JACQUES DEVISME

Sur l'équation de M. Pierre Humbert

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 25 (1933), p. 143-238
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1933_3_25__143_0>

SUR L'ÉQUATION DE M. PIERRE HUMBERT

INTRODUCTION

Dans un Mémoire paru il y a quelques années, M. P. Humbert a introduit l'équation

$$\Delta_3 U = \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 3\frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z} = 0,$$

qui généralise à certains points de vue l'équation de Laplace à deux dimensions. Un peu plus tard M. D. V. Jonesco a généralisé à l'équation précédente un théorème classique de Lord Kelvin en utilisant les dérivées partielles du polynôme

$$p = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

La lecture de ces deux travaux m'a donné l'idée de faire une étude systématique de l'équation $\Delta_3 U = 0$, en faisant jouer au polynôme p un rôle analogue à celui de la quantité $r^2 = x^2 + y^2$ pour l'équation de Laplace à deux dimensions.

Le fil conducteur de ces recherches m'a, du reste, été en partie suggéré par une courte note de P. Appell (parue aux *Comptes rendus*, en 1877) qui, introduisant trois fonctions nouvelles pour représenter paramétriquement la surface

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1,$$

signalait qu'une théorie analogue à celle des nombres complexes pouvait être établie à partir de ces nouvelles données.

Dans ce Mémoire, je rassemble la plus grande partie des résultats que j'ai acquis sur l'équation de M. P. Humbert. D'autres mises au point de recherches concernant des équations généralisant la précédente seront publiées ultérieurement (¹).

Au premier chapitre, j'ai groupé tout ce qui concerne les propriétés des intégrales de l'équation $\Delta_3 U = 0$ ainsi que les formules relatives aux différents changements de variables.

Dans le second chapitre, j'étudie les transformations qui conservent à un facteur près la forme différentielle

$$ds^3 = dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3dx\,dy\,dz.$$

(¹) Une liste détaillée des travaux que j'ai déjà publiés se trouve à la bibliographie en fin de Mémoire.

Ces transformations qui sont l'analogue des transformations conformes en géométrie euclidienne plane font apparaître des systèmes aux dérivées partielles analogues aux systèmes de Cauchy. Je signale aussi l'existence d'un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre intermédiaire entre les systèmes précédents et l'équation de M. P. Humbert.

Le troisième chapitre est un essai d'interprétation des résultats du chapitre précédent au moyen de nouvelles notions d'angle et de distance. En faisant jouer un rôle prépondérant aux trièdres équifaciaux ayant pour axe la droite $x = y = z$, trièdres qu'avait incidemment considérés Appell dans la note déjà citée, j'ai été ainsi amené à introduire une orthogonalité au sens d'Appell. Ces nouvelles notions m'ont permis de donner une signification géométrique simple à l'équation $\Delta_3 U = 0$, et d'esquisser une théorie rapide des courbes et des surfaces dans l'espace ainsi considéré. Dans un dernier paragraphe, je compare les résultats obtenus pour la surface

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$$

à mon point de vue ou à celui de Finsler-Cartan.

Le quatrième chapitre est consacré à l'introduction et à l'étude sommaire de familles de polynômes à deux variables, généralisant ceux de Legendre, Gegenbauer, Hermite, ceux considérés plus récemment par M. Pincherle et ensuite M. P. Humbert.

J'ai réuni enfin au dernier chapitre un certain nombre de propriétés nouvelles d'équations dont le premier membre est l'opérateur $\Delta_3 U$, le second membre ayant des formes simples, ainsi que d'équations relatives aux questions de prépotentiel, ce qui me procure l'occasion d'utiliser quelques-uns des résultats du précédent chapitre.

A la fin du Mémoire, je donne une liste des travaux se rapportant à l'équation de M. P. Humbert et à ses diverses extensions. Étant donné que ces travaux souvent très courts se trouvent disséminés dans de nombreuses publications, j'ai donné pour chaque titre un résumé succinct; cette liste bibliographique présente donc un aspect assez complet de ce qui a été publié actuellement sur ce sujet.

Ce m'est un devoir particulièrement agréable de remercier ici M. E. Cartan qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et M. P. Humbert dont les conseils m'ont été si précieux pendant tout le cours de mes recherches. Je n'aurai garde d'oublier mon excellent collègue du lycée du Havre, M. P. Delens, dont les amicales conversations d'après classe m'ont permis de préciser ma pensée sur bien des points de la partie géométrique de ce travail. Je tiens enfin à remercier tout spécialement M. A. Buhl, qui a bien voulu se charger de faire paraître ce Mémoire dans le recueil des *Annales scientifiques de la Faculté de Toulouse*.

CHAPITRE I

L'équation de M. P. Humbert.

I. — Étude de quelques changements de variables.

1. Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^3 U}{\partial u \partial v \partial w} = 0, \tag{1}$$

et effectuons le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + y + z, \\ v = x + jy + j^2 z, \\ w = x + j^2 y + jz, \end{cases} \tag{2}$$

où j et j^2 sont les racines cubiques impaires de l'unité.

Nous pouvons écrire les identités suivantes que nous utiliserons par la suite

$$uvw = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz, \tag{3}$$

$$\mathbf{S}\, u \frac{\partial U}{\partial u} = \mathbf{S}\, x \frac{\partial U}{\partial x}, \tag{4}$$

$$3\,\mathbf{S}\, vw \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial w} = \mathbf{S}\,(x^2 - yz)\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right], \tag{5}$$

$$27 \frac{\partial^3 U}{\partial u \partial v \partial w} = \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 3\frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z}. \tag{6}$$

Dorénavant nous réserverons le nom d'*opérateur de M. P. Humbert* à cette dernière expression [36] (¹) et nous poserons

$$\Delta_3 U = \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 3\frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z}. \tag{7}$$

(¹) Les nombres entre crochets renvoient au numéro correspondant de la liste bibliographique placée à la fin du Mémoire.

2. Considérons maintenant les trois fonctions d'Appell [1]

$$(8)\quad \begin{cases} P(\theta, \varphi) = \dfrac{e^{\theta+\varphi} + e^{j\theta+j^2\varphi} + e^{j^2\theta+j\varphi}}{3}, \\ Q(\theta, \varphi) = \dfrac{e^{\theta+\varphi} + j^2 e^{j\theta+j^2\varphi} + j e^{j^2\theta+j\varphi}}{3}, \\ R(\theta, \varphi) = \dfrac{e^{\theta+\varphi} + j e^{j\theta+j^2\varphi} + j^2 e^{j^2\theta+j\varphi}}{3}, \end{cases}$$

et effectuons le nouveau changement de variables

$$(9)\qquad x = \rho P(\theta, \varphi), \qquad y = \rho Q(\theta, \varphi), \qquad z = \rho R(\theta, \varphi).$$

Si nous rappelons avant les quelques identités

$$(10)\qquad P^3 + Q^3 + R^3 - 3PQR = 1,$$

$$(11)\quad \begin{cases} P^2(\theta, \varphi) - Q(\theta, \varphi) R(\theta, \varphi) = P(-\theta, -\varphi), \\ Q^2(\theta, \varphi) - R(\theta, \varphi) P(\theta, \varphi) = R(-\theta, -\varphi), \\ R^2(\theta, \varphi) - P(\theta, \varphi) Q(\theta, \varphi) = Q(-\theta, -\varphi), \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} dP = R\,d\theta + Q\,d\varphi, \\ dQ = P\,d\theta + R\,d\varphi, \\ dR = Q\,d\theta + P\,d\varphi. \end{cases}$$

On en déduit les relations

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial \rho} P(-\theta, -\varphi) + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \theta} Q(-\theta, -\varphi) + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi} R(-\theta, -\varphi), \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial U}{\partial \rho} R(-\theta, -\varphi) + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \theta} P(-\theta, -\varphi) + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi} Q(-\theta, -\varphi), \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} = \dfrac{\partial U}{\partial \rho} Q(-\theta, -\varphi) + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \theta} R(-\theta, -\varphi) + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi} P(-\theta, -\varphi). \end{cases}$$

Puis

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \left[\dfrac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} - \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \rho}\right] P + \left[\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \varphi}\right] R + \left[\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \theta}\right] Q, \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \left[\dfrac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} - \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \rho}\right] Q + \left[\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \varphi}\right] P + \left[\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \theta}\right] R, \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \left[\dfrac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} - \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \rho}\right] R + \left[\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \varphi}\right] Q + \left[\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \theta}\right] P, \end{cases}$$

et enfin

$$(15)\quad \Delta_3 U = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right]$$
$$= \frac{\partial^3 U}{\partial \rho^3} + \frac{1}{\rho^3}\frac{\partial^3 U}{\partial \theta^3} + \frac{1}{\rho^3}\frac{\partial^3 U}{\partial \varphi^3} - \frac{3}{\rho^2}\frac{\partial^3 U}{\partial \rho \partial \theta \partial \varphi} + \frac{3}{\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial U}{\partial \rho}.$$

Il est aussi quelquefois commode d'effectuer le changement de variables

$$(16)\qquad x = e^r P(\theta, \varphi), \qquad y = e^r Q(\theta, \varphi), \qquad z = e^r R(\theta, \varphi)$$

ou

$$(16')\qquad \begin{cases} \log u = r + \theta + \varphi, \\ \log v = r + j\theta + j^2\varphi, \\ \log w = r + j^2\theta + j\varphi; \end{cases}$$

on en déduit facilement la relation

$$(17)\qquad \Delta_3 U = e^{-3r}\left[\frac{\partial^3 U}{\partial r^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial \varphi^3} - 3\frac{\partial^3 U}{\partial r \partial \theta \partial \varphi}\right].$$

En posant $\rho = e^r$ on retrouve évidemment (15).

3. Effectuons maintenant le changement de variables

$$(18)\qquad X = X(x, y, z), \qquad Y = Y(x, y, z), \qquad Z = Z(x, y, z),$$

où $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ vérifient le système d'équations aux dérivées partielles

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x} = \dfrac{\partial Y}{\partial y} = \dfrac{\partial Z}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial X}{\partial z} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{\partial Z}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial z} = \dfrac{\partial Z}{\partial x}, \end{cases}$$

que nous retrouverons plus loin.

On en déduit facilement l'identité

$$(20)\quad \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 3\frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z} = \lambda(x, y, z)\left[\frac{\partial^3 U}{\partial X^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial Y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial Z^3} - 3\frac{\partial^3 U}{\partial X \partial Y \partial Z}\right],$$

avec

$$\lambda(x,y,z) = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^3 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^3 + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^3 - 3\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial z}$$
$$= \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^3 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^3 + \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)^3 - 3\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial z}$$
$$= \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^3 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^3 + \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^3 - 3\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial z}. \tag{21}$$

Ces relations sont encore valables lorsqu'on remplace (19) par l'un des cinq systèmes d'équations aux dérivées partielles que nous rencontrerons au chapitre II.

Remarquons tout de suite que ces changements de variables reviennent en coordonnées u, v, w, à écrire que les nouvelles fonctions u', v', w' ne dépendent chacune que d'une seule des variables u, v, w précédentes.

4. Signalons aussi le changement de variables

$$u = \zeta, \qquad v = \xi + i\eta, \qquad w = \xi - i\eta, \tag{22}$$

que nous utiliserons au chapitre II et qui fournit la relation

$$4\frac{\partial^3 U}{\partial u\,\partial v\,\partial w} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right]. \tag{23}$$

Notons enfin que M. D. V. Jonesco [44] a effectué le changement de variables le plus général pour l'opérateur $\Delta_3 U$; n'ayant pas besoin de ce calcul dans le présent Mémoire, nous nous contenterons d'en indiquer la référence.

II. — Quelques théorèmes relatifs à certaines intégrales particulières de l'équation $\Delta_3 U = 0$,

5. L'équation de M. P. Humbert pouvant se ramener à la forme (1) nous en connaissons immédiatement l'intégrale générale

$$U = f(u, v) + g(v, w) + h(w, u) \tag{24}$$

où f, g, h sont trois fonctions arbitraires.

La formule (24) paraît donc épuiser la question. Mais il est souvent utile de considérer des intégrales remplissant des conditions particulières. D'autre part l'équation de M. P. Humbert se présentant comme une généralisation de l'équation de Laplace, il est intéressant de voir les transformations que l'on doit faire subir à certains énoncés classiques, c'est ce dont nous allons nous occuper.

Dans ces questions le polynôme

$$p = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

jouera un rôle important ainsi que ses dérivées partielles qui sont au facteur 3 près

$$x^2 - yz, \qquad y^2 - zx, \qquad z^2 - xy.$$

6. Théorème : *Les intégrales de l'équation* $\Delta_3 U = 0$, *qui ne dépendent que de* p *sont* $\log p$ *et* $\log^2 p$.

Mettons l'équation sous la forme (1), nous aurons en posant

$$U = F(p), \qquad p = uvw = e^q,$$

(25)
$$\frac{\partial^3 U}{\partial u \partial v \partial w} = e^{-q} \frac{d^3 F}{dq^3} = 0,$$

nous en déduisons les intégrales q et q^2 c'est-à-dire $\log p$ et $\log^2 p$.

7. Théorème : *Les intégrales de l'équation* $\Delta_3^k U = 0$, (1) *qui ne dépendent que de* p *sont données par la formule générale*

$$p^i \log^j p. \qquad (i = 0, \ldots, k-1\,;\ j = 0, 1, 2)$$

Posons encore $q = \log p$, $U = F(q)$; nous sommes conduits à l'équation différentielle d'ordre $3k$:

(26)
$$\left\{ e^{-q} \frac{d^3}{dq^3} \left[\ldots \left(e^{-q} \frac{d^3 F}{dq^3} \right) \ldots \right] \right\} = 0,$$

dont l'équation (25) n'est qu'un cas particulier.

Après multiplication par e^{kq} nous obtenons une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont l'équation caractéristique est

$$(r - k + 1)^3 \ldots (r - 1)^3 r^3 = 0$$

ce qui démontre la propriété.

8. Théorème : *L'équation différentielle donnant les intégrales de l'équation* $\Delta_3^k U = 0$ *qui ne dépendent que de* p, *peut se mettre sous la forme*

(26')
$$\frac{d^k}{dp^k} \left[p^k \frac{d^k}{dp^k} \left(p^k \frac{d^k F}{dp^k} \right) \right] = 0.$$

---

(1) $\Delta_3^k U$ représente l'opérateur $\Delta_3 U$ itéré k fois.

En effet si $k = 1$ l'équation (25) s'écrit

$$p^2 \frac{d^3 F}{dp^3} + 3p \frac{d^2 F}{dp^2} + \frac{dF}{dp} = \frac{d}{dp}\left[p \frac{d}{dp}\left(p \frac{dF}{dp}\right)\right] = 0,$$

d'autre part nous pouvons écrire la suite d'égalités

$$\begin{aligned}
&\frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left[p^{k+1} \frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left(p^{k+1} \frac{d^{k+1} F}{dp^{k+1}}\right)\right] \\
&= \frac{d^k}{dp^k}\left\{p^k\left[p \frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}} \frac{d}{dp}\left(p^{k+1} \frac{d^{k+1} F}{dp^{k+1}}\right) + (k+1) \frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left(p^{k+1} \frac{d^{k+1} F}{dp^{k+1}}\right)\right]\right\} \\
&= \frac{d^k}{dp^k}\left\{p^k \frac{d^k}{dp^k} \frac{d}{dp}\left[p \frac{d}{dp}\left(p^{k+1} \frac{d^{k+1} F}{dp^{k+1}}\right)\right]\right\} \\
&= \frac{d^k}{dp^k}\left\{p^k \frac{d^k}{dp^k}\left[p \frac{d^k}{dp^k}\left(p^2 \frac{d^3 F}{dp^3} + 3p \frac{d^2 F}{dp^2} + \frac{dF}{dp}\right)\right]\right\},
\end{aligned}$$

nous en déduisons par récurrence la formule (26').

9. Théorème : *Si* $U(x, y, z)$ *est une intégrale de l'équation* $\Delta_3 U = 0$ *il en est de même de la fonction*

$$V(x, y, z) = U\left[\frac{\partial \log p}{\partial x}, \quad \frac{\partial \log p}{\partial y}, \quad \frac{\partial \log p}{\partial z}\right].$$

Ce théorème a été énoncé pour la première fois par M. D. V. Jonesco [44], nous donnerons la démonstration que nous avons déjà publiée [17].

En utilisant les variables u, v, w la transformation

$$X = \frac{\partial \log p}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial \log p}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial \log p}{\partial z},$$

s'écrit

$$uu' = wv' = vw' = 3.$$

On en déduit

$$\frac{\partial^3 U(u', v', w')}{\partial u \partial v \partial w} = -\frac{27}{p^2} \frac{\partial^3 U(u', v', w')}{\partial u' \partial v' \partial w'},$$

ce qui montre que les deux dérivées partielles considérées s'annulent en même temps.

10. Théorème : *Si* $U(x, y, z)$ *est une intégrale de l'équation* $\Delta_3 U = 0$, *il en est de même de la fonction*

$$V(x, y, z) = U(X, Y, Z)$$

où $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ *sont trois intégrales de l'un des systèmes* (S) *considérés au chapitre II.*

Ainsi que nous le verrons plus loin cela revient à faire en variables u, v, w, un changement tel qu'une quelconque des nouvelles variables u', v', w' soit fonction d'une seule des anciennes, les six variables u, v, w, u', v', w' figurant toutes dans la transformation. Nous pouvons, par exemple, supposer que l'on ait

$$u' = f(u), \qquad v' = g(v), \qquad w' = h(w).$$

On en déduit

$$\frac{\partial^3 U(u', v', w')}{\partial u \partial v \partial w} = f'(u) g'(v) h'(w) \frac{\partial^3 U(u', v', w')}{\partial u' \partial v' \partial w'} \tag{27}$$

ce qui démontre le théorème. Le raisonnement subsisterait évidemment pour les autres combinaisons de variables u, v, w, u', v', w'.

En variables x, y, z l'égalité (27) peut s'écrire

$$\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 V}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 V}{\partial z^3} - 3\frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y \partial z} = \lambda(x, y, z)\left[\frac{\partial^3 U}{\partial X^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial Y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial Z^3} - 3\frac{\partial^3 U}{\partial X \partial Y \partial Z}\right]. \tag{27'}$$

De l'examen des formules (27), (27') et de l'expression (24) de l'intégrale générale on déduit le théorème suivant.

11. Théorème : *Les fonctions* $\log \lambda(x, y, z)$ *et* $\log^2 \lambda(x, y, z)$ *sont des intégrales de l'équation* de M. P. Humbert.

Ce théorème d'abord énoncé par M. N. Botea [5] pour la fonction $\log \lambda$, a été complété par moi-même [22].

Remarquons, ainsi que nous le retrouverons plus loin, que la fonction $\lambda(x, y, z)$ peut se mettre sous l'une des formes (21).

12. Parmi les transformations donnant lieu à l'identité (27') il est tout naturel de chercher s'il en existe de linéaires à coefficients constants.

$$\left\{\begin{aligned} X &= a\,x + b\,y + c\,z + d, \\ Y &= a'x + b'y + c'z + d', \\ Z &= a''x + b''y + c''z + d'', \end{aligned}\right.$$

Si nous remplaçons X, Y, Z par leurs valeurs dans les systèmes (S) du chapitre II, on voit que dans tous les cas les constantes $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ vérifient les relations

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ c' & a' & b' \\ b' & c' & a' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ c'' & a'' & b'' \\ b'' & c'' & a'' \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b' & c' \\ c & a' & b' \\ b & c' & a' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b'' & c'' \\ c' & a'' & b'' \\ b' & c'' & a'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'' & b & c \\ c'' & a & b \\ b'' & c & a \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a & b'' & c'' \\ c & a'' & b'' \\ b & c'' & a'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b & c \\ c' & a & b \\ b' & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'' & b' & c' \\ c'' & a' & b' \\ b'' & c' & a' \end{vmatrix} = 0.$$

D'après ce que nous verrons au chapitre III, si l'on prend comme valeur commune des trois premiers déterminants l'unité, on aura une transformation orthogonale au sens d'Appell; on voit donc que :

THÉORÈME : *L'opérateur de* M. P. Humbert *est invariant par la similitude la plus générale de l'espace que nous introduirons au chapitre III.*

13. Cherchons maintenant parmi les intégrales de l'équation $\Delta_3 U = 0$ celles qui sont des polynômes en x, y, z. On voit facilement que tout monôme de degré inférieur ou égal à 3, ne figurant pas dans le polynôme p, est une intégrale; en appliquant le théorème du n° **9**, nous retrouvons certains résultats de M. D. V. Jonesco [44].

On peut aussi montrer que les coefficients de $1, j, j^2$ dans le développement de

$$(x + jy + j^2 z)^n$$

sont des intégrales, de l'équation considérée, jouant un rôle analogue à celui des polynômes harmoniques. En effectuant en effet le changement de variables (9) on obtient la formule de Moivre généralisée

$$(28) \qquad (x + jy + j^2 z)^n = [\rho e^{j\theta + j^2 \varphi}]^n = \rho^n e^{jn\theta + j^2 n\varphi}$$
$$= \rho^n \mathrm{P}(n\theta, n\varphi) + j\rho^n \mathrm{Q}(n\theta, n\varphi) + j^2 \rho^n \mathrm{R}(n\theta, n\varphi);$$

et les trois fonctions

$$\rho^n \mathrm{P}(n\theta, n\varphi), \qquad \rho^n \mathrm{Q}(n\theta, n\varphi), \qquad \rho^n \mathrm{R}(n\theta, n\varphi)$$

sont des intégrales de l'équation de M. P. Humbert, comme on le voit facilement en utilisant l'égalité (15) et en remarquant, grâce à (12), que les trois fonctions d'Appell vérifient le système d'équations aux dérivées partielles

(29) $$\frac{\partial^3 U}{\partial \theta^3} = \frac{\partial^3 U}{\partial \varphi^3} = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \, \partial \varphi} = U.$$

Le calcul de ces divers polynômes nous donne pour les premières valeurs de n

$x,$	$y,$	$z,$
$x^2 + 2yz,$	$z^2 + 2xy,$	$y^2 + 2zx,$
$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz,$	$3(xz^2 + zy^2 + yx^2),$	$3(x^2z + z^2y + y^2x),$
....	....	....

En variables $u, v, w,$ ces polynômes sont égaux, à un facteur numérique près, à

$$u^n + v^n + w^n, \qquad u^n + j^2v^n + jw^n, \qquad u^n + jv^n + j^2w^n.$$

Ceci nous conduit tout naturellement à nous poser la même question pour

$$v^nw^n + w^nu^n + u^nv^n, \qquad v^nw^n + j^2w^nu^n + ju^nv^n, \qquad v^nw^n + jw^nu^n + j^2u^nv^n;$$

on obtiendrait les polynômes résultant du développement de

$$[(x^2 - yz) + j(y^2 - zx) + j^2(z^2 - xy)]^n.$$

Revenons maintenant aux relations entre plusieurs intégrales particulières.

14. Théorème : *Si* $U(x, y, z)$ *est une intégrale de l'équation* $\Delta_3 U = 0$, il en est de même des fonctions

$$\mathrm{S}\, x\frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{et} \quad \mathrm{S}\,(x^2 - yz)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \, \partial z}\right).$$

Utilisons les variables u, v, w; les identités (4), (5), (6) fournissent les relations

$$\Delta_3\left[\mathrm{S}\, x\frac{\partial U}{\partial x}\right] = 27\frac{\partial^3}{\partial u\,\partial v\,\partial w}\left[\mathrm{S}\, u\frac{\partial U}{\partial u}\right] = 27\,\mathrm{S}\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial^3 U}{\partial u\,\partial v\,\partial w}\right),$$

$$\Delta_3\left[\mathrm{S}\,(x^2 - yz)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\right)\right] = 81\frac{\partial^3}{\partial u\,\partial v\,\partial w}\left[\mathrm{S}\, vw\frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial w}\right] = 81\,\mathrm{S}\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial w}\left(vw\frac{\partial^3 U}{\partial u\,\partial v\,\partial w}\right),$$

ce qui démontre le théorème.

15. Théorème : *Si* $U(x, y, z)$ *est une intégrale de l'équation* $\Delta_3 U = 0$, *la fonction* $V(x, y, z) = p^n U(x, y, z)$ *est intégrale de l'équation* $\Delta_3^{n+1} U = 0$.

Raisonnons encore en variables u, v, w; on a facilement

$$\frac{\partial^3}{\partial u\,\partial v\,\partial w}[p^n U] = n^3 p^{n-1} U + n^2 p^{n-1}\,\mathrm{S}\, u\frac{\partial U}{\partial u} + np^{n-1}\,\mathrm{S}\, vw\frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial w} + p^n\frac{\partial^3 U}{\partial u\,\partial v\,\partial w}.$$

D'après le théorème précédent, le théorème actuel est vérifié pour $n = 1$; on déduit ensuite de proche en proche par récurrence que le théorème est toujours vrai.

Si nous partons de $U = c^{te}$, $U = \log p$ ou $U = \log^2 p$ nous retrouvons le théorème du n° **7**.

16. Théorème : *Soient* α, β, γ *trois constantes telles que*

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = 0$$

et $f(t)$ *une fonction arbitraire assujettie seulement à posséder une dérivée troisième* $f'''(t)$. *Si*

$$t = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

$f(t)$ *est une intégrale de l'équation* $\Delta_3 U = 0$.

En posant

$$F(x, y, z) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

on a en effet

$$\Delta_3 F = (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma) f'''(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

ce qui démontre le théorème.

17. Théorème : *Dans les conditions du théorème précédent, la fonction* $f(t)$, *où*

$$t = (\alpha^2 - \beta\gamma) x + (\beta^2 - \gamma\alpha) y + (\gamma^2 - \alpha\beta) z,$$

est une intégrale de l'équation $\Delta_3 U = 0$.

Avec les mêmes notations et en utilisant l'identité

$$(30) \qquad \begin{aligned} &(\alpha^2 - \beta\gamma)^3 + (\beta^2 - \gamma\alpha)^3 + (\gamma^2 - \alpha\beta)^3 - 3(\alpha^2 - \beta\gamma)(\beta^2 - \gamma\alpha)(\gamma^2 - \alpha\beta) \\ &\qquad = (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma)^2, \end{aligned}$$

on a en effet

$$\Delta_3 F = (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma)^2 f'''(t),$$

ce qui démontre le théorème.

18. Théorème : *Dans les conditions du théorème du n° 16, la fonction* $f(t)$, *où*

$$t = (\alpha^2 - \beta\gamma)(x^2 - yz) + (\beta^2 - \gamma\alpha)(y^2 - zx) + (\gamma^2 - \alpha\beta)(z^2 - xy),$$

est une intégrale de l'équation $\Delta_3 U = 0$.

Posons en effet

$$\begin{cases} u = x + y + z, \\ v = x + j\,y + j^2 z, \\ w = x + j^2 y + j\,z, \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \alpha + \beta + \gamma, \\ b = \alpha + j^2\beta + j\,\gamma. \\ c = \alpha + j\,\beta + j^2\gamma, \end{cases}$$

Il vient

$$t = \frac{1}{3}(bcvw + cawu + abuv)$$

avec

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = abc = 0.$$

Supposons par exemple que la constante nulle soit a alors $t = \frac{1}{3}bcvw$ et la fonction $f(t)$ qui est alors de la forme (24) est intégrale de l'équation de M. P. Humbert.

Remarque : On pourrait à partir de ces théorèmes en énoncer bien d'autres ; par exemple on pourrait remarquer qu'avec les notations du n° **12** la fonction $f(X, Y, Z)$ où α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' annulent les 9 déterminants qui figurent à ce n° **12** est encore intégrale de $\Delta_3 U = 0$, etc.

19. Théorème : *Si* $U(x, y, z)$ *est une fonction de* x, y, z *définie par la relation*

$$Ax + By + Cz = 1$$

où A, B, C *sont trois fonctions de* U *vérifiant l'égalité*

(31) $$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = 0,$$

U *est une intégrale de l'équation* $\Delta_3 U = 0$.

Posons encore

$$\begin{cases} u = x + y + z, \\ v = x + j\,y + j^2 z, \\ w = x + j^2 y + j\,z, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{A} = A + B + C, \\ \mathcal{B} = A + j^2 B + j\,C, \\ \mathcal{C} = A + j\,B + j^2 C. \end{cases}$$

Il vient

$$Ax + By + Cz = \frac{1}{3}[\mathcal{A}u + \mathcal{B}v + \mathcal{C}w] = 1$$

avec

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C} = 0.$$

L'une au moins des trois fonctions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ est nulle; supposons que ce soit $\mathcal{A}$; on a alors

$$\mathcal{B}v + \mathcal{C}w = 3$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mathcal{B}v + \mathcal{C}w) = (\mathcal{B}'v + \mathcal{C}'w)\frac{\partial U}{\partial u} = 0.$$

L'une au moins des fonctions $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{C}$ étant *effectivement* fonction de U on en déduit $\dfrac{\partial U}{\partial u} = 0$ d'où *a fortiori* $\dfrac{\partial^3 U}{\partial u \partial v \partial w} = 0$.

