soit $u\infty$, soit $u = 0$. Supposons par exemple $u\infty$ racine au moins double de E_u.

a) $u\infty$ *est racine quadruple de* E_u. — On a (6) :

$$\text{Type 1}\quad\left\{\begin{aligned} X_1 &= ut,\\ X_2 &= u(t-1)^2,\\ X_3 &= -u^2t-1,\\ X_4 &= u^2t+t^2,\\ X_5 &= u^2t+t. \end{aligned}\right.$$

Disposition des cercles dégénérés (7) :



Cercles $u = c^{te}$:

$$\left\{\begin{aligned} & u^2X_1 - uX_5 + X_1 = 0,\\ & u(X_3 - X_4 + 2X_5) + X_2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\left\{\begin{aligned} & t^2X_1 - t(X_2 + 2X_1) + X_1 = 0,\\ & t(X_3 + X_5) - (X_4 - X_5) = 0. \end{aligned}\right.$$

Surface doublement cerclée (comme on le voit en lui appliquant la méthode du chapitre précédent [V, 3]).

Équation de la surface :

$$X_1(X_3 - X_4 + 2X_5)^2 - X_2(X_3 + X_5)(X_4 - X_5) = 0.$$

b) $u\infty$ *est racine triple de* E_u. — La quatrième racine (qui ne peut être nulle), peut être supposée égale à 1, et on a le type :

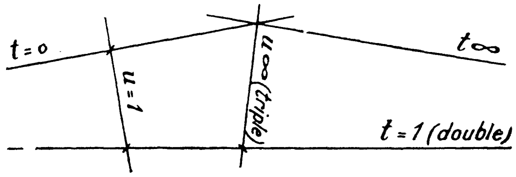
$$\begin{array}{c}\text{Type 2}\\(\lambda \neq 0)\end{array}\quad\left\{\begin{aligned} X_1 &= ut,\\ X_2 &= -\lambda u^2t^2 + \lambda u^2t + \lambda ut^2 - 2\lambda ut + \lambda u - t + 1,\\ X_3 &= -\lambda u^2t - 1,\\ X_4 &= \lambda u^2t - ut^2 + t^2 + ut,\\ X_5 &= \lambda u^2t + t. \end{aligned}\right.$$

---

(6) On utilise, comme dans le premier cas, les changements de coordonnées et de paramètres permis.

(7) Nous convenons de représenter une droite isotrope par une droite réelle, deux droites isotropes sécantes par deux droites sécantes (et inversement).

Disposition des cercles dégénérés :



Surface triplement cerclée. Cercles $v = c^{te}$ définis par :

$$t(u-1)+\frac{1}{v}=0.$$

Cercles $u = c^{te}$:

$$\begin{cases}(X_2+X_3+X_5)+\lambda u(X_3-X_4+2X_5)=0,\\ \lambda u^2X_1-uX_5+X_1=0.\end{cases}$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\begin{cases}(\lambda X_1+X_3)t^2-t(X_2+2\lambda X_1+X_3)+\lambda X_1=0,\\ t(X_1-X_3-X_5)+X_4-X_1-X_5=0.\end{cases}$$

Cercles $v = c^{te}$:

$$\begin{cases}[X_4-(\lambda+1)X_1]v^2+(X_2+X_3+2\lambda X_1)v-\lambda X_1=0,\\ X_3+X_5-v(X_4-X_5)=0.\end{cases}$$

Racines de E_v : $v\infty$, $v=0$, $v=1$ (double).
Équation de la surface :

$$(X_1-X_4+X_5)(X_2+X_3+X_5)(X_3+X_5)+\lambda X_1(X_3-X_4+2X_5)^2=0.$$

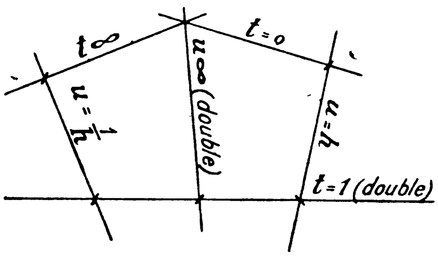
c) $u\infty$ *est racine double de* E_u — On a :

Types 3 et 4 $(\lambda \neq 0)$

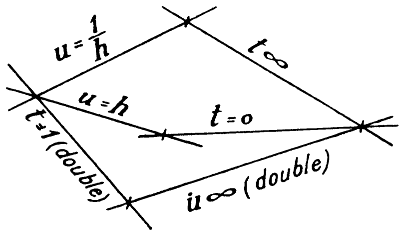
$$\begin{cases}X_1=ut,\\ X_2=-\frac{\lambda}{h}u^2t^2+\lambda\left(h+\frac{1}{h}\right)u^2t+(\lambda-1)ut^2-\lambda hu^2\\ \qquad +ht^2-2(\lambda-1)ut+(\lambda-1)u-\left(h+\frac{1}{h}\right)t+\frac{1}{h},\\ X_3=-\lambda u^2t-hut+hu-1,\\ X_4=\lambda u^2t-\frac{1}{h}ut^2+t^2+\frac{1}{h}ut,\\ X_5=\lambda u^2t+t.\end{cases}$$

Type 3 si $h^2 - 1 \neq 0$: se subdivise en deux types, 3_A si $\lambda \neq 1$, 3_B si $\lambda = 1$; type 4 si $h^2 - 1 = 0$.

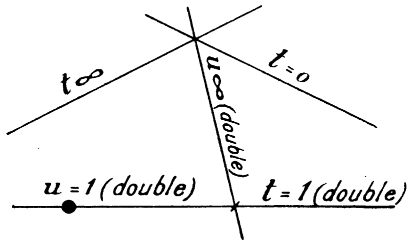
Disposition des cercles dégénérés :



TYPE 3_A.



TYPE 3_B.



TYPE 4.

Cercles $u = c^{te}$:

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda u^2 X_1 - u X_3 + X_1 = 0,\\ \lambda u(X_3 - X_4 + 2X_5) + \left[X_2 + \dfrac{1}{h} X_3 - h X_4 + \left(h + \dfrac{1}{h}\right) X_5\right] = 0.\end{array}\right.$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[X_4 - X_5 + \left(h - \dfrac{1}{h}\right) X_1\right] - t\left[X_3 + X_5 + \left(h - \dfrac{1}{h}\right) X_1\right] = 0,\\ t^2\left[(\lambda + h^2) X_1 + \left(h + \dfrac{1}{h}\right) X_3 + h X_5\right] - t\left[2(\lambda + h^2) X_1 + X_2 + \left(h + \dfrac{1}{h}\right) X_3\right] \\ \qquad\qquad + (\lambda + h^2) X_1 - h X_5 = 0.\end{array}\right.$$

Les surfaces du type 3 sont triplement cerclées; les cercles $v = c^{te}$ sont définis par :

$$t(u - h) + v(1 - hu) = 0.$$

Cercles $v = c^{te}$ (type 3 seulement) :

$$\left\{\begin{aligned} & h(X_4 - X_5) - v(X_3 + X_5) = 0, \\ & vX_2 - 2v\left(v - \frac{1}{h}\right)X_3 - (v+h)\left(v - \frac{1}{h}\right)X_5 \\ & \qquad\qquad - \left[\left(\frac{\lambda}{h} + h\right)v^2 - 2(\lambda + 1)v + \lambda h + \frac{1}{h}\right]X_1 = 0. \end{aligned}\right.$$

Racines de E_v : $v\infty$, $v = 0$, $v = h$ (double).

Équation de la surface :

$$X_1\left[X_2 + \frac{1}{h}X_3 - hX_4 + \left(h + \frac{1}{h}\right)X_5\right]^2 + X_5\left[X_2 + \frac{1}{h}X_3 - hX_4 + \left(h + \frac{1}{h}\right)X_5\right](X_3 - X_4 + 2X_5)$$
$$+ \lambda X_1(X_3 - X_4 + 2X_5)^2 = 0.$$

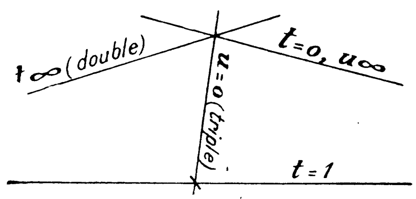
B) $t\infty$ *(ou* $t = 0$*) est racine double de* E_t. — On voit facilement qu'on peut supposer $u\infty$ racine simple, $u = 0$ racine au moins double de E_u, et que la quatrième racine de E_u n'est pas infinie.

Il y a donc deux cas :

a) $u\infty$ *est racine simple,* $u = 0$ *racine triple de* E_u. — On a :

$$\text{Type 5} \atop (l \neq 0) \left\{\begin{aligned} & X_1 = ut, \\ & X_2 = -lu^2t^2 + 2lu^2t - lu^2 + t^2 - lut + lu - t, \\ & X_3 = lu^2t - lu^2 - t, \\ & X_4 = ut^2 - ut + t, \\ & X_5 = t. \end{aligned}\right.$$

Disposition des cercles dégénérés :



Surface triplement cerclée. Cercles $v = c^{te}$ définis par :

$$u(t - 1) + vt = 0.$$

Cercles $u = c^{te}$:

$$\left\{\begin{aligned} & lu^2(X_4 - X_5) + u(X_2 - X_3 - X_5) + X_3 - X_4 + 2X_5 = 0, \\ & uX_5 - X_1 = 0. \end{aligned}\right.$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\begin{cases} t^2X_3 + t(X_2 - X_3 + lX_4) - lX_4 = 0 \\ X_1 + X_4 - X_5 - tX_1 = 0. \end{cases}$$

Cercles $v = c^{te}$:

$$\begin{cases} X_3 + X_5 + lvX_4 = 0, \\ -lv^2X_4 + v(X_2 + X_5) + X_4 - X_5 = 0 \end{cases}$$

Racines de E_v : $v\infty$ (triple), $v = 0$.
Équation de la surface :

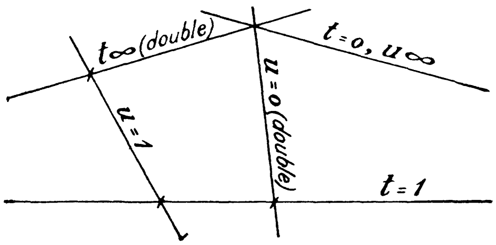
$$lX_1^2(X_4 - X_5) - X_5(X_3 + X_5)(X_1 + X_4 - X_5) = 0.$$

b) E_u *a pour racines* $u\infty$, $u = 0$ (double), $u = 1$. — On a :

Type 6 ($l.m \neq 0$)

$$\begin{cases} X_1 = ut, \\ X_2 = -lmu^2t^2 + 2lmu^2t + lmut^2 - lmu^2 + mt^2 - l(2m+1)ut \\ \qquad + l(m+1)u + (l-m)t - l, \\ X_3 = lu^2t - lu^2 - lut + lu - t, \\ X_4 = mut^2 - mut + t, \\ X_5 = t. \end{cases}$$

Disposition des cercles dégénérés :



Surface triplement cerclée. Cercles $v = c^{te}$ définis par :

$$u(t-1) + vt + 1 = 0.$$

Cercles $u = c^{te}$:

$$\begin{cases} lu^2(X_4 - X_5) + u[X_2 - m(X_3 + X_5) - l(X_4 - X_5)] + X_3 - X_4 + 2X_5 = 0, \\ uX_5 - X_1 = 0. \end{cases}$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\begin{cases} ml^2X_3 + t(X_2 - mX_3 + lX_1 - lX_5) + l(X_5 - X_1) = 0, \\ (X_4 - X_5 + mX_1) - mlX_4 = 0. \end{cases}$$

Cercles $v = c^{te}$:

$$\begin{cases} lvX_1 + (X_3 + X_5 + lX_1) = 0, \\ -lv^2X_1 + v(X_2 - lX_4 + mX_5) + X_4 + (m-1)X_5 = 0. \end{cases}$$

Racines de E_v : $v\infty$ (triple); $v = -1$.

Équation de la surface :

$$lX_1(X_1 - X_5)(X_4 - X_5) - X_5(X_3 + X_5)(mX_1 + X_4 - X_5) = 0.$$

2° *L'équation* $B_1u^2 + C_1''u + D_1' = 0$ *a deux racines égales* $(u\infty)$.

On voit facilement que $u\infty$ est racine au moins double, et au plus triple de E_u.

Si $u\infty$ est racine triple de E_u, on obtient une cyclide C_7; si $u\infty$ est racine double de E_u, et si les deux autres racines de E_u sont égales, on a une cyclide C_3 ou C_5; si les deux autres racines de E_u sont distinctes, on est ramené au premier cas.

3e Cas. — *Les cercles dégénérés sont trois droites isotropes non cosphériques, telles que deux quelconques d'entre elles ne se coupent pas.* — Supposons donc :

$$\begin{array}{ll} t\infty & X_1 = X_3 = X_5 = 0, \\ t = 0 & X_2 = X_4 = X_5 = 0, \\ t = 1 & X_2 + X_5 = X_3 + X_5 = X_1 + X_4 - X_5 = 0. \end{array}$$

Il peut arriver que E_t ait une racine double; on ne diminue pas la généralité en supposant cette racine égale à 1.

La sphère $X_5 = 0$ coupe la surface suivant les deux cercles :

$$B_5u^2 + C_5''u + D_5' = 0.$$

1° *L'équation* $B_5u^2 + C_5''u + D_5' = 0$ *a deux racines distinctes* $(u\infty,\ u = 0)$.

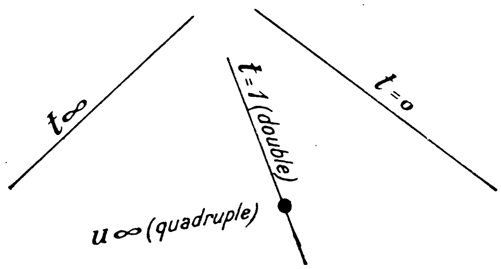
A) E_t *a une racine double* $(t = 1)$. — On peut montrer que, soit $u\infty$, soit $u = 0$, est racine au moins double de E_u : nous choisirons $u\infty$.

a) $u\infty$ *est racine quadruple de* E_u. — On a le type :

TYPE 7 $(h \neq 0)$

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= 2u^2t + (2-h)ut + hu - ht - h, \\ X_2 &= 2ht^2 - 4ut - 2ht, \\ X_3 &= -4ut + 2ht - 2h, \\ X_4 &= -2u^2t + hut^2 + ht^2 + (2-h)ut + ht, \\ X_5 &= 4ut. \end{aligned}\right.$$

Disposition des cercles dégénérés :



Surface doublement cerclée.

