Annales de la faculté des sciences de Toulouse

P. Vincensini

Sur les congruences rectilignes à enveloppée moyenne donnée

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 21 (1929), p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1929_3_21__1_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

SUR LES CONGRUENCES RECTILIGNES A ENVELOPPÉE MOYENNE DONNÉE

PAR M. P. VINCENSINI

La congruence rectiligne la plus générale dépend de deux fonctions arbitraires de deux variables indépendantes.

Il existe bien des façons d'introduire ces deux fonctions dans les équations définissant la congruence.

Le choix de la forme qu'il convient d'adopter pour ces équations joue généralement un rôle important lorsqu'on se trouve en présence d'un problème déterminé.

Ce qui suit a trait à une forme mettant simultanément en évidence, dans les équations définissant la congruence, les deux surfaces *moyenne* et *enveloppée moyenne*.

I. — Équations générales des congruences rectilignes ayant une enveloppée moyenne donnée.

Prenons pour surface de départ de la congruence, la surface moyenne, inconnue, d'équations :

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v),$$

et soient X, Y, Z, les cosinus directeurs du rayon issu du point (u, v) de la surface précédente; X, Y, Z, sont trois fonctions de u et v vérifiant la relation :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Soit :

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta = M, \tag{1}$$

l'équation du plan perpendiculaire au milieu du segment focal porté par le rayon (u, v).

La surface enveloppée moyenne étant supposée donnée, M est une fonction connue des deux variables u et v.

L'enveloppée moyenne est l'enveloppe du plan (1).

La surface moyenne de la congruence aura des équations de la forme :

$$\begin{cases} x = A\dfrac{\partial X}{\partial u} + B\dfrac{\partial X}{\partial v} + MX, \\[2ex] y = A\dfrac{\partial Y}{\partial u} + B\dfrac{\partial Y}{\partial v} + MY, \\[2ex] z = A\dfrac{\partial Z}{\partial u} + B\dfrac{\partial Z}{\partial v} + MZ, \end{cases}$$

A et B étant des fonctions de u et v momentanément inconnues.

En employant les notations :

$$E = S\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2, \qquad F = S\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}, \qquad G = S\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2,$$

$$e = S\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad f = S\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad f' = S\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad g = S\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v},$$

et en exprimant que la surface de départ de la congruence est la surface moyenne, on obtient après un calcul facile la relation [1] :

$$\frac{\partial A}{\partial u} + A\frac{\partial \log\sqrt{EG - F^2}}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v} + B\frac{\partial \log\sqrt{EG - F^2}}{\partial v} + 2M = 0,$$

que l'on peut écrire en multipliant les deux membres par $\sqrt{EG - F^2}$:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(A\sqrt{EG - F^2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(B\sqrt{EG - F^2}\right) + 2M\sqrt{EG - F^2} = 0,$$

ou encore :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(A\sqrt{EG - F^2} + \int M\sqrt{EG - F^2}\,du\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(B\sqrt{EG - F^2} + \int M\sqrt{EG - F^2}\,dv\right) = 0.$$

---

[1] P. VINCENSINI, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1927, Thèse, § 13.

Ceci permet de poser :

$$A\sqrt{EG-F^2}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du=-\frac{\partial\Phi}{\partial v},$$
$$B\sqrt{EG-F^2}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,dv=\frac{\partial\Phi}{\partial u},$$

Φ étant une fonction arbitraire de u et v.

On déduit de là, pour A et B, les formes :

$$A=-\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right],$$
$$B=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\int M\sqrt{EG-F^2}\,dv\right].$$

La congruence rectiligne la plus générale ayant pour enveloppée moyenne l'enveloppe du plan (1), est donc définie par les formules suivantes, qui mettent simultanément en évidence les deux surfaces moyenne (x, y, z) et enveloppée moyenne (M) :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
x=&-\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]\frac{\partial X}{\partial u}\\
&+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\int M\sqrt{EG-F^2}\,dv\right]\frac{\partial X}{\partial v}+MX,\\
y=&-\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]\frac{\partial Y}{\partial u}\\
&+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\int M\sqrt{EG-F^2}\,dv\right]\frac{\partial Y}{\partial v}+MY,\\
z=&-\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]\frac{\partial Z}{\partial u}\\
&+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\int M\sqrt{EG-F^2}\,dv\right]\frac{\partial Z}{\partial v}+MZ,
\end{aligned}\right.$$

où Φ est une fonction arbitraire des deux variables u et v.

II. — Remarques sur les formules précédentes.

La surface enveloppée moyenne étant donnée (M fonction connue de u et de v), l'ensemble des congruences correspondantes dépend d'une fonction arbitraire de deux variables, $\Phi(u, v)$.

Le problème général de la détermination des congruences à *enveloppée moyenne donnée* quelconque, admet le même degré de généralité que le problème particulier de la détermination des congruences à enveloppée moyenne point (Thèse, *loc. cit.*).

Le problème de la détermination des congruences à *surface moyenne donnée*, ne semble pas présenter la même simplicité. Dans le cas particulier où la surface moyenne est *plane*, sa solution dépend d'une fonction arbitraire de deux variables indépendantes comme pour le problème précédent; ce résultat est en relation avec une circonstance géométrique assez particulière, qui se trouve développée en détail dans ma Thèse.

Si l'on se donne en même temps la surface moyenne et l'enveloppée moyenne, les formules (2) montrent que la congruence dépend d'une équation aux dérivées partielles du *premier ordre* :

$$F\left(u, v, \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) = 0,$$

équation dépendant *surtout* de la surface moyenne.

Si la surface moyenne est algébrique et de degré m, F est algébrique en $\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}$, et de degré m.

Si la surface moyenne est *plane*, l'équation aux dérivées partielles ci-dessus est *linéaire*.

