ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

BERTRAND GAMBIER

Courbes gauches de degré 4 tracées sur le tore

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 21 (1929), p. 223-246

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1929_3_21__223_0>

COURBES GAUCHES DE DEGRÉ 4 TRACÉES SUR LE TORE

Par BERTRAND GAMBIER

1. — Introduction.

M. Iliovici a donné récemment (Nouvelles Annales, 6e série, t. II, 1927, p. 1-2) une démonstration élémentaire et élégante de la proposition :

La courbe intersection d'une sphère et d'un tore est une biquadratique gauche; sur les quatre cônes du second degré contenant la courbe, il y en a un et un seul jouissant de la double propriété d'avoir son sommet sur l'axe du tore et cet axe du tore pour droite focale.

M. Lebesgue a repris cette question et étudié plus à fond l'intersection d'un tore et d'une quadrique générale; il rattache les résultats à la double propriété :

1° *Le tore se transforme en lui-même par une infinité d'inversions.*

2° *Chacun des deux plans isotropes passant par l'axe touche le tore suivant deux droites isotropes parallèles* (Nouvelles Annales, 6e série, t. II, 1927, p. 225-231).

M. Lebesgue donne ensuite le résultat élégant : *pour qu'une quadrique* Q *coupe un tore* T *suivant deux quadriques, il faut et il suffit que* Q et T *soient tangents en quatre points formant un quadrilatère plan et inscriptible.*

Cet énoncé de M. Lebesgue rectifie d'ailleurs automatiquement un léger lapsus que M. Iliovici a commis et que M. Lebesgue a recopié; il s'agit de la propriété : *pour qu'un cône de degré 2, ayant son sommet sur l'axe du tore, coupe ce tore suivant deux biquadratiques, il suffit que l'axe du tore soit focale du cône.*

Or M. Iliovici a dit ; *il faut et suffit;* la démonstration, si élégante de M. Iliovici, ne se rapporte, on le voit aussitôt, qu'à la phrase rectifiée : *il suffit.* M. Lebesgue, à qui j'avais signalé l'erreur, a aussitôt reconnu que l'on doit tenir compte non seulement des ∞^1 inversions de *module positif* qui transforment le tore T en lui-même, mais encore de l'inversion *isolée, de module négatif,* qui a son pôle au centre O du tore T (je me borne, pour simplifier, au tore usuel : bouée de sauvetage, ou coussin hygiénique, dont le cercle méridien ne coupe pas l'axe; le lecteur verra sans peine les modifications, peu importantes d'ailleurs, à effectuer, dans tout ce qui suit, pour le cas du tore à points coniques réels). *Soit* C_0 *le cône de sommet* O *circonscrit au tore le long de deux parallèles; tout cône* C *bitangent à* C_0 *le long de deux génératrices coupe* T *suivant deux biquadratiques, et c'est le seul cas où le cône a son sommet sur l'axe sans que l'axe soit focale.*

Je me propose ici d'étudier la représentation paramétrique du tore et de rappeler à cette occasion quelques propriétés classiques de la représentation d'une surface unicursale. Je classerai ensuite les courbes gauches d'ordre 4 tracées sur le tore. Elles se partagent en deux classes : *les quartiques unicursales sans point double*, puis les *biquadratiques sphériques*, en général non unicursales, mais qui peuvent devenir *unicursales, en présentant un point double.*

Pour la classification des quartiques gauches unicursales un résultat général intervient : pour une courbe gauche algébrique, il y a lieu de considérer *la* ou *les* surfaces d'ordre minimum qui contiennent cette courbe; puis, au cas où la surface d'ordre minimum est unique, les surfaces *indécomposables* d'ordre supérieur à ce degré minimum, mais le moins élevé possible. Ici il y a *une* surface d'ordre minimum, c'est une *quadrique* Q ; la surface qui vient ensuite est une surface cubique S, dépendant de 6 paramètres non homogènes, dont on peut disposer de façon que S contienne le cercle de l'infini, ce qui réduit le nombre de paramètres à 2; on réduit le nombre de paramètres de S à l'unité en obligeant S à contenir une conique convenablement choisie de T : les coniques de T sont les méridiens, les parallèles et les cercles d'Yvon Villarceau; les méridiens forment une seule série continue, les parallèles aussi, mais les cercles d'Yvon Villarceau forment deux séries continues, irréductibles l'une à l'autre; l'intersection de S avec T se complète alors par une autre conique d'espèce différente de celle déjà contenue par S. *On a ainsi trois classes de quartiques gauches unicursales : a, b, c; les classes a, b se partagent chacune en deux sous-classes.*

a) Q passe par les deux points coniques C, C_1 de T sur l'axe, mais non par les points cycliques I et J du plan horizontal (l'axe est supposé vertical); la quartique $\mathcal{B}$ coupe en un point unique, distinct de C et C_1, chaque méridien, en deux points chaque parallèle, en un point unique chaque cercle YV_1 d'une série de Villarceau, en trois points ceux de la série YV_2 complémentaire; la classe étudiée de courbes $\mathcal{B}$ est en réalité complétée par une classe analogue $\mathcal{B}_1$ où les rôles des séries de cercles YV_1 et YV_2 ont été échangés. L'intersection de Q et T se compose d'une quartique $\mathcal{B}$ et d'une quartique $\mathcal{B}_1$; la surface S que nous considérons peut être définie par $\mathcal{B}$, le cercle de l'infini, un cercle YV_2 *arbitraire* et un méridien *arbitraire*. Les deux courbes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ relatives à Q se coupent, hors de C et C_1, en *quatre* points où Q touche T.

b) Q passe par les points cycliques I, J mais non par C et C_1; la quartique $\mathcal{B}$

coupe en un point unique à distance finie chaque parallèle, chaque méridien en deux points, en un point unique chaque cercle YV_1, en trois points chaque cercle YV_2; on a donc, comme plus haut, la série complémentaire $\mathcal{B}_1$; les courbes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ relatives à la même quadrique Q se coupent encore en *quatre* points où Q touche le tore, distincts de I et J. La surface S est définie par $\mathcal{B}$, le cercle de l'infini, un cercle YV_2 *arbitraire* et un parallèle *arbitraire*.

c) Q passe par I, J, C, C_1; $\mathcal{B}$ coupe en un unique point (hors de C et C_1) chaque méridien, en un unique point (hors de I et J) chaque parallèle, en deux points chaque cercle YV_1 et YV_2; ici, il n'y a donc qu'une seule série continue de courbes $\mathcal{B}$. Q coupe T suivant deux courbes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ se coupant en *deux* points seulement (hors de C, C_1, I, J) où Q touche T. La surface S peut être définie par $\mathcal{B}$, le cercle de l'infini, un *méridien* et un *parallèle* arbitraire.

Pour les *biquadratiques*, toutes sphériques, je complète ainsi l'énoncé de M. Lebesgue :

Tout cercle Γ *dont l'axe passe par le centre* O *du tore* T, *coupe* T *en quatre points* p, q, r, s *formant un trapèze isocèle, les bases* pq *et* rs *étant situées dans deux parallèles de* T *symétriques relativement au centre* O; *les plans tangents en* p, q, r, s *à* T *concourent en un même point* P *du plan méridien perpendiculaire à* pq *et* rs; *toute quadrique* Q, *inscrite dans le cône* (P, Γ) *le long de* Γ, *coupe* T *suivant deux biquadratiques* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}_1$; *la réciproque est vraie*; *les centres* ω *et* ω_1 *des sphères contenant respectivement* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}_1$ *sont symétriques relativement à* O *et sur l'axe de* Γ. *Réciproquement, les biquadratiques découpées sur* T *par deux sphères dont les centres* ω *et* ω_1 *sont symétriques par rapport à* O *sont sur une même quadrique* Q, *quadritangente à* T *aux sommets d'un trapèze isocèle du type indiqué. Il existe 4 sphères particulières de centre* ω *et tangentes à* T ; *chacune associée à une sphère quelconque de centre* ω_1 *donne* ∞^1 *quadriques* Q *cinq fois tangentes à* T; ω_1 *donne de même quatre sphères tangentes à* T, *de sorte que, pour un même point* ω *arbitraire on peut former 16 quadriques* Q *particulières six fois tangentes à* T.

M. Lebesgue avait prévu l'existence de quadriques six fois tangentes à T, mais il n'avait pas prévu que ces quadriques ne sont fournies que par les biquadratiques à point double, à l'exclusion des quartiques unicursales proprement dites, c'est-à-dire sans point double.