Cercles $u = c^{te}$:

$$\left\{\begin{aligned} & u^2(X_2+X_3) + u(2X_1 - X_2 - X_3 - 2X_4) + 2hX_5 = 0, \\ & u(X_3 - X_2) + 2X_1 - X_2 - X_3 + 2X_4 - 4X_5 = 0. \end{aligned}\right.$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\left\{\begin{aligned} & ht^2X_5 + t[(8-2h)X_5 + 2X_3 - 4X_1 - 4X_4 + 2X_2] + hX_5 = 0, \\ & X_2 + X_5 - t(X_3 + X_5) = 0. \end{aligned}\right.$$

Équation de la surface :

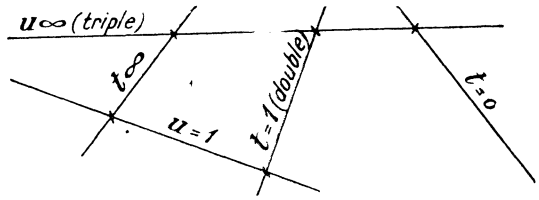
$$2(2X_1 - X_2 - X_3 + 2X_4 - 4X_5)(X_2+X_5)(X_3+X_5) - hX_5(X_2-X_3)^2 = 0.$$

b) $u\infty$ *est racine triple de* E_u. — Soit $u = 1$ la quatrième racine. On a :

TYPE 8 $h.k.(h-1) \neq 0$

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= ku^2t - khu^2 + (2h-1-kh)ut + h(k-1)u - k(2h-1)t + h, \\ X_2 &= -2ht^2 - 2(h-1)ut + 2ht, \\ X_3 &= 2ut - 2hu - 2ht + 2h, \\ X_4 &= k(h-1)u^2t + khut^2 + h(2h-1)t^2 + (h-1-kh)ut - ht, \\ X_5 &= 2(h-1)ut. \end{aligned}\right.$$

Disposition des cercles dégénérés :



Surface triplement cerclée. Cercles $v = c^{te}$ définis par :

$$v(u-1) - t = 0.$$

Cercles $u = c^{te}$:

$$\left\{\begin{array}{l} ku^2X_3 - u(2X_1 - X_3 - 2X_5) - 2hX_3 = 0, \\ ku(X_2 - X_3) + [2X_1 + (2h-1)X_2 - X_3 + 2X_4 + 2(h-2)X_5] = 0. \end{array}\right.$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\left\{\begin{array}{l} X_2 - tX_3 + \dfrac{1-t}{1-h}X_5 = 0, \\ 2(1-h)tX_1 - t[(1-2h)t+1]X_3 + 2(t-h)X_4 \\ \qquad + \dfrac{(kh+2h-1)t^2 + (-2kh-4h^2+5h-3)t + h(k+1)}{1-h}X_5 = 0. \end{array}\right.$$

Cercles $v = c^{te}$:

$$\left\{\begin{array}{l} X_2 + X_5 + v(X_3 + X_5) = 0, \\ 2vX_4 - 2v(hv+h-1)X_1 - v(1-h)[(2h-1)v+1]X_3 \\ \qquad - [(2h-1+kh)v^2 + (2kh-2h+3)v + kh]X_5 = 0. \end{array}\right.$$

Racines de E_v : $v\infty$, $v = 0$, $v = -1$ (double).

Équation de la surface :

$$[2X_1 + (2h-1)X_2 - X_3 + 2X_4 + 2(h-2)X_5].[X_5 - (h-1)X_3].(X_2 + X_5) + khX_5(X_2 - X_3)^2 = 0.$$

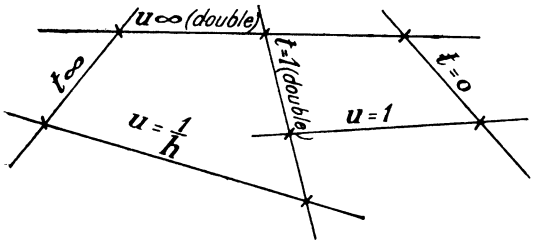
c) $u\infty$ *est racine double de* E_u. — On a :

Types 9 et 10 $hkl(l+2kh) \neq 0$

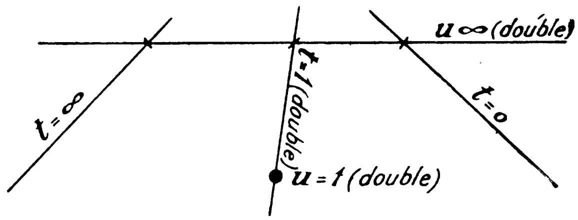
$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = l(1-k)u^2t + hklu^2 + [2k^2h + k(1-2h) - 1 + kl]ut \\ \qquad + [-2k^2h + kh - kl]u + [-2k^2h - k]t + 2k^2 - k, \\ X_2 = -2kut^2 + 2kt^2 + 2(kh+1)ut - 2kt, \\ X_3 = 2(1-k)ut + 2khu + 2kt - 2k, \\ X_4 = klu^2t^2 - l(kh+1)u^2t - (2k^2h + k + kl)ut^2 \\ \qquad + (2k^2h + k)t^2 + [2k^2h - k(h-2) - 1 + kl]ut + [-2k^2 + k]t, \\ X_5 = 2[k(1-h) - 1]ut. \end{array}\right.$$

Type 9 si $h \neq 1$, type 10 si $h = 1$.

Disposition des cercles dégénérés :



TYPE 9.



TYPE 10.

Cercles $u = c^{te}$:

$$\left\{\begin{array}{l} -lu^2X_3 + u[2X_1 + (2k-1)X_3 + 2(k-1)X_5] - 2kX_5 = 0, \\ lu(X_2 - X_3) + 2X_1 - (2kh+1)X_2 + (2k-1)X_3 + 2X_4 + 2(k-kh-2)X_5 = 0. \end{array}\right.$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\left\{\begin{array}{l} X_2 - tX_3 - \dfrac{1-t}{k(1-h)-1}.X_5 = 0, \\ 2t[kt-(kh+1)]X_1 + t[(1+2kh)t + 1 - 2k]X_3 + 2[(k-1)t - kh]X_4 \\ -\dfrac{(-2k^2h + 2kh + kl - k + 1)t^2 + (4k^2h^2 - 4k^2h + 4k^2 + 5kh - 7k - 2kl + 3)t + kl + kh(1-2k)}{k(1-h)-1}.X_5 = 0. \end{array}\right.$$

Les surfaces du type 9 sont triplement cerclées. Les cercles $v = c^{te}$ sont définis par :

$$t(u-1) + v(1-hu) = 0.$$

Cercles $v = c^{te}$:

$$\left\{\begin{array}{l} X_2 + X_5 - v(X_3 + X_5) = 0, \\ 2v[khv - (kh+1)]X_1 - v(kh - k + 1)[2k - 1 - (2kh+1)v]X_3 + 2[(k-1)v - k]X_4 \\ + \{[kl + (1-k)(2kh+1)]v^2 + [1 - 2k + (k-1)(2k-l-1) - (k+1)(l-2kh-1)].v - k(2k-l-1)\}.X_5 = 0. \end{array}\right.$$

Racines de E_v : $v\infty$, $v = 0$, $v = 1$ (double).

Équation de la surface :

$$\begin{array}{l} [2X_1 - (2kh+1)X_2 + (2k-1)X_3 + 2X_4 + 2(k-kh-2)X_5].[X_5^2 + (kh+1)X_3X_5 \\ \qquad - (k-1)X_2X_5 + (kh-k+1)X_2X_3] - klX_5(X_2 - X_3)^2 = 0. \end{array}$$

B) E_t *a quatre racines distinctes.* — Si les quatre racines de E_u ne sont pas distinctes, on est ramené à un cas étudié (1er Cas); si E_u a quatre racines distinctes, on obtient une cyclide C_1 ou C_2.

2° *L'équation* $B_5 u^2 + C''_5 u + D'_5 = 0$ *a ses racines égales* $(u\infty)$.

Si E_u n'a aucune racine infinie, E_t est une identité; cas à rejeter.

Si E_u a une racine quadruple, $t\infty$ ou $t = 0$ est racine double, ou bien E_t est une identité; cas à rejeter.

Dans les autres cas, on obtient une cyclide C_2 ou C_4.

2. Cas où E_t a deux racines distinctes, E_u ayant au plus deux racines distinctes. — Soient $t\infty$, $t = 0$ les deux racines de E_t. Nous avons à examiner trois cas, suivant qu'à ces deux racines correspondent : une droite isotrope et un point non situé sur cette droite, ou deux droites isotropes sécantes, ou deux droites isotropes non sécantes.

1er Cas. — *Les cercles dégénérés sont une droite isotrope et un point.* — Supposons :

$$\begin{aligned} &t\infty \qquad X_1 = X_2 = X_4 = X_5 = 0, \\ &t = 0 \qquad X_1 = X_3 = X_5 = 0. \end{aligned}$$

Si on tient compte des équations (A) (V, 2), on constate que E_t admet $t\infty$ comme racine au moins double. La sphère $X_4 = 0$ coupe la surface suivant les cercles (dégénérés) :

$$C_4 u^2 + D_4 u + E_4 = 0.$$

1° *L'équation* $C_4 u^2 + D_4 u + E_4 = 0$ *a deux racines distinctes* $(u\infty,\ u = 0)$.

On montre facilement que $t\infty$ est racine triple de E_t, et on est conduit à une cyclide C_{13}, C_9 ou C_{10}.

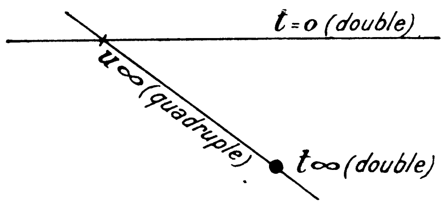
2° *L'équation* $C_4 u^2 + D_4 u + E_4 = 0$ *a deux racines égales* $(u\infty)$.

a) $t\infty$, $t = 0$ *sont racines doubles de* E_t.

α) $u\infty$ *est racine quadruple de* E_u. — On est conduit, soit à une cyclide C_{11}, soit au type :

$$\text{Type 11} \begin{cases} X_1 = -t, \\ X_2 = u^2 t + u^2 + u + t, \\ X_3 = u^2 t + t^2 + ut, \\ X_4 = 1, \\ X_5 = ut. \end{cases}$$

Disposition des cercles dégénérés :



Surface doublement cerclée.

Cercles $u = \mathrm{c^{te}}$:

$$\begin{cases} X_3 + uX_4 = 0, \\ u^2(X_1 - X_4) - uX_4 + X_1 + X_2 = 0. \end{cases}$$

Cercles $t = \mathrm{c^{te}}$:

$$\begin{cases} X_1 + tX_4 = 0, \\ -t^2X_1 + t(X_2 - X_3 + X_5) - X_3 = 0. \end{cases}$$

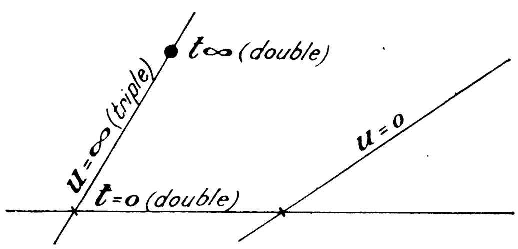
Équation de la surface :

$$X_5^2(X_1 - X_4) + X_1^2(X_1 + X_2) + X_1X_4X_5 = 0.$$

β) $u\infty$ *est racine triple de* E_u. — On obtient, soit une cyclide C_9, soit le type :

$$\text{Type 12} \begin{cases} X_1 = -t, \\ X_2 = u^2t + u^2 + ut + ku, \\ X_3 = u^2t + ut^2 + kut, \\ X_4 = 1, \\ X_5 = ut. \end{cases}$$

Disposition des cercles dégénérés :



Surface doublement cerclée.

Cercles $u = c^{te}$:

$$\begin{cases} X_5 + uX_1 = 0, \\ u^2(X_1 - X_4) + u(X_1 - kX_4) + X_2 = 0. \end{cases}$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\begin{cases} X_1 + tX_4 = 0, \\ t^2X_5 + t(X_2 - X_3 + kX_5) - X_3 = 0. \end{cases}$$

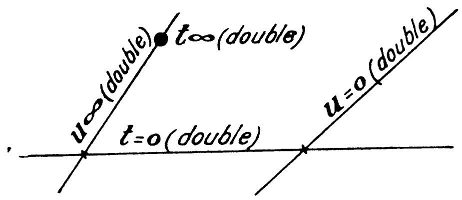
Équation de la surface :

$$X_1^2X_5 - X_1X_4(X_2 - X_3 + kX_5) - X_3X_4^2 = 0.$$

γ) *$u\infty$ est racine double de* E_u. — On est conduit, soit à une cyclide C_5 ou C_{12}, soit à l'un des deux types suivants :

$$\text{TYPE 13} \; (\lambda \neq 0) \begin{cases} X_1 = t, \\ X_2 = -(\lambda + 1)u^2t + u^2 + u, \\ X_3 = \lambda u^2t^2 - u^2t - ut, \\ X_4 = 1, \\ X_5 = ut. \end{cases}$$

Disposition des cercles dégénérés ;



Surface doublement cerclée.

Cercles $u = c^{te}$:

$$\begin{cases} X_5 - uX_1 = 0, \\ u^2[(\lambda + 1)X_1 - X_4] - uX_4 + X_2 = 0. \end{cases}$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\begin{cases} X_1 - tX_4 = 0, \\ \lambda t^2X_4 + t[X_5 - X_2 + (\lambda + 1)X_3] - X_3 = 0. \end{cases}$$

Équation de la surface :

$$X_5^2[(\lambda + 1)X_1 - X_4] - X_1X_4X_5 + X_1^2X_2 = 0.$$

$$\text{Type 14}\ (\lambda \neq 0)\quad \begin{cases} X_1 = t, \\ X_2 = -(\lambda+1)u^2t + u^2, \\ X_3 = \lambda u^2t^2 - u^2t, \\ X_4 = 1, \\ X_5 = ut. \end{cases}$$

Disposition des cercles dégénérés (voir type 13).

Surface doublement cerclée.

Cercles $u = c^{te}$:

$$\begin{cases} X_5 - uX_1 = 0, \\ -u^2X_4 + (\lambda+1)uX_5 + X_2 = 0. \end{cases}$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\begin{cases} X_1 - tX_4 = 0, \\ \lambda t^2X_2 + t[(\lambda+1)X_3 - X_2] - X_3 = 0. \end{cases}$$

Équation de la surface :

$$-X_4X_5^2 + X_1^2X_2 + (\lambda+1)X_1X_5^2 = 0.$$

b) *$t\infty$ est racine triple, $t = 0$ racine simple de E_t.*

Si $u\infty$ est racine quadruple de E_u, on a une cyclide C_{16}; si $u\infty$ est racine triple de E_u, une cyclide C_{13}.

2° Cas. — *Les cercles dégénérés sont deux droites isotropes sécantes.*

$$\begin{aligned} &t\infty && X_1 = X_3 = X_5 = 0, \\ &t = 0 && X_1 = X_4 = X_5 = 0. \end{aligned}$$

La sphère $X_1 = 0$ coupe la surface suivant les cercles :

$$B_1u^2 + C_1''u + D_1' = 0.$$

1° *L'équation $B_1u^2 + C_1''u + D_1' = 0$ a deux racines distinctes* ($u\infty$, $u = 0$).