20. Théorème : *Si* $U(x, y, z)$ *est une fonction de* x, y, z *définie par la relation*

$$(A^2 - BC)x + (B^2 - CA)y + (C^2 - AB) = 1$$

où A, B, C *sont trois fonctions de* U *vérifiant l'égalité* (31), U *est intégrale de l'équation* $\Delta_3 U = 0$.

Prenons encore les variables u, v, w et posons

$$\begin{cases} \mathcal{A} = (A^2 - BC) + (B^2 - CA) + (C^2 - AB), \\ \mathcal{B} = (A^2 - BC) + j^2(B^2 - CA) + j\,(C^2 - AB), \\ \mathcal{C} = (A^2 - BC) + j\,(B^2 - CA) + j^2(C^2 - AB). \end{cases}$$

Il vient

$$(A^2 - BC)x + (B^2 - CA)y + (C^2 - AB)z = \frac{1}{3}(\mathcal{A}u + \mathcal{B}v + \mathcal{C}w) = 1,$$

et la démonstration se poursuit comme au n° **19**, compte tenu de l'identité (30).

21. Théorème : *Si* $U(x, y, z)$ *est une fonction de* x, y, z *définie par la relation*

$$(A^2 - BC)(x^2 - yz) + (B^2 - CA)(y^2 - zx) + (C^2 - AB)(z^2 - xy) = 1$$

où A, B, C *sont trois fonctions de* U *vérifiant l'égalité* (31), U *est intégrale de l'équation* $\Delta_3 U = 0$.

Avec le même changement de variables qu'au n° **19** on trouve que

$$\mathcal{B}\mathcal{C}vw + \mathcal{C}\mathcal{A}wu + \mathcal{A}\mathcal{B}uv = 1 \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C} = 0.$$

En supposant encore que c'est $\mathcal{A}$ qui est nul, il reste $\mathcal{B}\mathcal{C}vw = 3$, d'où en dérivant par rapport à u

$$(\mathcal{B}'\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}')vw\frac{\partial U}{\partial u} = 0.$$

Si nous écartons la solution banale $\mathcal{B}\mathcal{C} = c^{te}$ il reste $\dfrac{\partial U}{\partial u} = 0$ d'où *a fortiori* $\dfrac{\partial^3 U}{\partial u \partial v \partial w} = 0$.

Remarque : Nous avons rencontré en cours de route une hypothèse supplémentaire, ce qui fait qu'ici A, B, C sont liés par les conditions

$$A + B + C = 0,$$

$$\frac{d}{dU}[A^2 + B^2 + C^2 - BC - CA - AB] \neq 0.$$

22. Revenons au théorème du n° **16** et prenons $f(t) = e^t$. Comme

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + j\beta + j^2\gamma)(\alpha + j^2\beta + j\gamma),$$

on en déduit les intégrales

$$e^{-(\lambda+\mu)x+\lambda y+\mu z}, \qquad e^{-(\lambda+\mu)x+j\lambda y+j^2\mu z} \qquad e^{-(\lambda+\mu)x+j^2\lambda y+j\mu z}$$

en faisant les combinaisons simples convenables on trouvera les nouvelles intégrales

$$e^{-(\lambda+\mu)x}P(\lambda y, \mu z), \qquad e^{-(\lambda+\mu)x}Q(\lambda y, \mu z), \qquad e^{-(\lambda+\mu)x}R(\lambda y, \mu z),$$

où P, Q, R, sont les trois fonctions d'Appell.

23. D'après ce que nous avons vu au n° **2**, l'équation $\Delta_3 U = 0$ s'écrit après le changement de variables (16), et en négligeant le facteur e^{-3r} :

$$\frac{\partial^3 U}{\partial r^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial \varphi^3} - 3\frac{\partial^3 U}{\partial r \partial \theta \partial \varphi} = 0.$$

On en déduit le théorème suivant.

Théorème : *Si* $U(x, y, z)$ *est une intégrale de l'équation de* M. P. Humbert *il en est de même de la fonction* $U(r, \theta, \varphi)$ *où les nouvelles variables sont définies par rapport aux anciennes au moyen des équations* (16).

Cette remarque, compte tenu des possibilités de permutations circulaires sur les diverses variables, nous permettrait d'énoncer de nouveaux théorèmes à partir de ceux qui ont fait l'objet de ce chapitre.

Comme application nous nous contenterons de remarquer que le résultat du n° **22** peut s'énoncer :

Théorème : *Les trois fonctions*

$$\rho^{-(\lambda+\mu)}P(\lambda\theta, \mu\varphi), \qquad \rho^{-(\lambda+\mu)}Q(\lambda\theta, \mu\varphi), \qquad \rho^{-(\lambda+\mu)}R(\lambda\theta, \mu\varphi),$$

où ρ, θ, φ *sont définis par le changement de variables* (9) *sont trois intégrales de l'équation* $\Delta_3 U = 0$.

Ce résultat a été énoncé pour la première fois par M. P. Humbert [36]; la démonstration que nous venons de donner a fait l'objet d'un exercice proposé par moi-même dans la *Revue de Mathématiques spéciales,* sous le n° 3454.

CHAPITRE II

Un essai de généralisation des fonctions analytiques.

I. — Sur des transformations analogues aux transformations conformes.

24. A l'étude de l'équation de Laplace à deux dimensions se trouve rattachée l'expression

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

carré de la distance entre deux points infiniment voisins.

Il vient tout naturellement à l'idée de rechercher si la quantité

$$ds^3 = dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3dx\,dy\,dz \tag{32}$$

joue un rôle analogue dans le cas actuel.

Effectuons d'abord les changements de variables étudiés au début du chapitre I. Avec les mêmes notations on trouve respectivement les formes

$$ds^3 = du\,dv\,dw, \tag{33}$$

$$ds^3 = d\rho^3 + \rho^3 d\theta^3 + \rho^3 d\varphi^3 - 3\rho^2 d\rho\, d\theta\, d\varphi, \tag{34}$$

$$ds^3 = e^{3r}[dr^3 + d\theta^3 + d\varphi^3 - 3dr\,d\theta\,d\varphi], \tag{34'}$$

$$ds^3 = \frac{1}{\lambda(x, y, z)}[dX^3 + dY^3 + dZ^3 - 3dX\,dY\,dZ], \tag{35}$$

$$ds^3 = d\zeta(d\xi^2 + d\eta^2). \tag{36}$$

Si on se rappelle que le ds^2 euclidien plan prend en coordonnées polaires la forme

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2,$$

on voit que le changement de variables (9) joue par rapport à l'expression ds^3 le même rôle que le passage en coordonnées polaires pour l'expression ds^2.

25. Pour voir si l'analogie entre les deux formes différentielles peut être encore poussée plus loin posons-nous le problème suivant[1].

Problème : *Existe-t-il un ou plusieurs changements de variables*

$$X = X(x, y, z), \qquad Y = Y(x, y, z), \qquad Z = Z(x, y, z)$$

---

[1] Signalons que M. M. Ghermanesco qui s'était posé à ma suite le même problème pour une équation particulière de quatrième ordre l'a résolu récemment [28].

tels que l'on ait l'identité

$$dS^3 = dX^3 + dY^3 + dZ^3 - 3\,dX\,dY\,dZ = \lambda(x, y, z)\,ds^3 \tag{37}$$

$\lambda(x, y, z)$ *étant une fonction de* x, y, z *à déterminer.*

Étant donné la simplicité de la forme (33) nous raisonnerons en variables u, v, w c'est-à-dire que nous résoudrons le problème dont le nouvel énoncé est :

Quels sont les changements de variables

$$u' = u'(u, v, w), \qquad v' = v'(u, v, w), \qquad w' = w'(u, v, w)$$

tels que l'on ait

$$du'\,dv'\,dw' = \Lambda(u, v, w)\,du\,dv\,dw.$$

En remplaçant du', dv', dw' par leurs valeurs et en identifiant les termes en du^3, dv^3, dw^3, $du^2 dv$ ... on est conduit à énoncer que :

Les fonctions u', v', w' *sont des fonctions d'une seule des variables* u, v, w, *les six variables figurant toutes dans la transformation.*

26. Cherchons ce que deviennent les conditions précédentes en variables x, y, z. Les conditions d'annulation de certaines dérivées partielles de u', v', w' vont nous fournir des systèmes aux dérivées partielles pour de nouvelles fonctions.

En faisant toutes les combinaisons possibles des variables $u(1)$, $v(2)$, $w(3)$ nous obtenons les six cas suivants où nous avons posé

$$\begin{cases} u = x + y + z, \\ v = x + j\,y + j^2 z, \\ w = x + j^2 y + j\,z, \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = X + Y + Z, \\ v' = X + j\,Y + j^2 Z, \\ w' = X + j^2 Y + j\,Z. \end{cases}$$

$$(1, 2, 3) \quad (S_1) \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x} = \dfrac{\partial Y}{\partial y} = \dfrac{\partial Z}{\partial z}, \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial z} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{\partial Z}{\partial y}, \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial z} = \dfrac{\partial Z}{\partial x}. \end{cases} \qquad (3, 2, 1) \quad (S_4) \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x} = j\,\dfrac{\partial Z}{\partial y} = j^2 \dfrac{\partial Y}{\partial z}, \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial z} = j\,\dfrac{\partial Z}{\partial x} = j^2 \dfrac{\partial Y}{\partial y}, \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial y} = j\,\dfrac{\partial Z}{\partial z} = j^2 \dfrac{\partial Y}{\partial x}. \end{cases}$$

$$(2, 3, 1) \quad (S_2) \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x} = j^2 \dfrac{\partial Y}{\partial y} = j\,\dfrac{\partial Z}{\partial z}, \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial z} = j^2 \dfrac{\partial Y}{\partial x} = j\,\dfrac{\partial Z}{\partial y}, \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial y} = j^2 \dfrac{\partial Y}{\partial z} = j\,\dfrac{\partial Z}{\partial x}. \end{cases} \qquad (2, 1, 3) \quad (S_5) \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x} = j^2 \dfrac{\partial Z}{\partial y} = j\,\dfrac{\partial Y}{\partial z}, \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial z} = j^2 \dfrac{\partial Z}{\partial x} = j\,\dfrac{\partial Y}{\partial y}, \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial y} = j^2 \dfrac{\partial Z}{\partial z} = j\,\dfrac{\partial Y}{\partial x}. \end{cases}$$

$$(3,1,2)\qquad (S_3)\left\{\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= j\,\frac{\partial Y}{\partial y} = j^2\frac{\partial Z}{\partial z},\\ \frac{\partial X}{\partial z} &= j\,\frac{\partial Y}{\partial x} = j^2\frac{\partial Z}{\partial y},\\ \frac{\partial X}{\partial y} &= j\,\frac{\partial Y}{\partial z} = j^2\frac{\partial Z}{\partial x}.\end{aligned}\right.\qquad (1,3,2)\qquad (S_6)\left\{\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z},\\ \frac{\partial X}{\partial z} &= \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y},\\ \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial x}.\end{aligned}\right.$$

Nous appellerons ces systèmes d'équations([1]), qui généralisent les systèmes de Cauchy dans l'étude des fonctions analytiques, les systèmes (S_i); nous y avons du reste fait déjà allusion aux n^{os} **3**, **10**, **11**.

Dans tous les cas nous aurons les égalités déjà écrites

$$(21)\qquad \lambda(x, y, z) = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^3 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^3 + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^3 - 3\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial z} = \dots .$$

27. On peut du reste montrer que ce facteur $\lambda(x, y, z)$ joue un rôle important dans des questions connexes. Soient en effet d, δ, ϑ trois symboles de différentiation, on voit facilement que si X, Y, Z sont trois intégrales d'un des systèmes (S) on peut écrire

$$(38)\qquad \begin{vmatrix} dX & dY & dZ \\ \delta Z & \delta X & \delta Y \\ \vartheta Y & \vartheta Z & \vartheta X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} & \dfrac{\partial X}{\partial z} \\ \dfrac{\partial X}{\partial z} & \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} \\ \dfrac{\partial X}{\partial y} & \dfrac{\partial X}{\partial z} & \dfrac{\partial X}{\partial x} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \delta z & \delta x & \delta y \\ \vartheta y & \vartheta z & \vartheta x \end{vmatrix}.$$

Nous déduisons de ceci que les transformations du n° **26** conservent à la fois l'expression dS^3 et ses formes polaires

$$(39)\qquad dX[\delta X^2 - \delta Y\,\delta Z] + dY[\delta Y^2 - \delta Z\,\delta X] + dZ[\delta Z^2 - \delta X\,\delta Y],$$

$$(40)\qquad \begin{aligned} &dX[2\delta X\,\vartheta X - \delta Y\,\vartheta Z - \vartheta Y\,\delta Z] + dY[2\delta Y\,\vartheta Y - \delta Z\,\vartheta X - \vartheta Z\,\delta X]\\ &\qquad + dZ[2\delta Z\,\vartheta Z - \delta X\,\vartheta Y - \vartheta X\,\delta Y].\end{aligned}$$

Les expressions

$$\frac{S\,dx(\delta x^2 - \delta y\,\delta z)}{ds(\delta s)^2},\qquad \frac{S\,dx[2\delta x\,\vartheta x - \delta y\,\vartheta z - \vartheta y\,\delta z]}{ds\,\delta s\,\vartheta s},$$

sont donc invariantes pour les transformations considérées.

([1]) Le système (S_4) a été considéré pour la première fois par Appell [1] dans la recherche des familles de surfaces dont les tangentes aux intersections forment un trièdre équifacial ayant pour axe une parallèle à la droite $x = y = z$.

Ceci est une propriété analogue à l'invariance de l'expression

$$\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\;\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}$$

dans les transformations conformes planes.

Cette remarque nous amènera au chapitre suivant à introduire un espace où la nouvelle notion d'angle sera définie à partir de la première des expressions précédentes, la distance de deux points infiniment voisins étant donnée par la racine cubique de ds^3.

Remarque I : X, Y, Z étant toujours intégrales de l'un des systèmes (S), on a aussi l'identité

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix} \mathrm{U} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} & \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} & \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathrm{X}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{Y}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{Z}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{Z}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{X}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{Y}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{Y}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{Z}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{X}} \end{vmatrix} \mathrm{U},$$

ce qui était évident *a priori* puisque le problème que nous avons résolu s'identifie à la recherche des transformations laissant invariant à un facteur près l'opérateur de M. P. Humbert.

Nous retrouvons ici le théorème auquel nous faisions allusion aux nos **3**, **10** et **11**.

Remarque II : Les propriétés d'invariance que nous venons de signaler appartiennent aussi à l'expression

$$(41)\quad d\sigma^3 = (dy\,\delta z - dz\,\delta y)^3 + (dz\,\delta x - dx\,\delta z)^3 + (dx\,\delta y - dy\,\delta x)^3 \\ - 3(dy\,\delta z - dz\,\delta y)(dz\,\delta x - dx\,\delta z)(dx\,\delta y - dy\,\delta x).$$

A cette expression $d\sigma$ pourrait être attachée la notion d'élément d'aire. Si nous effectuons le changement de variables (9), l'expression devient

$$(41')\quad d\sigma^3 = \rho^6(d\theta\,\delta\varphi - d\varphi\,\delta\theta) + \rho^3(d\varphi\,\delta\rho - d\rho\,\delta\varphi) + \rho^3(d\rho\, d\theta - d\theta\,\delta\rho)^3 \\ - 2\rho^4(d\theta\,\delta\varphi - d\varphi\,\delta\theta)(d\varphi\,\delta\rho - d\rho\,\delta\varphi)(d\rho\,\delta\theta - d\theta\,\delta\rho).$$

II. — Une seconde interprétation des systèmes (S).

28. Avant toute chose il est bon de remarquer que toute intégrale de l'un des systèmes aux dérivées partielles du premier ordre (S) est intégrale du système d'équations aux dérivées partielles du second ordre

$$(\Sigma)\begin{cases} D_x U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = 0, \\ D_y U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = 0, \\ D_z U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0, \end{cases}$$

et *a fortiori* de l'équation de M. P. Humbert.

$$\Delta_3 U = \frac{\partial}{\partial x}(D_x U) + \frac{\partial}{\partial y}(D_y U) + \frac{\partial}{\partial z}(D_z U) = 0.$$

Ce système (Σ) intermédiaire entre les systèmes (S) et l'équation $\Delta_3 U = 0$, étant utilisé dans la suite, nous en ferons une étude rapide.

29. Théorème : *En variables u, v, w le système (Σ) prend la forme simple*

$$(\Sigma) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial w} = \frac{\partial^2 U}{\partial w \partial u} = \frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} = 0.$$

On en déduit la forme de l'intégrale générale

$$U = f(u) + g(v) + h(w) \tag{42}$$

où f, g, h sont trois fonctions arbitraires d'une variable.

30. Théorème : *La seule intégrale du système (Σ) qui ne dépend que de p seul est* $\log p$. En effet on a

$$\log p = \log u + \log v + \log w.$$

31. Théorème : *Si $U(x, y, z)$ est une intégrale du système (Σ) il en est de même de la fonction*

$$V(x, y, z) = U\left[\frac{\partial \log p}{\partial x}, \frac{\partial \log p}{\partial y}, \frac{\partial \log p}{\partial z}\right].$$

En effet la transformation considérée qui peut s'écrire

$$uu' = vw' = wv' = 3,$$

transforme l'expression (42) en une expression analogue.

32. La démonstration précédente est encore valable lorsque u', v', w' sont des fonctions d'une seule des variables u, v, w; on peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME : *Si* $U(x, y, z)$ *est une intégrale du système* (Σ) *il en est de même de la fonction*

$$V(x, y, z) = U(X, Y, Z)$$

où X, Y, Z, *sont trois intégrales de l'un des systèmes* (S).

33. THÉORÈME : *La fonction* $\log \lambda(x, y, z)$ *est intégrale du système* (Σ)

34. THÉORÈME : *Les coefficients de* $1, j, j^2$, *dans le développement de* $(x + jy + j^2z)^n$ *sont des intégrales du système* (Σ).

On a vu en effet au n° **13** que ces polynômes s'expriment linéairement en fonction de u^n, v^n, w^n.

On pourrait aussi énoncer des théorèmes analogues à ceux des n^{os} **16** et suivants, mais qui n'offriraient qu'un intérêt très limité.

35. Revenons maintenant aux systèmes aux dérivées partielles (S). Considérons les trois fonctions

$$(43) \qquad \left\{ \begin{aligned} f(x, y, z) &= X(x, y, z) + Y(x, y, z) + Z(x, y, z), \\ g(x, y, z) &= X(x, y, z) + j\,Y(x, y, z) + j^2 Z(x, y, z), \\ h(x, y, z) &= X(x, y, z) + j^2 Y(x, y, z) + j\,Z(x, y, z). \end{aligned} \right.$$

D'après ce que nous avons vu au n° **26**, dire que X, Y, Z sont intégrales d'un système (S) revient à dire que les fonctions f, g, h dépendent chacune d'une seule des variables u, v, w.

Les systèmes (S) jouent donc dans le cas actuel un rôle analogue à celui des systèmes de Cauchy Riemann dans l'étude des fonctions analytiques, *ce qui justifie le titre donné au présent chapitre.*

On dira que les fonctions X, Y, Z intégrales d'un même système (S) forment un *système conjugué*; on pourra toujours, à des permutations près des lettres $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, mettre un tel système sous la forme

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} X(x, y, z) &= \mathcal{F}(u) + \mathcal{G}(v) + \mathcal{H}(w), \\ Y(x, y, z) &= \mathcal{F}(u) + j^2\mathcal{G}(v) + j\,\mathcal{H}(w), \\ Z(x, y, z) &= \mathcal{F}(u) + j\,\mathcal{G}(v) + j^2\mathcal{H}(w), \end{aligned}\right.$$

où $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{G}(v)$, $\mathcal{H}(w)$ sont trois fonctions arbitraires, dérivables.

36. Il est intéressant de confronter la définition que nous venons de donner des fonctions conjuguées avec celle proposée par M. N. Cioranesco [1] pour les équations de Laplace à plusieurs variables, définition que nous allons adapter au cas actuel.

Exprimons que : *la fonction*

$$(45)\quad \Phi(x, y, z) = \log\left[(X+\lambda)^3 + (Y+\mu)^3 + (Z+\nu)^3 - 3(X+\lambda)(Y+\mu)(Z+\nu)\right]$$

où X, Y, Z *sont trois intégrales du système* (Σ) (*ou de l'équation de* M. P. Humbert) *est elle-même intégrale de ce système* (*ou de cette équation*) *quelles que soient les constantes* λ, μ, ν.

Pour simplifier les calculs, il sera bon d'utiliser les variables u, v, w et de considérer la nouvelle fonction

$$(46)\qquad \Psi(u, v, w) = \log\left[(u'+\alpha)(v'+\beta)(w'+\gamma)\right] = \mathbf{S}\log(u'+\alpha).$$

a) Exprimons d'abord que u', v', w', Ψ sont intégrales de (Σ') quelles que soient les constantes α, β, γ. On a

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial u\,\partial v} = \mathbf{S}\frac{\dfrac{\partial^2 u'}{\partial u\,\partial v}}{u'+\alpha} - \mathbf{S}\frac{\dfrac{\partial u'}{\partial u}\,\dfrac{\partial u'}{\partial v}}{(u'+\alpha)^2}.$$

Comme u', v', w' vérifient (Σ') la première somme de Lamé est nulle, en écrivant que Ψ vérifie aussi (Σ') il vient donc

$$\mathbf{S}\frac{\dfrac{\partial u'}{\partial u}\,\dfrac{\partial u'}{\partial v}}{(u'+\alpha)^2} = \mathbf{S}\frac{\dfrac{\partial u'}{\partial v}\,\dfrac{\partial u'}{\partial w}}{(u'+\alpha)^2} = \mathbf{S}\frac{\dfrac{\partial u'}{\partial w}\,\dfrac{\partial u'}{\partial u}}{(u'+\alpha)^2} = 0.$$

Mais ceci doit être vérifié *quelles que soient les constantes* α, β, γ, les neuf numérateurs sont donc nuls, u', v', w' ne sont fonctions que d'une seule variable et X, Y, Z seront de la forme (44).

---

[1] N. Cioranesco, *Sur les fonctions harmoniques conjuguées* (Bull. des Sciences mathématiques, 2e série, 56, 1932, p. 55).

b) Exprimons maintenant que u', v', w', Ψ sont intégrales de (1). En opérant comme plus haut il vient

$$\frac{\partial^3\Psi}{\partial u\partial v\partial w} = \mathrm{S}\frac{\dfrac{\partial^3 u'}{\partial u\partial v\partial w}}{(u'+\alpha)} - \mathrm{S}\frac{\dfrac{\partial^2 u'}{\partial u\partial v}\dfrac{\partial u'}{\partial w} + \dfrac{\partial^2 u'}{\partial v\partial w}\dfrac{\partial u'}{\partial u} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial w\partial u}\dfrac{\partial u'}{\partial v}}{(u'+\alpha)^2}$$
$$+ 2\,\mathrm{S}\frac{\dfrac{\partial u'}{\partial u}\dfrac{\partial u'}{\partial v}\dfrac{\partial u'}{\partial w}}{(u'+\alpha)^3} = 0.$$

Comme u', v', w' vérifient (1) la première somme de Lamé est nulle. En exprimant que la relation est vérifiée quelles que soient les constantes α, β, γ on est amené à annuler *tous* les numérateurs ce qui montre que u', v', w' sont des fonctions de deux des variables u, v, w. Les fonctions X, Y, Z pourront donc se mettre par exemple sous la forme

$$(47)\qquad \begin{cases} \mathrm{X}(x,y,z) = \mathrm{F}(v,w) + \mathrm{G}(w,u) + \mathrm{H}(u,v), \\ \mathrm{Y}(x,y,z) = \mathrm{F}(v,w) + j^2\mathrm{G}(w,u) + j\,\mathrm{H}(u,v), \\ \mathrm{Z}(x,y,z) = \mathrm{F}(v,w) + j\,\mathrm{G}(w,u) + j^2\mathrm{H}(u,v). \end{cases}$$

où $\mathrm{F}(v,w)$, $\mathrm{G}(w,u)$, $\mathrm{H}(u,v)$ sont trois fonctions dérivables arbitraires. Nous dirons encore que X, Y, Z forment un *système conjugué*.

On voit facilement que les fonctions X, Y, Z du système (47) vérifient le système d'équations aux dérivées partielles

$$(\mathrm{S}'_6)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}_x\mathrm{X} = \mathrm{D}_y\mathrm{Z} = \mathrm{D}_z\mathrm{Y}, \\ \mathrm{D}_z\mathrm{X} = \mathrm{D}_x\mathrm{Z} = \mathrm{D}_y\mathrm{Y}, \\ \mathrm{D}_y\mathrm{X} = \mathrm{D}_z\mathrm{Z} = \mathrm{D}_x\mathrm{Y}. \end{cases}$$

Ce système se déduit du système (S_6) par la substitution des opérateurs D_x, D_y, D_z aux opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$, $\dfrac{\partial}{\partial z}$. En opérant la même substitution sur l'ensemble des systèmes (S) on obtient une nouvelle série de systèmes (S'), on pourra donc énoncer le théorème suivant :

Théorème : *Si la fonction* Φ *où* X, Y, Z *sont trois intégrales du système* (Σ) (*ou de l'équation de* M. P. Humbert) *est elle-même intégrale de ce système* (*ou de cette équation*) *quelles que soient les constantes* λ, μ, ν, *c'est que les trois fonctions* X, Y, Z *sont conjuguées, c'est-à-dire intégrales de l'un des systèmes* (S) (*ou de l'un des systèmes* (S')).

37. Remarquons que les intégrales de l'un quelconque des systèmes (S') vérifient le système

$$(\Sigma_1)\qquad D^2_{x^2}U - D^2_{yz}U = D^2_{y^2}U - D^2_{zx}U = D^2_{z^2}U - D^2_{xy}U = 0,$$

et *a fortiori* l'équation

$$\Delta^2_3 U = 0,$$

puisque l'on a l'identité

$$\Delta^2_3 = D^3_{x^3} + D^3_{y^3} + D^3_{z^3} - 3D^3_{xyz}.$$

Signalons encore que dans le cas du n° **26** les dérivées $\dfrac{du'}{du}, \dfrac{dv'}{dv}, \dfrac{dw'}{dw}$ s'expriment linéairement en fonction de $\dfrac{\partial X}{\partial x}, \dfrac{\partial X}{\partial y}, \dfrac{\partial X}{\partial z}$.

III. — Comparaison avec les fonctions harmoniques.

38. On sait que les permutations des lettres x, y, z laissent invariant l'opérateur $\Delta_3 u$, c'est-à-dire géométriquement que la droite $x = y = z$ joue le rôle d'un axe de répétition d'ordre trois. Faisons donc un changement d'axes tel que les nouveaux axes forment un trièdre trirectangle $O\xi\eta\zeta$, le nouveau demi-axe $O\zeta$ étant porté par la droite $x = y = z$. Nous pourrons prendre (cf. G. Bouligand. *Cours de Géométrie analytique*, 2ᵉ éd., p. 35)

$$(48)\quad \begin{cases} \xi = (x + y - 2z)\dfrac{\sin\alpha}{2}, \\ \eta = (y - x)\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha, \\ \zeta = (x + y + z)\cos\alpha. \end{cases} \qquad (49)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\xi}{3\sin\alpha} - \dfrac{\eta}{\sqrt{3}\sin\alpha} + \dfrac{\zeta}{3\cos\alpha}, \\ y = \dfrac{\xi}{3\sin\alpha} + \dfrac{\eta}{\sqrt{3}\sin\alpha} + \dfrac{\zeta}{3\cos\alpha}, \\ z = \dfrac{-2\xi}{3\sin\alpha} + \qquad + \dfrac{\zeta}{3\cos\alpha}. \end{cases}$$

Nous poserons aussi

$$(50)\quad \begin{cases} \mathcal{X} = (X + Y - 2Z)\dfrac{\sin\alpha}{2}, \\ \mathcal{Y} = (Y - X)\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha, \\ \mathcal{Z} = (X + Y + Z)\cos\alpha. \end{cases}$$

Si nous supposons que le trièdre initial $Oxyz$ est aussi trirectangle, l'angle α est alors celui de la diagonale du cube avec les arêtes.