Dans l'énoncé qui précède, on suppose que l'axe du cercle Γ ne coïncide pas avec l'axe du tore. On remarquera le cas particulier où ω est sur le cercle lieu des centres des méridiens; on peut avoir alors une quadrique de révolution circonscrite au tore tout le long d'un cercle méridien et le coupant encore suivant une biquadratique. D'autre part si ω vient sur l'hyperboloïde lieu des centres des sphères bitangentes et si la sphère de centre ω est la sphère bitangente correspondante, on a des quadriques six fois tangentes particulières coupant T suivant un cercle YV_1 et un cercle YV_2 et une biquadratique; si la sphère de centre ω_1 est simplement tangente (il en existe deux), on a avec la sphère doublement tangente ω une quadrique Q particulière 7 fois tangente au tore; 7 est le nombre maximum de points de contact de Γ et d'une quadrique (en écartant le cas de quadriques de révolution inscrites dans un parallèle ou un méridien).

2. — Intersection du tore et d'une sphère. Cônes correspondants.

On suppose que T a Oz pour axe; R désigne le rayon du cercle méridien, a la distance, à l'axe, du centre du cercle méridien (ici on suppose $a > R$). Soit une sphère Σ de centre ω, et I le point où Oz perce le plan radical de Σ et d'une sphère quelconque ayant pour grand cercle un méridien de T. L'inversion, qui a pour pôle I et pour module la puissance de I relativement à Σ, change le tore en lui-même, de façon que chaque cercle méridien se transforme en lui-même, la courbe (T, Σ) en elle-même; I est le sommet d'un cône du second ordre contenant cette courbe; I est le cône d'Iliovici, *déterminé d'une façon unique par* Σ. Le plan isotrope $y = ix$ touche T suivant deux droites horizontales $C\gamma$, $C_1\gamma_1$ issues des points coniques C et C_1, $C\gamma$ perce Σ en un point unique c à distance finie, Ic coupe $C_1\gamma_1$ en c_1 qui est le transformé de c dans l'inversion; Ic ne peut être tangente à la courbe (T, Σ) au point c, sinon elle serait aussi tangente à cette courbe (T, Σ) en c_1 et couperait la courbe en quatre points; donc le plan $y = ix$ est bien le plan tangent, le long de Icc_1 au cône d'Iliovici : Oz *est, sans exception aucune, focale de ce cône.*

Inversement, si un cône de degré 2 a son sommet I sur Oz, et admet Oz pour focale, ce cône est tangent à T aux points où les génératrices de contact de ce cône avec les plans $y = \pm ix$ rencontrent les droites isotropes du tore; les 4 points de contact obtenus sont bien sur un cercle et l'intersection du cône avec T se décompose en deux biquadratiques sphériques. MM. Iliovici et Lebesgue en ont donné la raison géométrique.

Or toute biquadratique appartient à 4 cônes de degré 2; le plan méridien de T qui contient le centre ω de Σ est plan de symétrie, de sorte que la courbe (T, Σ) est tracée aussi sur le cylindre parabolique qui la projette sur ce plan; ce cylindre est un second cône et il reste, hors de I, deux autres sommets de cône situés dans ce plan de symétrie : l'un d'eux J peut-il être aussi sur Oz? Nous écartons le cas banal où le centre ω est sur l'axe; nous coupons la figure par un plan méridien quelconque; le cône d'Iliovici est coupé suivant deux génératrices IAA_1, IBB_1, A et A_1 étant sur un même cercle méridien, B et B_1 sur l'autre; on peut choisir les notations de sorte que AB_1 et BA_1 soient les droites qui se croisent en J, on a

$JA.JB_1 = JB.JA_1$, chaque produit étant égal à la puissance de J relativement à Σ; si l'on rabat tous les plans méridiens sur un même méridien fixe, puisque A peut venir sur un parallèle *quelconque*, on voit que l'on aura une inversion de pôle J, échangeant *tous* les points d'un cercle méridien avec tous les points de l'autre; J *est donc centre de similitude interne des deux méridiens et coïncide avec le centre* O *du tore;* O *admet, relativement à* Σ, *une puissance égale à* $R^2 - a^2$.

Réciproquement, si Σ est une sphère ayant $R^2 - a^2$ pour puissance relativement à O, l'inversion de pôle O et module $R^2 - a^2$, échange encore Σ avec elle-même, T avec lui-même (chaque méridien s'échangeant avec le complémentaire), et O est encore sommet d'un cône de degré 2 contenant l'intersection; si on considère le point c, précédemment défini, on a

$$OC^2 = Oc^2 = R^2 - a^2$$

de sorte que c est à lui-même son transformé; Oc est donc tangente en c à la courbe (T, Σ) et le plan tangent au cône O le long de Oc n'est plus le plan isotrope $y = ix$, mais le plan osculateur en c à l'intersection; Oz *n'est plus focale du cône.*

On remarque que le cône C_0, de révolution autour de Oz, engendré par les tangentes issues de O aux méridiens du tore, touche T suivant deux parallèles, de sorte que (T, Σ) et (C_0, Σ) sont deux courbes tangentes entre elles aux points où les parallèles de contact de C_0 et T percent Σ; p étant un tel point, on voit immédiatement que Op n'est pas tangent à Σ, car Op perce Σ au point p' symétrique de p relativement à O; *donc le cône* O *est bien tangent à* C_0 *le long de la génératrice commune* Opp' *et le long de la seconde génératrice analogue.*

Réciproquement, soit O un cône bitangent à C_0 : ce cône O est, par suite, tangent à T en quatre points situés sur un même cercle; donc, d'après les propositions données par M. Lebesgue, il coupe T suivant deux biquadratiques. Il est intéressant de le montrer directement; O est tangent à T aux quatre points p, q, r, s tous situés à la distance $\sqrt{a^2 - R^2}$ du point O; soit Γ le cercle circonscrit au rectangle $pqrs$ et Σ une sphère *quelconque* contenant Γ; l'intersection (T, Σ) est sur un cône C de sommet O, bitangent à C_0 le long des génératrices Opq et Ors; en faisant varier Σ de façon à ce qu'elle décrive le faisceau déterminé par Γ, le cône C décrit lui aussi le faisceau des cônes de degré 2 bitangents à C_0 le long de Opq et Ors, de sorte qu'il coïncide, pour une certaine sphère Σ, avec le cône O proposé, ce qui justifie la proposition. Le cône O sera d'ailleurs obtenu *deux* fois, par deux sphères Σ et Σ_1 dont les centres sont symétriques relativement à O : cela tient à ce que ces deux sphères sont symétriques relativement à O, de même que les deux biquadratiques communes à T et au cône O.

3. — Représentation paramétrique du tore.

Le tore est représenté par les formules

$$(1)\quad \begin{cases} x = (a + R\cos\theta)\cos\varphi = \left(a + R\dfrac{1-v^2}{1+v^2}\right)\dfrac{1-u^2}{1+u^2}, \\ y = (a + R\cos\theta)\sin\varphi = \left(a + R\dfrac{1-v^2}{1+v^2}\right)\dfrac{2u}{1+u^2}, \\ z = R\sin\theta = \dfrac{2Rv}{1+v^2}. \end{cases}$$

On en déduit aisément pour θ, φ, v, u en fonction de x, y, z :

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x^2+y^2+z^2-a^2-R^2}{2aR}, \qquad \sin\theta = \dfrac{z}{R}; \\ v = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}; \\ \cos\varphi = \dfrac{2ax}{x^2+y^2+z^2+a^2-R^2}, \qquad \sin\varphi = \dfrac{2ay}{x^2+y^2+z^2+a^2-R^2}; \\ u = \dfrac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \dfrac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}. \end{cases}$$

Il est commode d'employer aussi les coordonnées homogènes X, Y, Z, T au lieu de x, y, z sur le tore et, dans le plan de la représentation paramétrique, u, v, t au lieu de u, v, 1 :

$$(3)\quad \begin{cases} X = [a(t^2+v^2) + R(t^2-v^2)]\,(t^2-u^2), \\ Y = [a(t^2+v^2) + R(t^2-v^2)]\,2tu, \\ Z = 2Rtv(t^2+u^2), \\ T = (t^2+u^2)(t^2+v^2). \end{cases}$$