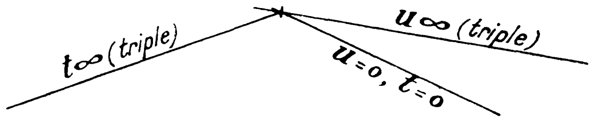
On peut montrer que les cercles $u\infty$, $u = 0$ sont nécessairement dégénérés.

a) *$u\infty$ est racine triple, $u = 0$ racine simple de E_u.*

On est conduit au type :

$$\text{Type 15}\quad \begin{cases} X_1 = ut, \\ X_2 = u^2t^2 - u - t, \\ X_3 = -u^2t + 1, \\ X_4 = u^2t + ut^2, \\ X_5 = u^2t. \end{cases}$$

Disposition des cercles dégénérés :



Surface triplement cerclée. Cercles $v = c^{te}$ définis par :

$$ut - v = 0.$$

Cercles $u = c^{te}$:

$$\begin{cases} X_5 - uX_1 = 0, \\ u^2(X_3 - X_4 + 2X_5) + uX_2 + X_1 = 0. \end{cases}$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\begin{cases} -tX_1 + X_4 - X_5 = 0, \\ t^2X_3 + tX_2 + X_1 = 0. \end{cases}$$

Cercles $v = c^{te}$:

$$\begin{cases} X_1 - v(X_3 + X_5) = 0, \\ v^2X_1 - vX_2 - X_4 = 0. \end{cases}$$

Racines de E_v : $v\infty$, $v = 0$ (triple).
Équation de la surface :

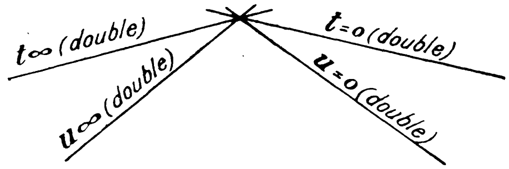
$$X_5^2(X_3 - X_4 + 2X_5) + X_1X_2X_5 + X_1^3 = 0.$$

b) $u\infty$, $u = 0$ *sont racines doubles de* E_u. — On a les deux types :

Type 16

$$l.m.\left(l + \frac{1}{l}\right)^2 \neq 0 \quad \begin{cases} X_1 = ut, \\ X_2 = \dfrac{m}{l}u^2t^2 - lmu^2 - lmt^2 - \left[m^2 + \left(l + \dfrac{1}{l}\right)^2\right]ut + \dfrac{m}{l}, \\ X_3 = -\dfrac{1}{l}u^2t + mu + lt, \\ X_4 = lu^2t + mut^2 - \dfrac{1}{l}t, \\ X_5 = u^2t + t. \end{cases}$$

Disposition des cercles dégénérés :



Surface doublement cerclée.

Cercles $t = c^{te}$:

$$\left\{\begin{aligned} & -ml^2X_1 + t\left[X_4 - \left(l - \frac{1}{l}\right)X_5 + X_3\right] - mX_1 = 0, \\ & ml^2X_3 + t\left[X_2 + \left\{\left(l + \frac{1}{l}\right)^2 - m^2\right\}X_1\right] + mX_4 = 0 \end{aligned}\right.$$

Cercles $u = c^{te}$:

$$\left\{\begin{aligned} & u^2X_1 - uX_5 + X_1 = 0, \\ & u^2[l^2X_3 - X_4 + 2lX_5] + ul\left[X_2 + \left\{m^2 - \left(l + \frac{1}{l}\right)^2\right\}X_1\right] + l^2X_4 - X_3 + 2lX_5 = 0. \end{aligned}\right.$$

Équation de la surface :

$$\left[lX_1\left\{X_2 + \left[m^2 - \left(l + \frac{1}{l}\right)^2\right]X_1\right\} + X_5(l^2X_3 - X_4 + 2lX_5)\right]\left[lX_1\left\{X_2 + \left[m^2 - \left(l + \frac{1}{l}\right)^2\right]X_1\right\} + X_5(l^2X_4 - X_3 + 2lX_5)\right]$$
$$+ (l^2 + 1)^2 . X_1^2 . (X_3 - X_4)^2 = 0.$$

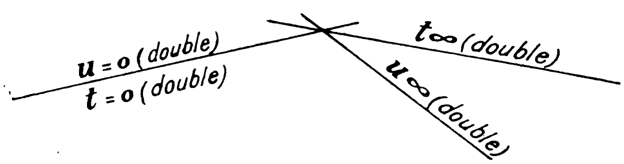
Si $l + \frac{1}{l} = \varepsilon m (\varepsilon = \pm 1)$, la surface contient deux cercles isolés autres que les cercles coordonnés :

$$\varepsilon u + t = 0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon ut + 1 = 0.$$

Type 17 $(m \neq 0)$

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= ut, \\ X_2 &= mu^2t^2 - mu^2 - mt^2 - (m^2 + 1)ut, \\ X_3 &= -u^2t + mu + t, \\ X_4 &= u^2t + mut^2, \\ X_5 &= u^2t. \end{aligned}\right.$$

Disposition des cercles dégénérés :



Surface triplement cerclée. Cercles $v = c^{te}$ définis par :

$$ut + v(mu + t) = 0.$$

Cercles $u = c^{te}$:

$$\begin{cases} X_5 - uX_1 = 0, \\ u^2(X_3 - X_4 + 2X_5) + uX_2 + X_1 + (m^2 - 1)X_5 = 0. \end{cases}$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\begin{cases} X_4 - X_5 - mtX_1 = 0, \\ mt^2X_3 + t(X_1 + X_2) + mX_5 = 0. \end{cases}$$

Cercles $v = c^{te}$:

$$\begin{cases} X_1 + v(X_3 + X_5) = 0, \\ v^2[X_4 + (m^2 - 1)X_5] + vX_2 - X_4 = 0. \end{cases}$$

Racine de E_v : $v = 0$ (quadruple).
Équation de la surface :

$$X_5^2(X_3 - X_4 + 2X_5) + X_1X_2X_5 + X_1^2[(m^2 - 1)X_5 + X_4] = 0.$$

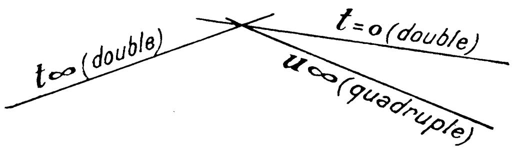
2° *L'équation* $B_1u^2 + C_1''u + D_1' = 0$ *a ses racines égales* ($u\infty$).

On constate que $u\infty$ est racine au moins triple de E_u. Si elle est racine triple, on trouve un type déjà étudié : cyclide C_{13}.

Supposons donc $u\infty$ racine quadruple de E_u; on obtient, soit une cyclide C_8, soit le type :

$$\text{Type 18} \quad (\lambda \neq 0) \quad \begin{cases} X_1 = t, \\ X_2 = -u^2t^2 - \lambda ut^2 - \lambda^2u^2t + u^2 - \lambda u - t, \\ X_3 = u^2t + \lambda ut + 1, \\ X_4 = -u^2t + t^2 + \lambda ut, \\ X_5 = u^2t. \end{cases}$$

Disposition des cercles dégénérés :



Surface doublement cerclée.

Cercles $u = c^{te}$:

$$\left\{\begin{array}{l} X_5 - u^2 X_1 = 0, \\ u^2[-X_3 + X_4 + 2X_5 - \lambda^2 X_1] + \lambda u(X_3 + X_4) + X_1 + X_2 = 0. \end{array}\right.$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\left\{\begin{array}{l} t^2 X_1 + t(X_3 - X_4 - 2X_5) - X_1 = 0, \\ t^2 X_3 + t(X_2 - X_1 + \lambda^2 X_5) + X_4 = 0. \end{array}\right.$$

Équation de la surface :

$$X_1^2(X_3 + X_4)^2 - (X_1^2 + X_3^2 + X_5^2 - 2X_3X_5 - \lambda X_1 X_5)(X_1^2 + X_4^2 + X_5^2 + 2X_4X_5 - \lambda X\, X_5) = 0.$$

3e Cas. — *Les cercles dégénérés sont deux droites isotropes non sécantes.*

$$\begin{array}{ll} t\infty & X_1 = X_3 = X_5 = 0, \\ t = 0 & X_2 = X_4 = X_5 = 0. \end{array}$$

La sphère $X_5 = 0$ coupe la surface suivant les cercles :

$$B_5 u^2 + C_5'' u + D_5' = 0.$$

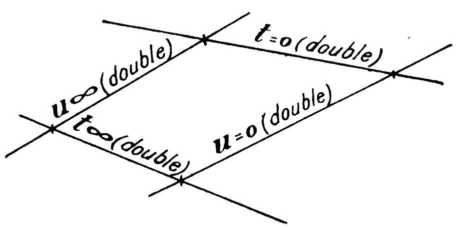
1° *L'équation* $B_5 u^2 + C_5'' u + D_5' = 0$ *a deux racines distinctes* ($u\infty$, $u = 0$).

a) *Ni les* E_i, *ni les* C_i' *ne sont tous nuls.*

α) $t\infty$, $t = 0$ *sont racines doubles de* E_t. — On constate que $u\infty$, $u = 0$ sont nécessairement racines doubles de E_u. On obtient, soit une cyclide C_6, soit l'un des trois types suivants :

$$\begin{array}{c} \text{Type 19} \\ l.m.n.(1 - m^2) \neq 0 \end{array} \left\{\begin{array}{l} X_1 = u^2 t + u^2 + (1 - m^2)ut + u, \\ X_2 = (1 - l^2)ut^2 + (1 - m^2)t^2 + (1 - l^2)(1 - n^2)ut + (1 - n^2)t, \\ X_3 = -(1 - l^2)ut - (1 - l^2)u - (1 - m^2)t - 1, \\ X_4 = u^2 t^2 + (1 - n^2)u^2 t + (1 - m^2)ut^2 + (1 - n^2)ut, \\ X_5 = lmn \,.\, ut. \end{array}\right.$$

Disposition des cercles dégénérés :



Surface doublement cerclée.

Cercles $u = c^{te}$:

$$\left\{\begin{aligned} &u^2X_3 + u\left[(1-l^2)X_1 + X_3 - \frac{lm}{n}X_5\right] + X_1 = 0,\\ -&u^2X_2 + u\left[(1-l^2)X_4 - (1-m^2)X_2 + \frac{lm}{n}(1-n^2)X_5\right] + (1-m^2)X_4 = 0. \end{aligned}\right.$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\left\{\begin{aligned} &(1-m^2)t^2X_3 + t\left[(1-m^2)X_2 + (1-n^2)X_3 - \frac{mn}{l}(1-l^2)X_5\right] + X_2 = 0,\\ -&t^2X_1 + t\left[X_4 - (1-n^2)X_1 + \frac{mn}{l}X_5\right] + X_4 = 0. \end{aligned}\right.$$

Équation de la surface :

$$\left[m^2X_2X_3 - \frac{lm}{n}X_2X_5 + \frac{lm}{n}(1-n^2)X_3X_5 - (1-l^2)X_5^2\right]\left[m^2(1-l^2)X_1X_4 + \frac{lm}{n}(1-n^2)X_1X_5 + \frac{lm}{n}(1-m^2)X_4X_5 + (1-m^2)X_4^2\right]$$
$$+ (m^2X_3X_4 + X_5^2)^2 = 0.$$

Si $n = \varepsilon l (\varepsilon = \pm 1)$, la surface contient deux cercles isolés autres que les cercles coordonnés :

$$ut + (1-l^2)u + (1-m^2)t + 1 = 0, \quad \text{et} \quad (1-l^2)(ut+u+1) + (1-m^2)t = 0.$$

Type 20 ($ln \neq 0$)

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= u^2t + ut + u,\\ X_2 &= (1-l^2)ut^2 + t^2 + (1-n^2)t,\\ X_3 &= -(1-l^2)ut - t - 1,\\ X_4 &= u^2t^2 + ut^2 + (1-n^2)t,\\ X_5 &= lnut. \end{aligned}\right.$$

Disposition des cercles dégénérés (voir type 19).

Surface triplement cerclée. Cercles $v = c^{te}$ définis par :

$$ut + vt + 1 = 0.$$

Cercles $u = c^{te}$:

$$\left\{\begin{aligned} &u(nX_3 - lX_5) + nX_1 = 0,\\ &u^2nX_2 + u[nX_2 - n(1-l^2)X_4 - l(1-n^2)X_5] - nX_4 = 0. \end{aligned}\right.$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\left\{\begin{aligned} &ltX_1 - (lX_4 + nX_5) = 0,\\ &lt^2X_3 + t[lX_2 + l(1-n^2)X_3 - n(1-l^2)X_5] + lX_2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Cercles $v = c^{te}$:

$$\left\{\begin{array}{l} lnX_1 + (v-1)X_5 = 0, \\ v(v-1)X_2 - [(1-n^2)v-1]X_3 + [(1-l^2)v-1]X_4 + \dfrac{[l^2(1-n^2)+n^2(1-l^2)]v-(l^2+n^2)}{ln}.X_5 = 0. \end{array}\right.$$

Racines de E_v, $v\infty$ (double), $v = 1$ (double).

Équation de la surface :

$$X_3(lX_4+nX_5)^2 + X_4(lX_4+nX_5)[lX_2+l(1-n^2)X_3 - n(1-l^2)X_5] + l^2X_1^2X_2 = 0.$$

Type 21 $\quad mn(1-m^2) \neq 0$

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = u^2t + u^2, \\ X_2 = (1-m^2)t^2 + (1-n^2)t, \\ X_3 = -(1-m^2)t - 1, \\ X_4 = u^2t^2 + (1-n^2)u^2t, \\ X_5 = mnut. \end{array}\right.$$

Disposition des cercles dégénérés (voir type 19).

Surface doublement cerclée.

Cercles $u = c^{te}$:

$$\left\{\begin{array}{l} nX_3u^2 - mX_5u + nX_1 = 0, \\ nX_2u^2 - m(1-n^2)X_5u - n(1-m^2)X_4 = 0. \end{array}\right.$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\left\{\begin{array}{l} t^2X_1 + [(1-n^2)X_1 - X_4]t - X_4 = 0, \\ (1-m^2)t^2X_3 + [(1-n^2)X_3 + (1-m^2)X_2]t + X_2 = 0. \end{array}\right.$$

Équation de la surface :

$$(m^2X_3X_4 + X_5^2)^2 + [m^2(1-n^2)X_4X_3 - (1-m^2)X_5^2][m^2X_2X_4 + (1-n^2)X_5^2] = 0.$$

β) $t\infty$ *est racine triple,* $t = 0$ *racine simple de* E_t (ou inversement).

On tombe sur des cas impossibles, ou sur des surfaces déjà étudiées.

b) *Tous les* E_i (*ou tous les* C'_i) *sont nuls.*

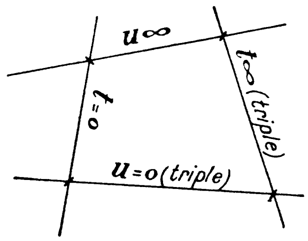
α) $t\infty$, $t = 0$ *sont racines doubles de* E_t. — On obtient une cyclide C_3 ou C_5.