Il est aisé de voir que l'on peut, dans ce cas, ramener l'intégration à une *simple quadrature*. Il suffit par exemple pour s'en rendre compte, de supposer que le plan moyen est le plan $z = h$, et de prendre pour représentation sphérique de la congruence :

$$\begin{cases} X = \sin u \cos v, \\ Y = \sin u \sin v, \\ Z = \cos u. \end{cases}$$

L'équation $F = 0$, affecte alors la forme :

$$F\left(u, v, \frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) = 0,$$

et s'intègre par une quadrature.

Déterminons à titre d'exemple les congruences à surface moyenne plane et à enveloppée moyenne sphérique[1].

Les équations générales des congruences à enveloppée moyenne sphérique, s'ob-

[1] En ce qui concerne les congruences de normales à enveloppée moyenne sphérique, voir G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. IV, p. 329.

tiennent en remplaçant M par une constante λ, dans les équations (2) du paragraphe précédent.

Si l'on définit la représentation sphérique de la congruence par les formules indiquées ci-dessus, on obtient les équations :

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\sin v \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \operatorname{cotg} u \cos v \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \lambda \frac{\cos v + v \sin^2 u \sin v}{\sin u}, \\ y &= \cos v \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \operatorname{cotg} u \sin v \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \lambda \frac{\sin v - v \sin^2 u \cos v}{\sin u}, \\ z &= \frac{\partial \Phi}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

Exprimons que la surface moyenne est le plan $z = h$, nous obtenons pour déterminer Φ l'équation :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = h$$

d'où :

$$\Phi = hv + \varphi(u).$$

Les congruences cherchées sont définies par les équations :

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\mathrm{U} \sin v - h \operatorname{cotg} u \cos v + \lambda \frac{\cos v + v \sin^2 u \sin v}{\sin u}, \\ y &= \mathrm{U} \cos v - h \operatorname{cotg} u \sin v + \lambda \frac{\sin v - v \sin^2 u \cos v}{\sin u}, \\ z &= h, \end{aligned}\right.$$

U étant une fonction arbitraire de la seule variable u.

III. — Équation aux dérivées partielles des surfaces minima définies par leur plan tangent.

Les formules (2) semblent susceptibles d'intervenir utilement dans certaines questions théoriques.

Voici un exemple concernant les *surfaces minima*.

Si l'on suppose que les rayons d'une congruence rectiligne sont normaux à la surface moyenne (la surface moyenne coïncide alors avec l'enveloppée moyenne), cette surface moyenne est une surface *minima*, et l'on aura la surface minima la plus générale en envisageant la congruence rectiligne la plus générale possédant la propriété ci-dessus.

D'où un procédé de recherche des surfaces minima basé sur la théorie des congruences rectilignes, d'un développement aisé si l'on a égard aux formules (2).

Rappelons les formules de Weingarten définissant le point de contact d'un plan dépendant de deux paramètres avec son enveloppe.

Si l'équation du plan est :

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta = M,$$

ξ, η, ζ étant les coordonnées courantes,

X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale au plan (fonctions connues de u et de v),

le point de contact a pour coordonnées :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \Delta(M, X) + MX, \\ y_1 &= \Delta(M, Y) + MY, \\ z_1 &= \Delta(M, Z) + MZ, \end{aligned} \right.$$

Δ étant le paramètre différentiel mixte du premier ordre de Beltrami, relatif au ds^2 de la représentation sphérique de la surface enveloppe.

Supposons que le plan ci-dessus soit le plan perpendiculaire au milieu d'un segment focal quelconque d'une congruence définie par les formules (2) du n° I.

Exprimons que sur chaque rayon le milieu du segment focal et le point de contact du plan perpendiculaire au rayon en ce point avec son enveloppe coïncident; nous obtiendrons ainsi la condition à laquelle doit satisfaire M pour que l'enveloppe du plan ci-dessus soit une surface minima.

Si $x, y, z,$ sont les premiers membres des équations (2), $x_1, y_1, z_1,$ ceux des équations (3), on aura à exprimer que :

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = z.$$

Envisageons la première de ces équations; elle s'écrit :

$$\Delta(M, X) = -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \int M\sqrt{EG - F^2}\, du\right]\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \int M\sqrt{EG - F^2}\, dv\right]\frac{\partial X}{\partial v},$$

soit en tenant compte de la valeur de $\Delta(M, X)$ qui est comme on sait :

$$\Delta(M, X) = \frac{1}{EG - F^2}\left(G\frac{\partial M}{\partial u} - F\frac{\partial M}{\partial v}\right)\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{EG - F^2}\left(E\frac{\partial M}{\partial v} - F\frac{\partial M}{\partial u}\right)\frac{\partial X}{\partial v}:$$

$$\alpha\frac{\partial X}{\partial u} + \beta\frac{\partial X}{\partial v} = 0,$$

et l'on a les deux équations analogues :

$$\alpha\frac{\partial Y}{\partial u} + \beta\frac{\partial Y}{\partial v} = 0,$$

$$\alpha\frac{\partial Z}{\partial u} + \beta\frac{\partial Z}{\partial v} = 0,$$

α et β ayant les valeurs :

$$\alpha = \frac{1}{EG - F^2}\left(G\frac{\partial M}{\partial u} - F\frac{\partial M}{\partial v}\right) + \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \int M\sqrt{EG - F^2}\,du\right),$$

$$\beta = \frac{1}{EG - F^2}\left(E\frac{\partial M}{\partial v} - F\frac{\partial M}{\partial u}\right) - \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} - \int M\sqrt{EG - F^2}\,dv\right).$$

La forme du système des trois équations précédentes exige que l'on ait :

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0,$$

ou en tenant compte des valeurs de α et de β :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(G\frac{\partial M}{\partial u} - F\frac{\partial M}{\partial v}\right) - \int M\sqrt{EG - F^2}\,du,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(E\frac{\partial M}{\partial v} - F\frac{\partial M}{\partial u}\right) + \int M\sqrt{EG - F^2}\,dv.$$