On remarque que, dans le plan (u, v, t) les sections planes de T ont pour image des courbes de degré 4 ayant en commun :

a) Les 4 points simples A, A_1, B, B_1 solutions des équations simultanées

$$(4)\qquad t^2 + u^2 = 0, \qquad a(t^2+v^2) + R(t^2-v^2) = 0.$$

Nous prendrons les coordonnées de ces points

$$A(i, v_0), \qquad A_1(-i, -v_0), \qquad B(-i, v_0), \qquad B_1(i, -v_0),$$

de sorte que A et A_1 sont imaginaires conjuguées, ainsi que B et B_1. A chaque point A, A_1, B, B_1, correspond sur T l'une des droites isotropes horizontales de T; en réalité chaque élément de contact issu de A donne un point sur la droite correspondante de T. Le nombre v_0 est une imaginaire pure.

b) Le point de l'infini $u = t = 0$, $v = 1$, sur l'axe des v; en posant $u = mt$, $v = 1$, puis annulant t, on obtient

$$x = (a - R)\frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \qquad y = (a - R)\frac{2m}{1 + m^2}, \qquad z = 0, \tag{5}$$

c'est-à-dire le parallèle de rayon minimum. Ce point est double sur chaque courbe image.

c) Le point à l'infini, $v = t = 0$, $u = 1$, sur l'axe des u; c'est encore un point double sur chaque courbe image; en posant $v = mt$, $u = 1$, puis annulant t, on obtient sur le tore la courbe

$$x = -a - R\frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{2Rm}{1 + m^2}, \tag{6}$$

c'est-à-dire le cercle méridien de gauche.

Si donc une courbe du tore admet pour image une courbe du plan (u, v, t) de degré m, admettant A, B, A_1, B_1 aux ordres α, β, α_1, β_1 respectivement, le point à l'infini sur l'axe des u à l'ordre γ, le point à l'infini sur l'axe des v à l'ordre δ, la courbe du tore est de degré

$$4m - \alpha - \alpha_1 - \beta - \beta_1 - 2\gamma - 2\delta. \tag{7}$$

Si l'on remarque que l'on a

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = (t^2 + u^2)^2(t^2 + v^2)[(a^2 + R^2)(t^2 + v^2) + 2aR(t^2 - v^2)], \tag{8}$$

on voit que, le facteur $(t^2 + u^2)(t^2 + v^2)$ étant enlevé, la portion à distance finie de l'intersection du tore avec une sphère a aussi pour image une quartique ayant les mêmes points fixes que les images des sections planes et avec les mêmes multiplicités. La courbe du tore est donc bien de degré 4; d'autre part, les conditions imposées laissent bien 4 paramètres linéaires non homogènes dans l'équation de l'image; à chacune de ces images correspond donc une sphère et une seule (accidentellement un plan).

Nous venons d'indiquer tous les points du plan uv auxquels correspond une courbe sur le tore; nous allons, inversement, indiquer tous les points du tore auxquels correspond, sur le plan, une courbe.

A) A chaque point conique C ou C_1 correspond l'une ou l'autre droite $v = v_0$

ou $v = -v_0$; à chaque point de la droite AB correspond (A et B exceptés) un élément linéaire sur le cône des tangentes en C.

B) Au point E $(-a+R, 0, 0)$ commun au méridien de gauche et au cercle minimum correspond la droite à l'infini du plan uv, ou mieux, à tout point de cette droite correspond une direction de tangente en E.

C) Au point I $(y = ix,\ z = t = 0)$ correspond toute la droite AB_1. Il est à remarquer qu'en I arrivent deux nappes du tore tangentes entre elles; le point (i, v) donne sur T une asymptote $y = ix,\ z = 2R\,\dfrac{v}{1+v^2}$, de sorte que les deux points (i, v), $\left(i, \dfrac{1}{v}\right)$ donnent la même asymptote. Il faudra donc se rappeler que l'intersection *complète* de T avec une surface S passant en I comprend nécessairement une image telle, qu'à chaque intersection (i, v) avec la droite $u = i$, correspond une intersection $\left(i, \dfrac{1}{v}\right)$; si une courbe du plan (u, v) ne coupe pas la droite $u = i$ en points deux à deux ainsi associés, on est certain que cette courbe ne correspond pas à l'intersection *complète* de T avec une autre surface. Si la courbe image comprend toute la droite $u = i$, on ne peut appliquer la condition en question aux autres morceaux de la courbe image.

D) Le point J $(y = -ix,\ z = t = 0)$ donne les mêmes circonstances, relatives à la droite A_1B.

Nous devons maintenant nous préoccuper des points ou lignes doubles du tore T.

Chaque point conique C ou C_1 a été déjà signalé; à C correspond la droite $v = v_0$, chaque élément de tangente en C au tore correspondant à un point de la droite $v = v_0$, la correspondance étant biunivoque.

De même pour I, la droite $u = i$, chaque élément de tangente asymptotique arrivant en I correspondant (biunivoquement) à un couple de points de la droite $u = i$, les cotes de ces deux points satisfant à $vv' = 1$.

De même pour J.

Il reste maintenant le cercle de l'infini tout entier : il a pour image le système des deux droites $v = i$ et $v = -i$. On voit aussitôt que les deux points $(u, i, 1)$ et $(u', -i, 1)$ correspondent au point du cercle à l'infini dans la direction respective

$$(9) \qquad 1-u^2 \qquad 2u \qquad i(1+u^2),$$

$$(10) \qquad 1-u'^2 \qquad 2u' \qquad -i(1+u'^2)$$

de sorte que, moyennant la relation

$$(11) \qquad uu' + 1 = 0$$

on a le même point à l'infini; les deux plans tangents à T en ce point sont différents : les éléments tangents à T situés dans l'un correspondant aux éléments aboutissant au point $(u, i, 1)$, les éléments de l'autre plan tangent correspondent au point $(u', -i, 1)$; d'ailleurs la développable circonscrite à T le long du cercle de l'infini se décompose en les deux cônes isotropes contenant le cercle lieu des centres des méridiens et ces deux cônes se raccordent précisément aux points I et J. L'intersection *complète* de T avec une surface doit avoir pour image une courbe coupant les droites $v=i$ et $v=-i$ en points deux à deux associés par la loi (11); si la surface contient le cercle de l'infini, l'image de l'intersection comprend les droites $v=i$ et $v=-i$ et l'on ne peut rien dire pour les autres morceaux de la courbe image et leurs intersections avec les droites $v=\pm i$.

4. — Recherche des courbes de degré 4.

Une telle courbe, *supposée indécomposable*, est coupée par le *plan* d'un méridien ou d'un parallèle en quatre points, et, comme on peut passer par continuité d'un cercle méridien au cercle méridien complémentaire dans le même plan (et même résultat pour les parallèles complémentaires), les points se répartissent par moitié entre les deux cercles méridiens ou entre les deux parallèles. Le degré en u et v *séparément*, pour l'image, est donc 2 au plus et ne peut s'abaisser à 1 que si la courbe du tore passe en C et C_1 ou en I et J ; le degré *total* par rapport à u et v est donc 4 au plus.

Soit d'abord ce degré total égal à 4 ; si la courbe du tore ne passe pas en E, la courbe image ne peut couper la droite de l'infini, donc $\gamma+\delta=4$, d'où $\gamma=\delta=2$; la différence $16-\alpha-\alpha_1-\beta-\beta_1-2\gamma-2\delta$ doit être égale à 4 ; on a donc $\alpha+\alpha_1+\beta+\beta_1=4$; la courbe image est indécomposable, donc $\alpha=2$ empêche β et β_1 d'avoir une autre valeur que 0 (sinon AB ou AB_1 est une droite faisant partie de la courbe), et entraîne $\alpha_1=2$: la courbe se décompose encore; donc $\alpha=\alpha_1=\beta=\beta_1=1$ [1]. Nous retrouvons donc les biquadratiques sphériques, de genre 1, accidentellement les sections planes. Si la courbe image a un point double, elle donne une sphère ou un plan tangent; si la courbe image se décompose, on trouve, en faisant cette fois usage des conditions de réalité, une hyperbole équilatère passant par A et A_1 et ses asymptotes parallèles aux axes. puis une autre

---

[1] On voit que ce raisonnement s'applique même au tore à points coniques réels. Si même, dans le tore usuel ou dans le tore à points coniques, on change y en iy sans toucher à x ni z, on a une autre surface de degré 4 avec ligne double à l'infini et deux points coniques (réels ou non) pour laquelle le raisonnement s'applique encore. Les conditions de *réalité* n'ont pas eu à intervenir au moins jusqu'ici.