β) $t\infty$ *est racine triple,* $t = 0$ *racine simple de* E_t. — On peut montrer que $u\infty$ est racine simple, $u = 0$ racine triple de E_u. On obtient le type :

Type 22 $\quad (k \neq 0)$

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = u^2 - kut, \\ X_2 = ut^2 - kt^2 + ut + t, \\ X_3 = ut + u - kt, \\ X_4 = -u^2t + kut^2 - ut. \\ X_5 = ut. \end{array}\right.$$

Disposition des cercles dégénérés :



Surface triplement cerclée. Cercles $v = c^{te}$ définis par :

$$u - vt = 0.$$

Cercles $u = c^{te}$:

$$\begin{cases} u(X_3 - X_5) - X_1 = 0, \\ u^2 X_5 + u(X_4 + X_5 - kX_2) - kX_4 = 0 \end{cases}$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\begin{cases} tX_1 + (X_4 + X_5) = 0, \\ kt^2 X_3 + t(X_5 - X_3 - kX_2) + X_5 = 0. \end{cases}$$

Cercles $v = c^{te}$:

$$\begin{cases} vX_5 - (X_1 + kX_3) = 0, \\ v^2(X_2 - X_5) + v[X_4 - X_3 - kX_2 + 2(k+1)X_5] - k^2 X_3 = 0. \end{cases}$$

Racines de E_v : $v\infty$, $v = 0$, $v = k$ (double).
Équation de la surface :

$$X_1^2 X_5 + X_1(X_3 - X_5)(X_4 + X_5 - kX_2) - kX_4(X_3 - X_5)^2 = 0.$$

2° *L'équation* $B_5 u^2 + C_5'' u + D_5' = 0$ *a ses racines égales* $(u\infty)$.

On démontre que $u\infty$ est nécessairement raciné de E_u. Si $u\infty$ est racine non quadruple de E_u, et si tous les C_i' sont nuls ainsi que tous les E_i, on tombe sur un cas impossible. De même si ni les C_i', ni les E_i ne sont tous nuls. Enfin si par exemple les C_i' sont nuls, les E_i non tous nuls, on obtient une cyclide C_7 ou C_9.

Supposons maintenant $u\infty$ racine quadruple de E_u.

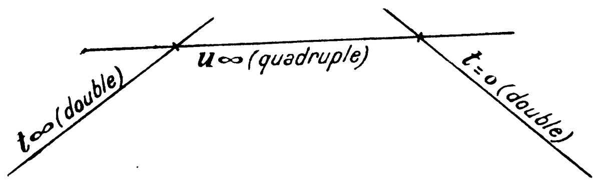
Si E_t a une racine triple et une racine simple, on a une cyclide C_{13}.

Si E_t a deux racines doubles, on obtient les types suivants :

a) *Les* C_i *sont nuls, les* A_i *non tous nuls.*

$$\text{Type 23}\quad k \neq 0 \quad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= -ut - 1, \\ X_2 &= u^2t^2 + t^2 + (1-k^2)ut, \\ X_3 &= u^2t + u + t, \\ X_4 &= ut^2 + (1-k^2)t, \\ X_5 &= kt. \end{aligned} \right.$$

Disposition des cercles dégénérés :



Surface triplement cerclée. Cercles $v = c^{te}$ définie par :

$$ut + vt + 1 = 0.$$

Cercles $u = c^{te}$:

$$\left\{ \begin{aligned} & kX_4u^2 - kX_2u + kX_4 - (1-k^2)X_5 = 0, \\ & kX_1u + kX_3 - X_5 = 0. \end{aligned} \right.$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\left\{ \begin{aligned} & t^2X_3 + (k^2X_1 - X_2)t + kX_5 = 0, \\ & tX_1 + kX_5 + X_4 = 0. \end{aligned} \right.$$

Cercles $v = c^{te}$:

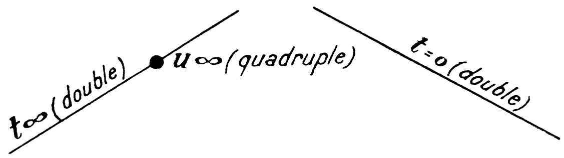
$$\left\{ \begin{aligned} & vX_5 - kX_1 = 0, \\ & v^2[(1-k^2)X_5 - kX_4] - kvX_2 + k[k^2X_3 - X_4 - 2kX_5] = 0. \end{aligned} \right.$$

Racines de E_v : $v\infty$ (double), $v = 0$ (double).
Équation de la surface :

$$X_3(X_4 + kX_5)^2 + X_1(X_4 + kX_5)(X_2 - k^2X_1) + kX_5X_1^2 = 0.$$

$$\text{Type 24}\quad\left\{\begin{array}{l} X_1 = -1, \\ X_2 = u^2t^2 + t^2 + ut, \\ X_3 = u, \\ X_4 = ut^2 + t, \\ X_5 = t. \end{array}\right.$$

Disposition des cercles dégénérés :



Surface doublement cerclée.

Cercles $u = c^{te}$:

$$\left\{\begin{array}{l} u^2X_4 - uX_2 + X_4 - X_5 = 0, \\ uX_1 + X_3 = 0. \end{array}\right.$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\left\{\begin{array}{l} t^2X_3 - tX_1 - X_4 = 0, \\ tX_1 + X_5 = 0. \end{array}\right.$$

Équation de la surface :

$$X_3X_5^2 + X_1^2(X_5 - X_4) = 0.$$

$$\text{Type 25}\quad\left\{\begin{array}{l} X_1 = -1, \\ X_2 = u^2t^2 + t^2, \\ X_3 = u, \\ X_4 = ut^2, \\ X_5 = t. \end{array}\right.$$

Disposition des cercles dégénérés (voir type 24).

Surface doublement cerclée.

Cercles $u = c^{te}$:

$$\left\{\begin{array}{l} u^2X_4 - uX_2 + X_4 = 0, \\ uX_1 + X_3 = 0. \end{array}\right.$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\begin{cases} t^2 X_3 - X_4 = 0, \\ t X_1 + X_5 = 0. \end{cases}$$

Équation de la surface :

$$X_1^2 X_4 - X_3 X_5^2 = 0.$$

b) *Ni les* A_i, *ni les* C_i *ne sont tous nuls.* — On a les types :

$$\begin{array}{c} \text{Type 26} \\ k.l \neq 0 \end{array} \left\{ \begin{aligned} X_1 &= ut + u + t, \\ X_2 &= -lu^2t^2 - l(1-k^2)u^2t - lut^2 + t^2 + (1-k^2)t, \\ X_3 &= lu^2t + lu^2 + lut - t - 1, \\ X_4 &= ut^2 + t^2 + (1-k^2)ut, \\ X_5 &= kt. \end{aligned} \right.$$

Disposition des cercles dégénérés (voir type 23).
Surface doublement cerclée.
Cercles $u = c^{te}$:

$$\begin{cases} klX_4 u^2 + k(X_2 + lX_4)u + k(X_2 - X_4) - (1-k^2)X_5 = 0, \\ klX_1 u^2 - kX_3 u + X_5 - kX_1 = 0. \end{cases}$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\begin{cases} t^2 X_1 - t[X_4 - kX_5 - (1-k^2)X_1] - X_4 = 0, \\ t^2(X_3 + lX_1) + t[X_2 - lX_4 + (1-k^2)X_3] + X_2 = 0. \end{cases}$$

Équation de la surface :

$$(lX_1X_4 - X_5^2)^2 + [kX_2X_5 - lX_4^2 - (1-k^2)X_5^2][kX_3X_5 + klX_1X_5 + (1-k^2)lX_1^2 + X_5^2] = 0.$$

$$\begin{array}{c} \text{Type 27} \\ l \neq 0 \end{array} \left\{ \begin{aligned} X_1 &= u. \\ X_2 &= -lu^2t^2 - lut^2 + t^2, \\ X_3 &= lu^2 - 1, \\ X_4 &= ut^2 + t^2, \\ X_5 &= t. \end{aligned} \right.$$

Disposition des cercles dégénérés (voir type 23).
Surface doublement cerclée.

Cercles $u = c^{te}$:

$$\left\{\begin{array}{l} lu^2X_1 + u(X_2 + lX_4) + X_2 - X_4 = 0, \\ lu^2X_1 - uX_3 - X_4 = 0. \end{array}\right.$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\left\{\begin{array}{l} t^2(lX_1 + X_3) + X_2 = 0, \\ t^2X_1 + tX_5 - X_4 = 0. \end{array}\right.$$

Équation de la surface :

$$(lX_1X_4 - X_5^2)^2 + X_2(X_3 + lX_1)X_5^2 = 0.$$

3. Cas où chacune des équations E_u, E_t **a une racine quadruple.** — Si $u\infty$, $t\infty$ sont ces racines, il peut leur correspondre, soit deux points, soit une droite isotrope et un point, soit deux droites isotropes.

1° Le problème est impossible si les cercles $u\infty$, $t\infty$ sont deux points non orthogonaux; ou un point et une droite isotrope non issue de ce point; ou deux droites isotropes non sécantes.

2° La surface est une cyclide inverse de quadrique si les cercles $u\infty$, $t\infty$ sont deux points confondus; c'est une cyclide C_{14} s'ils se réduisent à un point et à une droite isotrope issue de ce point.

3° La surface est une sphère si les cercles $u\infty$, $t\infty$ sont deux points distincts orthogonaux, ou deux droites isotropes confondues.

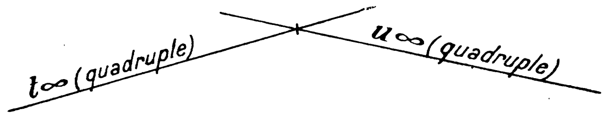
Il reste à étudier le cas où les cercles dégénérés sont deux droites isotropes sécantes :

$$\begin{array}{ll} t\infty & X_1 = X_3 = X_5 = 0, \\ u\infty & X_1 = X_4 = X_5 = 0. \end{array}$$

On est alors conduit, soit à une cyclide C_{11}, soit à l'un des deux types suivants :

$$\begin{array}{c} \text{Type 28} \\ \mu \neq 0 \end{array} \left\{\begin{array}{l} X_1 = ut + \mu^2, \\ X_2 = -u^2t^2 + u^2 + t^2 - \mu^2ut - 1, \\ X_3 = u^2t + \mu^2u - t, \\ X_4 = ut^2 - u + \mu^2t, \\ X_5 = \mu. \end{array}\right.$$

Disposition des cercles dégénérés :



Cercles $u = c^{te}$:

$$\begin{cases} u^2X_1 - uX_3 + \mu X_5 - X_1 = 0, \\ u^2X_4 + u(X_2 + \mu^2X_1) - (X_4 + \mu^2X_3) = 0. \end{cases}$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\begin{cases} t^2X_1 - tX_4 + \mu X_5 - X_1 = 0, \\ t^2X_3 + t(X_2 + \mu^2X_1) - (X_3 + \mu^2X_4) = 0. \end{cases}$$

Surface doublement cerclée.
Équation de la surface :

$$(\mu^2X_1X_3 + \mu X_4X_5)^2 - (\mu^2X_1^2 - X_5^2)(\mu^2X_1^2 - X_5^2 + \mu^2X_3^2 - \mu X_2X_5 - \mu^3X_1X_5) = 0.$$

On a deux cercles isolés autres que les cercles coordonnés :

$$ut + \mu^2 \pm 1 = 0.$$

$$\text{Type 29} \begin{cases} X_1 = -1, \\ X_2 = u^2t^2 + 2ut + 1, \\ X_3 = u^2 - 1, \\ X_4 = t^2 - 1, \\ X_5 = u + t. \end{cases}$$

Disposition des cercles dégénérés (voir type 28).
Surface doublement cerclée.
Cercles $u = c^{te}$:

$$\begin{cases} u^2X_1 + X_3 - X_1 = 0, \\ u^2X_4 + 2uX_5 - (X_2 + X_3) = 0. \end{cases}$$

Cercles $t = c^{te}$:

$$\begin{cases} t^2 X_1 + X_4 - X_1 = 0, \\ t^2 X_3 + 2t X_5 - (X_2 + X_4) = 0. \end{cases}$$

Équation de la surface :

$$X_5^4 + 2X_5^2 X_1(X_3 + X_4 - 2X_1) + X_1^2(X_3 - X_4)^2 = 0.$$

Il y a un cercle isolé, autre que les cercles coordonnés :

$$u + t = 0.$$

4. Surface engendrée par une famille de droites isotropes assujetties à rencontrer les cercles d'une famille à un paramètre. — Nous supposerons encore que par chaque point de la surface, il ne passe en général qu'une ligne de chacune des deux familles.

Supposons que les droites isotropes soient les lignes $t = c^{te}$; les cercles les lignes $u = c^{te}$. Comme deux points d'un cercle véritable ne sont jamais orthogonaux, une droite isotrope et un cercle ne peuvent avoir qu'un point commun. Il en résulte que les lignes d'une quelconque des familles découpent sur deux lignes de l'autre des divisions homographiques.

Par un raisonnement analogue à celui du chapitre V, on voit que l'on peut mettre les coordonnées d'un point quelconque de la surface cherchée (Σ) sous la forme :

$$x_i = b'_i u t^2 + c'_i t^2 + c''_i u t + d_i u + d'_i t + e_i.$$

L'équation E_u, qui est ici du second degré, s'écrit :

$$c''.u^2 + 2c''d'.u + d'^2 = 0.$$

Si à une des racines de E_u correspond un point, les droites isotropes $t = c^{te}$ passent par ce point, et la surface est une sphère de rayon nul. On peut donc supposer que les cercles dégénérés sont deux droites isotropes Δ, Δ', et que ces droites se confondent, sinon les lignes $t = c^{te}$, s'appuyant sur deux droites isotropes, engendreraient une sphère.

La surface Σ, si elle existe, pourra donc être considérée comme engendrée par les droites isotropes D qui rencontrent une droite isotrope donnée Δ et un cercle donné C.

Remarquons d'abord que C et Δ ne peuvent se rencontrer; car s'ils avaient un point commun A, ou bien D passerait par A et la surface serait une sphère de rayon nul, ou bien D ne passerait pas par A et serait alors située sur la sphère (C, Δ).

Pour faciliter l'étude de Σ, nous chercherons une forme canonique des équations de C et Δ, ou ce qui revient au même, des équations de Δ et des foyers F, F′ de C.

Il est impossible que F et F′ soient sur Δ, sinon C serait dégénéré. Il est impossible que F par exemple soit sur Δ, F′ étant hors de Δ : car Δ serait une génératrice de la sphère de rayon nul de centre F, et par suite Δ couperait C.

Les deux foyers sont donc hors de Δ. La sphère de rayon nul de centre F coupe Δ en un point unique A, et AF est la droite isotrope unique qui passe par F et s'appuie sur Δ; il existe de même une droite isotrope unique A′F′ passant par F′ et rencontrant Δ.

Je dis que AF et A′F′ ne peuvent être sécantes; en effet, si elles se coupaient, leur point commun serait sur Δ; ce point étant sur les sphères de rayon nul de centres F, F′, appartiendrait à C; Δ couperait C, contrairement à l'hypothèse.