39. Exprimons d'abord u, v, w en fonction de ξ, η, ζ; en utilisant les formules (2) et (49) on trouve

$$(51)\quad \begin{cases} u = x + y + z = \dfrac{\zeta}{\cos\alpha}, \\ v = x + j\,y + j^2 z = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2\sin\alpha}(\xi + i\eta), \\ w = x + j^2 y + j\,z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2\sin\alpha}(\xi - i\eta). \end{cases}$$

Nous nous trouvons, aux coefficients près, devant le changement de variables (22); on déduira de (51) l'identité

$$(52)\quad 4\frac{\partial^3 U}{\partial u\,\partial v\,\partial w} = \cos\alpha\sin^2\alpha\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}\right].$$

40. Exprimons maintenant le système (Σ) en variables ξ, η, ζ; un calcul simple nous donne les relations

$$\begin{cases} D_x = \dfrac{3}{4}\sin^2\alpha\left(\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right) + \dfrac{3}{2}\sin\alpha\cos\alpha\left(\dfrac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\zeta} - \sqrt{3}\dfrac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\zeta}\right), \\ D_y = \dfrac{3}{4}\sin^2\alpha\left(\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right) + \dfrac{3}{2}\sin\alpha\cos\alpha\left(\dfrac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\zeta} + \sqrt{3}\dfrac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\zeta}\right), \\ D_z = \dfrac{3}{4}\sin^2\alpha\left(\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right) - 3\sin\alpha\cos\alpha\dfrac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\zeta}. \end{cases}$$

Le système (Σ) prend donc la forme

$$(\Sigma'')\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial\xi\,\partial\zeta} = \frac{\partial^2 U}{\partial\eta\,\partial\zeta} = 0.$$

L'intégrale générale sera de la forme

$$U = U_1(\zeta) + U_2(\xi, \eta)$$

où $U_1(\zeta)$ est *une fonction de* ζ *seul*, $U_2(\xi, \eta)$ *une fonction harmonique de* ξ, η.

Les fonctions $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ seront de la même forme, ainsi qu'il résulte du système (50).

41. D'une façon plus précise, cherchons par exemple ce que donnent les systèmes (S_1) et (S_6) pour les fonctions $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$.

Dans la première hypothèse on trouve

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial\xi} = \frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial\eta} = \frac{1}{2}\left[2\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial z}\right], \\ &\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial\eta} = -\frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial\xi} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial z}\right], \\ &\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial\zeta} = \frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial\zeta} = \frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\xi} = \frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\eta} = 0, \\ &\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\zeta} = \operatorname{div} X; \end{aligned}\right.$$

on en déduit que

$\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont des fonctions harmoniques conjuguées de ξ, η,
$\mathcal{Z}$ est une fonction de ζ seul.

La seconde hypothèse qui fournit les relations :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial\xi} = -\frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial\eta} = \frac{1}{2}\left[-\frac{\partial X}{\partial x} + 2\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial z}\right], \\ &\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial\eta} = \frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial\xi} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial x}\right], \\ &\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial\zeta} = \frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial\zeta} = \frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\xi} = \frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\eta} = 0, \\ &\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\zeta} = \operatorname{div} X, \end{aligned}\right.$$

nous conduit à un résultat analogue.

Pour les autres systèmes (S_2), (S_3), (S_4), (S_5) la seule relation remarquable est

$$\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\zeta} = \frac{1}{3}(1 + j + j^2)\operatorname{div} X = 0;$$

on en conclut que $\mathcal{Z}$ *est une fonction harmonique de* ξ, η *seuls*, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant des sommes de fonctions harmoniques de ξ, η et de fonctions de ζ.

42. Cherchons maintenant ce que deviennent les systèmes (S′) en variables ξ, η, ζ. Pour cela nous commencerons à interpréter le système (Σ_1) qui s'écrit en posant $\Delta_2 U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}$,

$$(\Sigma_1)\left\{\begin{array}{l}(D^2_{x^2}-D^2_{yz})\,U=\frac{27}{4}\sin^2\alpha\cos\alpha\left\{\cos\alpha\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\sin\alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\zeta}-\sqrt{3}\,\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\zeta}\right)\right\}\Delta_2 U=0,\\ (D^2_{y^2}-D^2_{zx})\,U=\frac{27}{4}\sin^2\alpha\cos\alpha\left\{\cos\alpha\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\sin\alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\zeta}+\sqrt{3}\,\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\zeta}\right)\right\}\Delta_2 U=0,\\ (D^2_{z^2}-D^2_{xy})\,U=\frac{27}{4}\sin^2\alpha\cos\alpha\left\{\cos\alpha\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}-\sin\alpha\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\zeta}\right\}\Delta_2 U=0.\end{array}\right.$$

Ce système prend donc la forme simple

$$(\Sigma'_1)\qquad \frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\zeta}\,\Delta_2 U=\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\zeta}\,\Delta_2 U=\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\,\Delta_2 U=0,$$

il peut se réduire à l'équation unique

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}=A\zeta+V(\xi,\eta).$$

où A est une constante arbitraire et V une fonction arbitraire.

Sous la forme (Σ'_1) on voit grâce à (52) que le système (Σ_1) est vérifié lorsque U est intégrale de l'équation de M. P. Humbert, ce qui était évident *a priori* U étant dans ce cas une somme de fonctions de deux des trois variables u, v, w.

43. D'une façon plus précise, cherchons ce que donnent les systèmes (S'_1) et (S'_2) pour les fonctions x, y, z.

Dans la première hypothèse on trouve

$$D_x\mathcal{X}=\frac{\sin\alpha}{2}[D_x+D_z-2D_y]\,X=-\frac{9}{4}\sin^2\alpha\cos\alpha\left[\frac{\partial^2 X}{\partial\xi\,\partial\zeta}+\sqrt{3}\,\frac{\partial^2 X}{\partial\eta\,\partial\zeta}\right],$$

$$D_y\mathcal{X}=\frac{\sin\alpha}{2}[D_y+D_x-2D_z]\,X=\quad\frac{9}{2}\sin^2\alpha\cos\alpha\,\frac{\partial^2 X}{\partial\xi\,\partial\zeta},$$

$$D_z\mathcal{X}=\frac{\sin\alpha}{2}[D_z+D_y-2D_x]\,X=-\frac{9}{4}\sin^2\alpha\cos\alpha\left[\frac{\partial^2 X}{\partial\xi\,\partial\zeta}-\sqrt{3}\,\frac{\partial^2 X}{\partial\eta\,\partial\zeta}\right],$$

$$D_x\mathcal{Y}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\,[D_z-D_x]\,X=-3\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2\alpha\cos\alpha\left[3\,\frac{\partial^2 X}{\partial\xi\,\partial\zeta}-\sqrt{3}\,\frac{\partial^2 X}{\partial\eta\,\partial\zeta}\right],$$

$$D_y\mathcal{Y}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\,[D_x-D_y]\,X=-\quad\frac{9}{2}\sin^2\alpha\cos\alpha\,\frac{\partial^2 X}{\partial\eta\,\partial\zeta},$$

$$D_z\mathcal{Y}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\,[D_y-D_z]\,X=\quad 3\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2\alpha\cos\alpha\left[3\,\frac{\partial^2 X}{\partial\xi\,\partial\zeta}+\sqrt{3}\,\frac{\partial^2 X}{\partial\eta\,\partial\zeta}\right],$$

$$D_x\mathcal{Z}=D_y\mathcal{Z}=D_z\mathcal{Z}=\cos\alpha\,[D_x+D_y+D_z]\,X=\frac{9}{4}\sin^2\alpha\cos\alpha\left(\frac{\partial^2 X}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial\eta^2}\right).$$

Ce qui nous fournit les relations

$$\left\{\begin{array}{l} D_x\mathcal{X} + D_y\mathcal{X} + D_z\mathcal{X} = 0, \\ D_x\mathcal{Y} + D_y\mathcal{Y} + D_z\mathcal{Y} = 0, \\ D_x\mathcal{X} - D_z\mathcal{X} = \sqrt{3}\, D_y\mathcal{Y}, \\ D_x\mathcal{Y} - D_z\mathcal{Y} = -\sqrt{3}\, D_y\mathcal{X}, \\ D_x\mathcal{Z} = D_y\mathcal{Z} = D_z\mathcal{Z}, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire encore

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial^2\mathcal{X}}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2\mathcal{X}}{\partial\eta^2} = \dfrac{\partial^2\mathcal{Y}}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2\mathcal{Y}}{\partial\eta^2} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\zeta}\left[\dfrac{\partial\mathcal{X}}{\partial\xi} - \dfrac{\partial\mathcal{Y}}{\partial\eta}\right] = \dfrac{\partial}{\partial\zeta}\left[\dfrac{\partial\mathcal{X}}{\partial\eta} + \dfrac{\partial\mathcal{Y}}{\partial\xi}\right] = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\zeta}\left(\dfrac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\xi}\right) = \dfrac{\partial}{\partial\zeta}\left(\dfrac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\eta}\right) = 0. \end{array}\right.$$

La seconde hypothèse nous fournirait de même

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial^2\mathcal{X}}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2\mathcal{X}}{\partial\eta^2} = \dfrac{\partial^2\mathcal{Y}}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2\mathcal{Y}}{\partial\eta^2} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\zeta}\left[\dfrac{\partial\mathcal{X}}{\partial\xi} + \dfrac{\partial\mathcal{Y}}{\partial\eta}\right] = \dfrac{\partial}{\partial\zeta}\left[\dfrac{\partial\mathcal{X}}{\partial\eta} - \dfrac{\partial\mathcal{Y}}{\partial\xi}\right] = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\zeta}\left(\dfrac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\xi}\right) = \dfrac{\partial}{\partial\zeta}\left(\dfrac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\eta}\right) = 0. \end{array}\right.$$

Considérons le premier de ces deux systèmes; la troisième ligne fournit immédiatement

$$\mathcal{Z}(\xi, \eta, \zeta) = \mathcal{Z}_1(\xi, \eta) + \mathcal{Z}_2(\zeta)$$

où $\mathcal{Z}_1(\xi, \eta)$ et $\mathcal{Z}_2(\zeta)$ sont deux fonctions arbitraires.

De la deuxième ligne on déduit

$$\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial\xi} - \frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial\eta} = \psi(\xi, \eta),$$

$$\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial\eta} + \frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial\xi} = \varphi(\xi, \eta),$$

où $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ sont deux fonctions arbitraires; mais de la première ligne on déduit alors

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta} - \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = 0;$$

la fonction $\varphi + i\psi$ *est donc analytique de la variable* $\xi + i\eta$.

Formons encore la *dérivée aréolaire*(¹) de la fonction $\mathcal{X} + i\mathcal{Y}$, on a

$$-\left(\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial\eta} + \frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial\xi}\right) + i\left(\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial\xi} - \frac{\partial\mathcal{Y}}{\partial\eta}\right) = -\varphi + i\psi.$$

Les résultats précédents expriment donc encore que *la dérivée aérolaire de la fonction* $\mathcal{X} + i\mathcal{Y}$ *est une fonction analytique de la variable* $\xi - i\eta$.

Le deuxième groupe de relations nous donnerait des résultats similaires. Les autres systèmes (S'_2), (S'_3), (S'_4), (S'_5) seraient d'interprétation moins simple; remarquons seulement la relation

$$D_x\mathcal{Z} + D_y\mathcal{Z} + D_z\mathcal{Z} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \Delta_2\mathcal{Z} = 0.$$

44. Pour l'équation de M. P. Humbert en utilisant la formule (52) on est conduit à

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} = H(\xi, \eta),$$

où $H(\xi, \eta)$ est une fonction arbitraire,

On peut aussi écrire l'intégrale générale sous la forme

$$U(\xi, \eta, \zeta) = f(\xi + i\eta, \xi - i\eta) + g(\xi + i\eta, \zeta) + h(\xi - i\eta, \zeta),$$

où f, g, h sont trois fonctions arbitraires.

45. Voyons maintenant comment peuvent s'interpréter les fonctions $P(\theta, \varphi)$ $Q(\theta, \varphi)$ $R(\theta, \varphi)$ dans ce système de coordonnées.

En utilisant les formules (8), (9) et (48) on trouve

$$\begin{cases} \xi = R\cos\varpi = -\rho\dfrac{\sin\alpha}{2}[j e^{j\theta + j^2\varphi} + j^2 e^{j^2\theta + j\varphi}], \\ \eta = R\sin\varpi = \quad \rho\dfrac{\sin\alpha}{2\sqrt{3}}[(1 - j^2)e^{j\theta + j^2\varphi} + (1 - j)e^{j^2\theta + j\varphi}], \\ \zeta = \rho\cos\alpha\, e^{\theta + \varphi}. \end{cases}$$

(¹) M. Nicolesco, *Fonctions complexes dans le plan et dans l'espace* (Thèse, Paris, 1928). — N. Théodoresco, *La dérivée aréolaire et ses applications à la Physique mathématique* (Thèse, Paris, 1931).

Tirons R et ϖ de ces formules il vient

$$R^2 = (\xi^2 + \eta^2) = \rho^2 \sin^2 \alpha\, e^{-(\theta+\varphi)}, \tag{53}$$

$$\operatorname{tg} \varpi = \frac{j-1}{j^2\sqrt{3}}\left[\frac{(1+j)\,e^{(j-j^2)(\theta-\varphi)}+1}{j^2 e^{(j-j^2)(\theta-\varphi)}+1}\right] = \frac{1}{i}\left[\frac{e^{i\left[\sqrt{3}(\theta-\varphi)+\frac{4\pi}{3}\right]}-1}{e^{i\left[\sqrt{3}(\theta-\varphi)+\frac{4\pi}{3}\right]}+1}\right],$$

d'où

$$\varpi = \frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi) + \frac{2\pi}{3} + k\pi. \tag{54}$$

On déduit des formules (53) et (54) que les surfaces $\theta + \varphi = c^{te}$ sont des *cônes de révolution* d'axe $O\zeta$ et que les surfaces $\theta - \varphi = c^{te}$ sont des *plans* dont on n'utilisera qu'un demi-plan.

On peut du reste retrouver les expressions $\theta + \varphi$ et $\theta - \varphi$ en exprimant $P(\theta, \varphi)$, $Q(\theta, \varphi)$, $R(\theta, \varphi)$ en fonction des lignes trigonométriques. En remarquant que

$$e^{j\theta+j^2\varphi} = e^{-\frac{\theta+\varphi}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi)},$$

$$e^{j^2\theta+j\varphi} = e^{-\frac{\theta+\varphi}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi)},$$

on trouve

$$\left\{\begin{aligned}
P(\theta,\varphi) &= \frac{e^{\theta+\varphi} + 2e^{-\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)}\cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi)\right]}{3},\\
Q(\theta,\varphi) &= \frac{e^{\theta+\varphi} + 2e^{-\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)}\cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi)+\frac{4\pi}{3}\right]}{3},\\
R(\theta,\varphi) &= \frac{e^{\theta+\varphi} + 2e^{-\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)}\cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi)+\frac{2\pi}{3}\right]}{3},
\end{aligned}\right. \tag{55}$$

ce sont les formules données par Appell [1].

CHAPITRE III

Sur un espace attaché à l'équation de M. P. Humbert.

I. — Les trièdres d'Appell.

46. — Dans les chapitres précédents nous avons vu que dans l'étude actuelle les expressions

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz, \qquad ds^3 = dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3dx\,dy\,dz,$$

et les trois fonctions

$$P(\theta, \varphi), \qquad Q(\theta, \varphi), \qquad R(\theta, \varphi),$$

jouent le même rôle que les expressions

$$x^2 + y^2, \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

et les deux fonctions

$$\cos\theta, \qquad \sin\theta$$

dans l'étude du Laplacien à deux dimensions.

Mais aux quantités $\sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\theta$, $\sin\theta$ sont attachées dans l'espace euclidien à deux dimensions les notions de longueur et d'angle; nous allons de même chercher ici à faire correspondre aux quantités

$$\sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}, \qquad P(\theta, \varphi), \qquad Q(\theta, \varphi), \qquad R(\theta, \varphi)$$

de nouvelles notions de longueur et d'angle et définir un nouvel espace.

47. Définition : *Étant donnés deux points infiniment voisins* $M(x, y, z)$ et $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$ *nous appellerons* distance *entre ces deux points la quantité*

$$ds = \sqrt[3]{dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3dx\,dy\,dz}.$$

Si nous cherchons les courbes qui réalisent entre deux points quelconques le minimum de l'intégrale

$$I = \int ds,$$

le calcul des variations nous fournit le système d'équations différentielles

$$\frac{dy}{dx} = a, \qquad \frac{dz}{dx} = b,$$

où a et b sont deux constantes arbitraires.

Les équations générales de ces courbes peuvent s'écrire

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma},$$

nous leur réserverons le nom de *droites*.

Deux droites dont les coefficients α, β, γ sont proportionnels, les constantes x_0, y_0, z_0 étant différentes seront appelées *droites parallèles*.

Nous appellerons *plan* la surface d'équation

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

où A, B, C, D sont des constantes arbitraires. D'après ce qui précède la génération du plan fera l'objet des mêmes remarques qu'en géométrie euclidienne à trois dimensions.

Revenons à notre notion de longueur.

DÉFINITION : *Étant donnés deux points* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *il passe une droite et une seule par ces deux points; nous appellerons* distance $\overline{M_1M_2}$ *la longueur du segment de droite* $\overline{M_1M_2}$

$$(56) \quad \overline{M_1M_2} = \sqrt[3]{(x_2 - x_1)^3 + (y_2 - y_1)^3 + (z_2 - z_1)^3 - 3(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)}.$$

Cette relation donne lieu à l'identité

$$(57) \qquad \overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_1} = 0.$$

Étant donnés deux points distincts leur distance est en général différente de zéro. Toutefois si les deux points sont choisis dans le plan d'équation

$$x + y + z = \mathrm{c^{te}},$$

leur distance est nulle; la même propriété appartient aux plans d'équation

$$x + jy + j^2 z = \mathrm{c}^{\mathrm{te}},$$

ou

$$x + j^2 y + jz = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}.$$

Ces trois familles de plans jouent donc ici le même rôle que les droites isotropes de l'espace euclidien plan.

Prenons le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$, le lieu des points situés à une distance l de ce point sera la surface d'équation

$$(x - x_0)^3 + (y - y_0)^3 + (z - z_0)^3 - 3(x - x_0)(y - y_0)(z - z_0) = l^3 \tag{58}$$

que nous utiliserons plus loin.

48. Considérons maintenant les fonctions d'Appell $P(\theta, \varphi)$, $Q(\theta, \varphi)$, $R(\theta, \varphi)$ pour lesquelles nous avons déjà donné un certain nombre de formules (cf. (8), (10), (11), (12), (55)). Complétons ces renseignements en donnant les formules d'addition dont nous nous servirons dans la suite

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} P(\theta + \theta', \varphi + \varphi') &= P(\theta, \varphi)\,P(\theta', \varphi') + Q(\theta, \varphi)\,R(\theta', \varphi') + R(\theta, \varphi)\,Q(\theta', \varphi'),\\ Q(\theta + \theta', \varphi + \varphi') &= R(\theta, \varphi)\,R(\theta', \varphi') + P(\theta, \varphi)\,Q(\theta', \varphi') + Q(\theta, \varphi)\,P(\theta', \varphi'),\\ R(\theta + \theta', \varphi + \varphi') &= Q(\theta, \varphi)\,Q(\theta', \varphi') + R(\theta, \varphi)\,P(\theta', \varphi') + P(\theta, \varphi)\,R(\theta', \varphi'); \end{aligned}\right.$$

nous en tirons

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} P(2\theta, 2\varphi) &= P^2(\theta, \varphi) + 2\,Q(\theta, \varphi)\,R(\theta, \varphi),\\ Q(2\theta, 2\varphi) &= R^2(\theta, \varphi) + 2\,P(\theta, \varphi)\,Q(\theta, \varphi),\\ R(2\theta, 2\varphi) &= Q^2(\theta, \varphi) + 2\,R(\theta, \varphi)\,P(\theta, \varphi). \end{aligned}\right.$$

Nous en déduisons de proche en proche les formules d'addition pour trois, quatre... couples d'arguments ainsi que les formules de multiplication correspondantes.

49. Considérons un point $M(a, b, c)$; d'après le changement de variables (9) on peut écrire

$$a = \rho P(\theta, \varphi), \qquad b = \rho Q(\theta, \varphi), \qquad c = \rho R(\theta, \varphi).$$

De la définition du n° **47** on déduit, grâce à l'identité (10), que la distance $\overline{OM}$ est égale à ρ, on peut donc écrire

$$(61)\qquad \begin{cases} P(\theta, \varphi) = \dfrac{a}{\sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}}, \\[2ex] Q(\theta, \varphi) = \dfrac{b}{\sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}}, \\[2ex] R(\theta, \varphi) = \dfrac{c}{\sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}}. \end{cases}$$

On dira que l'on a les *cosinus directeurs d'Appell* de la droite OM. Plus généralement les expressions (61) définissent les cosinus directeurs d'Appell d'une droite de paramètres directeurs a, b, c.

50. Notion d'angle. Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ de composantes respectives a, b, c, a', b', c' ou de cosinus directeurs d'Appell $P(\theta, \varphi)$, $Q(\theta, \varphi)$, $R(\theta, \varphi)$, $P(\theta', \varphi')$, $Q(\theta', \varphi')$, $R(\theta', \varphi')$.

Dans la géométrie euclidienne plane le *cosinus* de l'angle de deux directions joue un rôle important dans l'étude de cet angle, ici nous ferons appel à la fonction P mais cette fonction n'étant pas paire nous considérerons à la fois les deux expressions

$$P(\theta' - \theta, \quad \varphi' - \varphi) \qquad \text{et} \qquad P(\theta - \theta', \quad \varphi - \varphi').$$

En utilisant les formules (11), (59) et (61) on trouvera aisément que

$$(62)\qquad \begin{cases} P(\theta - \theta', \ \varphi - \varphi') = \dfrac{a(a'^2 - b'c') + b(b'^2 - c'a') + c(c'^2 - a'b')}{\sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}\ \sqrt[3]{(a'^3 + b'^3 + c'^3 - 3a'b'c')^2}}, \\[3ex] P(\theta' - \theta, \ \varphi' - \varphi) = \dfrac{a'(a^2 - bc) + b'(b^2 - ca) + c'(c^2 - ab)}{\sqrt[3]{a'^3 + b'^3 + c'^3 - 3a'b'c'}\ \sqrt[3]{(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2}}. \end{cases}$$

Définition : *Nous appellerons* angle de deux directions, *l'ensemble des deux quantités* $\theta - \theta'$, $\varphi - \varphi'$ *définies par les équations* (62) où les *six quantités* a, b, c, a', b', c' *sont connues*.

Remarquons bien que nous ne définissons ainsi que la *figure* de l'angle et non sa *valeur*.

En géométrie euclidienne plane deux directions sont orthogonales lorsque le cosinus de leur angle est nul. Par analogie nous dirons ici que deux directions sont *orthogonales au sens d'Appell* lorsque la double égalité

$$(63)\qquad P(\theta - \theta', \quad \varphi - \varphi') = P(\theta' - \theta, \quad \varphi' - \varphi) = 0$$

est vérifiée.

51. Pour trouver les droites orthogonales au sens d'Appell à une droite donnée, on est ramené à résoudre les équations (63) qui s'écrivent encore

$$
(63') \qquad \begin{cases} a(a'^2 - b'c') + b(b'^2 - c'a') + c(c'^2 - a'b') = 0, \\ a'(a^2 - bc) \ + b'(b^2 - ca) \ + c'(c^2 - ab) = 0, \end{cases}
$$

où a, b, c sont les données, a', b', c' les inconnues.

Or en géométrie euclidienne à trois dimensions la première équation représente un cône du second degré ayant son sommet à l'origine et la seconde un plan passant par l'origine, il y a donc au plus deux solutions réelles. Comme on trouve que les valeurs

$$
(64) \qquad \begin{cases} a' = b, & b' = c, & c' = a, \\ a' = c, & b' = a, & c' = b, \end{cases}
$$

vérifient le système, on en déduit que ce sont les solutions cherchées.

THÉORÈME : *Par un point d'une droite on peut élever à cette droite deux perpendiculaires au sens d'Appell et deux seulement.*

52. Considérons maintenant les trois droites D, D', D'' issues d'un même point et dont les paramètres directeurs sont respectivement

$$
(65) \qquad \begin{cases} \alpha = a, & \beta = b, & \gamma = c, \\ \alpha' = c, & \beta' = a, & \gamma' = b, \\ \alpha'' = b, & \beta'' = c, & \gamma'' = a. \end{cases}
$$

Ces droites prises deux à deux vérifient les équations (63') elles sont donc orthogonales au sens d'Appell, on dira qu'elles constituent un *trièdre trirectangle d'Appell* ou d'une façon plus abrégée un *trièdre d'Appell.*

53. Étudions les changements de coordonnées dans les trièdres d'Appell.

Soit $Oxyz$ le trièdre de référence qui nous a servi jusqu'ici, $Ox'y'z'$ le second trièdre. Les cosinus directeurs de Ox' étant $P(\theta_0, \varphi_0)$, $Q(\theta_0, \varphi_0)$, $R(\theta_0, \varphi_0)$, les cosinus directeurs des autres axes seront donnés par le tableau (65).

La notion de parallélisme étant conservée nous pouvons appliquer le théorème des projections, on en déduit les formules de changement d'axes :

$$
(66) \qquad \begin{cases} x = x'P(\theta_0, \varphi_0) + y'R(\theta_0, \varphi_0) + z'Q(\theta_0, \varphi_0), \\ y = x'Q(\theta_0, \varphi_0) + y'P(\theta_0, \varphi_0) + z'R(\theta_0, \varphi_0), \\ z = x'R(\theta_0, \varphi_0) + y'Q(\theta_0, \varphi_0) + z'P(\theta_0, \varphi_0), \end{cases}
$$

ou encore grâce aux équations (11)

$$(67)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= x\mathrm{P}(-\theta_0, -\varphi_0) + y\mathrm{R}(-\theta_0, -\varphi_0) + z\mathrm{Q}(-\theta_0, -\varphi_0),\\ y' &= x\mathrm{Q}(-\theta_0, -\varphi_0) + y\mathrm{P}(-\theta_0, -\varphi_0) + z\mathrm{R}(-\theta_0, -\varphi_0),\\ z' &= x\mathrm{R}(-\theta_0, -\varphi_0) + y\mathrm{Q}(-\theta_0, -\varphi_0) + z\mathrm{P}(-\theta_0, -\varphi_0).\end{aligned}\right.$$

De l'identité

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y+z)(x+jy+j^2z)(x+j^2y+jz)\\ &= (x'+y'+z')(\mathrm{P}+\mathrm{Q}+\mathrm{R})(x'+jy'+j^2z')(\mathrm{P}+j\mathrm{Q}+j^2\mathrm{R})(x+j^2y+jz)(\mathrm{P}+j^2\mathrm{Q}+j\mathrm{R})\\ &= x'^3 + y'^3 + z'^3 - 3x'y'z', \end{aligned}$$

on déduit que la distance d'un point M à l'origine est invariante par ce changement de variables, il en est évidemment de même de la distance de deux points quelconques.

Considérons maintenant une droite de cosinus directeurs $\mathrm{P}(\theta, \varphi)$, $\mathrm{Q}(\theta, \varphi)$, $\mathrm{R}(\theta, \varphi)$, Un point M de cette droite situé à la distance ρ de l'origine a pour coordonnées dans le trièdre $Oxyz$

$$\rho\mathrm{P}(\theta, \varphi), \qquad \rho\mathrm{Q}(\theta, \varphi), \qquad \rho\mathrm{R}(\theta, \varphi).$$

Ses coordonnées dans le trièdre $Ox'y'z'$ seront en tenant compte des équations (67) et (59)

$$x' = \rho\mathrm{P}(\theta-\theta_0, \varphi-\varphi_0), \qquad y' = \rho\mathrm{Q}(\theta-\theta_0, \varphi-\varphi_0), \qquad z' = \rho\mathrm{R}(\theta-\theta_0, \varphi-\varphi_0).$$

Les arguments des cosinus directeurs d'une droite quelconque se trouvent ainsi tous diminués d'une même quantité θ_0 ou φ_0; on en déduit que l'*angle de deux directions* tel que nous l'avons défini au n° **50** est invariant par le changement de variables (66).

Par analogie avec la géométrie euclidienne plane nous dirons que le système (66) définit une *rotation au sens d'Appell autour de l'origine, d'amplitude* $(\theta_0\ \varphi_0)$.