hyperbole du même type mais passant en B et B_1 au lieu de A et A_1 : chaque hyperbole correspond à un cercle YV_1 ou YV_2 d'Yvon Villarceau; une association *arbitraire* de deux hyperboles, prises une dans chaque série, donne une sphère ou un plan bitangents. Chaque biquadratique $\mathcal{B}$ du type général coupe en deux points exactement chaque méridien, chaque parallèle, chaque cercle YV_1, chaque cercle YV_2. Une rotation autour de l'axe de T revient à une substitution

$$\left(u, v;\ \frac{u+k}{1-ku},\ v\right)$$

où k est une constante; une biquadratique $\mathcal{B}$ coupe le méridien minimum en l'un ou l'autre de deux points que l'on peut faire venir, par rotation en E, de sorte que le degré de l'image s'abaisse d'une unité, car E a pour image la droite de l'infini tout entière; la cubique image donne $\gamma = \delta = 1$, et elle perce la droite de l'infini en un point qui correspond au passage en E. Accidentellement si E est double pour la courbe du tore, c'est-à-dire, si la sphère est tangente au tore en E, la droite de l'infini s'obtient deux fois et il reste une conique du faisceau (A, B, A_1, B_1) qui correspond biunivoquement à chaque sphère tangente en E au tore.

Supposons maintenant le degré de l'image égal à 3; si on suppose $\gamma = \delta = 1$, on retrouve $\alpha + \alpha_1 + \beta + \beta_1 = 4$ et par suite les quartiques planes ou sphériques passant en E. Si on veut éviter d'avoir une courbe gauche ou plane passant en E, il faut que l'on ait $\gamma + \delta = 3$, d'où deux hypothèses

$$\gamma = 2, \qquad \delta = 1$$

ou

$$\gamma = 1, \qquad \delta = 2.$$

De toutes façons la courbe image et la courbe gauche de T sont unicursales; pour avoir le degré 4 sur T, il faut que $\alpha + \alpha_1 + \beta + \beta_1$ soit égal à 2. Nous étudierons en détail les deux séries de quartiques gauches unicursales ainsi obtenues. Pour chacune, comme plus haut, une rotation peut faire passer la courbe en E et abaisser l'image au degré 2 avec $\gamma = 1$, $\delta = 0$ pour la première série; $\gamma = 0$, $\delta = 1$ pour la seconde.

Si le degré de l'image est 2, on peut supposer, pour éviter de retrouver des courbes déjà signalées, que la courbe du tore ne passe pas en E, donc $\gamma + \delta = 2$, $\gamma = \delta = 1$, on a une hyperbole équilatère *quelconque* du plan uv, image d'une nouvelle série de quartiques gauches unicursales; en faisant passer, par rotation, la courbe en E, on aura simplement pour image une droite *quelconque*.

Étudions donc d'abord les biquadratiques sphériques, puis les trois séries de quartiques gauches unicursales.

5. — Biquadratiques sphériques et sections planes.

Dans le plan uv la quartique assujettie à passer aux points A, B, A_1, B_1 simples et aux points à l'infini sur les deux axes comme points doubles dépend *exactement* de 4 paramètres non homogènes : la courbe est en effet de genre 1, et j'ai démontré (*Annales de l'École Normale Supérieure*, série 3, t. XLII, 1925, p. 232-233) que, dans ce cas, il y a un seul groupe anormal complet de surabondance égale à 1, formé par les points bases d'un faisceau, quel que soit le degré de la courbe, pourvu que le genre soit égal à l'unité. On obtient donc la courbe sphérique la plus générale, intersection de T avec la sphère

$$\Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2Ax - 2By - 2Cz + D = 0. \tag{1}$$

On remarque que cette courbe, en tenant compte de l'équation du tore

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0 \tag{2}$$

est aussi sur le cône du second degré

$$C \equiv (Ax + By + Cz + a^2 - D_1)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0 \tag{3}$$

qui est précisément le cône d'Iliovici ; on a posé

$$a^2 + R^2 + D = 2D_1. \tag{4}$$

On remarque aussitôt (M. Iliovici en a donné la raison géométrique) que la nouvelle sphère

$$\Sigma' \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D' = 0 \tag{5}$$

conduit au même cône d'Iliovici moyennant la relation symétrique

$$D + D = 2(a^2 - R^2) \tag{6}$$

ou si on préfère

$$D_1 + D'_1 = 2a^2, \qquad a^2 + R^2 + D' = 2D'_1. \tag{6'}$$

On a donc bien vérifié que le cône d'Iliovici coupe le tore suivant deux biquadratiques ; soient $\mathcal{B}$ la biquadratique (Σ, T), et $\mathcal{B}'$ la biquadratique (Σ', T) ; il est clair que $Q \equiv \Sigma + \lambda C = 0$ est la quadrique la plus générale contenant la biquadratique $\mathcal{B}$; cette quadrique Q coupe T d'abord suivant $\mathcal{B}$, puis suivant une autre biquadratique $\mathcal{B}_\lambda$ dont nous désirons trouver les équations; il s'agit de trouver la sphère Σ_λ correspondant à $\mathcal{B}_\lambda$. Appelons $\Sigma(u, v)$, $C(u, v)$, $Q(u, v)$ ce que deviennent Σ, C, Q quand on remplace x, y, z par les formules déjà employées au numéro 3,

$$(7)\qquad \begin{cases} x = \left(a + R\dfrac{1-v^2}{1+v^2}\right)\dfrac{1-u^2}{1+u^2}, \\[2mm] y = \left(a + R\dfrac{1-v^2}{1+v^2}\right)\dfrac{2u}{1+u^2}, \\[2mm] z = \dfrac{2Rv}{1+v^2}. \end{cases}$$

On a aisément

$$(8)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + R^2 + 2aR\dfrac{1-v^2}{1+v^2}, \\[2mm] x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2 = 2a\left[a + R\dfrac{1-v^2}{1+v^2}\right]. \end{cases}$$

$$(9)\qquad \Sigma \equiv \frac{2}{(1+u^2)(1+v^2)}\Big[D_1(1+u^2)(1+v^2) + R\{a(1-v^2) - 2Cv\}(1+u^2) \\ - \{A(1-u^2) + 2Bu\}\{a(1+v^2) + R(1-v^2)\}\Big].$$

$$(10)\qquad \Sigma' \equiv \frac{2}{(1+u^2)(1+v^2)}\Big[D'_1(1+u^2)(1+v^2) + R\{a(1-v^2) + 2Cv\}(1+u^2) \\ + \{A(1-u^2) + 2Bu\}\{a(1+v^2) + R(1-v^2)\}\Big].$$

Autrement dit on a

$$(9')\qquad (1+u^2)(1+v^2)\,\Sigma(u, v) \equiv 2P,$$

$$(10')\qquad (1+u^2)(1+v^2)\,\Sigma'(u, v) \equiv 2P',$$

où P et P' sont les polynômes de degré 4 en u et v explicités dans (9) et (10).

D'après ce que l'on a vu, l'expression

$$(11)\qquad (1+u^2)^2(1+v^2)^2\,C(u, v)$$

doit se réduire au produit du polynôme PP' par un facteur numérique. Or dans PP' on trouve comme terme en $u^4 v^4$

$$(12)\qquad [D_1 - aR + A(a-R)][D'_1 - aR - A(a-R)],$$

et dans l'expression (11)

$$(13)\qquad [a^2 - D_1 - A(a-R)]^2 - a^2(a-R)^2$$

on trouve immédiatement, en vertu de (6') que les deux expressions (12) et (13) sont égales et de signe contraire, donc

$$C(u, v) \equiv \frac{-PP'}{(1+u^2)^2(1+v^2)^2} \tag{14}$$

et on écrira

$$\Sigma + \lambda C \equiv \frac{P}{(1+u^2)(1+v^2)}\left[2 - \frac{\lambda P'}{(1+u^2)(1+v^2)}\right]. \tag{15}$$

Il résulte immédiatement de cette formule que la biquadratique $\mathcal{B}_\lambda$ peut s'obtenir en coupant le tore T par la sphère

$$\Sigma_\lambda \equiv \Sigma' - \frac{4}{\lambda}$$

et cette sphère est concentrique à Σ'. Il est très remarquable que si deux biquadratiques du tore sont sur une même quadrique Q, les deux sphères correspondantes aient leurs centres symétriques relativement au centre du tore; la quadrique Q est tangente à T aux 4 points où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_\lambda$ se rencontrent, points situés à l'intersection de T et du cercle d'intersection de Σ et Σ_λ; ce cercle Γ a évidemment pour axe la droite $O\omega$; il est donc situé sur une sphère de centre O, laquelle coupe le tore suivant deux parallèles symétriques par rapport à O; les points p, q où Γ rencontre l'un de ces parallèles et r, s où Γ rencontre l'autre forment bien les sommets d'un trapèze isocèle dont pq, rs sont les bases (nous avons écarté le cas où ω serait sur l'axe du tore). Toutes les conditions obtenues ici sont évidemment nécessaires et suffisantes et conduisent à l'énoncé donné dans l'introduction, que je crois inutile de reproduire.