En résumé, on peut réduire les équations de AF, A′F′, Δ à la forme b) (II, 5) :

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{AF} & X_1 = X_3 = X_5 = 0, \\
\mathrm{A'F'} & X_2 = X_4 = X_5 = 0, \\
\Delta & X_1 = X_4 = X_5 = 0.
\end{array}
$$

Les équations de F et de F′ sont alors :

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{F} & X_1 = X_3 = X_5 = X_2 + \mu X_4 = 0, \\
\mathrm{F'} & X_2 = X_4 = X_5 = X_3 + \mu' X_1 = 0,
\end{array}
$$

avec $\mu\mu' \neq 0$ (sinon F et F′ seraient orthogonaux, et C dégénéré). On peut, par les changements de coordonnées permis, réduire μ et μ' à l'unité; C a alors pour équations :

$$X_1 - X_3 = X_2 - X_4 = 0.$$

Les équations d'une droite isotrope D qui s'appuie sur C et Δ sont :

$$X_5 + \rho X_4 = X_1 + \rho' X_4 = 0,$$

avec

$$\rho^2 - 2\rho' = 0,$$

et le lieu de D a pour équation :

$$X_5^2 + 2X_1X_4 = 0.$$

C'est une cyclide C_{15}. Remarquons que cette surface répond bien aux conditions posées au début : par un point de la surface passent en général un seul cercle et une seule droite isotrope. En effet, on peut faire de la surface la représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = -2t^2, \\ X_2 = 1 + u, \\ X_3 = 2t^2(u - 1), \\ X_4 = 1, \\ X_5 = 2t. \end{array}\right.$$

et on voit que par un point $(X_1, \ldots, X_5)$ passent l'unique droite isotrope $t = \dfrac{X_5}{2X_4}$ et l'unique cercle $u = \dfrac{X_2}{X_4} - 1$.

5. Recherche du nombre de types distincts. — Remarquons d'abord que nous avons retrouvé tous les types de cyclides doublement cerclées (C_1 à C_{16}).

Les surfaces autres que les cyclides se partagent en trois grandes catégories :

1° Surfaces doublement cerclées du troisième degré conforme :

types 1, 4, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 24, 25.

2° Surfaces triplement cerclées du troisième degré conforme :

types 2, 3, 5, 6, 8, 9, 15, 17, 20, 22, 23.

3° Surfaces doublement cerclées du quatrième degré conforme :

types 16, 18, 19, 21, 26, 27, 28, 29.

Il est facile de voir que les surfaces doublement cerclées sont toutes distinctes : cela est évident pour deux surfaces dont les cercles dégénérés n'ont pas la même disposition ; dans le cas contraire, cela résulte des propriétés que nous établirons au chapitre suivant (lieux des foyers des cercles).

Les surfaces triplement cerclées se ramènent les unes aux autres, d'après le tableau suivant :

LE TYPE	SE RAMÈNE AUX TYPES
2	2, 6
3_A	3_A, 9
3_B	3_B, 3_B
5	22, 5
6	8, 8 si $m \neq 1$. 2, 2 si $m = 1$.
8	8, 6
9	9, 9 si $l \neq -2kh(kh - k + 1)$. 3_A, 3_A si $l = -2kh(kh - k + 1)$.
15	15, 15
17	23, 23
20	20, 20
22	5, 5
23	23, 17

Les seuls types de surfaces triplement cerclées à étudier sont donc les suivants :

$$3_B, 6, 9, 15, 17, 20, 22.$$

Indiquons en quelques mots comment a été obtenu le tableau ci-dessus. Soit S une surface triplement cerclée. Soit S_{ut} le système de formules donnant les cinq coordonnées d'un point de S en fonction de u et t. Appelons de même S_{uv} les formules qui donnent les coordonnées d'un point de S en fonction de u et v : on les obtient évidemment en remplaçant, dans S_{ut}, t par sa valeur en fonction de u et v; elles sont de la forme :

$$x_i = \mathcal{A}_i u^2 v^2 + \mathcal{B}_i u^2 v + \ldots + \mathcal{E}_i.$$

Les cercles dégénérés sont fournis par deux équations E_u, E_v (l'équation E_u relative à S_{uv} est d'ailleurs identique à celle qui a été trouvée pour S_{ut}; mais en général les droites isotropes relatives à S_{uv}, correspondant aux racines de E_u, ne sont pas les mêmes que celles trouvées pour S_{ut}); on cherche alors la disposition de ces cercles.

Ensuite, on exprime les x_i en fonction de v et t par des formules S_{vt}, et on refait avec ces formules le même calcul que précédemment.

CHAPITRE VII

Recherche des surfaces plusieurs fois cerclées réelles.

Nous laissons toujours de côté les cyclides.

Remarques préliminaires. — I. Considérons une surface algébrique S, et soit :

$$f(x, y, z) \equiv P(x, y, z) + iQ(x, y, z) = 0,$$

son équation cartésienne, P et Q désignant des polynômes à coefficients réels.

La surface S_0 d'équation :

$$f_0(x, y, z) \equiv P - iQ = 0,$$

est dite, comme l'on sait, l'imaginaire conjuguée de S.

On voit immédiatement que le lieu du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ conjugué d'un point quelconque $M(x, y, z)$ de S, est S_0.

Si S et S_0 se confondent, l'équation de S est réelle, et réciproquement.

Soient maintenant S, Σ deux surfaces algébriques. Si M est un point quelconque de leur intersection, le lieu du point M_0 conjugué de M est l'intersection des surfaces S_0, Σ_0 conjuguées de S, Σ.

II. Remarquons maintenant que si deux sphères (ou plans) S, Σ se coupent suivant un cercle véritable, il en est de même de leurs conjugués S_0, Σ_0; si l'intersection de S et Σ se réduit à deux droites isotropes distinctes (ou confondues), l'intersection de leurs conjuguées S_0, Σ_0 se réduit aussi à deux droites isotropes distinctes (ou confondues).

Ceci résulte de remarques évidentes telles que les suivantes : si une sphère est de rayon nul (ou non nul), sa conjuguée est de rayon nul (non nul); si un plan est isotrope (ou non isotrope), son conjugué est isotrope (ou non isotrope), etc.

III. On a vu que si une surface algébrique S d'équation réelle contient un point M, elle contient aussi son conjugué M_0. Si M décrit sur S un cercle C, M_0 décrit un cercle C_0 situé aussi sur S. Examinons d'abord le cas où C (et par suite C_0) est un cercle véritable.

Il peut arriver : 1° que C_0 soit distinct de C. Les foyers A, A′ de C sont alors les imaginaires conjugués des foyers B, B′ de C_0; 2° que C_0 se confonde avec C. Les foyers A, A′ de C sont alors, soit imaginaires conjugués, soit réels; dans les deux hypothèses, C est l'intersection de sphères d'équations réelles; on montre facilement que dans la première hypothèse, C est réel, et que dans la seconde, il est imaginaire [1].

Supposons maintenant que C se décompose en deux droites isotropes Δ, Δ'; C_0 se décomposera en deux droites isotropes Δ_0, Δ'_0. Si C et C_0 sont distincts, Δ et Δ' sont respectivement les conjuguées de Δ_0, Δ'_0. (Il faut remarquer qu'une droite isotrope ne peut jamais être sa propre conjuguée.) Si C et C_0 se confondent, Δ est la conjuguée de Δ'.

Enfin supposons que C se réduise à une droite isotrope double Δ, C_0 se réduira nécessairement à une droite isotrope double Δ_0, conjuguée de Δ, et par suite *distincte de* Δ.

Si le cercle C engendre une famille F située sur S, C_0 engendrera une famille F_0 située aussi sur S; aux cercles de F réduits à deux droites isotropes distinctes (ou confondues), correspondent dans F_0 autant de cercles réduits à deux droites isotropes distinctes (ou confondues). Il peut d'ailleurs arriver que F et F_0 se confondent.

Ceci posé, examinons successivement les trois catégories de surfaces plusieurs fois cerclées :

1° *Surfaces triplement cerclées.* — Dans chacune des trois familles de cercles d'une telle surface, il y a un cercle et un seul qui se réduit à deux droites isotropes confondues.

Par exemple considérons le type 3_B. On constate, soit au moyen des équations des cercles $u = c^{te}$, $v = c^{te}$, $t = c^{te}$, soit en utilisant les formules qui donnent les x_i en fonction de deux des paramètres t, u, v, que les cercles :

$$t\infty, \qquad u = h, \qquad v = 0, \qquad t = 0, \qquad u = \frac{1}{h}, \qquad v\infty,$$

se réduisent chacun à deux droites isotropes distinctes [2]; au contraire chacun des cercles :

$$u\infty, \qquad t = 1, \qquad v = h,$$

se réduit à une droite isotrope double [3].

---

[1] Ceci est en relation évidente avec la théorie des faisceaux linéaires de sphères (d'équation réelle); si les sphères du faisceau ont en commun un cercle réel, les sphères-points sont imaginaires, et inversement.

[2] On obtient ainsi six droites isotropes formant une chaîne fermée; chacune des six droites appartient à deux cercles successifs (les cercles étant écrits dans l'ordre ci-dessus).

[3] On obtient ainsi trois droites isotropes passant par un même point; et ceci a lieu, comme on le vérifie facilement, pour toutes les surfaces triplement cerclées.

Pour que la surface fût réelle, il faudrait que ces derniers cercles fussent deux à deux imaginaires conjugués, ce qui est impossible puisqu'ils sont en nombre impair, et qu'aucun d'eux ne peut être son propre conjugué. La surface est donc imaginaire.

On peut répéter le même raisonnement pour toutes les surfaces triplement cerclées, et on voit qu'une telle surface est toujours imaginaire.

2° *Surfaces doublement cerclées du troisième degré.* — Ces surfaces sont caractérisées par la propriété suivante : les cercles d'une des familles ont un point commun [1]. Comme les cercles de l'autre famille n'ont pas de point commun, on peut déjà affirmer que les cercles $u = c^{te}$ ne sont jamais les imaginaires conjugués des cercles $t = c^{te}$. Pour étudier facilement la réalité de la surface, nous chercherons les lieux des foyers des cercles de chaque famille.

Par un calcul facile, qu'il est inutile de reproduire ici, on est conduit aux résultats suivants :

TYPES	LIEUX DES FOYERS DES CERCLES $t = c^{te}$.	LIEUX DES FOYERS DES CERCLES $u = c^{te}$.
1, 4, 7, 10	Quartiques.	Cubique et droite isotrope.
11	Cercle et droite isotrope.	Cercles.
12	Cubique et droite isotrope.	Quartiques.
13	Cercle et droite isotrope.	Cercles si $\lambda + 1 \neq 0$ (13_A). Cercle et droite isotrope si $\lambda + 1 = 0$ (13_B).
14	Droites isotropes.	Cercles si $\lambda + 1 \neq 0$ (14_A). Cercle et droite isotrope si $\lambda + 1 = 0$ (14_B).
24	Cercles.	Cercle et droite isotrope.
25	Cercles.	Droites isotropes.

Si la surface est réelle, il faut que dans chaque famille, les cercles soient ou réels, ou imaginaires à équations réelles, ou imaginaires conjugués deux à deux.

Examinons d'abord les types 1, 4, 7, 10, 14_B, 24. Les cercles $u = c^{te}$ ont pour

[1] On peut donc les considérer comme des surfaces réglées-cerclées.

lieu de leur premier foyer A une droite isotrope Δ, pour lieu de leur second foyer A′ une courbe C. Donc :

1° Ces cercles ne peuvent être réels, car A et A′ seraient imaginaires conjugués, et A′ décrirait, au lieu de C, la droite Δ' conjuguée de Δ.

2° Ils ne sont pas imaginaires à équations réelles, sinon A et A′ seraient réels ; A ne pourrait décrire une droite isotrope.

3° Ils ne sont pas deux à deux imaginaires conjugués, car en désignant par B, B′ les foyers de l'imaginaire conjugué du cercle (A, A′) [B étant sur Δ et B′ sur C], A ne peut être conjugué ni de B (sinon Δ serait réelle), ni de B′ (sinon B′ ne décrirait pas C, mais la droite Δ' conjuguée de Δ).

En résumé, les types ci-dessus sont imaginaires.

On voit par le même raisonnement, appliqué aux cercles $t = c^{te}$, que les types 11, 12, 13_A, 13_B sont imaginaires.

Il reste à étudier les types 14_A et 25.

Dans le type 14_A, les lieux des foyers des cercles $u = c^{te}$ sont les deux cercles :

$$\Gamma \begin{cases} X_2 - (\mu+1)^2 . X_3 = 0, \\ X_4 = 0. \end{cases} \qquad \Gamma' \begin{cases} X_2 - (\mu-1)^2 X_3 = 0, \\ X_4 = 0 \end{cases}$$

(on a posé $\lambda = -\mu^2$).

Γ et Γ' ont un foyer commun F (le centre de $X_4 = 0$), les deux autres foyers Φ, Φ' étant sur la droite isotrope :

$$X_2 = X_3 = X_5 = 0.$$

Remarquons alors que :

1° Si les cercles $u = c^{te}$ sont réels, Γ et Γ' sont imaginaires conjugués.

2° Si les cercles $u = c^{te}$ sont imaginaires à équations réelles, Γ et Γ' sont réels.

3° Si les cercles $u = c^{te}$ sont deux à deux imaginaires conjugués, soient (A, A′) et (B, B′) les foyers de deux cercles $u = c^{te}$ imaginaires conjugués, A et B étant sur Γ, A′ et B′ sur Γ'.

Il ne peut se produire que deux cas : ou bien A est conjugué de B′ et A′ de B, auquel cas Γ et Γ' sont imaginaires conjugués; ou bien A est conjugué de B et A′ de B′, auquel cas Γ et Γ' sont, soit réels, soit imaginaires à équations réelles.

En résumé le type 14_A ne peut être réel que si Γ et Γ' sont, soit réels, soit imaginaires à équations réelles, soit imaginaires conjugués. La première alternative est impossible, car F devrait être imaginaire conjugué à la fois de Φ et Φ'; la seconde également, car elle entraînerait la réalité de F, Φ, Φ' et par suite de la droite $\Phi\Phi'$; la troisième ne peut se produire que si F est réel, Φ et Φ' étant de plus imaginaires conjugués, ce qui est manifestement impossible. Le type 14_A est donc imaginaire.

On peut faire pour le type 25 le même raisonnement, en considérant les lieux des foyers des cercles $t = c^{te}$; ce sont les deux cercles :

$$\Gamma \left\{ \begin{array}{l} X_1 = 0, \\ X_2 - 2X_4 = 0, \end{array} \right. \qquad \Gamma' \left\{ \begin{array}{l} X_1 = 0, \\ X_2 + 2X_4 = 0, \end{array} \right.$$

qui ont encore un foyer commun (le centre de $X_1 = 0$), et les deux autres foyers situés sur une même droite isotrope :

$$X_2 = X_4 = X_5 = 0.$$

On voit en définitive que toutes les surfaces doublement cerclées du troisième degré sont imaginaires.

3° *Surfaces doublement cerclées du quatrième degré.* — Cherchons encore les lieux des foyers des cercles de chaque famille. Nous obtenons le tableau :

TYPES	LIEUX DES FOYERS DES CERCLES $u = c^{te}$.	LIEUX DES FOYERS DES CERCLES $t = c^{te}$.
16, 28	Deux cercles.	Deux cercles.
18	Droite isotrope et cercle.	Deux cercles.
19	Deux cercles si $n^2 - 1 \neq 0$. Droite isotrope et cercle si $n^2 - 1 = 0$.	Deux cercles si $l^2 - 1 \neq 0$. Droite isotrope et cercle si $l^2 - 1 = 0$.
21	Deux droites isotropes.	Deux cercles si $n^2 - 1 \neq 0$ (21_A). Droite isotrope et cercle si $n^2 - 1 = 0$ (21_B).
26	Deux cercles.	Deux cercles si $k^2 - 1 \neq 0$ (26_A). Droite isotrope et cercle si $k^2 - 1 = 0$ (26_B).
27	Deux cercles.	Deux droites isotropes.
29	Droite isotrope et cercle.	Droite isotrope et cercle.