On aura la condition à laquelle doit satisfaire M en écrivant la condition d'intégrabilité du système ci-dessus en Φ :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v},$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[-\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(G\frac{\partial M}{\partial u} - F\frac{\partial M}{\partial v}\right)\right] - M\sqrt{EG - F^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(E\frac{\partial M}{\partial v} - F\frac{\partial M}{\partial u}\right)\right] + M\sqrt{EG - F^2},$$

ou encore :

$$\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial M}{\partial u}-F\frac{\partial M}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial M}{\partial v}-F\frac{\partial M}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+2M=0.$$

On reconnaît en la somme des deux premiers termes du premier membre de l'égalité précédente, le paramètre différentiel du deuxième ordre $\Delta_2 M$, de M, relatif au ds^2 de la représentation sphérique; de sorte que pour que le plan d'équation :

$$X\xi+Y\eta+Z\zeta=M,$$

enveloppe une surface minima, il faut et il suffit que M satisfasse à l'équation du deuxième ordre :

$$\Delta_2 M+2M=0.$$

C'est là la condition connue donnée par Weingarten([1]).

M vérifiant l'équation précédente, la surface minima correspondante est définie par les équations :

$$\begin{cases} x=\Delta(M, X)+MX, \\ y=\Delta(M, Y)+MY, \\ z=\Delta(M, Z)+MZ. \end{cases}$$

IV. — Les congruences à enveloppée moyenne donnée dans leurs relations avec les congruences à enveloppée moyenne point.

La forme des équations (2) du n° I, met en évidence une relation simple entre les congruences rectilignes ayant une enveloppée moyenne *donnée*, et les congruences à enveloppée moyenne *point*.

Envisageons une congruence déterminée, admettant une enveloppée moyenne (E) donnée, (M fonction déterminée de u et de v); Φ étant la fonction qui fixe la congruence, nous représenterons celle-ci par (C_Φ).

Soit (C) l'une quelconque des congruences admettant (E) pour enveloppée moyenne. Si nous désignons par $(\Phi+\Psi)$ (Ψ étant une fonction arbitraire de u et de v), la fonction arbitraire qui détermine la congruence (C), nous voyons que les

---

([1]) J. WEINGARTEN, Eine neue classe auf einander abwickelbarer Flächen (*Nachrichlen* de Gœttingue, 1887).

équations générales de (C), qui s'obtiennent en remplaçant dans les équations (2), Φ par $(\Phi + \Psi)$, peuvent s'écrire :

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
x = &-\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\int M\sqrt{EG-F^2}\,dv\right]\frac{\partial X}{\partial v}\\
&+MX+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}-\frac{\partial\Psi}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right],\\
y = &-\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]\frac{\partial Y}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\int M\sqrt{EG-F^2}\,dv\right]\frac{\partial Y}{\partial v}\\
&+MY+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}-\frac{\partial\Psi}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}\right],\\
z = &-\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]\frac{\partial Z}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\int M\sqrt{EG-F^2}\,dv\right]\frac{\partial Z}{\partial v}\\
&+MZ+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}-\frac{\partial\Psi}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}\right].
\end{aligned}\right.
$$

Désignons par x_0, y_0, z_0, les coordonnées du point central sur un rayon quelconque de (C_Φ), et remarquons que les équations :

$$
\left\{
\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}-\frac{\partial\Psi}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right],\\
\eta &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}-\frac{\partial\Psi}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}\right],\\
\zeta &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}-\frac{\partial\Psi}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}\right],
\end{aligned}\right.
$$

définissent la congruence le plus générale (Γ) ayant pour enveloppée moyenne l'origine O des coordonnées.

En introduisant x_0, y_0, z_0, ξ, η, ζ, les équations (4) s'écrivent :

$$
(5)\qquad x = x_0 + \xi, \qquad y = y_0 + \eta, \qquad z = z_0 + \zeta.
$$

Les équations (5) prouvent qu'un point central quelconque de (C) est l'extrémité du vecteur résultante des deux vecteurs d'origine O et ayant pour extrémités les points centraux correspondants de (C_Φ) et de (Γ).

Si nous convenons d'appeler *Somme géométrique* relativement à un point O de deux congruences rectilignes dont (D) et (Δ) sont deux rayons homologues (parallèles), la congruence obtenue en menant par l'extrémité de la résultante des vecteurs déterminés par O et les points centraux de (D) et de (Δ), la parallèle à (D) et (Δ)

(les points centraux peuvent d'ailleurs être remplacés par deux autres points quelconques sur les deux rayons), nous voyons que :

Les différentes congruences à enveloppée moyenne déterminée, sont les SOMMES GÉOMÉTRIQUES, *construites à partir d'un point fixe quelconque* O, *de l'une* QUELCONQUE *d'entr'elles, et de* TOUTES *les congruences ayant pour enveloppée moyenne le point* O (*congruences d'Appell généralisées relatives au point* O)(1).

On conçoit sans peine cet autre énoncé :

La différence géométrique de deux congruences rectilignes ayant la même enveloppée moyenne est une congruence d'Appell généralisée.

Supposons que (C_Φ) soit une congruence de normales, et que les congruences (Γ) dont il est question ci-dessus soient également des congruences de normales (congruences d'Appell); les congruences (C) seront aussi de normales, car les conditions :

$$S\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v} = S\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial u}$$

et

$$S\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} = S\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u},$$

qui expriment que (C_Φ) et (Γ) sont de normales, entraînent :

$$S\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = S\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u},$$

$$(x = x_0 + \xi, \qquad y = y_0 + \eta, \qquad z = z_0 + \zeta),$$

condition qui exprime que (C) est de normales.

On peut dire :

La connaissance des congruences d'Appell entraîne celle de toutes les congruences de normales admettant une enveloppée moyenne donnée dès qu'on connaît une C_Φ *de ces dernières. Il suffit pour avoir toutes les autres de construire les* SOMMES GÉOMÉTRIQUES *relatives à un point fixe* O, *de* (C_Φ) *et de toutes les congruences d'Appell relatives au point* O.