La sphère générale dépend de 4 paramètres non homogènes, donc la quadrique Q la plus générale donnant sur T deux biquadratiques dépend de 5 paramètres qui sont par exemple : la position de ω (3 paramètres) et les rayons de Σ et Σ_λ. Il faudrait bien se garder de croire, qu'un point du tore dépendant de deux paramètres, on peut disposer des cinq paramètres de façon à obliger Q à toucher T en deux points *arbitraires* : car p donné, q est sur le parallèle de p et r, s sur le parallèle symétrique.

Le fait intéressant c'est que, ω étant quelconque (ni sur l'axe du tore, ni sur le cercle lieu des centres des méridiens, ni sur l'hyperboloïde lieu des centres des sphères bitangentes), on a ∞^2 quadriques qui coupent T suivant deux biquadratiques sans point double, et sont quatre fois tangentes à T, puis ∞^1 quadriques qui coupent T suivant une biquadratique à point double et une biquadratique non unicursale et sont cinq fois tangentes à T, puis 16 quadriques qui coupent T suivant deux biquadratiques à point double et sont six fois tangentes à T. Si ω vient sur l'hyperboloïde annoncé, au lieu d'avoir parmi les sphères de centre ω quatre sphères particulières, simplement tangentes à T, on a deux sphères simplement tangentes et une sphère bitangente; cette sphère bitangente donne ∞^1 quadriques Q coupant T suivant un cercle YV_1, un cercle YV_2 et une biquadratique non unicursale : ces quadriques sont *six* fois tangentes au tore; si, de plus, la sphère ω_1 est simplement tangente au tore, on a une quadrique Q *sept* fois tangente au tore, ce qui est le maximum du nombre de points de contact d'une quadrique et du tore, quand ce nombre est fini. Si ω et ω_1 sont toutes deux bitangentes à T, Q se réduit à 2 plans bitangents.

L'autre cas particulier est celui où ω est sur le cercle lieu des centres des méridiens et où Σ est inscrite dans un méridien du tore : cette sphère Σ donne ∞^1 quadriques de révolution inscrites dans T le long du cercle méridien en jeu et coupant T encore suivant une biquadratique, en général non unicursale.

6. — Quartiques gauches unicursales $\gamma = 2$, $\delta = 1$.

La courbe image est de degré 3; on doit avoir $\alpha + \alpha_1 + \beta + \beta_1 = 2$, de sorte que chaque nombre α, α_1, β, β_1 ne peut qu'être égal à 0 ou 1, car nous écartons les cas de décomposition; $\alpha = \beta = 1$ entraînerait que AB soit morceau de décomposition de l'image; on ne peut donc admettre que les hypothèses

$$\alpha = \alpha_1 = 1, \qquad \beta = \beta_1 = 0. \tag{1}$$

$$\alpha = \alpha_1 = 0, \qquad \beta = \beta_1 = 1. \tag{2}$$

$$\alpha = \beta_1 = 1, \qquad \alpha_1 = \beta = 0. \tag{3}$$

$$\alpha = \beta_1 = 0, \qquad \alpha_1 = \beta = 1. \tag{4}$$

Les deux dernières équations donneraient des courbes imaginaires; nous nous bornerons aux deux premières, cela fera deux séries continues, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$, irréductibles l'une à l'autre (une symétrie relative à un méridien les échange d'ailleurs tout comme les deux séries de cercles YV_1 et YV_2). On aura donc

$$u = \frac{Av^2 + Bv + C}{Dv^2 + Ev + F} \tag{5}$$

avec la condition que, pour la série $\mathcal{B}$, $v = v_0$ donne à u la valeur i et $v = -v_0$ la valeur $-i$. On pourra donc écrire en ne gardant que 4 paramètres homogènes A, B, D, E.

$$u = \frac{Av^2 + Bv + iEv_0 - Av_0^2}{Dv^2 + Ev - iBv_0 - Dv_0^2}. \tag{6}$$

Une rotation autour de l'axe du tore permettrait de supposer $D = 0$, mais nous n'utiliserons pas cette simplification plus apparente que réelle.

La courbe $\mathcal{B}$ ne passe par aucun des deux points coniques, mais admet I et J pour points simples. Si A, B, D, E sont réels, la courbe $\mathcal{B}$ est réelle et est située sur une unique quadrique Q qui perce T suivant une nouvelle quartique gauche unicursale de la série complémentaire : ceci se voit en remarquant que les génératrices de Q se partagent en deux séries : les génératrices de l'une percent $\mathcal{B}$ en 3 points, donc le complément $\mathcal{B}_1$ en un point, les génératrices de l'autre série percent $\mathcal{B}$ en un point et $\mathcal{B}_1$ en trois points de sorte que $\mathcal{B}_1$ est bien une quartique gauche unicursale; $\mathcal{B}$ perce en un point à distance finie l'une des deux droites isotropes issue de C (et non l'autre) et la droite conjuguée issue de C_1, donc $\mathcal{B}_1$ perce les deux droites complémentaires. On aura donc pour $\mathcal{B}_1$ l'équation analogue

$$(7) \qquad u' = \frac{A'v'^2 + B'v' - iE'v_0 - A'v_0^2}{D'v'^2 + E'v' + iB'v_0 - D'v_0^2}$$

et les principes exposés plus haut, paragraphe 3, nous donnent le point où $\mathcal{B}_1$ perce les droites $u = i$ (en dehors de B_1), $u = -i$ (en dehors de B), $v = i$ et $v = -i$: cela nous donne *quatre* équations linéaires et homogènes pour calculer A', B', D', E au moyen de A, B, D, E. Le calcul, qui semble un peu pénible, se fait en réalité aisément et conduit à l'équation définitive

$$(8) \qquad u' = \frac{(E + iAv_0)v'^2 + \{D(1 + v_0^2) + iBv_0\}v' + iAv_0}{(iDv_0 - B)v'^2 + \{iEv_0 - A(1 + v_0^2)\}v' + iDv_0}.$$

La compatibilité des équations, en nombre surabondant, qui fournissent A', B', D', E' est une vérification de la méthode.

Les deux images associées (6) et (8) se coupent en 4 points, de sorte que Q touche T en *quatre* points et passe en I et J où, sans que Q soit tangente à T, l'intersection (Q, T) présente deux branches tangentes entre elles, et cela fait bien (comme le prévoit M. Lebesgue) *six* points doubles pour l'intersection complète (Q, T) en dehors des points où Q perce le cercle de l'infini, mais avec des circonstances particulières non prévues par M. Lebesgue. Deux quartiques unicursales situées sur une même quadrique et de série différente sur la quadrique doivent se couper en 10 points : ici on a pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$: les quatre points où Q touche T, les deux points autres que I et J où Q coupe le cercle de l'infini, puis I comptant pour deux unités et non une seule, et J pour deux unités lui aussi. M. Lebesgue avait prévu 4 points sur le cercle de l'infini et 6 en dehors; ici deux de ces derniers sont venus se réunir l'un avec I, l'autre avec J sans que pour cela donner contact de Q et T.