Le *déplacement le plus général au sens d'Appell* sera défini par les relations

$$(68)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a + x'\mathrm{P}(\theta_0, \varphi_0) + y'\mathrm{R}(\theta_0, \varphi_0) + z'\mathrm{Q}(\theta_0, \varphi_0),\\ y &= b + x'\mathrm{Q}(\theta_0, \varphi_0) + y'\mathrm{P}(\theta_0, \varphi_0) + z'\mathrm{R}(\theta_0, \varphi_0),\\ z &= c + x'\mathrm{R}(\theta_0, \varphi_0) + y'\mathrm{Q}(\theta_0, \varphi_0) + z'\mathrm{P}(\theta_0, \varphi_0),\end{aligned}\right.$$

où les constantes a, b, c, définissent la *grandeur de la translation* et les constantes θ_0, φ_0, l'*amplitude de la rotation.*

La *similitude la plus générale* sera obtenue en multipliant les coefficients $\mathrm{P}(\theta_0, \varphi_0)$, $\mathrm{Q}(\theta_0, \varphi_0)$, $\mathrm{R}(\theta_0, \varphi_0)$ par un même nombre, nous serons alors dans les conditions du n° **12**.

54. Nous venons de voir que les transformations définies par les équations (66) conservent les distances et les angles au sens d'Appell; on pouvait le voir plus rapidement en remarquant qu'elles entrent dans le cadre des transformations étudiées au chapitre II.

Revenons maintenant à ces transformations, et considérons un système d'intégrales

$$X = X(x, y, z), \qquad Y = Y(x, y, z), \qquad Z = Z(x, y, z)$$

de l'un de ces systèmes(¹).

Soient

$$X(x, y, z) = \alpha, \qquad Y(x, y, z) = \beta, \qquad Z(x, y, z) = \gamma$$

où α, β, γ sont des constantes arbitraires, les équations des trois familles de surfaces. Les notions de contact étant évidemment conservées, les équations des plans tangents respectifs en un même point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sont

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial X}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial X}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial X}{\partial z}(z-z_0)=0,\\
&\frac{\partial Y}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial Y}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial Y}{\partial z}(z-z_0)=0,\\
&\frac{\partial Z}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial Z}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial Z}{\partial z}(z-z_0)=0.
\end{aligned}\right.$$

Les arêtes du trièdre formé par ces trois plans ont respectivement comme coefficients directeurs

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial z}-\frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial y}=a,\\
&\frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial z}=b,\\
&\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial x}=c,
\end{aligned}\right.
\qquad
\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial y}=a',\\
&\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial z}=b',\\
&\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial x}=c',
\end{aligned}\right.
\qquad
\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial Y}{\partial y}=a'',\\
&\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial z}=b'',\\
&\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}=c''.
\end{aligned}\right.$$

Si nous posons

$$\mathcal{X}=\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial z}, \qquad \mathcal{Y}=\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2-\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial x}, \qquad \mathcal{Z}=\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2-\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y},$$

(¹) Dans ce qui suit nous n'utiliserons que les systèmes S_1 et S_6 afin de rester dans le domaine réel.

nous en déduisons dans le cas du système (S_1) que les paramètres directeurs peuvent encore s'écrire

$$\begin{cases} \mathfrak{X}, \\ \mathfrak{Y}, \\ \mathfrak{Z}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathfrak{Z}, \\ \mathfrak{X}, \\ \mathfrak{Y}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathfrak{Y}, \\ \mathfrak{Z}, \\ \mathfrak{X}, \end{cases}$$

et dans le cas du système S_6 le même résultat avec échange des deux dernières colonnes [1].

Cela prouve avec les conventions du n° **52** que le trièdre considéré est un trièdre d'Appell. On dira que les familles de surfaces envisagées forment un système *triple orthogonal* au sens d'Appell.

Ces familles de surfaces jouent donc ici le même rôle que les systèmes de courbes isothermes dans l'étude du Laplacien à deux dimensions.

Une famille de surfaces triple orthogonale au sens d'Appell, particulièrement simple, sera celle définie par les équations

$$\rho = a, \qquad \theta = b, \qquad \varphi = c,$$

où ρ est la fonction module, θ et φ les deux fonctions arguments.

Considérons eucore trois familles de surfaces d'équations

$$f_1(x, y, z) = a, \qquad f_2(x, y, z) = b, \qquad f_3(x, y, z) = c,$$

formant un système triple orthogonal, et soient

$$x = \varphi_1(a, b, c), \qquad y = \varphi_2(a, b, c), \qquad z = \varphi_3(a, b, c),$$

les équations résolues par rapport à x. D'après un résultat énoncé par Appell [1] les deux systèmes de familles de surfaces définies par les groupes d'équations

$$\begin{array}{lll} \varphi_1(x, y, z) = \alpha, & \varphi_2(x, y, z) = \beta, & \varphi_3(x, y, z) = \gamma, \\ f_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \alpha', & f_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \beta', & f_3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \gamma', \end{array}$$

constituent encore des systèmes triples orthogonaux.

---

(1) Nous aurions des résultats analogues avec les autres systèmes (S), mais nous verrions apparaître les coefficients $1, j, j^2$ (ce qui ne changerait du reste pas les résultats au point de vue orthogonalité au sens d'Appell, les relations d'orthogonalité étant encore vérifiées).

55. Nous venons de voir que si $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ vérifient un système (S), les trois familles de surfaces d'équations

$$X(x, y, z) = \alpha, \qquad Y(x, y, z) = \beta, \qquad Z(x, y, z) = \gamma \tag{69}$$

constituent un système triple orthogonal au sens d'Appell. Cherchons réciproquement les conditions que doivent vérifier X, Y, Z pour que les équations (69) définissent un système triple orthogonal au sens d'Appell.

D'après ce que nous avons vu au n° **51** nous sommes amenés à écrire avec les notations du n° **54** un système de relations tel que

$$\left\{\begin{aligned} a &= \lambda c'', \\ b &= \lambda a'', \\ c &= \lambda b''. \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} b' &= \mu c'', \\ c' &= \mu a'', \\ a' &= \mu b''. \end{aligned}\right.$$

où λ et μ sont deux fonctions arbitraires[1].

Si l'on remarque que les dérivées de X, Y, Z, par rapport à x, y, z sont tout simplement les mineurs du tableau

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

au coefficient $d = \dfrac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)} \neq 0$ près, on trouve

$$d\frac{\partial X}{\partial x} = b'c'' - c'b'' = \mu(c''^2 - a''b''), \quad d\frac{\partial Y}{\partial x} = b''c - c''b = \lambda(b''^2 - c''a''), \quad d\frac{\partial Z}{\partial x} = bc' - cb' = \lambda\mu(a''^2 - b''c''),$$

$$d\frac{\partial X}{\partial y} = c'a'' - a'c'' = \mu(a''^2 - b''c''), \quad d\frac{\partial Y}{\partial y} = c''a - a''c = \lambda(c''^2 - a''b''), \quad d\frac{\partial Z}{\partial y} = ca' - ac' = \lambda\mu(b''^2 - c''a''),$$

$$d\frac{\partial X}{\partial z} = a'b'' - b'a'' = \mu(b''^2 - c''a''), \quad d\frac{\partial Y}{\partial z} = a''b - b''a = \lambda(a''^2 - b''c''), \quad d\frac{\partial Z}{\partial z} = ab' - ba' = \lambda\mu(c''^2 - a''b'').$$

X, Y, Z vérifient donc le système d'équations aux dérivées partielles

$$(S''_1) \qquad \left\{\begin{aligned} \lambda\frac{\partial X}{\partial x} &= \mu\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z}, \\ \lambda\frac{\partial X}{\partial z} &= \mu\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ \lambda\frac{\partial X}{\partial y} &= \mu\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}. \end{aligned}\right.$$

---

[1] On peut toujours supposer a'', b'', c'' différents à la fois de zéro.

Système déduit de S_1 par multiplication des deux premières colonnes par les facteurs λ, μ [1].

En considérant l'autre hypothèse de proportionnalité des $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ nous trouverions de même un système analogue à (S_6). En ne se restreignant plus au seul domaine réel nous verrions apparaître des systèmes analogues à (S_2), (S_3), (S_4), (S_5), Appelons systèmes (S'') ces systèmes nous pouvons énoncer :

Pour que les équations (69) *définissent un système triple orthogonal au sens d'Appell il faut et il suffit que les fonctions* $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ *vérifient un système* (S'). *Dans le cas où le système* (S'') *se réduit à un système* (S), *on a de plus un système* isotherme *de surfaces.*

On peut du reste montrer que par un changement convenable de fonctions

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(X), \qquad \mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}(Y), \qquad \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(Z),$$

un système (S'') peut se transformer en système (S). Il nous suffira pour cela de montrer que la nouvelle fonction $\mathfrak{X}$ peut être choisie de façon à vérifier le système (Σ).

Exprimons d'abord que le système (S''_1) est compatible; il nous suffira d'écrire que les équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial x}dx + \dfrac{\partial Y}{\partial y}dy + \dfrac{\partial Y}{\partial z}dz = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial Z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial Z}{\partial y}dy + \dfrac{\partial Z}{\partial z}dz = 0, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même, les équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial z}dx + \dfrac{\partial X}{\partial x}dy + \dfrac{\partial X}{\partial y}dz = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial y}dx + \dfrac{\partial X}{\partial z}dy + \dfrac{\partial X}{\partial x}dz = 0, \end{cases}$$

sont complètement intégrables. Nous voyons que X vérifie le système d'équations aux dérivées partielles

$$(70) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x}D_zX + \dfrac{\partial X}{\partial y}D_xX + \dfrac{\partial X}{\partial z}D_yX = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial x}D_yX + \dfrac{\partial X}{\partial y}D_zX + \dfrac{\partial X}{\partial z}D_xX = 0. \end{cases}$$

---

[1] Pour plus de symétrie on pourrait prendre les coefficients λ, μ, ν pour chacune des trois colonnes.

Exprimons maintenant que $\mathcal{X}(X)$ vérifie le système (Σ), nous avons, en posant

$$\delta_x X = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial z} = X_x^2 - X_y X_z, \quad \ldots, \quad \ldots,$$

$$\left\{\begin{array}{l} D_x(\mathcal{X}) = \mathcal{X}'' D_x X + \mathcal{X}' \delta_x X = 0, \\ D_y(\mathcal{X}) = \mathcal{X}'' D_y X + \mathcal{X}' \delta_y X = 0, \\ D_z(\mathcal{X}) = \mathcal{X}'' D_z X + \mathcal{X}' \delta_z X = 0, \end{array}\right.$$

ou

$$\frac{D_x X}{\delta_x X} = \frac{D_y X}{\delta_y X} = \frac{D_z X}{\delta_z X} = -\frac{\mathcal{X}'(X)}{\mathcal{X}''(X)}.$$

D'après les équations aux dérivées partielles vérifiées par X nous savons que les trois premiers rapports sont égaux; soit A leur valeur commune, il nous suffira de montrer que A ne dépend que de X.

Prenons comme expression de A :

$$\frac{\mathbf{S}\, X_x D_x X}{\mathbf{S}\, X_x \delta_x X} = \frac{\mathbf{S}\, D_x X}{\mathbf{S}\, \delta_x X}.$$

En remarquant que $\dfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{S}\, X_x D_y X = \dfrac{\partial}{\partial z}\mathbf{S}\, X_x D_z X = 0$, nous pouvons écrire

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{S}\, X_x D_x X + \dfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{S}\, X_x D_y X + \dfrac{\partial}{\partial z}\mathbf{S}\, X_x D_z X}{\mathbf{S}\, X_x \delta_x X} - \frac{3\,\mathbf{S}\, D_x X\,[X_{x^2}\delta_x X + X_{xy}\delta_y X + X_{xz}\delta_z X]}{\left[\mathbf{S}\, X_x \delta_x X\right]\mathbf{S}\, \delta_x X}$$

$$= \frac{X_x \Delta_3 X + D_x X\, D_x X - D_y X\, D_z X + 3A(\delta_z X\, D_y X - \delta_x X\, D_x X)}{\mathbf{S}\, X_x \delta_x X}$$

$$= \frac{X_x \Delta_3 X + 2A^2[(\delta_x X)^2 - (\delta_y X)(\delta_z X)]}{\mathbf{S}\, X_x \delta_x X} = \left[\frac{\Delta_3 X}{\mathbf{S}\, X_x \delta_x X} + 2A^2\right] X_x.$$

En recommençant le même calcul pour $\frac{\partial A}{\partial y}$ et $\frac{\partial A}{\partial z}$ nous trouverions que

$$\frac{A_x}{X_x} = \frac{A_y}{X_y} = \frac{A_z}{X_z} = 2A^2 + \frac{\Delta_3 X}{\mathrm{S}\, X_x \delta_x X}.$$

Nous avons donc

$$\frac{D(A, X)}{D(y, z)} = \frac{D(A, X)}{D(z, x)} = \frac{D(A, X)}{D(x, y)} = 0$$

et A ne dépend bien que de la seule fonction X ce qui démontre la proposition que nous avions en vue.

56. L'introduction des trièdres d'Appell va pouvoir encore nous donner une interprétation géométrique simple de l'équation de M. P. Humbert, interprétation à rapprocher de celle du Laplacien à deux dimensions.

Considérons d'abord le système (Σ), on peut l'écrire

$$(\Sigma)\begin{cases} D_x U = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0, \\ D_y U = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0, \\ D_z U = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0. \end{cases}$$

Si nous appelons encore tourbillon d'un vecteur $\overrightarrow{V}(X, Y, Z)$ le vecteur de composantes

$$\xi = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \qquad \eta = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad \zeta = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

et que nous posions

$$X = \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{71}$$

le système (Σ) s'écrira

$$\begin{cases} D_x U = \zeta = 0, \\ D_y U = \xi = 0, \\ D_z U = \eta = 0. \end{cases} \tag{72}$$

Si nous posons au contraire

$$(73) \qquad X = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial x},$$

le système (Σ) s'écrira

$$(74) \qquad \begin{cases} D_x U = -\eta = 0, \\ D_y U = -\zeta = 0, \\ D_z U = -\xi = 0. \end{cases}$$

Appelons *rotation orthogonale d'Appell* l'opération consistant à transformer un vecteur $\vec{V}$ en un vecteur de même longueur mais porté par une de ses perpendiculaires d'Appell (cf. n° **51**).

Les vecteurs définis par les composantes (71) ou (73) sont déduits du gradient $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}. \frac{\partial U}{\partial z}$ par une rotation orthogonale d'Appell. Les équations (72) et (74) expriment que les tourbillons des nouveaux vecteurs sont encore nuls, on peut donc énoncer :

THÉORÈME : *Le système* (Σ) *exprime que le champ de vecteur obtenu à partir du champ de gradient de la fonction* U *en effectuant une rotation orthogonale d'Appell est encore un champ de gradient.*

Prenons maintenant l'équation de M. P. Humbert; elle s'écrit ainsi que nous l'avons déjà vu

$$(15) \qquad \Delta_3 U = \frac{\partial}{\partial x}(D_x U) + \frac{\partial}{\partial y}(D_y U) + \frac{\partial}{\partial z}(D_z U) = 0.$$

On exprime ainsi que la divergence du champ de vecteurs ($D_x U$, $D_y U$, $D_z U$) est nulle, c'est-à-dire que ce champ de vecteurs est un champ de tourbillon. Mais en utilisant les calculs (72) et (74) on sait que le champ de vecteurs ($D_x U$, $D_y U$ $D_z U$) est un champ de tourbillon lui-même, on peut donc énoncer :

THÉORÈME : *L'équation de* M. P. Humbert *exprime que le champ de tourbillon du champ de vecteurs obtenu en effectuant une rotation orthogonale d'Appell sur le champ de gradient de la fonction* U, *reste encore un champ de tourbillon lorsqu'on effectue sur lui une rotation orthogonale d'Appell.*

57. Regardons un instant notre espace avec un œil euclidien. Comme nous l'avons vu au n° **45**, les surfaces $\theta + \varphi = c^{te}$ et $\theta - \varphi = c^{te}$ sont respectivement des cônes de révolution ayant leur sommet à l'origine et d'axe commun

$O\zeta(x = y = z)$ et des demis-plans issus de cet axe. Quant aux trièdres d'Appell ils ont leurs arêtes également inclinées sur cet axe, et ils sont équifaciaux.

La forme analytique que nous avons donnée à ces trièdres est plus maniable que celle que l'on aurait dans l'espace euclidien. A un problème euclidien sur ces trièdres il y a donc avantage à substituer un nouveau problème dans notre espace, dont nous interpréterons ensuite la solution.

Nous allons inversement utiliser l'espace euclidien pour rechercher les relations existant entre les arguments θ, φ de deux directions orthogonales au sens d'Appell. Soient les deux droites correspondant aux valeurs θ, φ et θ', φ'; en utilisant les relations (53) et (54) on trouve, les déterminations des arguments étant convenablement choisies

$$\theta + \varphi = \theta' + \varphi',$$
$$\theta - \varphi = \theta' - \varphi' + \frac{4\varepsilon\pi}{3\sqrt{3}}, \qquad \varepsilon^2 = 1$$

d'où l'on tire

$$\theta - \theta' = \frac{2\varepsilon\pi}{3\sqrt{3}}, \qquad \varphi - \varphi' = -\frac{2\varepsilon\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Comme vérification on trouve en utilisant la première formule (55)

$$P(\theta - \theta', \varphi - \varphi') = P(\theta' - \theta, \varphi' - \varphi) = \frac{1}{3}\left[1 + 2\cos\frac{2\varepsilon\pi}{3}\right] = 0.$$

II. — Un essai de théorie des courbes et des surfaces.

58. En géométrie euclidienne plane la normale en un point d'une courbe est la polaire de la tangente par rapport aux deux droites isotropes issues du point de contact. On est tout de suite amené à faire ici quelque chose d'analogue avec les surfaces en remplaçant les deux droites isotropes par les trois plans, jouant le rôle de plans isotropes, que nous avons rencontrés au n° **47**.

Soit la surface d'équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

et un point x_0, y_0, z_0 de cette surface, point que nous choisissons comme origine des coordonnées.

L'équation du plan tangent est

$$Xf'_{x_0} + Yf'_{y_0} + Zf'_{z_0} = 0,$$

et celle de l'ensemble des trois plans isotropes

$$X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ = 0.$$

Passons en coordonnées tangentielles. Le plan tangent a pour coordonnées

$$u_0 = f'_{x_0}, \qquad v_0 = f'_{y_0}, \qquad w_0 = f'_{z_0}, \qquad r_0 = 0,$$

et le cône décomposé en trois plans a pour équation tangentielle [1]

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 0, \\ r = 0. \end{cases}$$

La première polaire du plan tangent par rapport au cône décomposé aura comme équations tangentielles

$$\begin{cases} u_0(u^2 - vw) + v_0(v^2 - wu) + w_0(w^2 - uv) = 0, \\ r = 0; \end{cases}$$

en revenant aux coordonnées ponctuelles on a le cône d'équation

$$(75)\quad \begin{aligned} &(u_0^2 - 4v_0w_0)X^2 + (v_0^2 - 4w_0u_0)Y^2 + (w_0^2 - 4u_0v_0)Z^2 \\ &\quad - 2(2u_0^2 + v_0w_0)YZ - 2(2v_0^2 + w_0u_0)ZX - 2(2w_0^2 + u_0v_0)XY = 0. \end{aligned}$$

La deuxième polaire du plan tangent par rapport au cône décomposé a pour équations tangentielles

$$\begin{cases} (u_0^2 - v_0w_0)u + (v_0^2 - w_0u_0)v + (w_0^2 - u_0v_0)w = 0, \\ r = 0 \end{cases}$$

c'est donc la droite, issue du point considéré x_0, y_0, z_0, ayant pour paramètres directeurs

$$(76)\qquad (f'_{x_0})^2 - f'_{y_0}f'_{z_0}, \qquad (f'_{y_0})^2 - f'_{z_0}f'_{x_0}, \qquad (f'_{z_0})^2 - f'_{x_0}f'_{y_0}.$$

---

[1] Dans les divers calculs nous avons utilisé l'identité (30). Remarquons aussi que les notations u, v, w utilisées ici n'ont rien à voir avec celles des deux premiers chapitres.

59. Lorsque la fonction $f(x, y, z)$ est une intégrale du système (Σ) on peut l'incorporer dans une famille de surfaces formant avec deux autres familles un système triple orthogonal au sens d'Appell. La droite définie par les paramètres (76) est, d'après ce que nous avons vu au n° **54**, l'intersection des plans tangents en (x_0, y_0, z_0) aux deux autres surfaces passant par ce point.

Dans tous les cas le plan tangent à une surface, a une équation vérifiant le système (Σ), on peut donc toujours l'incorporer dans un système triple orthogonal; la droite considérée est alors l'intersection des deux autres plans passant par le point commun. D'après ce que nous avons vu au n° **54**, ces trois plans déterminent un trièdre d'Appell.

Finalement étant donné un plan et un point de ce plan on peut toujours (et cela d'une façon unique) le prendre comme face d'un trièdre d'Appell ayant ce point pour sommet; la troisième arête (non contenue dans le plan) de ce trièdre est la droite définie par les paramètres directeurs (76).

Définition : *Les droites dont les paramètres directeurs sont donnés par les expressions* (76) *où* $f(x, y, z) = 0$ *est l'équation d'un plan, sont dites* normales d'Appell au plan *au point d'intersection. Ces droites sont encore* normales d'Appell *à toutes les surfaces tangentes au plan au point considéré.*

Réciproquement étant donnés une droite et un point de cette droite, il passe par ce point deux perpendiculaires au sens d'Appell à la droite considérée; ces deux droites déterminent le *plan normal d'Appell* en ce point à la droite donnée.

Ceci nous amène à nous poser le problème suivant :

Problème : *Quel est au sommet d'un faisceau plan de droites, l'enveloppe des plans normaux d'Appell à toutes ces droites?*

La théorie des formes polaires nous en donne la solution immédiate, cette enveloppe est la première polaire (75) du plan des droites par rapport au cône isotrope ayant même sommet que le faisceau.

60. Comme application de ce qui précède, cherchons ce qui pourra jouer le rôle de l'*équation normale d'un plan*.

Considérons la droite issue de l'origine d'équations

$$x = \rho P(\theta, \varphi), \qquad y = \rho Q(\theta, \varphi), \qquad z = \rho R(\theta, \varphi),$$

où θ et φ sont deux constantes, ρ la distance à l'origine du point courant. L'équation du plan normal d'Appell issu du point x_0, y_0, z_0 situé à la distance d de l'origine sera

$$\begin{aligned}(x - x_0)[P^2(\theta, \varphi) - Q(\theta, \varphi) R(\theta, \varphi)] + (y - y_0)[Q^2(\theta, \varphi) - R(\theta, \varphi) P(\theta, \varphi)] \\ + (z - z_0)[R^2(\theta, \varphi) - P(\theta, \varphi) Q(\theta, \varphi)] = 0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(x-x_0)\,P(-\theta,-\varphi)+(y-y_0)\,R(-\theta,-\varphi)+(z-z_0)\,Q(-\theta,-\varphi)=0,$$

ou encore

$$xP(-\theta,-\varphi)+yR(-\theta,-\varphi)+zQ(-\theta,-\varphi)=d. \tag{77}$$

On démontrerait de plus très aisément que la plus courte distance (minimum de ρ) de l'origine au plan est justement la longueur d.

61. Faisons maintenant une étude succincte de la surface

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=\rho_0^3 \tag{78}$$

à laquelle nous donnerons le nom de *sphère d'Appell* (1).

On peut, ainsi que l'a fait Appell [1], la représenter paramétriquement par les formules

$$x=\rho_0 P(\theta,\varphi),\qquad y=\rho_0 Q(\theta,\varphi),\qquad z=\rho_0 R(\theta,\varphi). \tag{78'}$$

La normale à la surface au point (x_0, y_0, z_0) a pour paramètres directeurs d'après le paragraphe précédent

$$\left\{\begin{array}{l}(x_0^2-y_0z_0)^2-(y_0^2-z_0x_0)(z_0^2-x_0y_0)=x_0\rho^3,\\ (y_0^2-z_0x_0)^2-(z_0^2-x_0y_0)(x_0^2-y_0z_0)=y_0\rho^3,\\ (z_0^2-x_0y_0)^2-(x_0^2-y_0z_0)(y_0^2-z_0x_0)=z_0\rho^3,\end{array}\right.$$

elle est donc confondue avec le rayon vecteur.

Le plan tangent au point (θ_0, φ_0) aura comme équation

$$xP(-\theta,-\varphi)+yR(-\theta,-\varphi)+zQ(-\theta,-\varphi)=\rho_0. \tag{77'}$$

Prenons maintenant un point $M(x_1, y_1, z_1)$ extérieur à la surface et considérons une sécante variable issue de ce point

$$\left\{\begin{array}{l}x=x_1+a\lambda,\\ y=y_1+b\lambda,\\ z=z_1+c\lambda,\end{array}\right.\qquad (a^3+b^3+c^3-3abc=1).$$

---

(1) Cette surface qui apparaît dans diverses théories porte de ce fait des noms différents, on l'appelle aussi sphère affine, hyperboloïde cubique...

L'équation aux λ des points d'intersection de la sécante et de la surface est

$$(x_1 + a\lambda)^3 + (y_1 + b\lambda)^3 + (z_1 + c\lambda)^3 - 3(x_1 + a\lambda)(y_1 + b\lambda)(z_1 + c\lambda) - \rho_0^3$$
$$= x_1^3 + y_1^3 + z_1^3 - 3x_1y_1z_1 - \rho_0^3 + \lambda[\ldots] + \lambda^2[\ldots] + \lambda^3 = 0.$$

Le produit des trois racines $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ s'écrit donc

(79) $$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \rho_1^3 - \rho_0^3,$$

où ρ_1 est la distance OM. On appellera ce produit *puissance* du point par rapport à la surface. Le lieu des surfaces d'égale puissance sont des sphères d'Appell concentriques.

62. Cette surface peut encore servir à définir une transformation, étudiée par M. D. V. Jonesco [44], analogue à l'inversion dans le plan.

Au point $M(x, y, z)$, faisons correspondre le point $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ défini par les relations

(80) $$\frac{\xi}{x^2 - yz} = \frac{\eta}{y^2 - zx} = \frac{\zeta}{z^2 - xy} = \frac{k}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}.$$

On montre facilement que l'on a les relations

(81) $$\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 - 3\xi\eta\zeta = \frac{k^3}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz},$$

(82) $$\frac{x}{\xi^2 - \eta\zeta} = \frac{y}{\eta^2 - \zeta\xi} = \frac{z}{\zeta^2 - \xi\eta} = \frac{k}{\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 - 3\xi\eta\zeta},$$

ce qui montre les rôles réciproques joués par les points M et μ; on trouve du reste les relations

(83) $$x\xi + y\eta + z\zeta = k,$$

(84) $$(x^2 - yz)(\xi^2 - \eta\zeta) + (y^2 - zx)(\eta^2 - \zeta\xi) + (z^2 - xy)(\zeta^2 - \xi\eta) = k^2.$$

Remarquons aussi que les droites OM, $O\mu$ sont dans un même plan avec l'axe $x = y = z$.

Si nous utilisons les variables u, v, w du chapitre I la transformation s'écrit, ainsi que nous l'avons vu au n° **9**

$$uu' = wv' = vw' = 3,$$

elle fait partie des transformations étudiées au chapitre II.

Exprimons maintenant la transformation au moyen des coordonnées ρ, θ, φ. Le point

$$x = \rho P(\theta, \varphi), \qquad y = \rho Q(\theta, \varphi), \qquad z = \rho R(\theta, \varphi),$$

se transforme en

$$\zeta = \frac{k}{\rho} P(-\theta, -\varphi), \qquad \eta = \frac{k}{\rho} R(-\theta, -\varphi), \qquad \zeta = \frac{k}{\rho} Q(-\theta, -\varphi),$$

c'est-à-dire encore

$$\xi = \frac{k}{\rho} P(-\varphi, -\theta), \qquad \eta = \frac{k}{\rho} Q(-\varphi, -\theta), \qquad \zeta = \frac{k}{\rho} R(-\varphi, -\theta).$$

Les équations de la transformation peuvent donc s'écrire

$$(85) \qquad P = \frac{k}{\rho}, \qquad \Theta = -\varphi, \qquad \Phi = -\theta,$$

ce qui montre clairement que la transformation échange les surfaces concentriques $\rho = c^{te}$ sauf une qui est laissée invariante; sur cette dernière surface les courbes $\theta = c^{te}$, $\varphi = c^{te}$ (qui sont des asymptotiques ainsi que l'a montré Appell [1]) s'échangent. Sur cette surface la transformation revient du reste à une sorte de symétrie par rapport à la courbe d'équation

$$\theta + \varphi = 0.$$

63. Disons maintenant un mot des courbes gauches. Considérons une courbe gauche donnée par les expressions des coordonnées du point courant en fonction de l'abscisse curviligne

$$(86) \qquad x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad z = z(s);$$

les cosinus directeurs de la *tangente* seront [1]

$$(87) \qquad \alpha = \frac{dx}{ds} = x', \qquad \beta = \frac{dy}{ds} = y' \qquad \gamma = \frac{dz}{ds} = z'$$

avec

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = 1.$$

([1]) Nous utilisons ainsi la sphère d'Appell comme indicatrice; nous avons donc ici une *mesure* de l'angle élémentaire au moyen d'arc élémentaire de l'indicatrice de rayon unité.