---

(1) J'ai indiqué dans ma thèse (n° 10), comment il est possible de construire géométriquement *toutes* les congruences d'Appell généralisées.

La construction indiquée repose sur la considération de la *trisécante de Delanges*.

Le paragraphe actuel ajoute à l'intérêt que présente cette courbe, puisque sa considération permet de construire géométriquement *toutes* les congruences à enveloppée moyenne donnée quelconque, dès qu'on en connaît *une*.

Si l'on se donne *à priori* une congruence de normales, on pourra déterminer son enveloppée moyenne, et la construction ci-dessus donnera toutes les congruences de normales admettant cette enveloppée moyenne :

Le problème de la détermination des congruences de normales admettant même enveloppée moyenne qu'une congruence de normales donnée est donc, au fond, identique à celui de la détermination des congruences d'Appell.

En particulier, le problème de la détermination des congruences de normales admettant pour enveloppée moyenne une surface *minima* donnée est identique au problème ci-dessus de M. Appell.

En effet, on connaît dans ce cas une congruence de normales admettant l'enveloppée moyenne voulue, la congruence formée par les normales à la surface minima donnée.

Il est à peine utile de faire observer que la *somme géométrique* (au sens qui a été défini plus haut), de deux ou plusieurs congruences de normales est une congruence de normales.

Les développements géométriques précédents, conduisent au résultat analytique que voici, concernant les équations qui les traduisent(1) :

La détermination des congruences d'Appell dépend comme on sait (Thèse, *loc. cit.*), d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre, à laquelle on peut donner la forme *harmonique*.

En prenant comme variables pour définir un point quelconque de la représentation sphérique de la congruence, les paramètres isométriques :

$$u_1 = \log \operatorname{tg} \frac{u}{2} \quad \text{et} \quad v,$$

u et v étant les coordonnées géographiques ordinaires, nous avons même montré (Thèse, n° 21, en note), que cette détermination pouvait être ramenée à l'intégration de l'équation de *Laplace* :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 0. \tag{6}$$

---

(1) La notion de somme géométrique de plusieurs congruences rectilignes, introduite au cours du présent paragraphe, fait penser au chapitre XIII (p. 313) du tome IV de la *Théorie des surfaces* de G. Darboux, où se trouve précisément introduite la notion analogue de *résultante* de plusieurs *surfaces*.

Notons à ce propos qu'étant données deux (ou plusieurs) congruences rectilignes absolument quelconques, leur somme géométrique a pour surface moyenne la résultante de leurs surfaces moyennes respectives.

On peut donc dire :

Le problème de la détermination des congruences de normales admettant une enveloppée moyenne donnée, dépend d'une équation aux dérivées partielles du 2ᵉ ordre à laquelle on pourra donner la forme de Laplace (6) *dès qu'on en connaîtra* UNE SOLUTION PARTICULIÈRE.

Une étude analytique directe du problème ci-dessus, sera faite un peu plus loin (nᵒ VI).

V. — Sur la construction des congruences à enveloppée moyenne donnée.

Envisageons deux congruences différentes (C_1) et (C_2) ayant pour enveloppée moyenne une surface déterminée (S).

Les équations de (C_1) seront :

$$(C_1)\quad\left\{\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial v}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]\frac{\partial X}{\partial u} \\ &\quad+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial u}-\int M\sqrt{EG-F^2}\,dv\right]\frac{\partial X}{\partial v}+MX, \\ y_1 &= -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial v}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]\frac{\partial Y}{\partial u} \\ &\quad+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial u}-\int M\sqrt{EG-F^2}\,dv\right]\frac{\partial Y}{\partial v}+MY, \\ z_1 &= -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial v}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]\frac{\partial Z}{\partial u} \\ &\quad+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial u}-\int M\sqrt{EG-F^2}\,dv\right]\frac{\partial Z}{\partial v}+MZ. \end{aligned}\right.$$

Celles de (C_2) :

$$(C_2)\quad\left\{\begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi_2}{\partial v}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]\frac{\partial X}{\partial u} \\ &\quad+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi_2}{\partial u}-\int M\sqrt{EG-F^2}\,dv\right]\frac{\partial X}{\partial v}+MX, \\ y_2 &= \ldots\ldots, \\ z_2 &= \ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

Φ_1 et Φ_2 étant les fonctions déterminant les deux congruences.

Considérons la congruence (C), ayant même représentation sphérique que (C_1) et (C_2), dont la surface de départ est le lieu du point obtenu en partageant dans un rapport constant les segments joignant deux points correspondants quelconques sur les surfaces moyennes de (C_1) et (C_2) :

$$
(C)\quad
\begin{cases}
x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = -\dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\Phi_1 + \lambda\Phi_2}{1+\lambda}\right) + \displaystyle\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]\dfrac{\partial X}{\partial u} \\
\qquad\qquad + \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\Phi_1 + \lambda\Phi_2}{1+\lambda}\right) - \displaystyle\int M\sqrt{EG-F^2}\,dv\right]\dfrac{\partial X}{\partial v} + MX, \\
y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \ldots\ldots, \\
z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} = \ldots\ldots,
\end{cases}
$$

λ étant une constante.

On voit sur les formules ci-dessus que (C) admet la même enveloppée moyenne (S) que (C_1) et (C_2), et que sa surface moyenne est le lieu du point (x, y, z) construit comme il a été expliqué.

On peut donc dire :

Envisageons deux congruences rectilignes admettant même enveloppée moyenne (S). *Soient* (D) *et* (Δ) *deux rayons homologues* (*même image sphérique*) *dans les deux congruences. Il existe dans le plan* (P) *déterminé par* (D) *et* (Δ), *une infinité de droites parallèles, engendrant lorsque* (D) *et* (Δ) *varient, des congruences admettant toutes pour enveloppée moyenne* (S). *Ces droites sont toutes celles dont le rapport des distances à* (D) *et à* (Δ) *est constant.*

Si l'on connaît trois congruences indépendantes admettant pour enveloppée moyenne (S), on peut, comme on le constate aisément, construire une double infinité de congruences admettant pour enveloppée moyenne (S).