On voit que le type 19 se subdivise en quatre types :

$$\begin{cases} 19_A & \text{si} \quad (l^2-1)(n^2-1) \neq 0, \\ 19_B & \text{si} \quad l^2-1 \neq 0, \quad n^2-1=0, \\ 19_C & \text{si} \quad l^2-1=0, \quad n^2-1 \neq 0. \\ 19_D & \text{si} \quad l^2-1=n^2-1=0. \end{cases}$$

Examinons d'abord les types 18, 19_B, 19_C, 21_B, 26_B. Pour une des familles de cercles, les lieux des foyers sont une droite isotrope et un cercle ; les cercles de cette famille ne peuvent donc être ni réels, ni imaginaires à équations réelles, ni imaginaires conjugués deux à deux. Pour que la surface soit réelle, il faut donc que les cercles de la seconde famille soient les imaginaires conjugués de ceux de la première, ce qui est impossible, puisque les lieux des foyers des cercles de la seconde famille sont, soit deux cercles, soit deux droites isotropes. Les types considérés sont donc imaginaires.

Examinons maintenant le type 26_A. Les cercles $u = c^{te}$ ne sont pas les imaginaires conjugués des cercles $t = c^{te}$; en effet un seul cercle $u = c^{te}$ se réduit à une droite isotrope double $(u\infty)$, tandis qu'il existe deux cercles $t = c^{te}$ $(t\infty,\ t=0)$ qui se réduisent à une droite isotrope double. Pour que la surface soit réelle, il faut donc que dans chaque famille, les cercles qui se réduisent à une droite isotrope double soient deux à deux imaginaires conjugués ; or ceci est évidemment impossible pour la famille $u = c^{te}$. Le type 26_A est donc imaginaire.

Considérons enfin le type 27. Les cercles $t = c^{te}$ ne peuvent être imaginaires conjugués des cercles $u = c^{te}$, puisque les lieux des foyers sont, pour $t = c^{te}$ deux cercles et pour $u = c^{te}$ deux droites isotropes. La surface ne peut donc être réelle que si les cercles de chaque famille qui se réduisent à une droite isotrope double sont deux à deux imaginairés conjugués : or ceci est impossible pour la famille $u = c^{te}$, qui ne contient qu'un cercle de cette espèce. Le type 27 est donc imaginaire.

Il reste alors à étudier les types suivants :

$$16,\ 19_A,\ 19_D,\ 21_A,\ 28,\ 29.$$

Nous verrons au chapitre suivant que tous ces types donnent lieu à des surfaces réelles, lorsqu'on choisit convenablement les axes de coordonnées cartésiennes.

CHAPITRE VIII

Étude des surfaces plusieurs fois cerclées réelles.

Nous laisserons de côté les cyclides, et nous n'étudierons qu'un représentant euclidien de chaque type. Nous distinguerons deux cas, suivant que la surface n'admet aucune génération par des cercles réels, ou est susceptible d'une telle génération.

1. Surfaces à cercles imaginaires. — 1° Type 19_D. — Faisons, dans les formules du type 19 (chapitre VI) :

$$1 - l^2 = 1 - n^2 = 0,$$

puis remplaçons $X_1, \ldots, X_5$ par des valeurs proportionnelles à :

$$x + iy, \qquad \frac{x - iy}{\lambda^2}, \qquad \frac{-(x^2 + y^2 + z^2)}{\lambda^2}, \qquad 1, \qquad \frac{z}{\lambda}.$$

En supposant m réel, on constate qu'on n'obtient pour la surface une équation réelle que si $\lambda = \sqrt{1 - m^2}$, et si de plus λ est réel, c'est-à-dire $|m| < 1$. Posons $\frac{m}{\lambda} = k$. On obtient l'équation :

$$(1) \qquad [z^2 - k^2(x^2 + y^2)]^2 - z[z + k(x + iy)][z + k(x - iy)] = 0.$$

Pour avoir les points réels de la surface, il faut poser :

$$t = \frac{1}{\alpha}, \qquad u = \frac{\lambda^2}{\beta},$$

α et β étant imaginaires conjugués :

$$\alpha = a + ib, \qquad \beta = a - ib.$$

On obtient alors :

$$
(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= a^2 - b^2 + a, \\ y &= b(2a + 1), \\ z &= k(a^2 + b^2). \end{aligned} \right.
$$

Les cercles de la surface sont donnés par $\alpha = c^{te}$ et $\beta = c^{te}$. Ce sont des cercles-paraboles, situés dans les plans isotropes $x \pm iy = c^{te}$.

Les lignes $a = c^{te}$, $b = c^{te}$ sont des paraboles réelles.

La surface est du quatrième degré et admet trois droites singulières formant un trièdre :

$$
\left\{ \begin{aligned} & x + iy = z = 0, \\ & x - iy = z = 0, \\ & y = z + kx = 0. \end{aligned} \right.
$$

C'est donc une surface de Steiner, et tout plan tangent la coupe suivant deux coniques.

La surface admet xOz pour plan de symétrie.

Paraboles $a = c^{te}$. — Une telle parabole (P) est située dans le plan :

$$
(3) \qquad z + kx = k(2a^2 + a),
$$

perpendiculaire à xOz; (P) a donc son axe dans xOz, et son sommet S a pour coordonnées :

$$
(4) \qquad a^2 + a, \qquad 0, \qquad k a^2;
$$

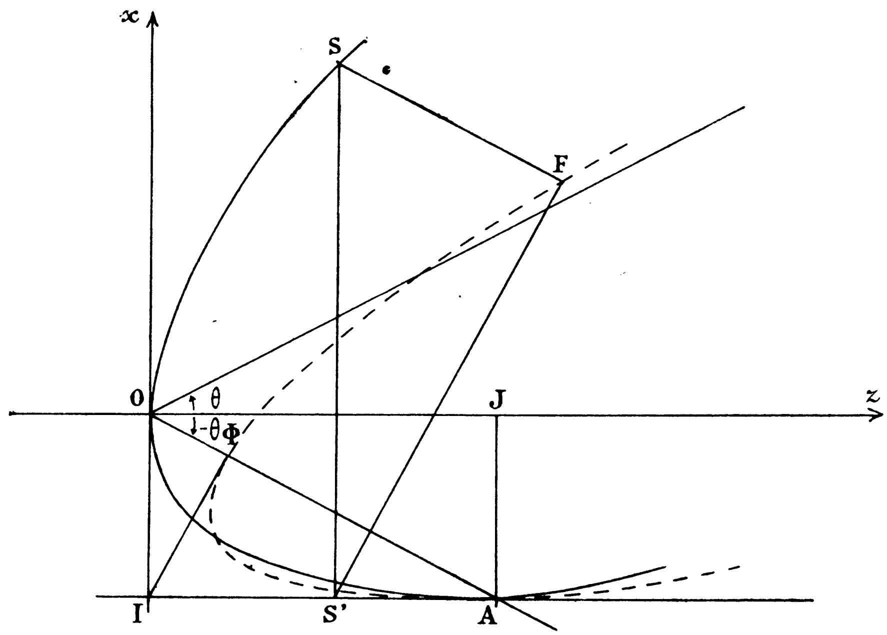
le lieu de S lorsque a varie est donc la parabole :

$$
(5) \qquad y = 0, \qquad \left(x - \frac{z}{k}\right)^2 = \frac{z}{k},
$$

qu'il est facile de construire : posons $\frac{1}{k} = \operatorname{tg} \theta$, la direction asymptotique fait avec Oz l'angle θ, la droite singulière réelle de la surface fait avec Oz l'angle $-\theta$ et coupe la parabole (5) au point $A\left(-\frac{1}{4}, 0, \frac{k}{4}\right)$; en ce point la tangente est parallèle à Oz; enfin la parabole (5) est tangente en O à Ox; remarquons qu'elle est bien déterminée par les points O, A et les tangentes correspondantes.

Il est facile de voir que le foyer F de la parabole (P) a pour coordonnées :

$$a^2 + a - \frac{(2a+1)^2}{4(1+k^2)}, \qquad 0, \qquad k\left[a^2 + \frac{(2a+1)^2}{4(1+k^2)}\right]. \tag{6}$$



Ce point peut être obtenu par la construction suivante (on le vérifie immédiatement par le calcul) : soit S un point quelconque de la parabole (5); on le projette en S′ sur IA [I désignant le point de rencontre des tangentes en O et A à la parabole (5)]; puis on projette S′ en F sur la parallèle à OA menée par S.

En résumé, on obtient pour la surface la génération suivante : soit OIAJ un rectangle ayant pour côtés $OI = \frac{1}{4}$, $OJ = \frac{k}{4}$; il existe une parabole unique tangente en O à OI et en A à AI; à tout point S de cette parabole, associons le point F qu'on en déduit par la construction ci-dessus; la parabole (P) qui a pour sommet S, pour foyer F, et dont le plan est perpendiculaire au plan OIAJ, décrit la surface.

Remarquons que le lieu de F est une parabole tangente en A à IA, et passant par le foyer Φ de la parabole (5) (projection de I sur OA), où elle admet pour tangente IΦ [1].

---

[1] Ces résultats peuvent être démontrés géométriquement : on peut en effet considérer la figure ci-dessus comme une épure de géométrie descriptive, la ligne de terre étant IA et la parabole lieu de S étant située dans le plan frontal de projection; le lieu de F s'obtient

2° TYPE 28. — Dans les formules du chapitre VI relatives à ce type, remplaçons $X_1, \ldots, X_5$ par des valeurs proportionnelles à :

$$-1, \qquad x^2+y^2+z^2, \qquad x+iy, \qquad x-iy, \qquad z.$$

L'équation de la surface devient :

$$\mu z x^2(z-\mu)^2+\mu z y^2(z+\mu)^2+(z^2-\mu^2)^2.(\mu z+1)=0. \tag{7}$$

Elle est du cinquième degré, et n'est réelle que si μ est réel.

Les lignes singulières à distance finie sont les droites :

$$D\begin{cases} z-\mu=0,\\ y=0,\end{cases} \qquad D'\begin{cases} z+\mu=0,\\ x=0,\end{cases}$$

nous les avons rencontrées plus haut, car elles sont définies par :

$$ut+\mu^2\pm 1=0.$$

En outre, la droite de l'infini du plan des xy est une ligne triple, car les sections de la surface par les plans $z=c^{te}$ sont des coniques. Les points réels de la surface s'obtiennent en posant :

$$t=\mu(\alpha+i\beta), \qquad u=\mu(\alpha-i\beta),$$

α et β étant réels. Ils ont pour coordonnées :

$$x=\frac{\alpha}{\mu(\alpha^2+\beta^2+1)}-\mu\alpha, \qquad y=\frac{\beta}{\mu(\alpha^2+\beta^2+1)}+\mu\beta, \qquad z=\frac{-1}{\mu(\alpha^2+\beta^2+1)}. \tag{8}$$

Les cercles de la surface sont imaginaires car, dans chaque famille, il n'y a qu'un cercle se réduisant à une droite isotrope double. Les lignes $\alpha=c^{te}$, $\beta=c^{te}$ sont des cubiques. La génération réelle la plus simple de la surface semble être fournie par les coniques $z=c^{te}$.

Les équations d'une telle conique sont :

$$\begin{cases} z=k,\\ \dfrac{x^2}{-(k+\mu)^2.\dfrac{k\mu+1}{k\mu}}+\dfrac{y^2}{-(k-\mu)^2\,\dfrac{k\mu+1}{k\mu}}=1.\end{cases} \tag{9}$$

---

alors en cherchant l'ombre sur le second bissecteur du lieu de S, les rayons lumineux ayant leur projection horizontale parallèle à IΦ et leur projection frontale parallèle à OA; on obtient bien ainsi une parabole.

C'est une ellipse, qui n'est réelle que si $\frac{k\mu+1}{k\mu}<0$.

Supposons pour fixer les idées $\mu>0$; les conditions de réalité de l'ellipse s'écrivent :

$$-\frac{1}{\mu}<k<0.$$

Cette ellipse a son centre sur Oz, ses axes parallèles respectivement à Ox, Oy, le grand axe étant parallèle à Oy, comme on le vérifie facilement. Soient a le demi-grand axe, b le demi-petit axe. On a :

$$\frac{a}{b}=\left|\frac{k-\mu}{k+\mu}\right|.$$

La distance focale est :

$$c=2\sqrt{k\mu+1};$$

les foyers décrivent donc la parabole :

$$(10) \qquad y^2=4(\mu z+1), \qquad x=0,$$

qui a pour axe Oz, pour sommet le point de Oz de cote $-\frac{1}{\mu}$, pour foyer le point de cote $\mu-\frac{1}{\mu}$. Cette parabole étant construite, on est ramené à construire l'ellipse (9) dont on connaît les foyers et le rapport des axes.

Remarquons que a^2 et b^2 deviennent infinis si k tend vers zéro. Le plan $z=0$ n'a aucun point commun à distance finie avec la surface : c'est un plan asymptote.

Faisons par exemple la figure pour $\mu=\frac{1}{2}$.

Soit ω le point de Oz tel que $\overline{O\omega}=k$. Pour avoir les points réels de la surface, il faut supposer :

$$-2<k<0.$$

L'ellipse de cote k a ses foyers φ, φ' situés sur la parabole (10).

Soient A et B les points de Oz de cotes $\pm\mu$; le rapport $\frac{a}{b}=\left|\frac{k-\mu}{k+\mu}\right|$ n'est autre que $\frac{\omega A}{\omega B}$. Le cercle de centre B et de rayon ωA coupe $\varphi\varphi'$ en un point α; dans le triangle $B\omega\alpha$, on a :

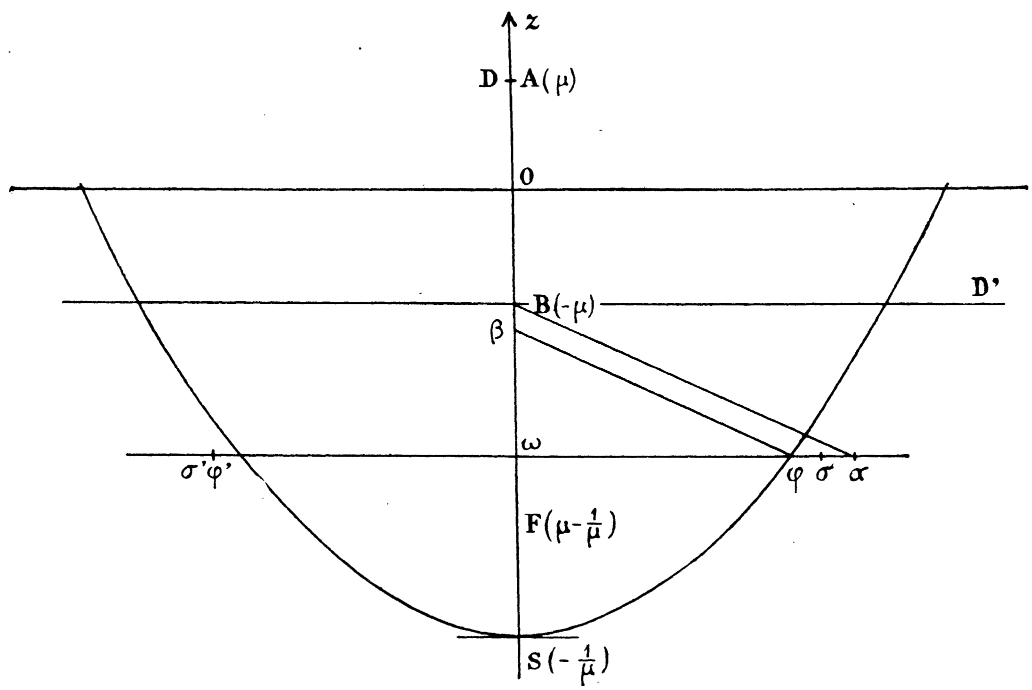
$$\frac{B\alpha}{B\omega}=\frac{\omega A}{\omega B}=\frac{a}{b}.$$

Si on trace par φ la parallèle à $B\alpha$, qui coupe Oz en β, on a :

$$\frac{\beta\varphi}{\beta\omega} = \frac{a}{b} \qquad \text{et} \qquad \overline{\omega\varphi}^2 = c^2 = a^2 - b^2,$$

donc

$$\beta\varphi = a, \qquad \beta\omega = b.$$



On peut alors obtenir les sommets du grand axe de l'ellipse : σ, σ' en prenant :

$$\omega\sigma = \omega\sigma' = \beta\varphi.$$

Remarquons que la droite double D, passant par A et perpendiculaire au plan de la figure, est toujours isolée ; au contraire la droite double D', passant par B et située dans le plan de la figure, n'est isolée que si $\mu > 1$.