Le *plan normal d'Appell* aura pour équation

$$(88) \qquad (x'^2 - y'z')(X - x) + (y'^2 - z'x')(Y - y) + (z'^2 - x'y')(Z - z) = 0.$$

Pour le plan *osculateur*, comme la théorie du contact est encore valable, son équation est

$$(89) \qquad (y'z'' - y''z')(X - x) + (z'x'' - z''x')(Y - y) + (x'y'' - x''y')(Z - z) = 0.$$

L'intersection des deux plans sera la droite de coefficients directeurs (¹)

$$x'', \qquad y'', \qquad z''$$

on l'appellera *normale principale* à la courbe.

Si α', β', γ' sont les cosinus directeurs de cette normale, on aura d'après ce qui précède les formules de Frenet (²)

$$(90) \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{R}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R},$$

avec

$$(91) \qquad \frac{1}{R^3} = x''^3 + y''^3 + z''^3 - 3x''y''z''.$$

Si nous considérons maintenant la courbe comme trajectoire d'un certain mouvement d'équations

$$(92) \qquad x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

on aura en posant

$$v = \frac{ds}{dt},$$

$$(93) \qquad x' = \alpha v, \qquad y' = \beta v, \qquad z' = \gamma v,$$

$$(94) \qquad x'' = \alpha' \frac{v^2}{R} + \alpha \frac{dv}{dt}, \qquad y'' = \beta' \frac{v^2}{R} + \beta \frac{dv}{dt}, \qquad z'' = \gamma' \frac{v^2}{R} + \gamma \frac{dv}{dt};$$

l'*accélération* Γ peut donc ici encore être considérée comme résultant d'une *accélération tangentielle* $\Gamma_t = \dfrac{dv}{dt}$ et d'une *accélération normale* $\Gamma_n = \dfrac{v^2}{R}$.

(¹) Nous avons utilisé les deux identités

$$x'^3 + y'^3 + z'^3 - 3x'y'z' = 1,$$
$$x''(x'^2 - y'z') + y''(y'^2 - z'x') + z''(z'^2 - x'y') = 0.$$

(²) Nous pourrions étudier aussi la variation du plan osculateur afin d'introduire quelque chose d'analogue à la torsion, mais les calculs sont rapidement inextricables.

64. Comme exemple de courbe, prenons une courbe $\theta = \theta_0$ sur une surface $\rho = \rho_0$. On a les équations paramétriques

$$(95) \qquad x = \rho_0 P(\theta_0, \varphi), \qquad y = \rho_0 Q(\theta_0, \varphi), \qquad z = \rho_0 R(\theta_0, \varphi)$$

on en déduit

$$(96) \qquad \alpha = Q(\theta_0, \varphi), \qquad \beta = R(\theta_0, \varphi), \qquad \gamma = P(\theta_0, \varphi)$$

car

$$ds = \rho_0 d\varphi.$$

L'équation du plan normal sera

$$R(-\theta_0, -\varphi)(X - x) + Q(-\theta_0, -\varphi)(Y - y) + P(-\theta_0, -\varphi)(Z - z) = 0$$

ou en remplaçant x, y, z par leurs valeurs

$$(97) \qquad R(-\theta_0, -\varphi)X + Q(-\theta_0, -\varphi)Y + P(-\theta_0, -\varphi)Z = 0$$

ce plan passe donc par l'origine.

La normale principale a pour cosinus directeurs

$$(98) \qquad \alpha' = R(\theta_0, \varphi), \qquad \beta' = P(\theta_0, \varphi), \qquad \gamma' = Q(\theta_0, \varphi)$$

d'après ce que nous avons vu au n° **51**, cette normale est donc orthogonale au sens d'Appell au rayon vecteur, ce qui montre que le plan osculateur à la courbe est le plan tangent à la surface $\rho = \rho_0$. Les courbes $\theta = \theta_0$ sont donc (tout comme dans l'espace euclidien à trois dimensions) des lignes asymptotiques de la surface $\rho = \rho_0$. Pour le rayon de courbure on voit facilement qu'il est constamment égal à ρ_0. Les mêmes propriétés appartiennent évidemment aux courbes $\varphi = \varphi_0$.

65. Revenons encore à la sphère d'Appell sur laquelle se trouve tracé le réseau des courbes $\theta = c^{te}$, $\varphi = c^{te}$. D'après ce que nous avons vu au n° **54**, ce réseau de courbes est un réseau orthogonal (puisque les familles de surfaces $\rho = a$, $\theta = b$, $\varphi = c$ forment un système triple orthogonal).

La distance de deux points infiniment voisins est donnée par la formule

$$(99) \qquad ds = \sqrt[3]{\rho_0^3(d\theta^3 + d\varphi^3)},$$

ainsi qu'on le voit en faisant $\rho = \rho_0$ dans la formule (34). On voit facilement que la *distance géodésique* entre deux points distincts $M_1(\theta_1, \varphi_1)$, $M_2(\theta_2, \varphi_2)$ est donnée de même par la formule

$$\widehat{M_1 M_2} = \rho_0 \sqrt[3]{(\theta_2 - \theta_1)^3 + (\varphi_2 - \varphi_1)^3}. \tag{100}$$

Mais si l'on considère de même le plan xOy d'un trièdre d'Appell (tout plan peut répondre à la question) la distance de deux points infiniment voisins est donnée par

$$ds = \sqrt[3]{dx^3 + dy^3}, \tag{101}$$

et l'on a pour deux points distincts $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$

$$\overline{M_1 M_2} = \sqrt[3]{(x_2 - x_1)^3 + (y_2 - y_1)^3}. \tag{102}$$

On peut donc établir une correspondance ponctuelle entre la sphère d'Appell et un plan. Prenons par exemple

$$x = \rho_0 \theta, \qquad y = \rho_0 \varphi; \tag{103}$$

les mesures de longueur sur le plan et sur la surface seront les mêmes.

Considérons maintenant deux courbes de la surface et leur représentation plane et cherchons si l'angle d'Appell de ces deux courbes est le même que celui de leurs représentations. Nous pouvons sans nuire à la généralité supposer ces courbes issues du point $\theta = \varphi = 0$, leurs équations seront alors

$$\theta = \lambda \varphi, \qquad \theta = \mu \varphi, \tag{104}$$

et l'on aura d'après (12) et (78') sur l'une et l'autre courbes

$$\left\{\begin{aligned} dx &= (\lambda R + Q)\, d\varphi, \\ dy &= (\lambda P + R)\, d\varphi, \\ dz &= (\lambda Q + P)\, d\varphi. \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \delta x &= (\mu R + Q)\, \delta\varphi, \\ \delta y &= (\mu P + R)\, \delta\varphi, \\ \delta z &= (\mu Q + P)\, \delta\varphi. \end{aligned}\right. \tag{105}$$

et les expressions (62) sont respectivement égales à

$$\frac{1 + \lambda\mu^2}{\sqrt[3]{1 + \lambda^3}\,\sqrt[3]{(1 + \mu^3)^2}}, \qquad \frac{1 + \lambda^2\mu}{\sqrt[3]{(1 + \lambda^3)^2}\,\sqrt[3]{1 + \mu^3}}. \tag{106}$$

Pour la représentation plane on aura

$$dx = \lambda dy, \qquad dy = dy, \qquad dz = 0,$$
$$\delta x = \mu \delta y, \qquad \delta y = \delta y, \qquad \delta z = 0,$$

et le calcul des expressions (62) redonne les expressions (106).

On exprimera cette conservation des distances et des angles en énonçant :

THÉORÈME : *La sphère d'Appell est* applicable *sur tout plan de l'espace.*

On déduit de cela sans calcul que les géodésiques de la surface sont les courbes d'équation

$$a\theta + b\varphi + c = 0. \tag{107}$$

où a, b, c sont des constantes arbitraires.

REMARQUE : Ajoutons que si nous prenions comme élément d'aire l'expression $d\sigma$ définie au n° **27**, la transformation définie par (103) établit une correspondance à aires égales entre le plan et la sphère d'Appell.

III. — Comparaison avec l'espace de Finsler-Cartan.

66. Dans les différents paragraphes qui précèdent nous avons cherché à généraliser la géométrie euclidienne plane en substituant à l'expression ordinaire de la distance de deux points infiniment voisins la nouvelle expression

$$ds = \sqrt[3]{dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3\,dx\,dy\,dz}. \tag{108}$$

De nombreux essais de généralisations ont déjà été tentés par d'autres auteurs parmi lesquels nous citerons MM. P. Finsler, L. Berwald... Je voudrais dans les lignes qui vont suivre voir en quoi le point de vue Finslérien tel que l'entend M. E. Cartan[1] diffère du point de vue que j'ai considéré.

Remarquons tout d'abord que les notions de normales coïncident; en effet la sphère d'Appell est extrémale à la gerbe de droites issues de l'origine lorsque l'on prend comme ds l'expression (108), la normale de Finsler à la sphère d'Appell est donc encore le rayon vecteur. On en déduit évidemment que la direction de la normale est la même pour toute surface dans les deux espaces.

---

[1] *Sur les espaces de Finsler* (Comptes Rendus, 196, 1933, p. 584).

67. Étudions la sphère d'Appell $\rho = 1$ au sens Finslérien, nous aurons(¹) en coordonnées ρ, θ, φ

$$\mathcal{L}^3 = \dot{\rho}^3 + \rho^3\dot{\theta}^3 + \rho^3\dot{\varphi}^3 - 3\rho^2\dot{\rho}\dot{\theta}\dot{\varphi}, \tag{109}$$

avec sur la surface(²)

$$\rho = \dot{\rho} = 1, \qquad \dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0.$$

Nous tirons de (109) les relations

$$\left\{\begin{aligned} (\mathcal{L})^2\mathcal{L}_{;1} &= \dot{\rho}^2 - \rho^2\dot{\theta}\dot{\varphi}, \\ (\mathcal{L})^2\mathcal{L}_{;2} &= \rho^3\dot{\theta}^2 - \rho^2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \\ (\mathcal{L})^2\mathcal{L}_{;3} &= \rho^3\dot{\varphi}^2 - \rho^2\dot{\rho}\dot{\theta}. \end{aligned}\right. \tag{110}$$

En utilisant l'indice zéro pour représenter les valeurs prises sur la sphère d'Appell, nous aurons

$$(\mathcal{L})_0 = (\mathcal{L}_{;1})_0 = 1, \qquad (\mathcal{L}_{;2})_0 = (\mathcal{L}_{;3})_0 = 0.$$

Nous aurons ensuite en dérivant convenablement les relations (110)

$$\left\{\begin{aligned} (\mathcal{L})^2\mathcal{L}_{;1;1} + 2\mathcal{L}(\mathcal{L}_{;1})^2 &= 2\dot{\rho}, \\ (\mathcal{L})^2\mathcal{L}_{;2;2} + 2\mathcal{L}(\mathcal{L}_{;2})^2 &= 2\rho^3\dot{\theta}, \\ (\mathcal{L})^2\mathcal{L}_{;3;3} + 2\mathcal{L}(\mathcal{L}_{;3})^2 &= 2\rho^3\dot{\varphi}, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} (\mathcal{L})^2\mathcal{L}_{;2;3} + 2\mathcal{L}\mathcal{L}_{;2}\mathcal{L}_{;3} &= -\rho^2\dot{\rho}, \\ (\mathcal{L})^2\mathcal{L}_{;3;1} + 2\mathcal{L}\mathcal{L}_{;3}\mathcal{L}_{;1} &= -\rho^2\dot{\theta}, \\ (\mathcal{L})^2\mathcal{L}_{;1;2} + 2\mathcal{L}\mathcal{L}_{;1}\mathcal{L}_{;2} &= -\rho^2\dot{\varphi}, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(\mathcal{L}_{;2;3})_0 = -1, \qquad (\mathcal{L}_{;1;1})_0 = (\mathcal{L}_{;2;2})_0 = (\mathcal{L}_{;3;3})_0 = (\mathcal{L}_{;3;1})_0 = (\mathcal{L}_{;1;2})_0 = 0.$$

Sur la sphère d'Appell la forme angulaire sera donc donnée par

$$\left[\sum \frac{1}{\mathcal{L}}\mathcal{L}_{;i;j}\,d\dot{x}^i\,d\dot{x}^j\right]_0 = \frac{2}{(\mathcal{L})_0}(\mathcal{L}_{;2;3})_0\,d\dot{\theta}\,d\dot{\varphi} = -2\,d\dot{\theta}\,d\dot{\varphi}.$$

(¹) Nous utilisons les notations de la note citée; par exemple $F_{;1} = \dfrac{\partial F}{\partial \dot{\rho}}$, $F_{;2} = \dfrac{\partial F}{\partial \dot{\theta}}$, $F_{;3} = \dfrac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}}$.

(²) Les mesures sont rapportées au repère naturel mobile en coordonnées ρ, θ, φ l'élément d'appui étant dirigé suivant le rayon vecteur.

Comme sur la sphère d'Appell $\rho = 1$, les $d\dot{\theta}$, $d\dot{\varphi}$ sont égaux aux $d\theta$, $d\varphi$ (¹), nous voyons ainsi que notre notion d'angle est profondément différente de celle de Finsler-Cartan puisque l'une revient à considérer $d\theta^2 + d\varphi^2$ et l'autre $d\theta d\varphi$.

Cette différence de théorie apparaît à nouveau si l'on étudie la géométrie intrinsèque de la sphère d'Appell.

Comme

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\mathfrak{L}^2)}{\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^j} = \mathfrak{L}\mathfrak{L}_{;\,i;\,j} + \mathfrak{L}_{;\,i}\mathfrak{L}_{;\,j},$$

on trouve facilement que

$$(g_{11})_0 = 1, \qquad (g_{23})_0 = -1; \qquad (g_{22})_0 = (g_{33})_0 = (g_{31})_0 = (g_{12})_0 = 0$$

d'où

$$ds^2 = -2\,d\theta\,d\varphi.$$

Au point de vue Finsler-Cartan la géométrie intrinsèque de la sphère d'Appell est celle du *plan euclidien*; à notre point de vue c'est la *géométrie plane de notre espace* (²).

68. Calculons maintenant la seconde forme fondamentale de la sphère d'Appell. Nous pouvons très simplemeut montrer, ainsi que nous l'a signalé M. E. Cartan, que cette seconde forme est égale au signe près au ds^2. Pour cela utilisons les variables u, v, w, on a alors

$$\mathfrak{L}^3 = \dot{u}\dot{v}\dot{w},$$

d'où l'on déduit facilement que tous les Γ_{ijk} sont nuls, ce qui nous amène à calculer

$$-\sum dl_i\,du^i,$$

avec

$$l_i = \mathfrak{L}_{;\,i}.$$

(¹) Ici les mesures se rapportent à un repère fixe.

(²) On peut encore faire apparaître la différence entre les deux notions d'angle en utilisant la remarque suivante que m'a communiquée M. E. Cartan. Si trois droites issues de l'origine constituent un trièdre d'Appell, deux quelconques d'entre elles sont parallèles aux tangentes aux courbes $\theta = c^{te}$, $\varphi = c^{te}$ passant par le point d'intersection de la troisième et d'une sphère d'Appell ayant son centre à l'origine. Au point de vue Finslérien ceci exprime que lorsque l'on fait les mesures en prenant l'une des droites comme droite d'appui, les deux autres sont orthogonales avec la première et isotropes.

Mais le long de la sphère d'Appell nous avons

$$\mathcal{L} = 1, \qquad du = d\dot{u}, \qquad dv = d\dot{v}, \qquad dw = d\dot{w};$$

l'expression cherchée s'écrit donc

$$-\left[\sum \mathcal{L}_{;i;j}\, du^i\, du^j\right]_0,$$

et elle est égale au signe près $[(\mathcal{L})_0 = 1]$ à la forme angulaire, c'est-à-dire encore au ds^2.

On déduit de ce résultat que les *lignes asymptotiques* sont les courbes $\theta = c^{te}$, $\varphi = c^{te}$ (comme à notre point de vue). Les *lignes de courbure* sont indéterminées, les *rayons de courbure principaux* sont égaux à l'unité (le centre de courbure est ici l'origine).

CHAPITRE IV

Sur de nouvelles familles de polynômes.

I. — Généralisation des polynômes de Legendre et Gegenbauer.

69. On connaît le rôle important joué en analyse par l'expression

$$(111)\qquad (1 - he^{i\theta})(1 - he^{-i\theta}) = 1 - 2h\cos\theta + h^2,$$

M. P. Humbert et moi-même avons eu l'idée de généraliser cette expression en considérant le produit

$$(112)\qquad \begin{aligned}&(1 - he^{\theta+\varphi})(1 - he^{j\theta+j^2\varphi})(1 - he^{j^2\theta+j\varphi})\\ &\qquad = 1 - 3hP(\theta, \varphi) + 3h^2P(-\theta, -\varphi) - h^3.\end{aligned}$$

J'ai enfin considéré aussi le produit plus compliqué

$$(113)\qquad \begin{aligned}&(1 - he^{\theta} - ke^{\varphi})(1 - he^{j\theta} - ke^{j^2\varphi})(1 - he^{j^2\theta} - ke^{j\varphi})\\ &\quad = 1 - 3hP(\theta, 0) - 3kP(0, \varphi)\\ &\qquad + 3h^2P(-\theta, 0) + 3hk[3P(\theta, 0)P(0, \varphi) - P(\theta, \varphi)] + 3k^2P(0, -\varphi)\\ &\qquad\qquad - h^3 - 3h^2kP(-\theta, \varphi) - 3hk^2P(\theta, -\varphi) - k^3.\end{aligned}$$

Nous allons dans ce chapitre passer en revue un certain nombre de propriétés des expressions (112) et (113) généralisant celles classiques de l'expression (111).

70. On sait que le logarithme de l'expression (111) est la fonction génératrice de $\cos n\theta$

$$(114)\qquad -\log(1 - 2h\cos\theta + h^2) = \sum_n \frac{2h^n}{n}\cos n\theta.$$

Généralisant ce résultat M. P. Humbert a montré [41] que

$$(115)\qquad -\log[1 - 3hP(\theta, \varphi) + 3h^2P(-\theta, -\varphi) - h^3] = \sum_n \frac{3h^n}{n}P(n\theta, n\varphi).$$

J'ai moi-même complété ce résultat en montrant [20] que le logarithme de l'expression (113) est fonction génératrice pour $P(m\theta, n\varphi)$ et donne lieu à l'identité

$$
\begin{aligned}
(116)\quad -\log\{ & 1 - 3hP(\theta, 0) - 3kP(0, -\varphi) \\
& + 3h^2P(-\theta, 0) + 3hk[3P(\theta, 0)P(0, \varphi)] - P(\theta, \varphi)] + 3k^2P(0, -\varphi) \\
& - h^3 - 3h^2kP(-\theta, \varphi) - 3hk^2P(\theta, -\varphi) - k^3\} \\
& = \sum_m \sum_n \frac{3}{m+n} C^n_{m+n} h^m k^n P(m\theta, n\varphi).
\end{aligned}
$$

71. Considérons maintenant la fonction génératrice

$$(117)\qquad [1 - 3hx + 3h^2y - h^3]^{-\nu}$$

qui généralise celle de Legendre et Gegenbauer et qui admet comme cas particulier celles qu'ont étudiées MM. Pincherle, P. Humbert et Bevan Baker [46, 31, 3].

Posons

$$(118)\qquad V = [1 - 3hx + 3h^2y - h^3]^{-\nu} = \sum_n h^n C^\nu_n(x, y).$$

On en déduit immédiatement les identités

$$(119)\qquad (1 - 3hx + 3h^2y - h^3)\frac{\partial V}{\partial h} = 3\nu(x - 2hy + h^2)V,$$

$$(120)\qquad h\frac{\partial V}{\partial h} = (x - 2hy + h^2)\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$(121)\qquad -h^2\frac{\partial V}{\partial h} = (x - 2hy + h^2)\frac{\partial V}{\partial y}.$$

$$(122)\qquad h\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

En identifiant les coefficients de h^n on trouve

$$(123)\quad (n+1)C^\nu_{n+1} - 3(n+\nu)xC^\nu_n + 3(n-1+2\nu)yC^\nu_{n-1} - (n-2+3\nu)C^\nu_{n-2} = 0,$$

$$(124)\qquad nC^\nu_n = x\frac{\partial C^\nu_n}{\partial x} - 2y\frac{\partial C^\nu_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial C^\nu_{n-2}}{\partial x},$$

$$(125)\qquad -(n-1)C^\nu_{n-1} = x\frac{\partial C^\nu_n}{\partial y} - 2y\frac{\partial C^\nu_{n-1}}{\partial y} + \frac{\partial C^\nu_{n-2}}{\partial y},$$

$$(126)\qquad \frac{\partial C^\nu_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial C^\nu_n}{\partial y} = 0.$$

Ces diverses identités ont lieu entre polynômes de même indice ν. Si on lève cette restriction on peut écrire les identités de formes simples généralisant les identités classiques relatives aux polynômes de Gegenbauer (cf. WITTAKER AND WATSON : *A course of Modern Analysis*, 4° éd., 1927, 1930). On peut écrire par exemple

$$\frac{\partial C_n^\nu}{\partial x} = 3\nu C_{n-1}^{\nu+1}, \qquad \frac{\partial C_n^\nu}{\partial y} = -3\nu C_{n-2}^{\nu+1}, \tag{127}$$

on en déduit les relations[1]

$$C_n^\nu = \frac{1}{3^\nu.\nu!}\frac{\partial^\nu C_{n+\nu}^0}{\partial x^n} = \frac{(-1)^\nu}{3^\nu.\nu!}\frac{\partial^\nu C_{n+2\nu}^0}{\partial y^\nu} = \frac{(-1)^\mu}{3^\nu.\nu!}\frac{\partial^{\lambda+\mu=\nu}}{\partial x^\lambda \partial y^\mu} C_{n+\lambda+2\mu}. \tag{128}$$

$$\frac{\partial^\alpha C_n^\nu}{\partial y^\alpha} = (-1)^\alpha \frac{\partial^\alpha C_{n-\alpha}^\nu}{\partial x^\alpha}. \tag{129}$$

En utilisant les relations (123), (124), (125) on peut obtenir de nouvelles identités; (124) par exemple s'écrit, en tenant compte des relations précédentes

$$x C_{n-1}^{\nu+1} - 2y C_{n-2}^{\nu+1} + C_{n-3}^{\nu+1} - \frac{n}{3\nu} C_n^\nu = 0. \tag{130}$$

Dérivons (123) par rapport à y[2] et tenons compte de la deuxième relation (127) on a

$$(n+1) C_{n-1}^{\nu+1} - 3(n+\nu)x C_{n-2}^{\nu+1} + 3(n-1+2\nu)y C_{n-3}^{\nu+1} - (n-2+3\nu) C_{n-4}^{\nu+1} - \frac{n-1+2\nu}{\nu} C_{n-1}^\nu = 0$$

ou

$$(n+2) C_n^{\nu+1} - 3(n+1+\nu)x C_{n-1}^{\nu+1} + 3(n+2\nu)y C_{n-2}^{\nu+1} - (n-1+3\nu) C_{n-3}^{\nu+1} - \frac{n+2\nu}{\nu} C_n^\nu = 0. \tag{131}$$

ce qui donne en remplaçant $C_{n-3}^{\nu+1}$ par sa valeur tirée de (130) et en divisant par $(n+2)$

$$C_n^{\nu+1} - 2x C_{n-1}^{\nu+1} + y C_{n-2}^{\nu+1} - \frac{n+3\nu}{3\nu} C_n^\nu = 0, \tag{132}$$

ou encore

$$C_{n-1}^{\nu+1} - 2x C_{n-2}^{\nu+1} + y C_{n-3}^{\nu+1} - \frac{n-1+3\nu}{3\nu} C_{n-1}^\nu = 0. \tag{132'}$$

---

[1] D'après les notations classiques $-\log(1 - 3hx + 3h^2y - h^3) = \sum h^n C_n^0(x, y)$.

[2] En dérivant par rapport à x on trouverait les mêmes identités.

En éliminant $C_{n-1}^{\nu+1}$ entre (130) et (132') il vient

$$(133)\qquad \frac{n\,C_n^{\nu}}{3\nu} = \left(\frac{(n-1+3\nu)}{3\nu}\right) x\,C_{n-1}^{\nu} - 2(y-x^2)\,C_{n-2}^{\nu+1} + (1-xy)\,C_{n-3}^{\nu+1}.$$

En éliminant $C_{n-3}^{\nu+1}$ on a d'autre part

$$(134)\qquad (xy-1)\,C_{n-1}^{\nu+1} - 2(y^2-x)\,C_{n-2}^{\nu+1} - \frac{n}{3\nu}\,y\,C_n^{\nu} + \frac{n-1+3\nu}{3\nu}\,C_{n-1}^{\nu} = 0.$$

On peut trouver bien d'autres relations; signalons encore celle qu'on obtient en éliminant $C_n^{\nu+1}$ entre la relation suivante

$$(133')\qquad n\,C_n^{\nu+1} = (n+2+3\nu)x\,C_{n-1}^{\nu+1} - 6(\nu+1)(y-x^2)\,C_{n-2}^{\nu+2} + 3(\nu+1)(1-xy)\,C_{n-3}^{\nu+2}$$

et (132), et qui s'écrit

$$(134')\qquad 3(\nu+1)(1-xy)\,C_{n-3}^{\nu+2} - 6(\nu+1)(y-x^2)\,C_{n-2}^{\nu+2}$$
$$+ (3\nu-n+2)x\,C_{n-1}^{\nu+1} + ny\,C_{n-2}^{\nu+1} - \frac{n(n+3\nu)}{3\nu}\,C_n^{\nu} = 0.$$

Remarquons aussi que l'on peut tirer d'autres relations en dérivant par rapport à x ou y; toutefois certaines d'entre elles se reproduisent à condition de changer le nom des indices n et ν, il en est ainsi par exemple de (132), (133), (133'),

72. Si nous posons maintenant $C_n^{\nu} = U(x, y)$, on peut chercher les équations aux dérivées partielles vérifiées par la fonction U. Limitons-nous au second ordre; en tenant compte des relations (127), les équations (130), (132'), (134) et (134') donnent respectivement[1]

$$(135)\qquad x\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - (n-1)\frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

$$(136)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + y\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (n+1+3\nu)\frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

$$(137)\qquad (xy-1)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2(y^2-x)\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - (n-1)y\frac{\partial U}{\partial x} - (n+1+3\nu)\frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

$$(138)\qquad 2(x^2-y)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (xy-1)\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + (3\nu-n+2)x\frac{\partial U}{\partial x} - ny\frac{\partial U}{\partial y} - n(n+3\nu)U.$$

[1] L'absence du coefficient ν pour l'équation (135) est tout à fait remarquable. Remarquons aussi que ces équations ne sont pas indépendantes, (137) par exemple est combinaison de (135) et (136).

73. Ces dernières équations ne sont évidemment valables que pour des polynômes dépendant effectivement de x et y. Nous sommes ainsi amenés à chercher ce qui arrive dans le cas contraire pour $C_n^\nu(x, o)$, $C_n^\nu(o, y)$.