Généralement, on pourra construire ∞^{n-1} congruences admettant pour enveloppée moyenne (S) lorsqu'on connaîtra n de ces congruences.

VI. — Congruences de normales admettant une enveloppée moyenne donnée.

L'examen de la seule *forme* des équations (2) du paragraphe I, nous a conduit (nos IV et V), à certains résultats intéressants, relatifs aux congruences admettant une enveloppée moyenne donnée, et en particulier au suivant concernant plus spécialement les congruences de normales :

La connaissance d'une congruence de normales admettant pour enveloppée moyenne *une surface donnée* (S), *ramène la détermination de toutes les congruences admettant la même enveloppée moyenne* (S), *à celle des congruences d'Appell;* la détermination de ces dernières dépendant de l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 0. \tag{6}$$

Nous nous proposons, dans le paragraphe actuel, de reprendre analytiquement la question précédente.

Cela n'est pas sans intérêt. Nous verrons par exemple, que la fonction Φ qui figure dans les équations (2), doit être remplacée, si l'on veut que la congruence soit normale, par une solution d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre à laquelle on peut donner la forme :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = F(u, v);$$

Il suffira pour cela, de prendre pour représentation sphérique de la congruence, un système orthogonal isotherme quelconque, avec u, v, *paramètres isométriques.*

Le succès de l'introduction des variables isométriques pour la mise de l'équation dont dépendent les congruences d'Appell sous la forme (6), se trouvera de la sorte pleinement justifié.

Rappelons quelques résultats :

X, Y, Z étant les cosinus directeurs d'un rayon quelconque de la congruence (fonctions connues de u et de v), nous représenterons l'élément linéaire de la représentation sphérique de cette dernière par :

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Dans ces conditions, les symboles à trois indices de deuxième espèce de Christoffel relatifs au ds^2 ci-dessus, auront pour valeurs :

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial u} + F\dfrac{\partial E}{\partial v} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \qquad \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{-F\dfrac{\partial E}{\partial u} + 2E\dfrac{\partial F}{\partial u} - E\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)},$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial v} - F\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \qquad \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial u} - F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)}$$

$$\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{-F\dfrac{\partial G}{\partial v} + 2G\dfrac{\partial F}{\partial v} - G\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \qquad \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial v} + F\dfrac{\partial G}{\partial u} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial v}}{2(EG - F^2)}.$$

Les dérivées logarithmiques de $\sqrt{EG - F^2}$, relatives à u et à v, s'expriment simplement au moyen des symboles ci-dessus par les formules :

$$\frac{\partial \log \sqrt{EG - F^2}}{\partial u} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\},$$

$$\frac{\partial \log \sqrt{EG - F^2}}{\partial v} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\}.$$

Enfin, les dérivées partielles secondes de X, Y, Z, s'expriment au moyen de ces mêmes symboles par les formules :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial X}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial X}{\partial v} - EX,$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial X}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial X}{\partial v} - FX,$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial X}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial X}{\partial v} - GX,$$

avec les analogues en Y et Z.

Nous exprimerons que la congruence définie par les formules (2) est normale, en écrivant que :

$$S \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = S \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u}.$$

Évaluons $\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}$. En tenant compte de ce que :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial \log \sqrt{EG - F^2}}{\partial u},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial \log \sqrt{EG - F^2}}{\partial v},$$

nous aurons :

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} = {} & \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\,\frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial u}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial v}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]\frac{\partial X}{\partial u} \\
& -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\,\partial v}+M\sqrt{EG-F^2}\right]\frac{\partial X}{\partial u} \\
& -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial v}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \\
& -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\,\frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial u}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}-\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]\frac{\partial X}{\partial v} \\
& +\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}-\int \frac{\partial}{\partial u}\left(M\sqrt{EG-F^2}\right)dv\right]\frac{\partial X}{\partial v} \\
& +\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}-\int M\sqrt{EG-F^2}\,dv\right]\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} \\
& +\frac{\partial M}{\partial u}X+M\frac{\partial X}{\partial u};
\end{aligned}
\right.
$$

de même :

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial v} = {} & \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\,\frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial v}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial v}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]\frac{\partial X}{\partial u} \\
& -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}+\int \frac{\partial}{\partial v}\left(M\sqrt{EG-F^2}\right)du\right]\frac{\partial X}{\partial u} \\
& -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial v}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} \\
& -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\,\frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial v}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}-\int M\sqrt{EG-F^2}\,dv\right]\frac{\partial X}{\partial v} \\
& +\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\,\partial v}-M\sqrt{EG-F^2}\right]\frac{\partial X}{\partial v} \\
& +\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}-M\sqrt{EG-F^2}\,dv\right]\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \\
& +\frac{\partial M}{\partial v}X+M\frac{\partial X}{\partial v}.
\end{aligned}
\right.
$$

On obtient les expressions des dérivées relatives à y et à z, en remplaçant dans les formules ci-dessus, X par Y et par Z.