Appelons p, q, r, s les points de contact de Q et T; on voit que l'on peut placer p par exemple en un point arbitraire du tore, cela donne simplement deux équations entre A, B, D, E, obtenues en remplaçant dans (6) et (8) (u, v) ou (u', v') par les coordonnées (u, v) de p ; il reste alors un paramètre non homogène dans les équations de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$: par suite p fixé, q, r, s dépendent d'un seul paramètre et décrivent un lieu dont on a aisément l'équation en exprimant que les quatre équations linéaires et homogènes obtenues en remplaçant dans (6) et (8) (u, v) et (u', v') par les coordonnées (u, v) de p puis (u_1, v_1) de q sont compatibles. On a ainsi l'équation assez compliquée

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} v^2 - v_0^2 & v + iv_0 u & (v_0^2 - v^2)u & iv_0 - uv \\ (1 + v_0^2)vu + iv_0(v^2 + 1) & uv^2 + iv_0 v & -iv_0(v^2 + 1)u + (1 + v_0^2)v & -iv_0 vu + v^2 \\ v_1^2 - v_0^2 & v_1 + iv_0 u_1 & (v_0^2 - v_1^2)u_1 & iv_0 - u_1 v_1 \\ (1 + v_0^2)v_1 u_1 + iv_0(v_1^2 + 1) & u_1 v_1^2 + iv_0 v_1 & -iv_0(v_1^2 + 1)u_1 + (1 + v_0^2)v_1 & -iv_0 v_1 u_1 + v_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons $q\,(u_1, v_1)$ fixé : la courbe (9) est de degré total 6, de degré 4 en v, 2 en u ; elle passe par les points A, B, A_1, B_1 simples, de sorte que le lieu de p est une courbe sur le tore de degré 8, le point q est double sur cette courbe; il y a sur cette courbe ∞^1 systèmes de points associés p, r, s.

On pourra remarquer que si le dénominateur et le numérateur de la fraction (6) ont un facteur commun, la courbe dégénère en un parallèle et un cercle YV_1 de Villarceau dont l'image passe en A et A_1. Ce cas va précisément nous servir à étudier une question intéressante.

Soit YV_2 la série complémentaire des cercles de Villarceau; $\mathcal{B}$ perce en un seul point chaque cercle YV_1 et en trois chaque cercle YV_2 : c'est l'inverse pour la courbe $\mathcal{B}_1$. Puis $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ percent en deux points chaque cercle méridien, en un seul point chaque parallèle. Or une surface S de degré 3 est complètement déterminée par 19 points *indépendants;* S contient $\mathcal{B}$ tout entière si elle en contient 13 points; le cercle de l'infini rencontre $\mathcal{B}$ en quatre points, de sorte que, si S contient $\mathcal{B}$, il suffit de trois nouvelles conditions pour que S contienne le cercle de l'infini; or un cercle YV_2 donné rencontre $\mathcal{B}$ en trois points et le cercle de l'infini en deux points : il suffit donc de deux nouvelles conditions pour que ce cercle YV_2 soit sur S; nous aurons alors ∞^1 surfaces S formant un faisceau, ayant entre elles une nouvelle droite D commune pour compléter l'intersection et coupant T chacune suivant un parallèle qui complétera l'intersection et varie avec la surface S du faisceau; en effet soit un parallèle déterminé de T, ce parallèle passe en I et la tangente en I est contenue dans le plan $y = ix$ qui contient l'asymptote de $\mathcal{B}$ et la tangente au cercle de l'infini, de sorte que le parallèle est tangent à toute surface S en I; de même pour J ; le parallèle coupe donc S en six points déjà connus : deux en I, deux en J, un sur le cercle YV_2 adopté, un sur $\mathcal{B}$; il suffit donc que S soit astreinte à contenir un nouveau point du parallèle, pour qu'elle le contienne tout entier. —

La droite D est facile à obtenir : en effet la quadrique Q perce le cercle YV_2 choisi en quatre points, dont trois sont sur $\mathcal{B}$, le quatrième hors de $\mathcal{B}$; par ce dernier passe une génératrice de Q, sécante triple de $\mathcal{B}$, ayant donc en commun 4 points avec toutes les surfaces S déterminées par les 18 points déjà indiqués; comme l'ensemble des courbes : $\mathcal{B}$, cercle de l'infini, cercle YV_2, droite D est de degré 9 et est situé sur une infinité de surfaces S de degré 3, il en résulte que les surfaces S forment bien exactement un faisceau, et non un système à plus de paramètres.

Si on imagine l'intersection complète S et T on remarque que la quadrique Q n'en contient qu'une partie $\mathcal{B}$; si nous appelons $z - h = 0$ l'équation du plan du parallèle commun à S et T, $P = 0$ l'équation du plan du cercle YV_2, on voit que la surface

$$P(z-h)\,t^2Q = 0 \tag{8}$$

contient tous les morceaux de l'intersection de S et T avec la multiplicité voulue (1 pour les morceaux simples, 2 pour le cercle de l'infini) pour pouvoir appliquer les résultats classiques de la résiduation; on peut donc trouver une identité

$$P(z-h)\,t^2Q + SS_1 + TQ' \equiv 0 \tag{9}$$

où S_1 est un polynôme de degré 3, Q' un polynôme de degré 2. L'intersection complète $\mathcal{B} + \mathcal{B}_1$ de Q et T annule donc SS_1; $\mathcal{B}$ annule S, donc $\mathcal{B}_1$ annule S_1. L'intersection de Q avec S comprend $\mathcal{B}$ et deux génératrices d'un même système sur Q, sécantes triples de $\mathcal{B}$: ces deux droites sont donc sur la quadrique Q'; de même les deux génératrices de système opposé à celui-là, communes à Q et S_1 annulent aussi Q'; l'intersection de S_1 et T comprend $\mathcal{B}_1$, puis le cercle de l'infini ($t^2 = 0$), puis le parallèle complémentaire de celui commun à S et T dans le plan $z - h = 0$, puis le cercle YV_1 complémentaire du cercle YV_2 dans le plan P. Chaque plan $P = 0$, $z - h = 0$, $t = 0$, coupe S (et aussi S_1) suivant une droite en dehors de la conique qui a servi à déterminer S (ou S_1) et cette droite est sur Q', de sorte que Q' est un paraboloïde dont on connaît ainsi 8 génératrices; on remarque que Q' se raccorde avec S (ou S_1) tout le long de la droite à l'infini commune. On a ainsi étudié complètement la disposition mutuelle des surfaces de chaque groupe avec les surfaces des deux autres groupes.

7. — Quartiques unicursales $\gamma = 1$, $\delta = 2$.

Pour des raisons analogues, on a une série $\mathcal{B}$ correspondant à $\alpha = \alpha_1 = 1$, $\beta = \beta_1 = 0$ et une série $\mathcal{B}_1$ correspondant à $\alpha = \alpha_1 = 0$, $\beta = \beta_1 = 1$. La courbe $\mathcal{B}$ est donnée par une équation

$$(1) \qquad v = \frac{Au^2 + Bu + C}{Du^2 + Eu + F}$$

avec les conditions exprimant que l'image contient les points (i, v_0) et $(-i, -v_0)$

$$(2) \qquad B = iv_0(D - F), \qquad C - A = Eiv_0.$$

La courbe $\mathcal{B}$ est sur une quadrique Q unique qui détermine sur T une quartique de la série complémentaire

$$(3) \qquad v' = \frac{A'u'^2 + B'u + C'}{D'u'^2 + E'u' + F'}.$$

$$(4) \qquad B' = iv_0(F' - D'), \qquad C' - A' = -E'iv_0.$$

Pour déterminer complètement la courbe $\mathcal{B}_1$ associée à $\mathcal{B}$ par Q, on s'adresse aux quatre points d'intersection des images avec les droites $v = i$ et $v = -i$; or un peu d'attention prouve que la substitution

$$(5) \qquad \left(u, v;\ \frac{-1}{u},\ -v\right)$$

remplace précisément la courbe $\mathcal{B}$ d'image (1) par la courbe $(\mathcal{B}_1)$ cherchée, qui est donc simplement définie par

$$(6) \qquad v' = \frac{Cu'^2 - Bu' + A}{-Fu^2 + Eu - D}.$$

La substitution (5) a sur le tore une interprétation géométrique aisée.

La quadrique Q passe aux points coniques C et C_1, mais ne passe plus en I ni en J; les deux courbes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ relatives à Q se coupent en C et C_1, en quatre points sur le cercle de l'infini, puis en quatre points où Q touche T; on voit que Q n'est pas six fois tangente à T, mais quatre fois seulement; on peut à la rigueur regarder le passage en C ou C_1 comme équivalent à l'un ou l'autre de deux contacts. Les quatre points p, q, r, s où Q touche T donnent lieu à des remarques analogues à celles précédemment faites. La courbe $\mathcal{B}$ peut dégénérer en un cercle YV_1 de Villarceau et un méridien.