α) Prenons d'abord le cas $y \equiv o$. On a alors

$$(n+1)\,C_{n+1}^\nu - 3(n+\nu)x\,C_n^\nu - (n-2+3\nu)\,C_{n-2}^\nu = o,$$

$$n\,C_n^\nu = x\frac{d}{dx}C_n^\nu + \frac{d}{dx}C_{n-2}^\nu,$$

d'où l'on tire en éliminant C_{n-2}^ν

$$\frac{d}{dx}C_{n+1}^\nu - 2x\frac{d}{dx}C_n^\nu - (n+3\nu)\,C_n^\nu = o.$$

Éliminons maintenant C_{n+1}^ν entre cette dernière équation et la suivante

$$(n+1)\,C_{n+1}^\nu = x\frac{d}{dx}C_{n+1}^\nu + \frac{d}{dx}C_{n-1}^\nu,$$

il vient

$$(139)\qquad 2x^2\frac{d^2C_n^\nu}{dx^2} - (n-2-3\nu)\,x\frac{dC_n^\nu}{dx} - n(n+3\nu)\,C_n^\nu + \frac{d^2C_{n-1}^\nu}{dx^2} = o.$$

Mais on a aussi

$$(140)\qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{dC_n^\nu}{dx} - 2x\frac{d}{dx}C_{n-1}^\nu - (n-1+3\nu)\,C_{n-1}^\nu\right]$$
$$= \frac{d^2C_n^\nu}{dx^2} - 2x\frac{d^2C_{n-1}^\nu}{dx^2} - (n+1+3\nu)\frac{dC_{n-1}^\nu}{dx} = o;$$

en résolvant les équations (139) et (140) par rapport à $\dfrac{dC_{n-1}^\nu}{dx}$, $\dfrac{d^2C_{n-1}^\nu}{dx^2}$ et en écrivant

$$\frac{d^2C_{n-1}^\nu}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}C_{n-1}^\nu\right),$$

on trouve l'équation différentielle

$$(141)\qquad (4x^3+1)\frac{d^3C_n^\nu}{dx^3} + 6(3+2\nu)\,x^2\frac{d^2C_n^\nu}{dx^2}$$
$$- [3n^2 + 3n(2\nu+1) - (3\nu+2)(3\nu+5)]\,x\frac{dC_n^\nu}{dx} - n(n+3\nu)(n+3\nu+3)\,C_n^\nu = o.$$

C'est aux notations près (changement de h en $-h$ et de x en $-x$) le résultat déjà trouvé par M. P. Humbert [31]. Si nous posons $u = -4x^3$ on est conduit à

$$(142)\quad u^2(1-u)\frac{d^3C_n^\nu}{du^3} + \left[2 - \left(\nu + \frac{7}{2}\right)u\right]u\frac{d^2C_n^\nu}{du^2} + \left\{\frac{2}{9} - u\left[-\frac{n^2}{12} - \frac{n(2\nu+1)}{12} + \frac{\nu^2}{4} + \frac{5\nu}{4} + \frac{3}{2}\right]\right\}\frac{dC_n^\nu}{du} + \frac{n}{3}\left(\frac{n}{6}+\frac{\nu}{2}\right)\left(\frac{n}{6}+\frac{\nu+1}{2}\right)C_n^\nu = 0,$$

équation hypergéométrique dont M. Bevan Baker [3] a déjà donné l'intégrale générale

$$(143)\quad A\,{}_3F_2\left[\frac{-n}{3}, \frac{n}{6}+\frac{\nu}{2}, \frac{n}{6}+\frac{\nu+1}{2}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; -4x^3\right] + Bx\,{}_3F_2\left[\frac{-n}{3}+\frac{1}{3}, \frac{n}{6}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{3}, \frac{n}{6}+\frac{\nu+1}{2}+\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; -4x^3\right] + Cx^2\,{}_3F_2\left[\frac{-n}{3}+\frac{2}{3}, \frac{n}{6}+\frac{\nu}{2}+\frac{2}{3}, \frac{n}{6}+\frac{\nu+1}{2}+\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; -4x^3\right].$$

β) Supposons maintenant $x \equiv 0$. On a

$$(n+1)C_{n+1}^\nu + 3(n-1+2\nu)yC_{n-1}^\nu - (n-2+3\nu)C_{n-2}^\nu = 0,$$

$$-(n-1)C_{n-1}^\nu = -2y\frac{d}{dy}C_{n-1}^\nu + \frac{d}{dy}C_{n-2}^\nu,$$

d'où l'on tire en éliminant C_{n-2}^ν

$$\frac{dC_{n+1}^\nu}{dy} + y\frac{dC_{n-1}^\nu}{dy} + (n-1+3\nu)C_{n-1}^\nu = 0,$$

ou

$$\frac{dC_n^\nu}{dy} + y\frac{dC_{n-2}^\nu}{dy} + (n-2+3\nu)C_{n-2}^\nu = 0.$$

Éliminons encore une fois C_{n-2}^ν il vient

$$\frac{d^2C_n^\nu}{dy^2} + 2y^2\frac{d^2C_{n-1}^\nu}{dy^2} + (n+1+6\nu)y\frac{dC_{n-1}^\nu}{dy} - (n-1+3\nu)(n-1)C_{n-1}^\nu = 0,$$

mais

$$\frac{dC_{n-1}^\nu}{dy} = 2y\frac{dC_n^\nu}{dy} - nC_n^\nu,$$

en éliminant C^{ν}_{n-1} on trouve enfin

$$(144)\quad (4y^3+1)\frac{d^3C^{\nu}_n}{dy^3}+6(3+2\nu)y^2\frac{d^2C^{\nu}_n}{dy^2}-(3n^2-3n-10-30\nu+12n\nu)y\frac{dC^{\nu}_n}{dy}$$
$$+n(n-3)(n+3\nu)C^{\nu}_n=0.$$

Il est remarquable de constater que le changement de y en x et de $n+3\nu$ en $-n$ (C^{ν}_n restant le même), transforme l'équation (144) *en l'équation* (141).

On en déduit immédiatement l'intégrale générale de (144)

$$(145)\quad A\,{}_3F_2\left[\frac{n}{3}+\nu,\frac{-n}{6},\frac{-n}{6}+\frac{1}{2};\frac{1}{3},\frac{2}{3};-4y^3\right]$$
$$+By\,{}_3F_2\left[\frac{n}{3}+\nu+\frac{1}{3},\frac{-n}{6}+\frac{1}{3},\frac{-n}{6}+\frac{5}{6};\frac{2}{3},\frac{4}{3};-4y^3\right]$$
$$+Cy^2\,{}_3F_2\left[\frac{n}{3}+\nu+\frac{2}{3},\frac{-n}{6}+\frac{2}{3},\frac{-n}{6}+\frac{7}{6};\frac{4}{3},\frac{5}{3};-4y^3\right].$$

En faisant $\nu=0$ on retrouve aux notations près les résultats de M. P. Humbert [37].

Remarquons pour terminer que les calculs qui précèdent supposent $n\geqslant 2$; mais les équations (142) (144) sont vérifiées aussi pour $n=0$ et 1 comme on le voit facilement.

74. On sait que lorsque l'on utilise les fonctions circulaires, les polynômes de Gegenbauer définis par le développement

$$(146)\qquad [1-2h\cos\theta+h^2]^{-\nu}=\sum_n h^n C^{\nu}_n(\theta),$$

vérifient l'équation différentielle

$$(147)\qquad \frac{d^2U}{d\theta^2}+2\nu\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dU}{d\theta}+n(n+2\nu)U=0;$$

on peut se demander s'il existe une équation aux dérivées partielles généralisant cette équation lorsque l'on considère le développement de la fonction

$$(148)\qquad V=[1-3hP(\theta,\varphi)+3h^2P(-\theta,-\varphi)-h^3]^{-\nu}=\sum_n h^n C^{\nu}_n(\theta,\varphi).$$

On a immédiatement les relations

$$(149)\quad (n+1)\,C^{\nu}_{n+1}-3(n+\nu)P\,C^{\nu}_{n}+3(n-1+2\nu)(P^2-QR)\,C^{\nu}_{n-1}-(n-2+3\nu)C^{\nu}_{n-2}=0,$$

$$(150)\quad nR\,C^{\nu}_{n}+(n-1)(Q^2-RP)\,C^{\nu}_{n-1}=P\frac{\partial C^{\nu}_{n}}{\partial\theta}-2(P^2-QR)\frac{\partial C^{\nu}_{n-1}}{\partial\theta}+\frac{\partial C^{\nu}_{n-2}}{\partial\theta},$$

$$(151)\quad nQ\,C^{\nu}_{n}+(n-1)(R^2-PQ)\,C^{\nu}_{n-1}=P\frac{\partial C^{\nu}_{n}}{\partial\varphi}-2(P^2-QR)\frac{\partial C^{\nu}_{n-1}}{\partial\varphi}+\frac{\partial C^{\nu}_{n-2}}{\partial\varphi},$$

$$(152)\quad Q\frac{\partial C^{\nu}_{n}}{\partial\theta}+(R^2-PQ)\frac{\partial C^{\nu}_{n-1}}{\partial\theta}=R\frac{\partial C^{\nu}_{n}}{\partial\varphi}+(Q^2-RP)\frac{\partial C^{\nu}_{n-1}}{\partial\varphi}.$$

qui sont analogues aux relations (123) à (126).

Éliminons C^{ν}_{n-2} entre (149) et (150) d'une part et entre (149) et (151) d'autre part, il vient après avoir retranché membre à membre les relations obtenues

$$\left[Q\frac{\partial C^{\nu}_{n+1}}{\partial\theta}-R\frac{\partial C^{\nu}_{n+1}}{\partial\varphi}\right]-2P\left[Q\frac{\partial C^{\nu}_{n}}{\partial\theta}-R\frac{\partial C^{\nu}_{n}}{\partial\varphi}\right]$$
$$+(P^2-QR)\left[Q\frac{\partial C^{\nu}_{n-1}}{\partial\theta}-R\frac{\partial C^{\nu}_{n-1}}{\partial\varphi}\right]-(n-1+3\nu)(Q^3-R^3)\,C^{\nu}_{n-1}=0,$$

ou en tenant compte de (152)

$$(153)\quad \left[(Q^2-RP)\frac{\partial C^{\nu}_{n}}{\partial\varphi}-(R^2-PQ)\frac{\partial C^{\nu}_{n}}{\partial\theta}\right]-2P\left[(Q^2-RP)\frac{\partial C^{\nu}_{n-1}}{\partial\varphi}-(R^2-PQ)\frac{\partial C^{\nu}_{n-1}}{\partial\theta}\right]$$
$$+(P^2-QR)\left[Q\frac{\partial C^{\nu}_{n-1}}{\partial\theta}-R\frac{\partial C^{\nu}_{n-1}}{\partial\varphi}\right]-(n-1+3\nu)(Q^3-R^3)\,C^{\nu}_{n-1}=0.$$

En résolvant le système des équations (152), (153) par rapport à $\dfrac{\partial C^{\nu}_{n}}{\partial\theta}$ et $\dfrac{\partial C^{\nu}_{n}}{\partial\varphi}$ et en identifiant ensuite les deux expressions trouvées pour la dérivée seconde $\dfrac{\partial^2 C^{\nu}_{n}}{\partial\theta\,\partial\varphi}$, on voit que C^{ν}_{n-1} vérifie une équation aux dérivées partielles du second ordre; en changeant $n-1$ en n, on trouve l'équation vérifiée par C^{ν}_{n} qui s'écrira en posant $C^{\nu}_{n}=U$

$$(154)\quad Q\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}-R\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}=(n+3\nu)\left[Q\frac{\partial U}{\partial\theta}-R\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right].$$

Considérons à nouveau les équations (150) et (151) et éliminons C_n^ν (mais non ses dérivées) il vient compte tenu de (152) et après changement de $n-1$ en n

$$(155) \quad n(Q^3 - R^3) C_n^\nu = (PQ^2 + RP^2 - 2QR^2)\frac{\partial C_n^\nu}{\partial \varphi} - (PR^2 + QP^2 - 2RQ^2)\frac{\partial C_n^\nu}{\partial \theta} + Q\frac{\partial C_{n-1}^\nu}{\partial \theta} - R\frac{\partial C_{n-1}^\nu}{\partial \varphi}.$$

En résolvant le système formé par les équations (152) et (155) par rapport à $\frac{\partial C_{n-1}^\nu}{\partial \theta}$, $\frac{\partial C_{n-1}^\nu}{\partial \varphi}$ et en égalant les expressions trouvées pour $\frac{\partial^2 C_{n-1}^\nu}{\partial \theta \partial \varphi}$ on voit que la fonction C_n^ν vérifie l'équation aux dérivées partielles du second ordre(¹)

$$(156) \qquad (R^2 - PQ)\left[\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - n\frac{\partial U}{\partial \theta}\right] = (Q^2 - RP)\left[\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - n\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right].$$

Considérons maintenant à nouveau les relations (133) et (134) que nous écrivons en tenant compte de (127)

$$(133'') \qquad nC_n^\nu = (n - 1 + 3\nu)x\, C_{n-1}^\nu - 2(y - x^2)\frac{\partial C_{n-1}^\nu}{\partial x} - (1 - xy)\frac{\partial C_{n-1}^\nu}{\partial y},$$

$$(134'') \qquad (n - 1 + 3\nu)C_{n-1}^\nu = ny\, C_n^\nu + (1 - xy)\frac{\partial C_n^\nu}{\partial x} - 2(y^2 - x)\frac{\partial C_n^\nu}{\partial y}.$$

En effectuant le changement de variables

$$x = P(\theta, \varphi), \qquad y = P(-\theta, -\varphi)$$

d'où

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial x}R - \frac{\partial V}{\partial y}(Q^2 - RP), \qquad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial V}{\partial x}Q - \frac{\partial V}{\partial y}(R^2 - PQ),$$

ces relations deviennent

$$(133''') \qquad nC_n^\nu = (n - 1 + 3\nu)P\, C_{n-1}^\nu + Q\frac{\partial C_{n-1}^\nu}{\partial \theta} + R\frac{\partial C_{n-1}^\nu}{\partial \varphi},$$

$$(134''') \quad (n - 1 + 3\nu)C_{n-1}^\nu = n(P^2 - QR)C_n^\nu + (Q^2 - RP)\frac{\partial C_n^\nu}{\partial \varphi} + (R^2 - PQ)\frac{\partial C_n^\nu}{\partial \theta}.$$

(¹) Les équations (154) et (156) correspondent respectivement à (136), (135). La complication du changement de variables $x = P(\theta, \varphi)$, $y = P(-\theta, -\varphi)$ fait qu'il est moins long de recommencer à nouveau les calculs comme nous l'avons fait.

En éliminant C^{ν}_{n-1} entre (133‴) et (134‴) on trouve une troisième équation aux dérivées partielles du second ordre vérifiée par C^{ν}_{n}

$$(157)\quad [1-P(P^2-QR)]\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\theta\,\partial\varphi}-n(n+3\nu)U\right] + Q(R^2-PQ)\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}-n\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right]+R(Q^2-RP)\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}-n\frac{\partial U}{\partial\theta}\right] + 3\nu P\left[(R^2-PQ)\frac{\partial U}{\partial\theta}+(Q^2-RP)\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right]=0.$$

Des formules (155), (156), (157) on déduit facilement les relations

$$(158)\quad \nabla U=\frac{\partial^2 U}{\partial\theta\,\partial\varphi}-n(n+3\nu)U=\frac{-3\nu}{Q^3-R^3}\left[R(Q^2-PR)\frac{\partial U}{\partial\theta}-Q(R^2-PQ)\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right],$$

$$(159)\quad D_\theta U=\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}-n\frac{\partial U}{\partial\varphi}=\frac{3\nu(R^2-PQ)}{Q^3-R^3}\left[Q\frac{\partial U}{\partial\theta}-R\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right],$$

$$(160)\quad D_\varphi U=\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}-n\frac{\partial U}{\partial\theta}=\frac{3\nu(Q^2-RP)}{Q^3-R^3}\left[Q\frac{\partial U}{\partial\theta}-R\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right].$$

En formant la combinaison

$$\frac{\partial}{\partial\theta}D_\theta U+\frac{\partial}{\partial\varphi}D_\varphi U-n\nabla U,$$

on trouve l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre cherchée (¹)

$$(161)\quad \frac{\partial^3 U}{\partial\theta^3}+\frac{\partial^3 U}{\partial\varphi^3}-3(n+\nu)\frac{\partial^2 U}{\partial\theta\,\partial\varphi}-\frac{3\nu}{Q^3-R^3}[Q(R^2-PQ]\,D_\theta U-R(Q^2-RP)\,D_\varphi U]+n^2(n+3\nu)U=0.$$

75. On peut à titre de vérification remplacer U par quelques-uns des C^{ν}_{n} ; on sait par exemple que

$$C^0_1=3P,\qquad C^{\nu}_1=3\nu P,\qquad C^{\nu}_2=\frac{3\nu}{2}[2QR+3(\nu+1)P^2].$$

Utilisons maintenant certaines des relations obtenues précédemment. Prenons par exemple la relation (133‴), pour $\nu=0$ elle s'écrit

$$(n+1)C^0_{n+1}=nP\,C^0_n+Q\frac{\partial C^0_n}{\partial\theta}+R\frac{\partial C^0_n}{\partial\varphi}.$$

(¹) Nous retrouverons cette équation au nº **101**, chapitre V.

Comme $C^0 = 3P(\theta, \varphi)$ on en déduit par récurrence, compte tenu des relations (59), le résultat du n° **70**

$$C_n^0 = \frac{3}{n} P(n\theta, n\varphi).$$

L'identité (149) devient alors

$$(162) \quad P[(n+1)\theta, (n+1)\varphi] = 3P(\theta, \varphi)P(n\theta, n\varphi) - 3P(-\theta, -\varphi)P[(n-1)\theta, (n-1)\varphi] + P[(n-2)\theta, (n-2)\varphi].$$

formule qui généralise la relation classique

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta.$$

On trouverait d'autres relations en utilisant les diverses identités déjà mentionnées.

76. Généralisons maintenaut un résultat de M. Pincherle [46]. Soit e_1 la plus petite racine de l'équation en h

$$(163) \quad 1 - 3hx + 3h^2y - h^3 = 0,$$

On a

$$(164) \quad 0 \equiv \int_0^{e_1} d[h^n(1 - 3hx + 3h^2y - h^3)^\nu]$$
$$= \int_0^{e_1} \{nh^{n-1} - 3x(n+\nu)h^n + 3y(n+2\nu)h^{n+1} - (n+3\nu)h^{n+2}\}[1 - 3hx + 3h^2y - h^3]^{\nu-1}\,dh.$$

Si l'on pose

$$(165) \quad \sigma_n^\nu(x, y) = \int_0^{e_1} h^n(1 - 3hx + 3h^2y - h^3)^{\nu-1}\,dh,$$

il vient

$$(166) \quad (n+3\nu)\sigma_{n+2}^\nu - 3(n+2\nu)y\,\sigma_{n+1}^\nu + 3(n+\nu)x\,\sigma_n^\nu - n\sigma_{n-1}^\nu = 0.$$

De (165) on peut déduire aussi

$$(167) \quad \frac{\partial\sigma_n^\nu}{\partial x} = -3(\nu-1)\sigma_{n+1}^{\nu-1}, \quad \frac{\partial\sigma_n^\nu}{\partial y} = 3(\nu-1)\sigma_{n+2}^{\nu-1}, \quad \frac{\partial\sigma_n^\nu}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{n-1}^\nu}{\partial y} = 0.$$

On pourrait encore à partir de ces relations rechercher les équations aux dérivées partielles satisfaites par σ_n^ν.

II. — Généralisation des polynômes d'Hermite.

77. Considérons maintenant les polynômes définis au moyen de la fonction génératrice

$$(168)\qquad e^{hx-h^2y+\frac{h^3}{3}}=\sum_n \frac{h^n}{(1,n)}\,H_n(x,y).$$

On peut rapprocher les polynômes H_n des polynômes C_n^{ν}, en effet si nous remplaçons dans l'égalité

$$(1-3hx+3h^2y-h^3)^{\frac{-m}{3}}=\sum h^n C_n^{\frac{m}{3}}(x,y),$$

h, y, z, respectivement par $\frac{h}{\sqrt[3]{m}}$, $\frac{x}{\sqrt[3]{m^2}}$, $\frac{y}{\sqrt[3]{m}}$; il vient

$$\lim_{m\to\infty}\left[1-\frac{3hx}{m}+\frac{3h^2y}{m}-\frac{h^3}{m}\right]^{\frac{-m}{3}}=\lim_{m\to\infty}\left[1-\frac{3}{m}\left(hx-h^2y+\frac{h^3}{3}\right)\right]^{\frac{-m}{3}}=e^{hx-h^2y+\frac{h^3}{3}}$$

d'où

$$(169)\qquad \frac{H_n(x,y)}{(1,n)}=\lim_{m\to\infty}C_n^{\frac{m}{3}}\left[\frac{x}{\sqrt[3]{m^2}},\ \frac{y}{\sqrt[3]{m}}\right].$$

Considérons maintenant l'identité

$$(170)\qquad e^{\frac{-(y-h)^3}{3}}=\sum_n \frac{h^n}{(1,n)}(-1)^n\frac{d^n}{dy^n}\left(e^{\frac{-y^3}{3}}\right),$$

obtenue en appliquant la formule de Taylor; on en déduit

$$e^{hy^2-h^2y+\frac{h^3}{3}}=e^{\frac{y^3}{3}}\sum \frac{h^n}{(1,n)}(-1)^n\frac{d^n}{dy^n}\left(e^{\frac{-y^3}{3}}\right),$$

d'où

$$(171)\qquad H_n(y^2,y)=(-1)^n e^{\frac{y^3}{3}}\frac{d^n}{dy^n}\left(e^{\frac{-y^3}{3}}\right),$$

formule qui généralise un résultat classique des polynômes d'Hermite.

On en déduit

$$e^{hx-h^2y+\frac{h^3}{3}} = e^{\frac{y^3}{3}+h(x-y^2)} \sum \frac{h^m}{(1,m)}(-1)^m \frac{d^m}{dy^m}\left(e^{\frac{-y^3}{3}}\right)$$

$$= e^{\frac{y^3}{3}} \sum \frac{h^p}{(1,p)}(x-y^2)^p \sum \frac{h^m}{(1,m)}(-1)^m \frac{d^m}{dy^m}\left(e^{\frac{-y^3}{3}}\right)$$

$$= e^{\frac{y^3}{3}} \sum \frac{h^n}{(1,n)} \sum \frac{(-1)^m(1,n)}{(1,m)(1,m-n)}(x-y^2)^{n-m} \frac{d^m}{dy^m}\left(e^{\frac{-y^3}{3}}\right),$$

d'où

$$\text{(172)} \qquad H_n(x,y) = e^{\frac{y^3}{3}} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m(1,n)}{(1,m)(1,m-n)}(x-y^2)^{n-m} \frac{d^m}{dy^m}\left(e^{\frac{-y^3}{3}}\right).$$

78. Cherchons maintenant les relations de récurrence entre plusieurs polynômes H_n ainsi que les équations aux dérivées partielles satisfaites par ces polynômes. En posant

$$\text{(173)} \qquad V = e^{hx-h^2y+\frac{h^3}{3}} = \sum \frac{h^n}{(1,n)} H_n(xy) = \sum h^n K_n(x,y),$$

on trouve

$$\frac{\partial V}{\partial h} = (x - 2hy + h^2)V,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = hV, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = -h^2V,$$

d'où

$$\text{(174)} \qquad (n+1)K_{n+1} = xK_n - 2yK_{n-1} + K_{n-2},$$

$$\text{(175)} \qquad \frac{\partial K_n}{\partial x} = K_{n-1}, \qquad \frac{\partial K_n}{\partial y} = -K_{n-2},$$

$$\text{(176)} \qquad \frac{\partial K_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial K_n}{\partial y} = 0.$$

Des dernières relations on tire encore

$$K_n = \frac{\partial^l K_{n+l}}{\partial x^l} = (-1)^m \frac{\partial^m K_{n+2m}}{\partial y^m} = (-1)^m \frac{\partial^{l+m} K_{n+l+2m}}{\partial x^l \partial y^m}$$

on en déduit que K_n (donc H_n) vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - x\frac{\partial U}{\partial x} - 2y\frac{\partial U}{\partial y} + nU = 0. \tag{177}$$

79. Cherchons maintenant les équations différentielles satisfaites par $H_n(x, 0)$ $H_n(0, y)$.

α) Prenons d'abord le cas $y = 0$, (174) s'écrit

$$(n+1)K_{n+1} = xK_n + K_{n-2};$$

en dérivant trois fois il vient, compte tenu de la première des relations (175),

$$\frac{d^3 K_n}{dx^3} + x\frac{dK_n}{dx} - nK_n = 0. \tag{178}$$

C'est aux notations près (changement de x et h en $-x$, $-h$) le résultat trouvé par M. P. Humbert [39]. En posant $u = -\frac{x^3}{9}$, on trouve

$$u^2\frac{d^3}{du^3}K_n + 2u\frac{d^2}{du^2}K_n + \left(\frac{2}{9} - u\right)\frac{d}{du}K_n + \frac{n}{3}K_n = 0, \tag{179}$$

équation hypergéométrique confluente dont l'intégrale générale est

$$A\,{}_1F_2\left[\frac{-n}{3}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; u\right] + Bu^{1/3}\,{}_1F_2\left[\frac{-n}{3} + \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; u\right] + Cu^{2/3}\,{}_1F_2\left[\frac{-n}{3} + \frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; u\right]. \tag{180}$$

β) Prenons ensuite le cas $x = 0$, (174) s'écrit

$$(n+1)K_{n+1} = -2yK_{n-1} + K_{n-2}, \tag{181}$$

c'est-à-dire compte tenu de la deuxième relation (175)

$$\frac{dK_{n-1}}{dy} = 2y\frac{dK_n}{dy} - nK_n;$$

on en tire

$$\frac{d^3K_n}{dy^3} = -\frac{d^2K_{n-2}}{dy^2} = -\frac{d}{dy}\left[2y\frac{dK_{n-1}}{dy} - (n-1)K_{n-1}\right]$$
$$= -4y^2\frac{d^2K_n}{dy^2} - 2(5-2n)y\frac{dK_n}{dy} - n(n-3)K_n = 0,$$

d'où l'équation cherchée

$$(182)\qquad \frac{d^3 K_n}{dy^3} + 4y^2 \frac{d^2 K_n}{dy^2} + 2(5-2n)y\frac{dK_n}{dy} + n(n-3)K_n = 0.$$

En posant $v = -\frac{4}{3}y^3$ on trouve

$$(183)\qquad v^2 \frac{d^3 K_n}{dv^3} + (2-v)v\frac{d^2 K_n}{dv^2} + \left[\frac{2}{9} - \left(\frac{3}{2} - \frac{n}{3}\right)v\right]\frac{dK_n}{dv} - \frac{n(n-3)}{36}K_n = 0,$$

équation hypergéométrique confluente dont l'intégrale générale est

$$(184)\qquad A\,{}_2F_2\left[\frac{-n}{6}, \frac{-n}{6}+\frac{1}{2}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; v\right] + Bv^{1/3}\,{}_2F_2\left[\frac{-n}{6}+\frac{1}{3}, \frac{-n}{6}+\frac{5}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; v\right]$$
$$+ Cv^{2/3}\,{}_2F_2\left[\frac{-n}{6}+\frac{2}{3}, \frac{-n}{6}+\frac{7}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; v\right].$$

80. Cherchons à déterminer de proche en proche les coefficients du polynôme $K_n(x, y)$. Partons de (177) et posons

$$(185)\qquad K_n(x,y) = \sum a_{n;\mu,\nu} x^\mu y^\nu$$

il vient

$$\sum [a_{n;\mu+1,\nu+1}(\mu+1)(\nu+1) - \mu a_{n;\mu,\nu} - 2\nu a_{n;\mu,\nu} + n a_{n;\mu,\nu}]\, x^\mu y^\nu = 0,$$

d'où la relation de récurrence

$$(186)\qquad a_{n;\mu+1,\nu+1} = \frac{\mu + 2\nu - n}{(\mu+1)(\nu+1)} a_{n;\mu,\nu};$$

on est donc simplement ramené à chercher les $a_{n;\mu,0}$, $a_{n;0,\nu}$.

On a du reste facilement les relations de récurrence déduites de (178), (182)

$$(187)\qquad a_{n;\mu+3,0} = \frac{\mu - n}{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)} a_{n;\mu,0}.$$

$$(188)\qquad a_{n;0,\nu+3} = \frac{(n-2\nu)(n-3-2\nu)}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} a_{n;0,\nu}.$$

Il nous suffira donc de connaître les cinq coefficients

$$a_{n;0,0},\quad a_{n;1,0},\quad a_{n;0,1},\quad a_{n;2,0},\quad a_{n;0,2}.$$

Nous avons à distinguer trois cas suivant les valeurs de n [1]

α) $n = 3m$ $$a_{n;0,0} = \frac{1}{m!\,3^m},$$
$$a_{n;1,0} = a_{n;0,1} = a_{n;2,0} = a_{n;0,2} = 0.$$

β) $n = 3m + 1$ $$a_{n;1,0} = \frac{1}{m!\,3^m}, \quad a_{n;0,2} = \frac{1}{2}\frac{1}{(m-1)!\,3^{m-1}},$$
$$a_{n;0,0} = a_{n;0,1} = a_{n;2,0} = 0.$$

γ) $n = 3m + 2$ $$a_{n;0,1} = -\frac{1}{m!\,3^m}, \quad a_{n;2,0} = \frac{1}{2}\frac{1}{m!\,3^m},$$
$$a_{n;0,0} = a_{n;1,0} = a_{n;0,2} = 0.$$

Le calcul des autres termes au moyen des formules (185), (187), (188) sera évidemment limité par l'annulation des numérateurs.