Calculons maintenant $S\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial X}{\partial v}$ et $S\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial X}{\partial u}$. En tenant compte des formules rappelées au début de ce paragraphe, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = {} & \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\,\frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial u}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]F \\
& -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}+M\sqrt{EG-F^2}\right]F \\
& -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]\left[\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ & 1\end{matrix}\right\}F+\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ & 2\end{matrix}\right\}G\right] \\
& -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\,\frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial u}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\int M\sqrt{EG-F^2}\,dv\right]G \\
& +\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}-\int\frac{\partial}{\partial u}\left(M\sqrt{EG-F^2}\right)dv\right]G \\
& +\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\int M\sqrt{EG-F^2}\,dv\right]\left[\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & 1\end{matrix}\right\}F+\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & 2\end{matrix}\right\}G\right]+MF,
\end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned}
S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} = {} & \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\,\frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial v}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]E \\
& -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}+\int\frac{\partial}{\partial v}\left(M\sqrt{EG-F^2}\right)du\right]E \\
& -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\int M\sqrt{EG-F^2}\,du\right]\left[\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & 1\end{matrix}\right\}E+\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & 2\end{matrix}\right\}F\right] \\
& -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\,\frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial v}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\int M\sqrt{EG-F^2}\,dv\right]F \\
& +\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}-M\sqrt{EG-F^2}\right]F \\
& +\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\int M\sqrt{EG-F^2}\,dv\right]\left[\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ & 1\end{matrix}\right\}E+\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ & 2\end{matrix}\right\}F\right]+MF.
\end{aligned}$$

Écrivons que les deux expressions ci-dessus sont égales, nous obtenons après multiplication par $\sqrt{EG - F^2}$ et en remplaçant $\frac{\partial \log \sqrt{EG - F^2}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \log \sqrt{EG - F^2}}{\partial v}$ par leurs expressions au moyen des symboles de Christoffel :

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \int M\sqrt{EG - F^2}\,du\right]\left[2F\begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 2\end{Bmatrix} - G\begin{Bmatrix}1 & 1\\ & 2\end{Bmatrix} - E\begin{Bmatrix}2 & 2\\ & 2\end{Bmatrix}\right]\\
&+\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \int M\sqrt{EG - F^2}\,dv\right]\left[2F\begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 1\end{Bmatrix} - G\begin{Bmatrix}1 & 1\\ & 1\end{Bmatrix} - E\begin{Bmatrix}2 & 2\\ & 1\end{Bmatrix}\right]\\
&-2F\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\,\partial v} + \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} - \int \frac{\partial}{\partial u}\left(M\sqrt{EG - F^2}\right)dv\right]G\\
&+\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + \int \frac{\partial}{\partial v}\left(M\sqrt{EG - F^2}\right)du\right]E = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Telle est l'équation à laquelle doit satisfaire (Φ) pour que la congruence définie par les formules (2) soit normale.

On peut simplifier l'équation (7) par des choix convenables de la représentation sphérique de la congruence.

Un choix qui se présente naturellement à l'esprit est celui d'un système orthogonal isotherme *quelconque*, donnant à l'élément linéaire de la représentation la forme :

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2), \quad (u, v = \text{variables isométriques}).$$

En adoptant la représentation précédente, l'équation (7) prend la forme simple :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = \int \frac{\partial}{\partial u}(ME)\,dv - \int \frac{\partial}{\partial v}(ME)\,du = F(u, v).$$

Ainsi, *le problème de la détermination des congruences normales ayant une enveloppée moyenne donnée, dépend d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre de la forme :*

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = F(u, v).$$

Si $M = 0$ (congruences d'Appell), l'équation du problème s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 0,$$

et l'on reconnaît, comme on l'a vu au n° IV, que la connaissance d'une solution particulière du premier problème, ramène sa solution à celle du second (détermination des congruences d'Appell).

VII. — Congruences de normales se déterminant au moyen de la même équation que les congruences d'Appell.

Si l'on détermine M par la condition que $F(u, v) = 0$ (on voit sans peine qu'il revient au même de dire $F(u, v) = h(u) + k(v)$), on aura une famille de congruences rectilignes dont la détermination constitue un problème identique à celui de M. Appell.

L'équation à résoudre est :

$$\int \frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{ME})\,dv - \int \frac{\partial}{\partial v}(\mathrm{ME})\,du = 0 \qquad \big(\text{ou : } h(u) + k(v)\big).$$

Dérivons successivement par rapport à u et v, nous obtenons :

$$\frac{\partial^2(\mathrm{ME})}{\partial u^2} - \frac{\partial^2(\mathrm{ME})}{\partial v^2} = 0,$$

d'où :

$$\mathrm{ME} = f(u+v) + \varphi(u-v)$$

f et φ étant deux fonctions arbitraires.

Par suite :

$$\mathrm{M} = \frac{f(u+v) + \varphi(u-v)}{\mathrm{E}}.$$

Toutes les congruences normales obtenues en prenant cette forme pour M se déterminent comme les congruences d'Appell.

Si l'on prend par exemple pour représentation sphérique :

$$\mathrm{X} = \frac{\cos v}{ch u}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{\sin v}{ch u}, \qquad \mathrm{Z} = th u,$$

$$ds^2 = \frac{1}{ch^2 u}(du^2 + dv^2),$$

les enveloppées moyennes des congruences normales ci-dessus sont les enveloppes des plans :

$$\cos v\,\xi + \sin v\,\eta + sh u\,\zeta = ch^3 u[f(u+v) + \varphi(u-v)].$$

(VIII) Nous avons établi au n° (V) la propriété suivante :

Si (D) et (Δ) sont deux rayons homologues (même représentation sphérique) de deux congruences rectilignes ayant même enveloppée moyenne (S), il existe dans le plan (P) déterminé par (D) et (Δ) une infinité de droites parallèles à (D) et à (Δ), engendrant lorsque (D) et (Δ) varient chacune dans la congruence à laquelle elle appartient, des congruences admettant pour enveloppée moyenne (S). Ces droites sont toutes celles dont le rapport des distances à (D) et à (Δ) est constant.

Nous nous proposons dans le paragraphe actuel, de grouper un certain nombre de résultats analogues au précédent, relatifs à la théorie des congruences rectilignes, autour d'une même remarque, fort simple d'ailleurs.