3° TYPE 29. — Faisons dans les formules du chapitre VI relatives à ce type le changement de coordonnées :

$$\begin{cases} X'_1 = X_1, \qquad X'_2 = X_2 + X_3 + X_4 - X_1, \qquad X'_3 = X_3 - X_1, \\ X'_4 = X_4 - X_1, \qquad X'_5 = X_5. \end{cases}$$

puis passons en coordonnées cartésiennes par les formules :

$$X'_1 = -1, \qquad X'_2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad X'_3 = x + iy, \qquad X'_4 = x - iy, \qquad X'_5 = z.$$

L'équation de la surface devient :

$$z^4 - 4xz^2 - 4y^2 = 0. \tag{11}$$

Les points réels s'obtiennent en supposant u et t imaginaires conjugués :

$$u = \alpha + i\beta, \qquad t = \alpha - i\beta.$$

On a alors :

$$x = \alpha^2 - \beta^2, \qquad y = 2\alpha\beta, \qquad z = 2\alpha. \tag{12}$$

Les cercles sont des cercles-paraboles situés dans les plans $x \pm iy = c^{te}$. La surface a pour droite double à distance finie la droite Ox, définie par $u + t = 0$ $(\alpha = 0)$; les sections par les plans passant par cette droite sont les paraboles $\beta = c^{te}$.

Une autre droite double est la droite de l'infini du plan des xy; les sections de la surface par les plans passant par cette droite sont les paraboles $\alpha = c^{te}$.

Paraboles $\alpha = c^{te}$. — Les équations d'une quelconque de ces courbes sont :

$$z^2 = \lambda, \qquad 4y^2 + 4\lambda x - \lambda^2 = 0. \tag{13}$$

Sa projection sur le plan des xy est une parabole ayant pour enveloppe, quand λ varie :

$$x^2 + y^2 = 0,$$

c'est-à-dire ayant pour foyer l'origine; dans l'espace, le lieu du foyer de (13) est donc Oz; le lieu de son sommet est, comme on le voit facilement, la courbe :

$$y = 0, \qquad z^2 - 4x = 0, \tag{14}$$

laquelle est une parabole du plan des xz, admettant Oz pour tangente au sommet.

En résumé, on peut engendrer la surface de la manière suivante : soit une parabole (P) ayant pour axe Ox et pour tangente au sommet Oz [2]; à tout point S de (P) associons le plan (Π) mené par S perpendiculairement à Oz, et le point F où (Π) rencontre Oz; la parabole du plan (Π) qui a pour sommet S et pour foyer F engendre la surface lorsque S décrit (P).

---

(2) Ici (P) a pour paramètre 2. Mais on peut remplacer (P) par une parabole quelconque, en faisant subir à la surface une homothétie de centre O.

Parabole $\beta = c^{te}$. — Si le plan d'une telle parabole a pour équation :

$$z = y \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

cette parabole a pour sommet le point de Ox d'abscisse $-\operatorname{cotg}^2 \varphi$, et son foyer coïncide avec celui de (P). Cela nous donne une autre génération de la surface.

Il existe sur la surface d'autres paraboles : on peut montrer en effet que tout plan tangent coupe la surface suivant deux paraboles; on a donc une surface de Steiner [3].

2. Surfaces à cercles réels. — 1° TYPE 16. — Si, dans les formules relatives à ce type, on remplace $X_1, \ldots, X_5$ par des valeurs proportionnelles à :

$$1, \qquad -(x^2 + y^2 + z^2), \qquad x - iz, \qquad x + iz, \qquad y,$$

on obtient pour la surface une équation du quatrième degré, qui est réelle si l et m sont réels, ce que nous supposerons.

Les points réels de la surface s'obtiennent en supposant que u et t soient des imaginaires de module 1 :

$$u = e^{i\theta}, \qquad t = e^{i\varphi}.$$

On obtient alors :

$$x = \left(l - \frac{1}{l}\right) \cos \theta + m \cos \varphi, \qquad y = 2 \cos \theta, \qquad z = \left(l + \frac{1}{l}\right) \sin \theta + m \sin \varphi. \tag{15}$$

Les cercles $\Gamma(\theta = c^{te})$ ont pour rayon $|m|$ et sont situés dans des plans parallèles à xOz. Le lieu du centre de Γ est un cercle C_0 situé dans le plan :

$$y = \frac{2l}{l^2 - 1} \cdot x,$$

ayant pour rayon $\left|l + \frac{1}{l}\right|$ et pour centre l'origine.

---

(3) On montre facilement que la surface signalée par Kœnigs (*Comptes rendus*, t. 109, 1889, p. 364) est équivalente au type 29, que nous venons d'étudier. Voici la représentation paramétrique de cette surface, d'après Kœnigs :

$$\left\{\begin{aligned} & x_1 = (a\lambda + b\mu) \cdot \lambda\mu, \qquad x_2 = \frac{1}{2i}[(a\lambda + b\mu)^2 - \mathrm{H} + \lambda^2\mu^2], \\ & x_3 = \frac{1}{2}[(a\lambda + b\mu)^2 - \mathrm{H} - \lambda^2\mu^2], \qquad x_4 = \frac{\sqrt{\mathrm{H}}}{2}(\lambda^2 - \mu^2), \qquad x_5 = \frac{i\sqrt{\mathrm{H}}}{2}(\lambda^2 + \mu^2), \end{aligned}\right.$$

a, b, H étant des constantes, λ et μ les coordonnées curvilignes d'un point de la surface celle-ci ne dépend qu'en apparence des trois paramètres a, b, H.

La surface est donc engendrée par la translation de Γ dont le centre décrit C_0. Elle admet donc, d'après les propriétés des surfaces de translation, une deuxième génération analogue; on le vérifie facilement sur les formules (15) : un cercle $C(\varphi = c^{te})$ a pour rayon $\left|l + \frac{1}{l}\right|$; son plan est parallèle au plan de C_0; son centre décrit un cercle Γ_0 égal aux cercles Γ, situé dans le plan des xz, et ayant pour centre l'origine([4]).

La surface a quatre points singuliers situés sur le cercle de l'infini, et correspondant respectivement à $t\infty$, $t = 0$, $u\infty$, $u = 0$. De plus, elle admet comme ligne double la courbe :

$$(16) \qquad z = 0, \qquad (x - ly)\left(x + \frac{1}{l}y\right) = m^2 - \left(l + \frac{1}{l}\right)^2,$$

qui est une hyperbole équilatère si $m^2 - \left(l + \frac{1}{l}\right)^2 \neq 0$; si $|m| = \left|l + \frac{1}{l}\right|$, c'est-à-dire si C_0 et Γ_0 ont le même rayon, cette courbe se décompose en deux droites([5]).

Les lignes $\theta + \varphi = c^{te}$, $\theta - \varphi = c^{te}$ sont des coniques. Ce sont, avec les cercles, les seules coniques de la surface lorsque l'hyperbole singulière n'est pas décomposée : en effet, dans ce cas, la surface est la transformée homographique d'une cyclide ayant quatre points doubles (les transformés des points doubles de la surface situés sur le cercle de l'infini), c'est-à-dire d'une cyclide de Dupin. Or on sait qu'une telle cyclide a quatre familles de coniques.

Remarque. — Dans le problème donné par M. E. Vessiot au Concours d'entrée à l'École Normale Supérieure en 1931, on demande d'étudier une surface S doublement cerclée, engendrée de la façon suivante : soient deux cylindres de révolution de rayon a, ayant pour axes deux droites perpendiculaires Ox, Oy (que l'on prend comme axes de coordonnées, ainsi que leur perpendiculaire commune Oz); considérons une droite Δ qui varie en restant tangente aux deux cylindres; S est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de O sur Δ; elle a pour équation :

$$z^2(x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2[z^2 + (x+y)^2][z^2 + (x-y)^2] = 0;$$

elle est du sixième degré. Si nous prenons son inverse par rapport à O, la puissance d'inversion étant $16a^2$, nous trouvons une surface du quatrième degré qui est un cas particulier du type 16 : elle correspond à $l = 1$, $m = 2$, c'est-à-dire au cas où les cercles C_0, Γ_0 ont le même rayon et leurs plans perpendiculaires.

([4]) La surface étudiée est la surface de translation la plus générale engendrée par un cercle dont le centre décrit un autre cercle.

([5]) On retrouve ici un résultat obtenu au chapitre VI, relatif aux cercles isolés autres que les cercles coordonnés.

2° TYPE 19_A. — Passons en coordonnées cartésiennes par les formules :

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &X_1 = a(x+iy), \qquad X_2 = \frac{1}{a}(x-iy), \qquad X_3 = b\left[z + i\,\frac{1-x^2-y^2-z^2}{2}\right],\\ &X_4 = \frac{1}{b}\left[z - i\,\frac{1-x^2-y^2-z^2}{2}\right], \qquad X_5 = i\,.\,\frac{1+x^2+y^2+z^2}{2},\end{aligned}\right.$$

avec :

$$a = \sqrt{\frac{m^2-1}{(l^2-1)(n^2-1)}}, \qquad b = \sqrt{\frac{l^2-1}{n^2-1}},$$

et supposons l, m, n réels. L'équation de la surface sera réelle si a et b le sont, c'est-à-dire si :

$$(l^2-1)(n^2-1) > 0, \qquad m^2-1 > 0.$$

La surface obtenue est du huitième degré; pour avoir ses points réels, il faut supposer :

$$(18)\qquad u = \sqrt{\frac{m^2-1}{l^2-1}}\,.\,e^{i\theta}, \qquad t = \sqrt{\frac{n^2-1}{m^2-1}}\,.\,e^{i\varphi},$$

θ et φ étant réels; il faut de plus que les coefficients de $e^{i\theta}$, $e^{i\varphi}$ soient réels, ce qui exige :

$$l^2-1 > 0, \qquad n^2-1 > 0.$$

Remarquons qu'on ne diminue pas la généralité en supposant l, m, n positifs. On peut donc poser :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &l = \frac{1}{\cos\alpha}, \qquad m = \frac{1}{\cos\beta}, \qquad n = \frac{1}{\cos\gamma},\\ &\sqrt{l^2-1} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \sqrt{m^2-1} = \operatorname{tg}\beta, \qquad \sqrt{n^2-1} = \operatorname{tg}\gamma,\end{aligned}\right.$$

α, β, γ étant compris entre o et $\frac{\pi}{2}$.

Les coordonnées homogènes cartésiennes d'un point de la surface sont alors :

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} x &= -\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta\sin\theta - \sin\beta\cos\gamma\cos\alpha\sin(\theta-\varphi) + \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\varphi,\\ y &= \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta\cos\theta + \sin\beta\cos\gamma\cos\alpha\cos(\theta-\varphi) + \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\varphi - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,\\ z &= \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\sin\varphi + \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha\sin\theta - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin(\theta+\varphi),\\ t &= \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\cos\varphi + \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha\cos\theta - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos(\theta+\varphi) + \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + 1.\end{aligned}\right.$$

Ces formules montrent que les cercles $\theta = c^{te}$, $\varphi = c^{te}$ sont réels. On voit aussi que Oy est axe de symétrie de la surface (changer θ en $-\theta$, φ en $-\varphi$).

Cercles $u = c^{te}$. — Un tel cercle est, comme on le voit facilement, l'intersection des deux sphères S, S', réelles et orthogonales :

$$(21)\begin{cases} S \equiv (\cos\theta - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)x + \sin\theta\,.\,y + (\operatorname{tg}\beta\cos\theta + \operatorname{tg}\alpha)z - \operatorname{tg}\beta\sin\theta\,\dfrac{1 - x^2 - y^2 - z^2}{2} = 0, \\ S' \equiv -\dfrac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}\,.\,\dfrac{1 + x^2 + y^2 + z^2}{2} - \sin\theta\,.\,x + (\cos\theta - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)\,.\,y \\ \qquad + \operatorname{tg}\beta\sin\theta\,.\,z + (\operatorname{tg}\beta\cos\theta + \operatorname{tg}\alpha)\,\dfrac{1 - x^2 - y^2 - z^2}{2} = 0. \end{cases}$$

S coupe Oy aux points fixes M, M' d'ordonnées $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$ et $-\operatorname{cotg}\dfrac{\beta}{2}$.

Le lieu du centre I de S est donc dans le plan médiateur du segment MM', lequel a pour ordonnée $-\operatorname{cotg}\beta$; le point I a pour coordonnées :

$$(22)\qquad \frac{-\cos\theta + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta\sin\theta}, \qquad -\operatorname{cotg}\beta, \qquad \frac{-\operatorname{tg}\beta\cos\theta - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta\sin\theta};$$

son lieu est donc une hyperbole dont les asymptotes ont pour équations :

$$\frac{z}{x} = \operatorname{tg}(\beta + \varepsilon\alpha) \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

et dont le demi-axe transverse est :

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta} \quad \left(\text{valeur minimum de } \sqrt{x^2 + z^2} \text{ dans les formules (22)}\right);$$

la droite qui porte ce demi-axe fait avec Oz l'angle $-\beta$.

Cherchons à définir géométriquement la sphère S' qui est associée à une sphère S donnée.

1° Toute sphère S' passe par les points fixes N, N' de coordonnées :

$$(23)\begin{cases} x = \dfrac{\varepsilon\sin\beta\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\gamma}}{\sin\alpha + \sin\gamma\cos\beta}, \qquad y = \dfrac{-\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\gamma\cos\beta}, \qquad z = \dfrac{\varepsilon\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\gamma}}{\sin\alpha + \sin\gamma\cos\beta} \\ \qquad (\varepsilon = \pm 1). \end{cases}$$

2° Soit K la projection orthogonale de I sur Oz; S' est orthogonale au plan (P) mené par Oz perpendiculairement à IK, et à la sphère (Σ) ayant pour centre K et contenant le cercle de centre O et de rayon 1 du plan des xy [voir les équations (21)]. Les cercles $t = c^{te}$ fournissent une génération tout à fait analogue de la surface.