Chaque cercle YV_2 perce $\mathcal{B}$ en 3 points; on déterminera donc, comme précédemment une surface S de degré 3 par $\mathcal{B}$, le cercle de l'infini, un cercle YV_2 donné et on aura une identité analogue à celle de tout à l'heure

$$P(y - mx)\, t^2 Q + SS' + TQ' = 0$$

où $y - mx = 0$ est l'équation du plan contenant le cercle méridien choisi pour S. Inutile de répéter les remarques relatives à ces diverses surfaces.

8. — Quartiques unicursales $\lambda = 1$, $\delta = 1$.

On étudie le cas où l'image est de degré 2 et est représentée par l'équation

$$(1) \qquad Auv + Bu + Cv + D = 0.$$

La courbe $\mathcal{B}$ passe par C, C_1, I, J, rencontre chaque cercle méridien en un seul point hors de C et C_1, chaque parallèle en un point hors de I et J; chaque cercle YV_1 ou YV_2 donne deux points sur la courbe $\mathcal{B}$. Si on considère la courbe $\mathcal{B}_1$ qui complète l'intersection de Q et T, courbe unicursale du degré 4, on trouve une équation du même type que (1) et un peu d'attention prouve que la transformée de (1) par la substitution

$$\left(u, v;\quad \frac{-1}{u},\quad \frac{1}{v}\right)$$

donne l'équation de $\mathcal{B}_1$, en songeant aux conditions fournies par $v = \pm i$ ou par $v = \pm i$. On a donc l'équation

$$(2) \qquad A + Bv - Cu - Duv = 0.$$

Les deux courbes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ ne se coupent qu'en deux points où Q est tangente à T, hors de C, C_1, I, J qui comptent respectivement pour 1, 1, 2, 2 dans l'intersection de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ et hors des deux points nouveaux où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ se coupent sur le cercle de l'infini.

Les quadriques de cette série dépendent encore de 3 paramètres. On peut se donner arbitrairement l'un des deux points de contact M de Q et du tore T; l'autre décrit alors un lieu facile à trouver. Écrivant en effet que les équations (1) et (2) sont satisfaites par (u, v), puis (u', v') on trouve la condition nécessaire et suffisante

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} uv & u & v & 1 \\ 1 & v & -u & -uv \\ u'v' & u' & v' & 1 \\ 1 & v' & -u' & -u'v' \end{vmatrix} = 0.$$

Quand le point (u', v') est fixé, le point (u, v) décrit sur le tore une courbe gauche de degré 8, car l'équation (3) développée par la règle de Laplace donne

$$(4)\quad \begin{aligned} 2vv'(1+u^2)(1+u'^2) + 2uu'(1-v^2)(1-v'^2) \\ -(u^2v^2+1)(u'^2+v'^2) - (u'^2v'^2+1)(u^2+v^2) = 0. \end{aligned}$$

Quel que soit le point (u', v') la courbe qui lui correspond passe par les points $u = \pm i$, $v = \pm 1$ ce qui signifie que I est double avec deux asymptotes horizontales situées dans le plan du parallèle supérieur pour l'une, inférieur pour l'autre; le point (u', v') est double pour le lieu. La courbe (4) ne change pas par la substitution $\left(u, v;\ \frac{-1}{u},\ \frac{1}{v}\right)$ facile à interpréter.

On peut encore ici déterminer une surface S de degré 3 contenant $\mathfrak{B}$, le cercle de l'infini, un cercle méridien arbitraire et un parallèle arbitraire et l'on a une identité

$$(5)\qquad (z-h)(y-mx)t^2Q + SS' + TQ' = 0$$

analogue aux identités précédemment signalées, $z - h = 0$, $y - mx = 0$ étant les plans du parallèle et du méridien qui déterminent la surface S.

Il y a lieu de faire ici une remarque évitant des erreurs possibles : quand l'intersection complète d'une surface Σ avec T se décompose en deux courbes, les images L et L_1 des deux courbes doivent couper les droites $u = i$, $u = -i$, $v = i$, $v = -i$ en points convenablement associés : c'est ce qui a permis, pour le cas des quadriques de trouver l'image $\mathfrak{B}_1$ connaissant l'image $\mathfrak{B}$; on a admis que $\mathfrak{B}_1$ devait contenir les points associés par les lois indiquées aux points de $\mathfrak{B}$. Mais il pourrait se produire ce fait curieux que les points donnés par $\mathfrak{B}$ seule se correspondissent entre eux — et non à ceux de $\mathfrak{B}_1$ — et que ceux de $\mathfrak{B}_1$ se correspondissent entre eux. Mais alors le procédé employé ici ferait, en parlant de $\mathfrak{B}$, obtenir de nouveau $\mathfrak{B}$ et non $\mathfrak{B}_1$. Pour les quadriques des deux premières séries, cela ne peut se produire, car l'image de $\mathfrak{B}$ passe en A et A_1 et non B et B_1 tandis que c'est l'inverse pour $\mathfrak{B}_1$. Mais pour la dernière catégorie, étudiée dans ce paragraphe, on voit que les courbes (1) et (2) coïncident si $(\varepsilon = \pm 1)$.

$$(6)\qquad D = \varepsilon i A, \qquad C = \varepsilon i B.$$

Une rotation permet de supposer $A = D = 0$; prenons donc le cas simple $u = iv$ qui donne immédiatement le paraboloïde imaginaire

$$\frac{y}{ix} = \frac{z}{R}. \tag{7}$$

L'intersection complète a pour image $(u - iv)(1 + iuv) = 0$. Ceci serait intéressant au point de vue réel pour les surfaces déduites du tore par la substitution homographique $Y = iy$, sans toucher à x ni z.

Je termine ce paragraphe en donnant un exemple de quartique unicursale réelle simple $u = v$ qui est contenue sur la quadrique

$$x^2 + y^2 - z^2 - a^2 + R^2 - 2Rx = 0. \tag{Q}$$

Cette quadrique admet le plan de symétrie xOz qui n'appartient pas à la courbe $\mathcal{B}$ en jeu

$$x = \left(a + R\frac{1 - u^2}{1 + u^2}\right)\frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad y = \left(a + R\frac{1 - u^2}{1 + u^2}\right)\frac{2u}{1 + u^2}, \quad z = \frac{2Ru}{1 + u^2}. \tag{$\mathcal{B}$}$$

La courbe $\mathcal{B}_1$, définie par $u + v = 0$, est la symétrique de $(\mathcal{B})$ par rapport au plan xOz.

9. — Remarques complémentaires.

Reprenons le cas des quartiques gauches unicursales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ du premier type $\gamma = 2$, $\delta = 1$. $\mathcal{B}$ étant l'une, Q la quadrique déterminée par $\mathcal{B}$, il était naturel de chercher parmi les ∞^6 surfaces S qui contiennent $\mathcal{B}$ une surface aussi simple que possible, de façon à mettre le plus simplement possible en évidence le complément de l'intersection de Q et T : l'identité écrite plus haut nous donnait le résultat; or nous pouvons nous contenter d'imposer à S le cercle de l'infini; on aura un système ∞^3 de surfaces S dont chacune coupe encore T suivant une nouvelle courbe gauche de degré 4, *qui est la courbe $\mathcal{B}_1$ la plus générale dans la série étudiée.* Avant de le démontrer, nous pouvons déjà remarquer qu'il y a concordance entre le nombre de paramètres, 3, du système S ainsi obtenu et le nombre de paramètres dont dépend la courbe $\mathcal{B}_1$. Une surface S étant choisie, une courbe $\mathcal{B}_1$ *quelconque* a en commun avec S : les deux points I, J où $\mathcal{B}_1$ touche S, deux points où $\mathcal{B}_1$ rencontre de nouveau le cercle de l'infini, puis quatre points où $\mathcal{B}_1$ rencontre $\mathcal{B}$: il suffit donc que la surface S contienne 3 points de $\mathcal{B}_1$, pour que $\mathcal{B}_1$ soit sur S et cela justifie le résultat.