Envisageons deux congruences rectilignes (C_1) et (C_2), de même représentation sphérique :

$$X(u, v), \qquad Y(u, v), \qquad Z(u, v).$$

Ces congruences ont en commun la 1^{re} forme fondamentale de Kummer :

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Soient :

$$x_1 = x_1(u, v), \qquad y_1 = y_1(u, v), \qquad z_1 = z_1(u, v),$$

les équations de la surface de départ de la première congruence;

$$x_2 = x_2(u, v), \qquad y_2 = y_2(u, v), \qquad z_2 = z_2(u, v),$$

celles de la deuxième.

Désignons par $P_1(x_1, y_1, z_1)$ le point de départ du rayon (u, v) de la première congruence, rayon que nous appellerons (D_1), et par P_2 le point de départ du rayon (D_2) homologue de (D_1) dans (C_2).

Soient de même :

$$e_1 = S\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u}, \qquad f_1 = S\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}, \qquad f'_1 = S\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}, \qquad g_1 = S\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v},$$

les coefficients de la deuxième forme de Kummer $[e_1 du^2 + (f_1 + f'_1) du dv + g_1 dv^2]$ de la première congruence; e_2, f_2, f'_2, g_2, les quantités analogues relatives à la deuxième congruence.

Considérons le point I partageant le segment P_1P_2 dans un rapport donné, $-\lambda$, point qui a pour coordonnées :

$$\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda},$$

et envisageons la congruence obtenue en menant par chaque point I, la parallèle (D) aux rayons (D_1) et (D_2) correspondants.

En faisant varier λ, on obtient une infinité de congruences (C).

Formons les coefficients de la deuxième forme de Kummer de l'une quelconque de ces congruences (C); nous trouvons :

$$(8)\quad e = \frac{e_1 + \lambda e_2}{1+\lambda}, \qquad f = \frac{f_1 + \lambda f_2}{1+\lambda}, \qquad f' = \frac{f'_1 + \lambda f'_2}{1+\lambda}, \qquad g = \frac{g_1 + \lambda g_2}{1+\lambda}.$$

La remarque à laquelle nous faisions allusion au début, résulte immédiatement des équations (8), et peut être ainsi formulée :

Toute propriété commune à (C_1) *et à* (C_2), *se traduisant par des relations linéaires et homogènes relativement aux coefficients de la deuxième forme de Kummer et leurs dérivées, appartient à toutes les congruences* (C).

Il est clair d'ailleurs que si au lieu de deux congruences $(C_1)(C_2)$, on en envisage n indépendantes, $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$, l'énoncé ci-dessus s'applique aux ∞^{n-1} congruences qu'on leur fait correspondre par les formules :

$$x = \frac{x_1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + \dots + \lambda_{n-1} x_n}{1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}, \qquad y = \dots, \qquad z = \dots,$$

congruences dont la construction géométrique à partir de $C_1, C_2, \dots, C_n$, est immédiate.

Ainsi par exemple :

Si (C_1) *et* (C_2) *sont normales, toutes les congruences* (C) *le sont.*

La condition pour qu'une congruence soit normale $(f = f')$ est en effet linéaire et homogène relativement aux coefficients de la deuxième forme de Kummer.

Si les surfaces de départ de (C_1) *et de* (C_2) *sont les surfaces moyennes, les surfaces de départ des différentes congruences* (C) *(lieux des points* I *correspondants), sont les surfaces moyennes de ces congruences.*

La condition pour que la surface de départ d'une congruence soit la surface moyenne est en effet :

$$Eg + Ge - F(f + f') = 0,$$

et cette condition satisfait aux conditions ci-dessus.

Si (C_1) *et* (C_2) *ont même image sphérique pour leurs surfaces réglées principales, il en est de même de toutes les congruences* (C).

Les images sphériques des surfaces réglées principales d'une congruence rectiligne sont les lignes $u = c^{te}$, $v = c^{te}$, si l'on a (F étant nécessairement nul) :

$$f + f' = 0, \qquad Ge + Eg = 0,$$

et les relations précédentes satisfont aux conditions énoncées.

Si les développables se correspondent sur (C_1) *et* (C_2), *elles se correspondent aussi sur toutes les congruences* (C).

En effet, les conditions pour que les lignes u, v, de la représentation sphérique soient les images des développables sont :

$$Ef' - Fe = 0, \qquad Fg - Gf = 0,$$

conditions linéaires et homogènes en e, f, f', g.

Si (C_1) *et* (C_2) *sont isotropes, il en est de même de toutes les congruences* (C).

Les conditions d'isotropie sont en effet, en supposant que les surfaces de départ sont les surfaces moyennes :

$$e = g = 0, \qquad f + f' = 0,$$

etc...

Le résultat du n° V, rappelé au début de ce paragraphe peut s'établir simplement de la façon suivante :

Envisageons les plans moyens (π_1) et (π_2), relatifs aux rayons (D_1) et (D_2) des congruences (C_1) et (C_2). Le rapport des distances du plan moyen (π) relatif au rayon (D) de (C), aux plans (π_1) et (π_2) est évidemment : $\dfrac{\overline{IP_1}}{\overline{IP_2}} = -\lambda$ ($-\lambda$ étant comme on a vu, le rapport définissant (D) par rapport à (D_1) et à (D_2) ; par suite, (π) est à une distance $M(u, v)$ de l'origine des coordonnées donnée par la formule :

$$M = \frac{M_1 + \lambda M_2}{1 + \lambda}.$$

Si $M_1 = M_2$, on a :

$$M = M_1 = M_2,$$

donc :

Si (C_1) *et* (C_2) *ont même enveloppée moyenne* (S), *toutes les congruences* (C) *ont aussi pour enveloppée moyenne* (S).