Les lignes singulières de la surface sont : 1° les côtés du quadrilatère isotrope $X_1X_2 = X_3X_4 = 0$; 2° une quartique unicursale qui contient les quatre sommets de ce quadrilatère.

Remarque. — Nous pouvons maintenant étudier la surface signalée par Cosserat [voir Introduction]. Cette surface est du huitième degré (et par conséquent du quatrième degré conforme); elle est doublement cerclée, et tous ses cercles sont tangents à quatre plans isotropes fixes; les lieux des foyers des cercles des deux familles sont des droites (non isotropes) formant un quadrilatère gauche. Nous allons chercher à quel type appartient cette surface.

Auparavant, remarquons que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une sphère de rayon nul soit tangente à un cercle (véritable), est qu'elle passe par un de ses foyers.

Reportons-nous alors au deuxième tableau du chapitre VII, nous voyons que la surface en question ne peut être que du type 16, 28, 19_A ou 26_A. Mais comme, d'après Cosserat, elle admet quatre droites isotropes doubles, elle est, soit du type 16, soit du type 19_A (6). Considérons donc un de ces deux types; soient C_1, C_2 les lieux des foyers des cercles $u = c^{te}$, Γ_1, Γ_2 les lieux des foyers des cercles $t = c^{te}$, on démontre facilement qu'un quelconque des cercles C_i et un quelconque des cercles Γ_k sont bisécants, et que la sphère (C_i, Γ_k) est de rayon nul. D'après la remarque faite plus haut, on voit donc que tous les cercles de la surface sont tangents à quatre sphères de rayon nul. Ces sphères ne pourront devenir des plans isotropes que si l'on peut transformer C_i et Γ_k en droites, c'est-à-dire si ces quatres cercles ont un point commun. Ceci ne se produit pour le type 16 que si $l - \frac{1}{l} = 0$ et dans ce cas les quatre cercles ont deux points communs; les droites qu'on en déduit ne forment donc pas un quadrilatère gauche. Pour le type 19_A, les quatre cercles C_i, Γ_k ont un point commun si :

$$m^4(1 - l^2)(1 - n^2) + 4l^2n^2(1 - m^2) = 0,$$

ou, en adoptant les notations (19), si :

$$\sin\alpha . \sin\gamma = \varepsilon . \sin 2\beta \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

On voit donc que la surface de Cosserat est du type 19_A.

---

(6) Le type 28 n'a que deux droites isotropes singulières : $u\infty$, $t\infty$; et le type 26_A n'en a que trois : $u\infty$, $t\infty$, $t = 0$.

3° TYPE 21_A. — Passons en coordonnées cartésiennes par les formules (17), en supposant a, b, m, n réels. L'équation de la surface ne sera réelle que si :

$$a^2 b^2 = \frac{m^2 - 1}{(n^2 - 1)^2},$$

d'où .

$$m^2 - 1 > 0.$$

Nous prendrons :

$$a = 1, \qquad b = \frac{\sqrt{m^2 - 1}}{n^2 - 1}.$$

Pour obtenir les points réels de la surface, il faut supposer :

$$u = \sqrt{n^2 - 1} \,.\, e^{i\theta}, \qquad t = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{m^2 - 1}} \,.\, e^{i\varphi},$$

θ et φ étant réels; et, en outre :

$$n^2 - 1 > 0.$$

En employant alors les mêmes notations que pour le type 19_A, on est conduit à des formules qui se déduisent des formules (20) du type 19_A en y faisant $\alpha = 0$(⁷). De là résultent deux générations simples de la surface : la seule modification à apporter à ce qui a été dit plus haut concerne le lieu du centre de S, lequel est une droite, car S engendre un faisceau linéaire. On vérifie facilement, sur l'équation de la surface, que celle-ci admet le groupe à un paramètre de transformations conformes (paramètre λ) :

$$(24) \qquad X'_1 = \lambda X_1, \qquad X'_2 = \frac{1}{\lambda} X_2, \qquad X'_3 = \frac{1}{\lambda} X_3, \qquad X'_4 = \lambda X_4, \qquad X'_5 = X_5.$$

Étudions d'abord ce groupe; soit Σ la sphère $X_5 = 0$; soit $M(X_1, \ldots, X_5)$ un point quelconque de l'espace; si nous lui faisons subir successivement toutes les

(⁷) Ceci semble en contradiction avec le fait que le type 19_C $[l = 1, (m^2 - 1)(n^2 - 1) \neq 0]$ est imaginaire. Mais il ne faut pas oublier que les formules (20) du type 19_A ont été établies en supposant $l^2 - 1 \neq 0$ $\left(\text{en particulier dans la formule } u = \sqrt{\frac{m^2 - 1}{l^2 - 1}}\, e^{i\theta}\right)$.

transformations (24), il engendre un cercle lorsque $X_5 \neq 0$. Si $X_5 = 0$, il y a deux cas à distinguer; considérons les droites isotropes :

$$\begin{array}{ll} \Delta & X_1 = X_4 = X_5 = 0, \\ \Delta' & X_2 = X_3 = X_5 = 0; \end{array}$$

si M est sur Δ ou Δ', il reste fixe; s'il est hors de ces deux droites, il engendre une droite isotrope les rencontrant toutes deux. Il résulte de là que toute droite isotrope qui rencontre Δ et Δ' est conservée, tandis que les droites isotropes de Σ qui font partie du même système que Δ et Δ' s'échangent entre elles.

Si on cherche l'effet produit par les transformations (24) sur les cercles de la surface 21_A, on constate que les cercles $u = c^{te}$ s'échangent entre eux et que les cercles $t = c^{te}$ glissent sur eux-mêmes; le cercle singulier :

$$X_2 + (n^2 - 1)X_3 = X_1 + \frac{m^2 - 1}{n^2 - 1} X_4 = 0,$$

est conservé.

Si au lieu de passer en coordonnées cartésiennes par les formules (17), on utilise les formules suivantes :

$$(25) \quad X_1 = x + iy, \quad X_2 = x - iy, \quad X_3 = -(x^2 + y^2 + z^2), \quad X_4 = 1, \quad X_5 = z,$$

le groupe (24) devient, en posant $\lambda = e^{i\sigma}$:

$$(26) \qquad \begin{cases} x' = e^{-i\sigma}(x \cos \sigma - y \sin \sigma), \\ y' = e^{-i\sigma}(x \sin \sigma + y \cos \sigma), \\ z' = e^{-i\sigma}. z. \end{cases}$$

On obtient un groupe de transformations spirales laissant invariante la surface obtenue, laquelle est imaginaire du cinquième degré. On voit donc que la surface obtenue à partir du type 21_A par les formules (17), est la transformée conforme d'une surface spirale.

Revenons au groupe (24) et supposons qu'un cercle quelconque C subisse toutes ses transformations; C engendre une surface doublement cerclée ayant pour familles de cercles les positions successives de C et les cercles engendrés par les divers points de C. Les points de rencontre de C avec Σ engendrent en général des droites isotropes situées sur Σ, et qui sont cercles dégénérés de la seconde famille; il y a exception lorsque C passe par un point appartenant à Δ ou Δ', car on a vu qu'un tel point est fixe.

On vérifie facilement par le calcul les résultats suivants :

1° Si C coupe Σ en deux points situés hors de Δ et Δ', la surface engendrée par C est du type 21 (le type 21_B correspondant au cas où C a l'un de ses foyers sur Σ (8); si les deux foyers de C sont sur Σ, on a un cône de révolution).

2° Si C coupe Σ en deux points dont l'un A est situé sur Δ ou Δ', on a le type 14 (le type 14_B correspondant au cas où l'un des foyers de C est sur Σ; ce foyer est alors nécessairement orthogonal à A).

3° Si C coupe Σ en deux points situés respectivement sur Δ et Δ', la distance de ces deux points ne peut être nulle, et on obtient un cône (de révolution).

4° Si C est tangent à Σ ailleurs qu'en un point de Δ ou Δ', on a le type 27.

5° Si C est tangent à Σ en un point de Δ ou Δ', on a le type 25.

On peut montrer que les types ainsi obtenus sont les seuls (en laissant de côté les cyclides) qui admettent un groupe de transformations conformes.

Remarquons que dans tous ces types, une des familles de cercles se compose de cercles deux à deux paratactiques. Ceci s'explique facilement si on remarque qu'un point M de l'espace, subissant les transformations (24), engendre un cercle dont les foyers sont respectivement sur Δ et Δ'.

Réciproquement, tout cercle dont les foyers sont situés respectivement sur Δ et Δ', est conservé par (24) : en effet, les équations d'un tel cercle sont de la forme :

$$\left\{\begin{aligned} aX_2 + bX_3 &= 0, \\ cX_1 + dX_4 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Si alors un cercle C rencontre une famille F de cercles deux à deux paratactiques, ayant leurs foyers situés respectivement sur Δ et Δ', les cercles déduits de C par les transformations (24) rencontrent aussi les cercles F, et on retombe sur un des types 21, 14, 27, 25; ces types sont donc les surfaces doublement cerclées les plus générales (cyclides exclues), ayant une famille de cercles deux à deux paratactiques.

On pourrait objecter à ce dernier raisonnement que Δ et Δ' y sont supposées non-sécantes; soit donc une famille de cercles paratactiques deux à deux, et supposons que les lieux de leurs foyers soient deux droites isotropes sécantes D, D'; appelons M le point commun à D, D'; deux quelconques des cercles considérés sont tangents en M; la surface qu'ils engendrent est donc l'inverse d'un cylindre, et, si elle est doublement cerclée, c'est une cyclide particulière.

---

(8) Hors de Δ et de Δ', sinon on obtiendrait une sphère de rayon nul.

Lignes de courbure. — On les obtient par une quadrature, puisque leur équation admet le groupe de la surface; cette équation est :

$$(27)\begin{cases} -2\sqrt{m^2-1}\left[m^2\sqrt{n^2-1}\cos\varphi+2\sqrt{m^2-1}\right]d\varphi^2 \\ +(2-m^2)\sqrt{n^2-1}\left[m^2\sqrt{n^2-1}+2\sqrt{m^2-1}\cos\varphi\right]d\varphi\, d\theta \\ +\left[4(m^2-1)(n^2-1)\cos^2\varphi+4m^2\sqrt{(m^2-1)(n^2-1)}\cos\varphi+(n^2-1)(2-m^2)^2+4(m^2-1)\right].d\theta^2=0. \end{cases}$$

Elle est de la forme :

$$M(\varphi)+N(\varphi)\frac{d\theta}{d\varphi}+P(\varphi)\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2=0,$$

d'où :

$$d\theta=\frac{-N\pm\sqrt{N^2-4MP}}{2P}.d\varphi.$$

Le radical est du troisième degré en $\cos\varphi$; par suite l'intégration ne peut se faire en général par les fonctions élémentaires.

Si $\sqrt{n^2-1}=2\varepsilon\dfrac{\sqrt{m^2-1}}{m^2}$ $(\varepsilon=\pm 1)$, le premier membre de (27) est divisible par $1+\varepsilon\cos\varphi$, et l'intégration est ramenée aux fonctions elliptiques; si de plus le discriminant de l'équation obtenue est divisible par $1\pm\cos\varphi$, on est ramené aux fonctions élémentaires. Ceci a lieu par exemple pour :

$$m=n=\sqrt{2};$$

l'équation (27) devient dans ce cas :

$$d\theta=\pm\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\cos\varphi}},$$

d'où :

$$\theta=\pm\sqrt{2}\log\frac{1+\sin\frac{\varphi}{2}}{1-\sin\frac{\varphi}{2}}+c^{te}.$$

Note sur les surfaces plusieurs fois cerclées imaginaires.

1° *Surfaces doublement cerclées du troisième degré.* — Soient F_1, F_2 les deux familles de cercles, et supposons que les cercles de F_1 soient ceux qui ont un point commun. On pourra transformer la surface en surface réglée du troisième degré. (Par exemple pour les types 11, 12, 13, 14 on posera :

$$X_1 = x + iy, \qquad X_2 = x - iy, \qquad X_3 = -(x^2 + y^2 + z^2), \qquad X_4 = 1, \qquad X_5 = z).$$

Il peut se produire deux cas :

a) *Les droites* F_1 *sont parallèles à un même plan.* — On peut alors avoir, soit un conoïde (types 1, 25), soit une surface dont les génératrices sont tangentes à un cylindre du second degré ; ce cylindre est de révolution pour le type 24, de deuxième catégorie pour le type 7, ainsi que pour le type 10 (exception si $k = -2(h+1)$ auquel cas ce cylindre est de révolution, et si $k = -2(2h+1)$ où il est de troisième catégorie).

b) *Les droites* F_1 *ne sont pas parallèles à un même plan.* — Le cône aux génératrices duquel elles sont parallèles est alors du second degré ; il peut être de révolution (types 13, 14), de deuxième catégorie (type 4), de quatrième catégorie (type 12) ou de cinquième catégorie (type 11).

Dans tous les cas, les cercles F_2 sont des cercles-paraboles situés dans des plans parallèles; la droite à l'infini commune à tous ces plans fait partie de la surface, de sorte que celle-ci coupe le plan de l'infini suivant une tangente au cercle de l'infini (en un certain point A) et une conique tangente en A à ce même cercle; ladite conique peut d'ailleurs se réduire à une droite double [cas a)].

Remarquons enfin que dans le cas b), la surface admet un autre représentant euclidien du troisième degré (par exemple on l'obtient pour les types 11, 12, 13, 14 en posant :

$$X_1 = 1, \qquad X_2 = -(x^2 + y^2 + z^2), \qquad X_3 = x - iy, \qquad X_4 = x + iy, \qquad X_5 = z).$$

Les cercles F_1 sont alors dans des plans parallèles (non isotropes), les cercles F_2 sont toujours paraboliques et situés dans des plans parallèles. La surface coupe le plan de l'infini suivant les droites à l'infini des plans de F_1 et de F_2, celle qui est relative à F_1 comptant pour deux.

2° *Surfaces triplement cerclées du troisième degré.* — Elles ont aussi chacune un représentant euclidien du troisième degré. On l'obtient en amenant à l'origine des coordonnées le point de rencontre des trois droites isotropes doubles de la surface (voir chap. VII, note 3), et en prenant ensuite ce point pour pôle d'inversion. La surface obtenue coupe le plan de l'infini suivant trois droites formant un triangle, dont les sommets sont sur le cercle de l'infini; les cercles sont situés respectivement dans les plans passant par ces trois droites.

3° *Surfaces doublement cerclées du quatrième degré* (¹). — Ici le représentant euclidien de degré minimum est de degré 4 ou 5.

On peut vérifier, comme pour le type 19_A, que tous les cercles d'une telle surface sont tangents à quatre sphères de rayon nul, ce qui généralise le résultat obtenu par Cosserat (voir chap. VIII, type 19_A).

(¹) Réelles ou imaginaires.

TABLE DES MATIÈRES DE CE MÉMOIRE