Une courbe $\mathcal{B}$ et une courbe $\mathcal{B}_1$ quelconques toutes deux, dans cette série déterminent donc une surface S, *qui contient le cercle de l'infini.*

Or $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ ne se rencontrent qu'en 6 points, dont I et J à distance infinie et quatre à distance finie : une surface de degré 3 assujétie à contenir $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ doit contenir les 6 points communs, plus 7 points de $\mathcal{B}$ et 7 points de $\mathcal{B}_1$: on trouve donc 20 conditions pour 19 inconnues linéaires non homogènes. Il y a compatibilité avec une seule solution, comme le prouve le résultat qui précède; on peut le voir directement en remarquant que les traces de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ déterminent sur le plan de l'infini : I (avec en ce point la tangente au cercle de l'infini), J (avec même remarque), et pour $\mathcal{B}$ deux points du cercle de l'infini nouveaux, ainsi que pour $\mathcal{B}_1$: on a donc, comme section par le plan de l'infini d'une surface S éventuelle, une cubique ayant en commun huit points avec le cercle de l'infini : la cubique contient donc le cercle de l'infini et une droite; comme il eût suffi de 7 points dans le plan de l'infini, au lieu de 8, pour que le cercle de l'infini appartînt à S, on voit qu'il y a bien une condition surabondante. Finalement, pour le degré 3, le système $\mathcal{B} + \mathcal{B}_1$ forme bien un groupe anormal incomplet, le complément étant le cercle de l'infini. Si on appelle Q_1 la quadrique qui contient $\mathcal{B}_1$, on a, pour la même raison que plus haut, une identité

$$QQ_1 t^2 + SS_1 + TQ' = 0$$

où S_1 est une nouvelle surface du degré 3 contenant le cercle de l'infini, et Q_1 et Q' deux nouvelles quadriques. On forme ainsi le tableau des intersections des surfaces d'un des groupes $QQ_1 t^2$, SS_1, TQ' avec les surfaces des autres groupes : C désigne le cercle de l'infini, $\overline{\mathcal{B}}$, $\overline{\mathcal{B}_1}$ des quartiques gauches nouvelles, D, Δ, D_1, Δ_1, $\overline{D}$, $\overline{\Delta}$, $\overline{D_1}$, $\overline{\Delta_1}$ des droites à distance finie et δ, δ_1 deux droites à l'infini

Q	T	$\mathcal{B}$	$\overline{\mathcal{B}_1}$				
S	T	$\mathcal{B}$	$\mathcal{B}_1$	C	C		
S_1	T	$\overline{\mathcal{B}}$	$\overline{\mathcal{B}_1}$	C	C		
Q_1	T	$\overline{\mathcal{B}}$	$\mathcal{B}_1$				
Q	S	$\mathcal{B}$	D	Δ			
Q	S_1	$\overline{\mathcal{B}_1}$	D_1	Δ_1			
Q	Q'	D	Δ	D_1	Δ_1		
Q_1	S	$\mathcal{B}_1$	$\overline{D}$	$\overline{\Delta}$			
Q_1	S_1	$\overline{\mathcal{B}}$	$\overline{D_1}$	$\overline{\Delta_1}$			
Q_1	Q'	$\overline{D}$	$\overline{\Delta}$	$\overline{D_1}$	$\overline{\Delta_1}$		
t	S	C	δ				
t	S_1	C	δ_1				
t	T	C	C				
t	Q'	δ	δ_1				
S	Q'	D	Δ	$\overline{D}$	$\overline{\Delta}$	δ	δ
S_1	Q'	D_1	Δ_1	$\overline{D_1}$	$\overline{\Delta_1}$	δ_1	δ_1

C est répété deux fois dans la ligne t, T parce qu'il est double sur T; même raison pour les lignes ST, S_1T; dans la ligne S, Q' on a répété δ deux fois parce que S se raccorde au paraboloïde Q' tout le long de δ; S_1 se raccorde à Q' le long de δ_1.

On remarque d'autre part que lorsque l'on prend l'image de l'intersection du tore avec une surface d'ordre m, l'intersection complète est d'ordre $4m$; l'image *complète* est exactement d'ordre $4m$, quand on emploie les coordonnées homogènes X, Y, Z, T et u, v, t. Si la surface contient I comme point simple sans être tangente au tore T en I, l'image de l'intersection doit être considérée comme contenant la droite $u = i$ une fois et c'est le reste de l'image qui coupe la droite $u = i$ par couples de points dont les cotes satisfont à $vv' = 1$; mais si la surface admet en I le plan tangent $y = ix$, I étant point simple sur la surface, la droite $u = i$ sera à compter deux fois sur l'image et il n'y a rien à dire pour le reste. C'est ainsi que si nous prenons l'image de la courbe (Q, T), cette image est de degré 8, comprend chaque droite $u = \pm i$ et les deux cubiques images de $\mathcal{B}$ et $\overline{\mathcal{B}_1}$, cubiques coupant $u = i$ (ou $u = -i$) d'après la loi indiquée. Si l'on prend l'image de (S, T), cette image comprend les deux droites $v = \pm i$ chacune une fois, les cubiques images de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$, et chaque droite $u = \pm i$ *deux fois* : il n'y a rien à dire sur les intersections de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ avec $u = i$ et avec $u = -i$, ni sur les intersections de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ avec $v = i$ et $v = -i$. Remarques semblables pour l'image de l'intersection du tore et d'une sphère quelconque. Les remarques de ce paragraphe s'étendent aux deux autres séries de quartiques du tore. Je signale une proposition de M. Lebesgue : toute courbe de degré impair tracée sur le tore passe au moins en l'un des deux points coniques, avec des ordres différents, l'un pair (ou nul), l'autre impair. Car c et c_1 étant les degrés de C et C_1, le degré μ de la courbe est $4m - \alpha - \alpha_1 - \beta - \beta_1 - 2\gamma - 2\delta$; la droite AB (ou A_1B_1) du plan uv montre que chaque somme $\alpha + \beta + \gamma + c$ ou $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma + c_1$ vaut m, de sorte que μ se réduit à $2(m - \delta) + c + c_1$ et cela justifie la propriété. Le tore usuel n'a donc aucune courbe réelle de degré impair.

Enfin une surface algébrique (ou courbe algébrique) qui n'a d'autres points à l'infini que le cercle de l'infini (ou des points de ce cercle) conserve son degré par inversion, si le pôle n'est pas sur la surface (n'est pas sur la courbe); le degré s'abaisse de p unités si le pôle est multiple d'ordre p sur la surface (ou la courbe). Cette remarque prouve que notre étude subsiste intégralement pour les cyclides de Dupin de degré 4 possédant deux points coniques imaginaires, et subit des modifications peu sensibles pour les cyclides de Dupin de degré 3 possédant deux points coniques imaginaires.

RÉSUMÉ

Le tore T est supposé engendré par un cercle de rayon R tournant autour d'une droite de son plan, a étant la distance, supérieure à R, de cet axe au centre du cercle.

Le tore T admet une famille ∞^4 de biquadratiques gauches B; chacune est sur une sphère et une seule Σ. Deux sphères Σ et Σ_1, dont les centres sont symétriques relativement au centre O de T, donnent deux courbes B et B_1 situées sur une même quadrique Q, laquelle touche T en quatre points, communs à B et B_1, formant un trapèze isocèle, dont deux sommets sont sur un parallèle de T et les deux autres sur le parallèle symétrique relativement à O. Réciproquement, toute quadrique Q ainsi tangente à T en les quatre sommets d'un tel trapèze isocèle (et il en existe ∞^1 quand les quatre sommets sont donnés) fournit deux biquadratiques sphériques B et B_1. Suivant que Σ ou Σ_1, ou Σ et Σ_1 sont tangentes ou non à T, Q touche T en 4, 5, 6 points; accidentellement Σ peut être bitangente à T (et Σ_1 non tangente ou monotangente), Q touche alors T en 6 ou 7 points. Si Σ et Σ_1 sont bitangentes, Q se réduit à deux plans. En dehors de ces contacts en nombre fini, on peut avoir une quadrique inscrite dans un parallèle (intersection complétée par deux autres parallèles, distincts ou confondus), une quadrique inscrite dans un cercle méridien (intersection complétée par une biquadratique sphérique).

Le tore admet trois séries de courbes gauches unicursales de degré 4 (les quartiques unicursales à point double n'étant pas comprises dans ces séries, mais dans les biquadratiques). Le tore T admet deux points coniques imaginaires C et C_1 sur l'axe; j'appelle I et J les points cycliques communs à tous les parallèles. On obtient ces séries en coupant T :

1° par une quadrique Q passant en C, C_1 mais non en I, J et tangente à T en quatre points convenablement disposés;

2° par une quadrique Q passant en I, J, mais non en C et C_1 et tangente à T en quatre points convenablement choisis;

3° par une quadrique Q passant en C, C_1, I, J et tangente à T en deux points convenablement choisis.

L'étude approfondie de ces courbes se fait aisément en utilisant une représentation unicursale convenable du tore et signalant les singularités de cette représentation.