Plus généralement d'ailleurs, comme nous l'avons déjà fait observer au n° (V) :

Si l'on connaît n congruences indépendantes, admettant pour enveloppée moyenne (S), *on peut construire* ∞^{n-1} *congruences jouissant de la même propriété.*

Appliquons le résultat précédent à la classe intéressante des congruences isotropes :

Considérons toutes les congruences isotropes ayant pour enveloppée moyenne une surface minima donnée (S). On sait que ces congruences constituent une famille à 3 paramètres(¹). Supposons que l'on connaisse quatre de ces congruences (indépendantes). A partir de ces quatre congruences, on pourra, comme il a été vu, construire une famille de congruences isotropes admettant (S) pour enveloppée moyenne, constituant précisément un ensemble ∞^3.

On peut donc énoncer le résultat suivant :

On pourra construire toutes les congruences isotropes admettant pour enveloppée moyenne une surface minima donnée, dès que l'on en connaîtra quatre indépendantes.

NOTE

Les Paramètres différentiels et les Congruences à surface moyenne plane.

Je rappelle, qu'en prenant pour plan xOy le plan moyen, et en désignant par X, Y, Z, les cosinus directeurs (fonctions de deux variables u et v) du rayon issu d'un point quelconque (x, y) du plan moyen, les équations de la congruence à surface moyenne plane la plus générale peuvent s'écrire :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = Z\Delta(M, Y), \\ y = -Z\Delta(M, X), \end{cases}$$

Δ, étant le paramètre différentiel mixte du 1ᵉʳ ordre de Beltrami, relatif au ds^2 de la représentation sphérique de la congruence, et M une fonction arbitraire des deux variables u et v (Voir ma Thèse, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1927).

Dans une note récente des Comptes-Rendus, en rapprochant les formules (1) et les formules de Weingarten définissant la congruence de normales la plus générale au moyen du paramètre ci-dessus de Beltrami, j'ai obtenu une construction des congruences à surface moyenne plane à partir des congruences de normales.

(¹) L. Bianchi, *Geometria differenziale*, I, p. 481.

Les paramètres différentiels, se présentent comme susceptibles de jouer un rôle assez intéressant dans l'étude des congruences à surface moyenne plane.

Je me propose actuellement d'établir la condition à laquelle doit satisfaire M dans les équations (1) pour que la congruence à surface moyenne plane qu'elles représentent soit une congruence de normales.

Cette condition peut s'écrire simplement, au moyen précisément de paramètres différentiels.

La condition pour que la congruence (1) soit normale, qui est comme on sait :

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u},$$

s'écrit ici :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta(M, X)\left(\frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u} - \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}\right) + \Delta(M, Y)\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right] \\ &+ Z\left[\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial\Delta(M, Y)}{\partial u} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial\Delta(M, X)}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial\Delta(M, X)}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial\Delta(M, Y)}{\partial v}\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Les parenthèses qui figurent dans les deux premiers termes peuvent s'écrire :

$$\sqrt{EG - F^2}\,X \qquad \text{et} \qquad \sqrt{EG - F^2}\,Y.$$

Transformons la quantité entre crochets.

En posant :

$$\alpha = \frac{GM_{11} - FM_{12}}{EG - F^2}, \qquad \beta = \frac{EM_{12} - FM_{11}}{EG - F^2},$$

$$\gamma = \frac{GM_{21} - FM_{22}}{EG - F^2}, \qquad \delta = \frac{EM_{22} - FM_{21}}{EG - F^2},$$

avec :

$$M_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 M}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \sum_i \begin{Bmatrix} \mu & \nu \\ & i \end{Bmatrix} \frac{\partial M}{\partial x_i}, \qquad (x_1 = u, \quad x_2 = v),$$

les dérivées des paramètres différentiels ont pour valeurs :

$$\frac{\partial\Delta(M, X)}{\partial u} = \alpha\frac{\partial X}{\partial u} + \beta\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u}X,$$

$$\frac{\partial\Delta(M, X)}{\partial v} = \gamma\frac{\partial X}{\partial u} + \delta\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial v}X,$$

avec les deux formules analogues pour le paramètre différentiel en Y.

En tenant compte de ces valeurs, le crochet peut s'écrire :

$$-(\alpha+\delta)\sqrt{EG-F^2}\,Z+\frac{\partial M}{\partial u}\left(X\frac{\partial Y}{\partial v}-Y\frac{\partial X}{\partial v}\right)+\frac{\partial M}{\partial v}\left(Y\frac{\partial X}{\partial u}-X\frac{\partial Y}{\partial u}\right)$$

ou encore :

$$\sqrt{EG-F^2}\left(-Z(\alpha+\delta)+\frac{\partial M}{\partial u}\,\frac{F\frac{\partial Z}{\partial v}-G\frac{\partial Z}{\partial u}}{EG-F^2}+\frac{\partial M}{\partial v}\,\frac{F\frac{\partial Z}{\partial u}-E\frac{\partial Z}{\partial v}}{EG-F^2}\right)$$

La somme des deux derniers termes de la parenthèse n'est autre chose que $-\Delta(M, Z)$; d'autre part :

$$\alpha+\delta=\frac{GM_{11}-2FM_{12}+EM_{22}}{EG-F^2}=\Delta_2 M,$$

de sorte que l'équation (2) s'écrit après division par $\sqrt{EG-F^2}$:

$$X\Delta(M,X)+Y\Delta(M,Y)-Z\Delta(M,Z)-Z^2\Delta_2 M=0.$$

Finalement, en tenant compte de la relation évidente :

$$X\Delta(M,X)+Y\Delta(M,Y)+Z\Delta(M,Z)=0,$$

on voit que la condition cherchée peut s'écrire :

$$Z\Delta_2 M+2\Delta(M,Z)=0. \tag{3}$$

Ainsi :

Pour que la congruence définie par les formules (1) *soit normale, il faut et il suffit que* M *vérifie l'équation* (3)[1].

---

[1] Le calcul qui vient d'être fait s'applique aux congruences définies par les équations générales :

$$x=\quad F(Z)\,\Delta(M,Y),$$
$$y=-F(Z)\,\Delta(M,X),$$

où F(Z) est une fonction arbitraire de Z (voir *C. R.*, t. 186, p. 1404).