81. Signalons pour terminer les polynômes qui naissent du développement de la fonction génératrice

$$(189) \qquad e^{hx-(h^2-kl)y+\frac{h^3}{3}} = \sum\sum\sum h^\alpha k^\beta l^\gamma \,\mathrm{H}_{\alpha,\beta,\gamma}(x,y).$$

Comme k et l n'apparaissent que par leur produit, on est amené à considérer l'expression

$$(190) \qquad \mathrm{V} = e^{hx-(h^2-\lambda)y+\frac{h^3}{3}} = \sum\sum h^\alpha \lambda^\beta \,\mathrm{H}_{\alpha,\beta}(x,x).$$

On aura comme précédemment

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} = h\mathrm{V}, \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} = -(h^2-\lambda)\mathrm{V},$$
$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial h} = (x - 2hy + h^2)\mathrm{V}, \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \lambda} = y\mathrm{V}.$$

On en déduira par identification

$$(191) \qquad \frac{\partial \mathrm{H}_{\alpha,\beta}}{\partial x} = \mathrm{H}_{\alpha-1,\beta},$$

$$(192) \qquad \frac{\partial \mathrm{H}_{\alpha,\beta}}{\partial y} = -\mathrm{H}_{\alpha-2,\beta} + \mathrm{H}_{\alpha,\beta-1},$$

$$(193) \qquad (\alpha+1)\mathrm{H}_{\alpha+1,\beta} = x\mathrm{H}_{\alpha,\beta} - 2y\mathrm{H}_{\alpha-1,\beta} + \mathrm{H}_{\alpha-2,\beta},$$

$$(194) \qquad \beta\mathrm{H}_{\alpha,\beta} = y\mathrm{H}_{\alpha,\beta-1}.$$

[1] Le calcul se fait aisément en remplaçant dans la formule de définition (168) les exponentielles par leurs développements.

On peut éliminer $H_{\alpha,\beta-1}$ entre (192), (194) on trouve

$$y\frac{\partial H_{\alpha,\beta}}{\partial y} = -yH_{\alpha-2,\beta} + \beta H_{\alpha,\beta}. \tag{195}$$

Éliminons maintenant $H_{\alpha-1,\beta}$, $H_{\alpha-2,\beta}$ entre (191), (193), (195), en remarquant que

$$H_{\alpha,\beta}(x, y) = y^{\beta} K_{\alpha,\beta}(x, y).$$

Nous trouvons les équations aux dérivées partielles satisfaites par la fonction $U = K_{\alpha,\beta}(x, y)$,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \tag{196}$$

$$2y\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - x\frac{\partial U}{\partial x} + \alpha U = 0. \tag{197}$$

Nous pourrions aussi chercher les équations différentielles vérifiées par les polynômes $H_{\alpha,\beta}(0, y)$, $H_{\alpha,\beta}(x, 0)$. Le second problème a été résolu au n° **79**; pour le premier l'équation différentielle du troisième ordre que nous avons formée ne nous a paru présenter aucun intérêt particulier.

CHAPITRE V

Sur quelques équations aux dérivées partielles qui se rattachent à l'équation de M. P. Humbert.

I. — L'équation $\Delta_3 U = kU$ (1). (198)

82. Cherchons les intégrales qui ne dépendent que de p ; elles vérifient l'équation différentielle

$$p^2 \frac{d^3 F}{dp^3} + 3p \frac{d^2 F}{dp^2} + \frac{dF}{dp} = kF.$$

Nous en déduisons l'intégrale

$$U = {}_0F_2(1, 1 ; kp).$$

83. Faisons le changement de variables (9) et posons $s = \dfrac{k\rho^3}{27}$; il vient

$$s^2 \frac{\partial^3 U}{\partial s^3} + 3s \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{27 s}\left[\frac{\partial^3 U}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial \varphi^3}\right] - \frac{1}{3}\frac{\partial^3 U}{\partial s \partial \theta \partial \varphi} = U. \tag{199}$$

Les intégrales de (199) qui sont de la forme $U = P(m\theta, m\varphi)V(s)$ vérifient l'équation différentielle

$$s^2 \frac{d^3 V}{ds^3} + 3s \frac{d^2 V}{ds^2} + \left(1 - \frac{m^2}{3}\right)\frac{dV}{ds} + \left(\frac{2m^3}{27s} - 1\right)V = 0. \tag{200}$$

Si nous posons maintenant $V(s) = s^p W(s)$ l'équation (200) devient

$$\begin{aligned} s^2 \frac{d^3 W}{ds^3} &+ 3s(p+1)\frac{d^2 W}{ds^2} + \left[3p(p-1) + 6p + 1 - \frac{m^2}{3}\right]\frac{dW}{ds} \\ &+ \left\{\frac{1}{s}\left[p(p-1)(p-2) + 3p(p-1) + p\left(1 - \frac{m^2}{3}\right) + \frac{2m^3}{27}\right] - 1\right\} W = 0. \end{aligned} \tag{201}$$

---

(1) Dans l'étude de ces diverses équations k représentera une constante.

L'équation (201) sera hypergéométrique si le coefficient de $1/s$ dans le dernier terme est nul (condition nécessaire); mais cela s'écrit après réductions

$$p^3 - p\frac{m^2}{3} + \frac{2m^3}{27} = \left(p - \frac{m}{3}\right)^2\left(p + \frac{2m}{3}\right) = 0.$$

Pour $p = \frac{m}{3}$ l'équation (201) devient

$$s^2\frac{d^3W}{ds^3} + (m+3)s\frac{d^2W}{ds^2} + (m+1)\frac{dW}{ds} - W = 0,$$

équation hypergéométrique confluente qui admet les intégrales

$$_0F_2(1, 1+m; s) \quad \text{et} \quad s^{-m}\,{}_0F_2(1-m, 1-m; s);$$

l'équation (198) admet donc les intégrales (¹)

$$(202) \qquad \left\{\begin{aligned} U &= \rho^m P(m\theta, m\varphi)\,{}_0F_2\left(1, 1+m; \frac{k\rho^3}{27}\right), \\ U &= \rho^{-2m} P(m\theta, m\varphi)\,{}_0F_2\left(1-m, 1-m; \frac{k\rho^3}{27}\right). \end{aligned}\right. \qquad (p = \rho^3)$$

Pour $p = -\frac{2m}{3}$ l'équation (201) devient

$$s^2\frac{d^3W}{ds^3} + (3-2m)s\frac{d^2W}{ds^2} + (1-m)^2\frac{dW}{ds} - W = 0,$$

elle redonne les intégrales (202).

84. On sait que l'équation $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = kU$ admet l'intégrale particulière

$$U = \frac{1}{\sqrt{x+iy}}\,e^{-\sqrt{k(x^2+y^2)}},$$

cherchons si l'on a un théorème analogue dans le cas actuel.

(¹) Il est clair que l'on peut remplacer $P(m\theta, m\varphi)$ par $Q(m\theta, m\varphi)$ et $R(m\theta, m\varphi)$. Cette remarque est valable pour les autres équations.

En variables u, v, w on est ramené à chercher si l'équation

$$(203)\qquad 27\frac{\partial^3 U}{\partial u\,\partial v\,\partial w} = kU,$$

admet une intégrale de la forme

$$U = u^{-\frac{1}{3}} f(p).$$

En portant dans l'équation (203) nous trouvons la condition

$$p^2\frac{d^3 f}{dp^3} + \frac{8}{3}p\frac{d^2 f}{dp^2} + \frac{2}{3}\frac{df}{dp} = \frac{k}{27}f.$$

Le changement de variable $\varpi = \frac{kp}{27}$ nous donne une équation hypergéométrique qui admet les intégrales

$${}_0F_2\left(1, \frac{2}{3}; \varpi\right) \quad \text{et} \quad \varpi^{1/3}\,{}_0F_2\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}; \varpi\right).$$

Nous en déduisons les intégrales de (203)

$$(204)\qquad \begin{cases} u^{-\frac{1}{3}}\,{}_0F_2\left(1, \frac{2}{3}; \frac{kp}{27}\right), \\ (uv)^{1/3}\,{}_0F_2\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}; \frac{kp}{27}\right), \end{cases}$$

et quatre autres analogues en remplaçant u par v ou w ...(¹). En variables x, y, z, cela s'écrit

$$(205)\qquad \begin{cases} (x+y+z)^{-\frac{1}{3}}\,{}_0F_2\left(1, \frac{2}{3}; \frac{kp}{27}\right), \\ (x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^{1/3}\,{}_0F_2\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}; \frac{kp}{27}\right), \ldots. \end{cases}$$

(¹) **Plus généralement, on pourrait chercher les intégrales de la forme $U = u^\alpha v^\beta f(p)$, le même calcul conduirait aux intégrales**

$$u^\alpha v^\beta\,{}_0F_2\left(\alpha+1, \beta+1; \frac{kp}{27}\right), \qquad u^{\beta-\alpha} v^{-}\,{}_0F_2\left(1-\alpha, 1-\alpha+\beta; \frac{kp}{27}\right)$$

et une troisième analogue. Toutes ces intégrales se ramènent du reste à la première.

85. Cherchons encore les intégrales de la forme $e^{\alpha x+\beta y+\gamma z}$; les constantes α, β, γ doivent vérifier la relation

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=k;$$

λ et μ étant des constantes, nous pourrons prendre par exemple

$$U=e^{\sqrt[3]{k}\,[x\,P(\lambda,\mu)+y\,Q(\lambda,\mu)+z\,R(\lambda,\mu)]}. \tag{206}$$

86. Remarque. La seconde des intégrales (202) a été donnée incidemment (calcul intermédiaire dans la recherche d'un autre problème) sous une forme légèrement différente par M. P. Humbert [36]. Elle a été explicitement reprise dans un autre Mémoire [37]. Avec les notations de ce dernier travail les deux intégrales s'écrivent respectivement

$$J_{m,0}(-x)\,P(m\theta,\,m\varphi),\qquad J_{m,m}(-x)\,P(-m\theta,\,-m\varphi)$$

où l'on doit bien remarquer que pour la seconde on doit lire $P(-m\theta,\,-m\varphi)$ et non $P(m\theta,\,m\varphi)$ ainsi que l'indiquait le Mémoire cité.

II. L'équation $\Delta_3 U = k\dfrac{\partial U}{\partial t}$. (207)

87. Si nous cherchons les intégrales de la forme $U=e^{\lambda t}V(x,y,z)$ nous avons l'équation $\Delta_3 U = k\lambda V$, nous déduirons des paragraphes précédents des intégrales telles que

$$\left\{\begin{array}{l} e^{\lambda t}\,{}_0F_2(1,\,1,\,k\lambda p),\\[2mm] e^{\lambda t}\rho^m\,P(m\theta,\,m\varphi)\,{}_0F_2\left(1,\,1+m;\,\dfrac{k\lambda\rho^3}{27}\right),\\[2mm] e^{\lambda t}\rho^{-2m}\,P(m\theta,\,m\varphi)\,{}_0F_2\left(1-m,\,1-m;\,\dfrac{k\lambda\rho^3}{27}\right),\;\ldots. \end{array}\right. \tag{208}$$

88. Cherchons maintenant si l'on peut trouver d'autres intégrales en recommençant la suite de raisonnements du n° **83**.

Nous ferons encore le changement de variables (9) en posant $s=\dfrac{k\rho^3}{27\,t}$ il vient

$$s^2\frac{\partial^3 U}{\partial s^3}+3s\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}+(1+s)\frac{\partial U}{\partial s}+\frac{1}{27s}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial\theta^3}+\frac{\partial^3 U}{\partial\varphi^3}\right)-\frac{1}{3}\frac{\partial^3 U}{\partial s\,\partial\theta\,\partial\varphi}-t\frac{\partial U}{\partial t}=0.$$

Les intégrales de la forme $U = t^{\nu} P(m\theta, m\varphi) V(s)$ vérifient l'équation différentielle

$$s^2 \frac{d^3 V}{ds^3} + 3s \frac{d^2 V}{ds^2} + \left(1 - \frac{m^2}{3} + s\right) \frac{dV}{ds} + \left(\frac{2m^3}{27 s} - \nu\right) V = 0.$$

En faisant le changement de fonction défini par $V(s) = s^p W(s)$ nous trouverons encore une équation hypergéométrique à condition que

$$p = \frac{m}{3} \quad \text{ou} \quad p = -\frac{2m}{3}.$$

On en déduit comme précédemment les intégrales

$$(209) \quad \begin{cases} U = t^{\nu} s^{\frac{m}{3}} P(m\theta, m\varphi)\, {}_1F_2\left(\frac{m}{3} - \nu;\, 1,\, 1 + m;\, -s\right), \\ U = t^{\nu} s^{\frac{-2m}{3}} P(m\theta, m\varphi)\, {}_1F_2\left(\frac{-2m}{3} - \nu;\, 1 - m,\, 1 - m;\, -s\right), \end{cases}$$

c'est-à-dire avec un choix légèrement différent de constantes

$$(209') \quad \begin{cases} U = t^{n} \rho^{m} P(m\theta, m\varphi)\, {}_1F_2\left(-n;\, 1,\, 1 + m;\, \frac{-k\rho^3}{27 t}\right), \\ U = t^{n} \rho^{-2m} P(m\theta, m\varphi)\, {}_1F_2\left(-n;\, 1 - m,\, 1 - m;\, \frac{-k\rho^3}{27 t}\right). \end{cases}$$

89. Si l'on cherche les intégrales de la forme $e^{\alpha x + \beta y + \gamma z + \frac{\delta}{k} t}$ ainsi que l'a fait M. P. Humbert [39] on trouve que les constantes α, β, γ, δ sont liées par la relation

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma - \delta = 0.$$

On en déduit que la fonction

$$e^{\alpha x + \alpha^3 t + \beta y + \beta^3 t + \gamma z + \gamma^3 t - 3\alpha\beta\gamma t} = \sum \sum \sum \alpha^m \beta^n \gamma^p P_{m,n,p}(x, y, z, t)$$

est intégrale ainsi que les polynômes qui naissent de son développement.

En posant

$$\alpha = -h(3t)^{-\frac{1}{3}}, \qquad \beta = -h'(3t)^{-\frac{1}{3}}, \qquad \gamma = -h''(3t)^{-\frac{1}{3}},$$
$$x = -u\sqrt[3]{3t}, \qquad y = -v\sqrt[3]{3t}, \qquad z = -w\sqrt[3]{3t},$$

on trouve

$$e^{hu-\frac{h^3}{3}+h'v-\frac{h'^3}{3}+h''w-\frac{h''^3}{3}+hh'h''} = \sum\sum\sum \frac{(-1)^{m+n+p}}{(\sqrt[3]{3t})^{m+n+p}} h^m h'^n h''^p \mathrm{P}_{m,n,p}(u, v, w, t)$$

et l'on est ramené à l'étude des polynômes déduits de la fonction génératrice étudiée au n° **79**

$$e^{hu-\frac{h^3}{3}}.$$

III. — L'équation $\Delta_3 \mathrm{U} = k \dfrac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial t^2}$. (210)

90. En cherchant encore les intégrales de la forme $\mathrm{U} = e^{\lambda t}\mathrm{V}(x, y, z)$ on est ramené à l'équation $\Delta_3 \mathrm{U} = k\lambda^2 \mathrm{U}$; on en déduira immédiatement comme au n° **87** un certain nombre d'intégrales.

91. Faisons maintenant le changement de variables (9); en posant $s = \dfrac{k\rho^3}{27t^2}$ il vient

$$s^2\frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial s^3} + 3s\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial s^2} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial s} + \frac{1}{27s}\left(\frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial \varphi^3}\right) - \frac{1}{3}\frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial s\,\partial\theta\,\partial\varphi}$$
$$= 4s^2\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial s^2} + 6s\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial s} - 4s\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial s\,\partial t} + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial t^2}.$$

Les intégrales de la forme $\mathrm{U} = t^\nu \mathrm{P}(m\theta, m\varphi)\mathrm{V}(s)$ vérifient l'équation différentielle

$$s^2\frac{d^3\mathrm{V}}{ds^3} + (3-4s)s\frac{d^2\mathrm{V}}{ds^2} + \left[1 - \frac{m^2}{3} - (6-4\nu)s\right]\frac{d\mathrm{V}}{ds} + \left[\frac{2m^3}{27s} - \nu(\nu-1)\right]\mathrm{V} = 0,$$

qui devient par le changement de fonction $\mathrm{V}(s) = s^p \mathrm{W}(s)$ une équation hypergéométrique lorsque l'on y fait $p = \dfrac{m}{3}$ ou $-\dfrac{2m}{3}$.

On en déduit tous calculs faits les deux intégrales[1]

$$(211)\quad \begin{cases} \mathrm{U} = t^\nu s^{\frac{m}{3}}\,\mathrm{P}(m\theta, m\varphi)\,{}_2\mathrm{F}_2\left(\dfrac{m}{3} - \dfrac{\nu}{2}, \dfrac{m}{3} - \dfrac{\nu-1}{2}; 1, 1+m; 4s\right), \\ \mathrm{U} = t^\nu s^{-\frac{2m}{3}}\,\mathrm{P}(m\theta, m\varphi)\,{}_2\mathrm{F}_2\left(\dfrac{-2m}{3} - \dfrac{\nu}{2}, \dfrac{-2m}{3} - \dfrac{\nu-1}{2}; 1-m, 1-m; 4s\right), \end{cases}$$

---

[1] Nous rectifions ici un lapsus qui nous a échappé dans une Note antérieure (*Comptes rendus*, 195, 1932, p. 936).

c'est-à-dire avec un choix légèrement différent de constantes

$$(212)\quad \begin{cases} U = t^n \rho^m \; P(m\theta, m\varphi)\,{}_2F_2\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+\frac{1}{2};\ 1,\ 1+m;\ \frac{4k\rho^3}{27t}\right); \\ U = t^n \rho^{-2m} P(m\theta, m\varphi)\,{}_2F_2\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+\frac{1}{2};\ 1-m,\ 1-m;\ \frac{4k\rho^3}{27t}\right). \end{cases}$$

92. Si nous cherchons les intégrales de la forme $e^{\alpha x+\beta y+\gamma z+\frac{\delta}{\sqrt{k}}t}$ nous trouvons la condition

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma - \delta^2 = 0.$$

Posons

$$\alpha = a^2 - bc, \qquad \beta = b^2 - ca, \qquad \gamma = c^2 - ab,$$

d'où

$$\delta^2 = (a^3 + b^3 + c^3 - abc)^2,$$

d'après une identité déjà rencontrée.

On en déduit que la fonction

$$e^{(a^2-bc)x+\frac{a^3}{\sqrt{k}}t+(b^2-ca)y+\frac{b^3}{\sqrt{k}}t+(c^2-ab)z+\frac{c^3}{\sqrt{k}}t-\frac{3abc}{\sqrt{k}}t} = \sum\sum\sum a^m b^n c^p Q_{m,n,p}(x, y, z, t)$$

est une intégrale ainsi que les polynômes qui naissent de son développement.

Pour un changement de variables analogue à celui du n° **89** nous serons ramenés aux polynômes déduits de la fonction génératrice introduite au n° **81**

$$e^{(\lambda^2-\mu\nu)x-\frac{\lambda^3}{3}}.$$

IV. — L'équation $\Delta_3 U = k\,\dfrac{\partial^3 U}{\partial t^3}$. (213)

93. En cherchant encore les intégrales de la forme $U(x, y, z, t) = e^{\lambda t}V(x, y, z)$ nous sommes ramenés à l'équation

$$\Delta_3 U = k\lambda^3 V.$$

En utilisant les résultats antérieurs on trouvera comme au n° **87** de nouvelles intégrales. On retrouvera entre autres une intégrale signalée par M. P. Humbert [36] où la fonction $P(\theta, \varphi)$ est remplacée par $P(-\theta, -\varphi)$ ainsi que nous l'avons signalé au n° **86**.

94. Faisons maintenant le changement de variables (9); en posant $s = \dfrac{k\rho^3}{27t^3}$ on trouve

$$s^2(1+27s)\frac{\partial^3 U}{\partial s^3} + 3(1+36s)\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + (1+60s)\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{27s}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial\theta^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial\varphi^3}\right) - \frac{1}{3}\frac{\partial^3 U}{\partial s\,\partial\theta\,\partial\varphi}$$
$$= t^3\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - 9t^2\frac{\partial^3 U}{\partial s\,\partial t^2} + 27t\frac{\partial^3 U}{\partial s^2\,\partial t} + 36t\frac{\partial^2 U}{\partial s\,\partial t}.$$

Cherchons les intégrales de la forme $U = t^\nu P(m\theta, m\varphi)V(s)$, elles vérifient l'équation différentielle

$$s^2(1+27s)\frac{d^3 V}{ds^3} + 3[1+(36-9\nu)s]\,s\frac{d^2 V}{ds^2}$$
$$+\left\{1 - \frac{m^2}{3} + [60 + 9\nu(\nu-1) - 36\nu]\,s\right\}\frac{dV}{ds} + \left[\frac{2m^3}{27} - \nu(\nu-1)(\nu-2)\right]V = 0.$$

En posant $V(s) = s^p W(s)$ nous trouverons encore une équation hypergéométrique à condition que

$$p = \frac{m}{3} \qquad \text{ou} \qquad p = \frac{-2m}{3}.$$

On en déduit comme plus haut

$$(214)\quad \begin{cases} U = t^\nu s^{\frac{m}{3}}\;P(m\theta, m\varphi)\,{}_3F_2\left[\dfrac{m-\nu}{3},\ \dfrac{m-\nu+1}{3},\ \dfrac{m-\nu+2}{3};\ 1,\ m+1;\ -27s\right], \\ U = t^\nu s^{\frac{-2m}{3}}\,P(m\theta, m\varphi)\,{}_3F_2\left[\dfrac{-2m-\nu}{3},\ \dfrac{-2m-\nu+1}{3},\ \dfrac{-2m-\nu+2}{3};\ 1-m,\ 1-m;\ -27s\right], \end{cases}$$

c'est-à-dire encore avec un choix de constantes légèrement différent

$$(215)\quad \begin{cases} U = t^n\rho^m\;P(m\theta, m\varphi)\,{}_3F_2\left[\dfrac{-n}{3},\ \dfrac{-n}{3}+\dfrac{1}{3},\ \dfrac{-n}{3}+\dfrac{2}{3};\ 1,\ m+1;\ -k\rho^3\right], \\ U = t^n\rho^{-2m}P(m\theta, m\varphi)\,{}_3F_2\left[\dfrac{-n}{3},\ \dfrac{-n}{3}+\dfrac{1}{3},\ \dfrac{-n}{3}+\dfrac{2}{3};\ 1-m,\ 1-m;\ -k\rho^3\right]. \end{cases}$$

V. — Quelques autres équations.

95. Signalons encore les équations

$$\Delta_3 U = k \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \tau}, \tag{216}$$

$$\Delta_3 U = k \frac{\partial^3 U}{\partial t^2 \partial \tau}, \tag{217}$$

$$\Delta_3 U = k \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial \tau \partial T}. \tag{218}$$

Par les procédés des nos **87**, **90**, **93** en cherchant des intégrales de la forme

$$e^{\lambda t} V, \qquad e^{\lambda t + \mu \tau} V, \qquad e^{\lambda t + \mu \tau + \nu T} V$$

on peut écrire un certain nombre de résultats eu égard aux paragraphes qui précèdent.

On peut évidemment considérer bien d'autres équations; nous nous contenterons dans ce Mémoire de celles que nous avons écrites, comptant du reste revenir sur la question.

96. Nous rappellerons seulement un théorème que nous avons démontré autre part [24] sur l'équation

$$\Delta_3 U = \frac{\alpha^3}{p} U. \tag{219}$$

Cette équation admet l'intégrale particulière $U = p^{\alpha}$.

VI. — Sur les potentiels du troisième ordre.

97. Le problème que nous avons en vue est le suivant :

Étant donnés un point fixe $M(x, y, z)$, *un point mobile* $P(a, b, c)$ *décrivant une surface* S, *et une fonction* $\mu(a, b, c)$ *de ce point*, on considère la fonction

$$U(x, y, z) = \int\int_S \mu(a, b, c)\,[(x-a)^3 + (y-b)^3 + (z-c)^3 - 3(x-a)(y-b)(z-c)]^n\, d\sigma \tag{220}$$

où $d\sigma$ *est l'élément de surface de* S, *trouver dans des cas particuliers simples, des équations aux dérivées partielles vérifiées par la fonction U.*

Posons pour simplifier

$$p_1 = (x-a)^3 + (y-b)^3 + (z-c)^3 - 3(x-a)(y-b)(z-c)$$

la notation p étant toujours réservée à l'expression $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$; on aura

$$(220') \qquad U(x, y, z) = \int\int_S \mu p_1^n d\sigma,$$

$$(221) \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = 3n \int\int_S \mu[(x-a)^2 - (y-b)(z-c)] p_1^{n-1} d\sigma,$$

$$(222) \qquad D_x U = 9n^2 \int\int_S \mu(x-a) p_1^{n-1} d\sigma,$$

$$(223) \qquad \Delta_3 U = 27 n^3 \int\int_S \mu p_1^{n-1} d\sigma.$$

Remarquons, ce qui nous servira plus loin, que le même problème pourrait se poser avec des intégrales de lignes ou de volumes.

98. Cherchons à former des équations aux dérivées partielles dans les trois cas suivants :

1°) S est le plan d'équation $a = 0$, on a alors

$$D_x U = 9n^2 x \int\int_S \mu p_1^{n-1} d\sigma = \frac{x \Delta_3 U}{3n},$$

d'où

$$(224) \qquad \Delta_3 U = \frac{3n}{x} D_x U.$$

2°) S est le cône d'équation $a^2 - bc = 0$, on a alors

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3n \int\int_S \mu \; [x^2 - yz - (2ax - bz - cy)] p_1^{n-1} d\sigma,$$

$$2x D_x U - y D_z U - z D_y U = 9n^2 \int\int_S \mu[2(x^2 - yz) - (2ax - bz - cy)] p_1^{n-1} d\sigma,$$

$$\Delta_3 U = 27 n^3 \int\int_S \mu p_1^{n-1} d\sigma,$$

d'où

$$(225) \qquad (x^2 - yz)\Delta_3 U - 3n[2x D_x U - y D_z U - z D_y U] + 9n^2 \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

3°) S est la sphère d'Appell d'équation $a^3+b^3+c^3-3abc=1$, on a alors

$$U = \iint_S \mu\left[p - 3\,\mathrm{S}\, a(x^2-yz) + 3\,\mathrm{S}\, x(a^2-bc) - 1\right] p_1^{n-1}\, d\sigma,$$

$$\mathrm{S}\, x\frac{\partial U}{\partial x} = 3n\iint_S \mu\left\{p - 2\,\mathrm{S}\, a(x^2-yz) + \mathrm{S}\, x(a^2-bc)\right\} p_1^{n-1}\, d\sigma,$$

$$\mathrm{S}\,(x^2-yz)\,D_x U = 9n^2\iint_S \mu\left\{p - \mathrm{S}\, a(x^2-yz)\right\} p_1^{n-1}\, d\sigma,$$

$$\Delta_3 U = 27n^3\iint_S \mu p_1^{n-1}\, d\sigma,$$

d'où

$$(226)\qquad (p-1)\,\Delta_3 U - 9n\,\mathrm{S}\,(x^2-yz)\,D_x U + 27n^2\,\mathrm{S}\, x\frac{\partial U}{\partial x} - 27n^3 U = 0.$$

Ces trois équations généralisent les équations des prépotentiels rectiligne et circulaire relatifs à l'équation de Laplace à deux dimensions.

99. Considérons l'équation (224). En utilisant les variables u, v, w elle s'écrit

$$(224')\qquad \frac{\partial^3 U}{\partial u\,\partial v\,\partial w} = \frac{n}{u+v+w}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial w} + \frac{\partial^2 U}{\partial w\,\partial u} + \frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial v}\right];$$

les intégrales qui ne dépendent que de $p = uvw$ vérifient l'équation différentielle

$$p^2\frac{d^3F}{dp^3} + (3-n)\,p\frac{d^2F}{dp^2} + (1-n)\frac{dF}{dp} = 0$$

ce qui fournit les intégrales

$$\log p \quad \text{et} \quad p^n.$$

Si nous cherchons les intégrales ne dépendant que de x, (224) s'écrit $F''' - \dfrac{3n}{x}F'' = 0$ équation qui admet les solutions

$$x \quad \text{et} \quad x^{3n+2};$$

dans les cas particuliers $n = -\frac{2}{3}$, $n = -\frac{1}{3}$ la deuxième intégrale devient $\log x$ ou $x \log x$.

Reprenons l'équation (224') on peut l'écrire

$$(224'')\qquad \frac{\partial^3}{\partial u\,\partial v\,\partial w}[(u+v+w)\,U] = \frac{n+1}{n}(u+v+w)\frac{\partial^3 U}{\partial u\,\partial v\,\partial w};$$

on en déduit que pour $n = -1$ si U est une intégrale de l'équation de M. P. Humbert, $\dfrac{U}{u+v+w}$ est intégrale de (224″) donc :

Théorème. *Si* U *est une intégrale de* $\Delta_3 U = 0$, $\dfrac{U}{x}$ *est une intégrale de l'équation* (224) *où l'on a fait* $n = -1$. (¹)

100. Faisons maintenant le changement de variables (9) l'équation (224) devient

$$(227)\quad \frac{\partial^3 U}{\partial \rho^3} + \frac{3(1-n)}{\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1-3n}{\rho^2}\frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{3}{\rho^2}\frac{\partial^3 U}{\partial\rho\,\partial\theta\,\partial\varphi} + \frac{1}{\rho^3}\left[\frac{\partial^3 U}{\partial\theta^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial\varphi^3}\right]$$
$$-\frac{3n}{\rho^3}\left\{\frac{Q}{P}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} - \rho\frac{\partial^2 U}{\partial\rho\,\partial\varphi}\right] + \frac{R}{P}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} - \rho\frac{\partial^2 U}{\partial\rho\,\partial\theta}\right] - \frac{\partial^2 U}{\partial\theta\,\partial\varphi}\right\} = 0.$$

S l'on pose $U = \rho^m V(\theta, \varphi)$ l'équation devient

$$(228)\quad \frac{\partial^3 V}{\partial\theta^3} + \frac{\partial^3 V}{\partial\varphi^3} - 3(m-n)\frac{\partial^2 V}{\partial\theta\,\partial\varphi} - 3n\frac{Q}{P}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} - m\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right] - 3n\frac{R}{P}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} - m\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right] + m^2(m-3n)V = 0.$$

Cette équation formée par M. P. Humbert [43] est l'analogue ainsi que le fait remarquer cet auteur de l'équation de Gegenbauer

$$(229)\qquad \frac{d^2 V}{d\theta^2} + 2n\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{dV}{d\theta} + m(m-2n)V = 0,$$

obtenue à partir de l'équation du prépotentiel rectiligne

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{2n}{x}\frac{\partial U}{\partial x}$$

où l'on a posé

$$x = \rho\cos\theta,\qquad y = \rho\sin\theta,\qquad U = \rho^m V(\theta).$$

Du reste, ainsi que le fait remarquer toujours M. P. Humbert, l'équation (228) admet pour $n = -1$ les intégrales $\dfrac{Q[(m+1)\theta, (m+1)\varphi]}{Q(\theta, \varphi)}$ tout comme l'équation (229) admet les intégrales $\dfrac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta}$.

101. Mais par un autre chemin nous avons trouvé au chapitre IV une équation totalement différente de l'équation (228) sauf dans le cas $n = 0$ (ou $\nu = 0$ avec les notations du n° **75**) puisque l'équation se réduit alors à $\Delta_3 U = 0$.

(¹) Ceci généralise un résultat de M. P. Humbert [43].

Pour trouver une interprétation de notre équation (161), nous ferons appel à la fonction

$$U = \int_L \mu p_1^{n-1}\, ds$$

où L est la droite $b = c = 0$; nous généralisons ainsi le prépotentiel rectiligne en prenant encore une droite au lieu d'un plan.

Nous avons alors

$$D_y U = 9n^2 y \int_L \mu p_1^{n-1}\, ds, \quad D_z U = 9n^2 z \int_L \mu p_1^{n-1}\, ds,$$

$$\Delta_3 U = 27 n^3 \int_L \mu p_1^{n-1}\, ds.$$

Parmi les équations aux dérivées partielles que vérifie U on peut considérer l'équation

$$\Delta_3 U = 3n \frac{(y^2 + 2zx)\, D_y - (z^2 + 2xy)\, D_z}{y^3 - z^3}; \tag{230}$$

faisons le changement de variables (9), nous trouvons

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^3 U}{\partial \rho^3} + \frac{3(1-n)}{\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1-3n}{\rho^2}\frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{3}{\rho^2}\frac{\partial^3 U}{\partial\rho\,\partial\theta\,\partial\varphi} + \frac{1}{\rho^3}\left[\frac{\partial^3 U}{\partial\theta^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial\varphi^3}\right] - \frac{3n}{\rho^3}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta\,\partial\varphi} \\ &\quad - \frac{3n}{\rho^3(Q^3 - R^3)}\left\{[P(Q^2 + 2RP) - Q(R^2 + 2PQ)]\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} - \rho\frac{\partial^2 U}{\partial\rho\,\partial\varphi}\right]\right. \\ &\qquad\qquad \left. + [R(Q^2 + 2RP) - P(R^2 + 2PQ)]\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} - \rho\frac{\partial^2 U}{\partial\rho\,\partial\theta}\right]\right\} = 0. \end{aligned} \tag{231}$$

Les solutions de la forme $U = \rho^m V(\theta, \varphi)$ vérifient l'équation

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^3 V}{\partial\theta^3} + \frac{\partial^3 V}{\partial\varphi^3} - 3(m-n)\frac{\partial^2 V}{\partial\theta\,\partial\varphi} + m^2(m-3n)\, V \\ &\quad - \frac{3n}{Q^3 - R^3}\left\{[P(Q^2 + 2RP) - Q(R^2 + 2PQ)]\, D_\theta V - [P(R^2 + 2PQ) - R(Q^2 + 2RP)]\, D_\varphi V\right\}. \end{aligned} \tag{232}$$

Si l'on tient compte des identités

$$\begin{aligned} &P(Q^2 - RP) + Q(R^2 - PQ) + R(P^2 - QR) \\ &\qquad = P(R^2 - PQ) + Q(P^2 - QR) + R(Q^2 - RP) = 0 \end{aligned}$$

et de la relation

$$(R^2 - PQ)\, D_\varphi V = (Q^2 - RP)\, D_\theta V. \tag{156}$$

On retrouve aux notations près (V, m, $-n$ à la place de U, n, ν) l'équation (161). *Les équations* (161) *et* (228) *constituent donc deux extensions de l'équation de Gegenbauer.*

102. Prenons maintenant l'équation (225), en utilisant les variables u, v, w elle s'écrit

$$(225')\qquad \left[\mathrm{S}\, vw\right]\frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial u\,\partial v\,\partial w} - n\,\mathrm{S}\,(v+w)\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial v\,\partial w} + n^2\,\mathrm{S}\,\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u} = 0.$$

En cherchant encore les intégrales ne dépendant que de $p = uvw$, on est conduit à l'équation différentielle

$$p^2\mathrm{F}''' + (3 - 2n)p\mathrm{F}'' + (1-n)^2\mathrm{F}' = 0$$

qui admet les intégrales

$$p^n \quad \text{et} \quad p^n \log p.$$

Un calcul simple nous fournit aussi les intégrales $u^n v^n$, $v^n w^n$, $w^n u^n$, ce qui montre que les polynômes considérés au n° **13** sont des intégrales de l'équation (225).

Dans le cas $n = -1$ en utilisant l'identité

$$\frac{\partial^3}{\partial u\,\partial v\,\partial w}\left[\mathrm{U}\,\mathrm{S}\, vw\right] = \left[\mathrm{S}\, vw\right]\frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial u\,\partial v\,\partial w} + \mathrm{S}\,(v+w)\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial v\,\partial w} + \mathrm{S}\,\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u},$$

on déduit que l'intégrale de l'équation (225') pour $n = -1$ s'écrit

$$\frac{f(v,w) + g(w,u) + h(u,v)}{vw + wu + uv}$$

où $f(v,w)$, $g(w,u)$, $h(u,v)$ sont trois fonctions arbitraires de deux variables.

103. Faisons maintenant le changement de variables (9) il vient

$$(233)\quad \mathrm{P}(-\theta,-\varphi)\left\{\frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial \rho^3} + \frac{3(1-2n)}{\rho}\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \rho^2} + \frac{(1-3n)^2}{\rho^2}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \rho} - \frac{3}{\rho^2}\frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial \rho\,\partial \theta\,\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^3}\left[\frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial \varphi^3}\right] + \frac{6n}{\rho^3}\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \theta\,\partial \varphi}\right\}$$
$$+ \frac{3n}{\rho^3}\mathrm{R}(-\theta,-\varphi)\left\{\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \theta^2} + 3n\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \varphi} - \rho\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \rho\,\partial \varphi}\right\} + \frac{3n}{\rho^3}\mathrm{Q}(-\theta,-\varphi)\left\{\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \varphi^2} + 3n\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \theta} - \rho\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \rho\,\partial \theta}\right\} = 0.$$

En changeant le signe de θ, et φ et en cherchant les solutions de la forme $U = \rho^m V(\theta, \varphi)$ on est conduit à l'équation

$$(234)\quad \frac{\partial^3 V}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^3 V}{\partial \varphi^3} - 3(2n - m)\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} - 3n\frac{R}{P}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + (m - 3n)\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right\}$$
$$- 3n\frac{Q}{P}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + (m - 3n)\frac{\partial V}{\partial \theta}\right\} - m(m - 3n)^2 V = 0.$$

Si l'on pose $m - 3n = -\mu$ on trouve une équation analogue à l'équation (228) à ceci près que m est devenu μ et que les fonctions Q et R ont échangé leurs rôles.

Mais nous avons justement introduit l'équation (225) comme une généralisation de l'équation du prépotentiel rectiligne dans le plan en remarquant que de même que $a = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}(a^2 + b^2)$ on a $a^2 - bc = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial a}[a^3 + b^3 + c^3 - 3abc]$. L'équation (224) constitue donc une troisième généralisation de l'équation de Gegenbauer (229).

104. Considérons enfin l'équation (226); en utilisant les variables u, v, w elle s'écrit

$$(226')\qquad (uvw - 1)\frac{\partial^3 U}{\partial u \partial v \partial w} - n \mathop{\mathrm{S}} vw\frac{\partial^2 U}{\partial v \partial w} + n^2 \mathop{\mathrm{S}} u\frac{\partial U}{\partial u} - n^3 U = 0.$$

Mais si nous posons $V = \frac{U}{p^n}$, un calcul simple montre que

$$\frac{\partial^3 V}{\partial u \partial v \partial w} = \frac{1}{p^{n+1}}\left[p\frac{\partial^3 U}{\partial u \partial v \partial w} - n \mathop{\mathrm{S}} vw\frac{\partial^2 U}{\partial v \partial w} + n^2 \mathop{\mathrm{S}} u\frac{\partial U}{\partial u} - n^3 U\right]$$

l'équation (226) peut donc prendre la forme remarquable

$$(226'')\qquad \frac{1}{p^{n+1}}\frac{\partial^3 U}{\partial u \partial v \partial w} = \frac{\partial^3 V}{\partial u \partial v \partial w}\left[\frac{U}{p^n}\right].$$

On en déduit immédiatement les intégrales particulières

$$[f(v) + f_1(w)]u^n + [g(w) + g_1(u)]v^n + [h(u) + h_1(v)]w^n,$$

où les six fonctions f, f_1, g, g_1, h, h_1 sont arbitraires.

Les intégrales qui ne dépendent que de $p = uvw$ vérifient l'équation différentielle hypergéométrique

$$p^2(1 - p)F''' + [3 + 3(1 - n)p]pF'' + [1 - (1 - 3n + 3n^2)p]F' + n^3 F = 0$$

d'où

$$F(p) = {}_3F_2[-n, -n, -n; 1, 1, p].$$

Remarquons aussi que l'on peut écrire encore (226'') sous la nouvelle forme

$$(226''') \qquad \frac{\partial^3 [p^n V]}{\partial u \partial v \partial w} = p^{n+1} \frac{\partial^3 V}{\partial u \partial v \partial w};$$

mais c'est justement l'équation que nous aurions obtenue en prenant comme nouvelles variables les inverses des variables u, v, w.

Nous en déduisons que si S est la sphère d'Appell, p_3 le polynôme

$$[1-(ax+cy+bz)]^3 + [bx+ay+cz)^3 + (cz+by+az)^3 \\ -3[1-(ax+cy+bz)](bx+ay+cz)(cx+by+az)$$

la fonction

$$U = \frac{1}{p^n} \int\int_S \mu [p_3]^n \, d\sigma$$

est aussi intégrale de l'équation (226).

Si enfin on fait le changement de variables (9) on voit facilement que les fonctions

$$\rho^n P(n\theta, n\varphi), \qquad \rho^n Q(n\theta, n\varphi), \qquad \rho^n R(n\theta, n\varphi)$$

sont des intégrales de l'équation (226). Signalons à ce sujet que le changement de variables indiqué dans une de nos Notes (*C. R.*, 193, 1932, p. 983) conduit à une équation analogue à celle obtenue à la page 984 mais où le premier terme est multiplié par $e^{3\rho}$; les résultats énoncés à la suite ne se rapportent donc pas à l'équation envisagée.

105. On peut plus généralement se poser le problème du n° **97** pour l'intégrale

$$U(x, y, z) = \int\int \mu \Phi(p_3) \, d\sigma.$$

M. P. Humbert [43] et moi-même [21] nous sommes déjà occupés de cette question pour des fonctions Φ particulières; nous nous contenterons d'en donner ici la référence.

BIBLIOGRAPHIE

I. Ouvrages : Les ouvrages que nous avons consultés relativement à l'équation de Laplace et aux polynômes de Legendre, Gegenbauer, Hermite, sont les suivants :

1. P. Appell et J. Kampé de Feriet. — Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, Polynômes d'Hermite (Paris, 1926).
2. H. Bateman. — Differential equations (Londres, 1918).
3. H. Bateman. — The mathematical analysis of « Electrical and Optical Wavemotion » on the basis of Maxwell's equations (Cambridge, 1915).
4. E. T. Whittaker and G. N. Watson. — A Course of Modern Analysis (Cambridge, 1927).

II. Notes et Mémoires : Ainsi que nous l'avons indiqué dans l'introduction, nous voulons donner ici un aperçu de l'état de la question dont nous avons traité une partie dans ce Mémoire, celle relative à l'équation de M. P. Humbert, réservant pour des travaux ultérieurs la publication d'autres résultats amorcés dans plusieurs de nos Notes.

Dans les lignes qui suivent nous utiliserons les notations suivantes :

$$\Delta_r U = \frac{\partial^r U}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_r} \qquad \Delta_{B,n} U = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial x_n} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{vmatrix} U,$$

$$\Delta_{3,n} U = \sum \frac{\partial}{\partial x_k} \sum \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{(2)} U.$$

Les nombres entre crochets renverront aux numéros de la bibliographie et les nombres entre parenthèses aux paragraphes du texte. Nous utiliserons les abréviations suivantes :

A. C. I. M. ...	Actes du Congrès International des Mathématiciens de...
A. P. A. S. ...	Atti della Pontificae Accademia delle Scienze i Nuovi Lincei.
A. S. S. B. ...	Annales de la Société Scientifique de Bruxelles.
B. S. M. F. ...	Bulletin de la Société Mathématique de France.
B. S. S. L. ...	Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège.
C. R.	Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris.
M.	Mathematica (Cluj).
P. E. M. S. ...	Proceedings of the Edinburgh. Mathematical Society.

1. P. Appell. — *Propositions d'algèbre et de géométrie déduites de la considération des racines cubiques de l'unité* (C. R., 84, 1877, p. 540). Introduction des fonctions P, Q, R, et des trièdres équifaciaux à arêtes également inclinées sur la direction $x = y = z$ (2, 45, 54).

2. — *Sur certaines fonctions analogues aux fonctions circulaires* (C. R., 84, 1877, p. 1378). Systèmes différentiels définissant les fonctions circulaires et les fonctions P, Q, R. Généralisation à l'ordre n [19, 23].

3. Bevan Baker. — *On the relation between Pincherle's Polynomial and the Hypergeometric Function* (P. E. M. S., I, 39, 1920, p. 58). Formation de l'intégrale générale (143) du n° **73** (cf. aussi [31]).

4. N. Botea. — *Sur une généralisation d'un théorème de Lord Kelvin* (M., 6, 1932, p. 132-139). Étude des équations $\Delta_{B,n} U = 0$, énoncé de quelques théorèmes relatifs à des intégrales. Étude des équations

$$E(U) = \prod \left(\sum g_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) U = 0$$

et de leurs associées.

5. — *Sur quelques équations aux dérivées partielles* (C. R., 195, 1932, p. 992). Rappel de résultats de [4]. Extension à $\Delta_{3,B}$ de nos résultats [11, 22].

6. — *Sur quelques équations aux dérivées partielles* (C. R., 196, 1933, p. 35). Suite de [5]. Introductions des mineurs de $\Delta_{B,n}$, notions de fonctions conjuguées [7].

7. P. Delens et J. Devisme. — *Sur certaines formes différentielles et les métriques associées* (C. R., 196, 1933, p. 517-521). Étude d'un espace de Finsler et de la forme angulaire de Landsberg, introduction d'autres formes différentielles, application à notre ds^3 (67, 68). Remarques sur [6].

8. O. Devisme (M^lle) et J. Devisme. — *Sur une propriété des cosinus d'ordre supérieur* (A. C. I. M., Zurich, 1932, II, p. 67). Généralisation des polynômes $(1 - 2h \cos \theta + h^2)$ $(1 - 3hP(\theta, \varphi) + 3h^2 P(-\theta, -\varphi) - h^3)$; expression des coefficients en fonction de la seule fonction cosinus d'ordre n [2, 19].

9. J. Devisme. — *Sur quelques équations aux dérivées partielles* (C. R., 193, 1931, p. 825-828). Étude des équations $\Delta_r U = 0$ et de leurs intégrales ne dépendant que du produit $p_r = u_1 \ldots u_r$. Généralisation de la formule de Green et d'un résultat de M. Ghemanesco (C. R , 193, 1931, p. 477).

10. — *Sur quelques équations aux dérivées partielles* (C. R., 193, 1931, p. 516-519). Équations du prépotentiel pour les équations $\Delta_r U = 0$ et les surfaces $a_i = 0$, $\Pi a_i = 1$. Cas particulier de l'équation $\Delta_3 U = 0$ (98, 103).

11. — *Sur quelques équations aux dérivées partielles* (C. R., 193, 1931, p. 1153-1156) Recherches sur les transformations conservant $\Delta_3 U$ et ds^3 à un facteur près. Généralisation d'un théorème de M. D. V. Jonesco [44]. Comparaison avec certains résultats d'Appell [2] (10, 25, 26, 27, 62).

12. — *Sur quelques équations aux dérivées partielles* (C. R., 194, 1932, p. 516-519). Introduction des équations $\Delta_{3,n} U = 0$ qui généralisent l'équation de Laplace à plusieurs dimensions et comprennent le cas de $\Delta_3 U = 0$. Énoncés de théorèmes [25, 26].

13. — *Sur quelques équations aux dérivées partielles* (C. R., 194. 1932, p. 1550-1552). Introduction du système (Σ). Fonctions conjuguées au sens de M. N. Cioranesco et au sens de Ch. Riquier. Remarque sur l'équation de M. M. Ghemanesco [27] (28, 56, 36, 37).

14. — *Sur certaines familles de polynômes* (C. R., 195, 1932, p. 437-439). Extension des polynômes de Legendre, Gegenbauer, Hermite. Quelques propriétés nouvelles des équations $\Delta_r U = 0$, $\Delta_{3,n} U = 0$ (cf. [26]) (69, 72, 77).

15. — *Sur quelques applications des fonctions hypergéométriques* (C. R., 195, 1932, p. 936-938). Nouvelles fonctions génératrices. Remarques sur les équations $k\Delta_3 U = \partial U/\partial t$, $k\Delta_3 U = \partial^2 U/\partial t^2$. Extension d'un résultat de M. Angelesco et introduction de polynômes hypergéométriques à deux variables définis à partir de la fonction F_4 (81, 83, 91).

16. — *Sur un espace quasi-euclidien à trois dimensions attaché à l'équation de M. P. Humbert* (C. R., 195, 1932, p. 1059-1061). Introduction de notre notion d'angle. Orthogonalité au sens d'Appell. Interprétation géométrique de l'équation $\Delta_3 U = 0$ (47, 49, 50, 51, 52, 56, 59).

17. — *Sur un théorème de M. D. Jonesco* (B. S. M. F., 59, 1931, communication du 24 juin 1931, p. 32-35). Remarques sur le Mémoire [44] (9).

18. — *Sur une équation se rattachant à l'équation de M. P. Humbert* (B. S. M. F., 60, 1932, com. du 27 avril 1932, p. 23-25). Introduction de notre équation (225) du n° **98**.

19. — *Sur les cosinus d'Appell* (B. S. M. F., 61, 1933, com. du 8 mars 1933). Sur les systèmes différentiels déduits de ceux d'Appell [2] par des permutations convenables des inconnues. Développement de $P(h\theta, k\varphi)$ en fonction de $hk\theta\varphi$, $h^3\theta^3 + k^3\varphi^3$.

20. — *Sur la fonction génératrice de la fonction* $P(m\theta, n\varphi)$ *d'Appell* (Bull. de l'Acad. Roy. de Belgique, classe des Sciences, 5, 18, 1932, p. 505-506). Formation de l'identité (116) du n° **70**.

21. — *Sur certaines questions relatives à l'opérateur de M. P. Humbert* (B. S. S. L., 1, 1932, p. 173-176). Équations aux dérivées partielles satisfaites par l'intégrale $U = \int\int_{a=0} \mu \Phi(p_1)\, d\sigma$ pour les cas suivants $\Phi = p_1^m$, $p_1^m \log p_1$, $p_1^m \log^2 p_1$, ${}_0F_2(1, mp_1)$, $[p_1] \times {}_2F_2(1, 1; 2, 2; p_1)$. Extension au cas où le plan $a = 0$ est quelconque.

22. — *Sur certains résultats de M. M. N. Botea et M. Ghermanesco* (B. S. S. L., 1, 1932, p. 242-246). Confrontation des résultats des notes [5, 11, 29, 30] et énoncés de quelques résultats nouveaux (11).

23. — *Sur les équations aux dérivées partielles de MM. P. Humbert et H. Ghermanesco* (M., à paraître). Comparaison des équations mentionnées, introduction de fonctions analogues à celle d'Appell [19] et énoncé de quelques théorèmes [cf. 27, 36].

24. — *Sur quelques propriétés d'équations aux dérivées partielles du type* $\Delta_3 U = c(u_1 \ldots u_r)U$ (Soc. Franç. pour l'avanc. des Sc. Actes Congrès de Bruxelles. 1932, p. 35-36). Formations d'intégrales dans le cas $c = \alpha^r/p_r$, $c = c^{te}$ [26], (95).

25. — *Quelques remarques relatives à une classe d'équations aux dérivées partielles du troisième ordre* (A. C. I. M., Zurich, 1932, p. 76). Formation des équations du prépotentiel pour les opérateurs $\Delta_{3,n}$ [12].

26. — *Sur certains opérateurs décomposables en produits de Laplaciens et de dérivées partielles* (1) (A. P. A. S., 86, 1932, p. 95-108). Formation d'équations différentielles vérifiées par les intégrales ne dépendant que des polynômes associés. Études de certaines intégrales.

27. M. Ghemanesco. — *Sur une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre* (B. S. M. F., 59, 1931, com. du 25 novembre 1931, p. 39-42).

28. — *Sur une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre* (Beletinul Facultàții de Științe din Cernàuți, 6, 1932, p. 28-35). Ce Mémoire est le développement de [27] et d'une communication faite à la Soc. Roum. des Sc. le 16 nov. 1931. L'auteur considère une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre généralisant l'équation de Laplace. Il étend à cette équation certains résultats de M. P. Humbert [36] et nous-même [11].

29. — *Sur une généralisation de l'équation de Laplace* (B. S. S. L., 1, 1932, p. 134-137). Extension de nos résultats [11] aux équations déduites de $\Delta_r U = 0$ par une transformation linéaire dont les coefficients dépendent de $\alpha(\alpha^n = 1)$.

30. — *Sur l'équation de Laplace* (Atti dell. R. Accad. Naz. dei Lincei, 6, 15, 1932, p. 932-935). Même étude dans le cas $\alpha^n = -1$.

31. P. Humbert. — *Some extensions of Pincherle's polynomials* (P. E. M. S., 1, 39, 1920, p. 21). Étude des polynômes $C_n^\nu(x, o)$ (73). Expression au moyen des fonctions elliptiques.

32. — *Sur les séries hypergéométriques* (A. S. S. B., 43, 1923, p. 75). L'auteur donne entre autres l'expression de $C_{6m}^{-1/3}(x, o)$ au moyen des fonctions hyper géométriques.

33. — *Remarques sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur* (Comptes rendus du Congrès des Sociétés savantes Sciences, 1925, p. 81-85). L'auteur y donne l'expression des cosinus de Villarceau au moyen des fonctions hypergéométriques.

34. — *Remarques bibliographiques sur les sinus d'ordre supérieur* (A. P. A. S., 82, 1929, p. 308-312).

(1) Un résumé de ce Mémoire a été diffusé par Radio-Vatican le 29 déc. 1932 et a paru dans le *Scientarum nuncius Radiophonicus* publié par l'Académie Pontificale, n° 17.

35. — *Sur une équation aux dérivées partielles du troisième ordre* (A. C. I. M.. Bologne, 1928, t. III, p. 55).

36. — *Sur une généralisation de l'équation de Laplace* [1] (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 8, 1929, p. 145-159). Ce Mémoire développe la Note précédente. On y trouve la définition de l'équation $\Delta_3 U = 0$ et certaines de ses propriétés, une étude de diverses catégories de polynômes, et un théorème sur l'équation $\Delta_3 U = \frac{1}{c^3}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}$ (23, 93).

37. — *Les fonctions de Bessel du troisième ordre* (A. P. A. S., 83, 1930, p. 128-146). Introduction de nouvelles fonctions qui se rattachent à la série hypergéométrique triconfluente. Application à l'étude de $\Delta_3 U + U = 0$ (86).

38. — *Sur le potentiel correspondant à une attraction proportionnel à* $\rho e^{\frac{\rho^2}{2}}$ (M., 1, 1929, p. 117-121).

39. — *Sur une généralisation de l'équation de la chaleur* (A. S. S. B., 49, 1929, p. 113-116). Étude de l'équation $\Delta_3 U = \partial U/\partial t$ et introduction de certains polynômes (79, 89).

40. — *Sur l'équation* $\Delta_3^p U = 0$: (A. S. S. B., 51, 1931, p. 91-93). Étude de certains polynômes attachés à cette équation.

41. — *On Appel's Function* $P(\theta, \varphi)$: (P. E. M. S., 2, 3, 1932, p. 53-55). Étude de la fonction génératrice de $P(n\theta, n\varphi)$. Formules d'addition (70).

42. — *Sur une généralisation du potentiel* (C. R., 194, 1932, p. 1549-1550). Extension d'un résultat précédent [38]. Utilisation de l'intégrale $\int\int {}_0F_1[1, p_1/9]\,d\sigma$.

43. — *Sur les potentiels du troisième ordre* : (A. S. S. B., 52, 1931, p. 293-305). Étude de l'équation $x\Delta_3 U = 3nD_x U$. Extension de l'équation de Gegenbauer. Étude de l'intégrale citée plus haut [21] dans les cas $\Phi = e^{p_1}$ et ${}_0F_2[K+1, 1; p_1]$. Extension et développement de certains résultats antérieurs [38, 42] (98, 100, 105).

44. D. V. Jonesco. — *Sur une équation aux dérivées partielles du troisième ordre* (B. S. M. F., 58, 1930, p. 224-229). Extension du théorème de Lord Kelvin à l'équation $\Delta_3 U = 0$ et démonstration de certaines identités [17] (9, 62).

45. Pincherle. — *Una nuova extensione delle funzione spheriche* (Mem. Ist. Bologna, 5, 1, 1889, p. 337) (71).

46. — *Un systema d'integrali ellitici considerati come funzioni dell' invariante assoluto :* (Rendiconti Lincei, 4, 7, 1871, p. 74) (76).

47. J. Touchard. — *Sur les sinus intégraux du troisième ordre* (A. S. S. B., 52, 1932, p. 279-287). Étude des fonctions $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, définies par l'équation

$$lie^{-jx} = F_1(x) + j\,F_2(x) + j^2 F_3(x),$$

(1) C'est ce Mémoire qui a été l'origine des recherches de MM. Botea, Ghermanesco, Jonesco et de moi-même.

48. P. Delens. — *La métrique angulaire des espaces de Finsler et la géométrie différentielle projective* (Collection des actualités scientifiques et industrielles, n° 80, Hermann, Paris, 1933). Développement de la note [7] et d'une seconde : *Sur certains problèmes relatifs aux espaces de Finsler* (C. R., t. 196, 1933, p. 1356-1358).

49. J. Devisme. — *Sur deux questions relatives à l'équation de M. P. Humbert* (C. R., t. 196, 1933, p. 1203-1204). Introduction de la notion d'aire. Sur une interprétation du problème de Dirichlet, d'après M. A. Liénard [51].

50. — *Sur certains polynômes* (Société Française pour l'avancement des Sciences. Actes du Congrès de Chambéry, 1933, 57e session). Introduction des polynômes $P_{n,m,p} = \frac{\partial^{n+m+p}}{\partial u^n \partial v^m \partial w^p} [uvw - 1]^{n+m+p}$.

51. A. Liénard. — *Formule de Green pour les potentiels du 3e ordre de M. P. Humbert* (Soc. Math. de France, LXI, 1933. Communication du 22 mars 1933).

TABLE DES MATIÈRES DE CE MÉMOIRE