ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

R. GOSSE

De certaines équations aux dérivées partielles du second ordre intégrables par la méthode de Darboux

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 16 (1924), p. 173-240
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1924_3_16__173_0>

DE CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU SECOND ORDRE

INTÉGRABLES PAR LA MÉTHODE DE DARBOUX

PAR M. R. GOSSE.

[1] La première partie du présent travail traite de la recherche des équations (E) de la forme

$$(E) \equiv s + f(x, y, z, p, q, r) = 0$$

qui admettent un invariant du second ordre pour le système de caractéristiques dont y est un invariant, et deux invariants du second ordre pour l'autre système[1].

Cette étude met naturellement en évidence quelques équations de la forme

$$(E') \equiv s + f(x, y, z, p, q) = 0$$

qui se déduisent par des transformations simples des équations (E), qui sont de la première classe, et qui ne sont pas comprises dans le tableau dressé par M. Goursat[2], où sont venues jusqu'ici s'insérer toutes les équations (E') de la première classe.

Conformément aux résultats que j'ai démontrés dans ma Thèse[3], ces équations (E') sont du premier degré par rapport à l'une des variables p ou q. Leur étude constitue la seconde partie de ce Mémoire[4].

---

(1) Les résultats en ont été publiés succinctement dans mes deux Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences du 4 février et du 10 mars 1924.

(2) Voir GOURSAT, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. I, 1899, pp. 31-78.

(3) R. GOSSE, Thèse de Doctorat, chez É. Privat, Toulouse, 1921.

(4) Les résultats sont résumés dans ma Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, mai 1924.

PREMIÈRE PARTIE

INTRODUCTION

[2] L'expression $u(x, y, z, p, q, r, t)$ sera un invariant de l'équation

$$s + f(x, y, z, p, q, r) = 0$$

si les deux équations

$$s + f = 0, \qquad u = c$$

sont en involution quelle que soit la constante c.

Les deux équations

$$m^2 \frac{\partial f}{\partial r} - m = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial r} m^2 + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

doivent d'abord avoir une racine commune.

[3] Si on prend $m = \frac{1}{f'}$, en posant $f' = \frac{\partial f}{\partial r}$, on devra avoir

$$\frac{\partial u}{\partial r} + f'^2 \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

et le système

$$\frac{\partial s}{\partial x} + f' \frac{\partial r}{\partial x} + \left(\frac{df}{dx}\right) = 0, \qquad \frac{\partial s}{\partial y} + f' \frac{\partial s}{\partial x} + \left(\frac{df}{dy}\right) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial y} + \left(\frac{du}{dx}\right) = 0$$

donne

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} \left\{ \left(\frac{df}{dy}\right) - f' \left(\frac{df}{dx}\right) \right\}. \tag{2}$$

Nous poserons

$$R = -\int f'^2 dr.$$

L'équation (1) montre que u est une fonction v de x, y, z, p, q et $\theta = t + R$ et on a à écrire que le système

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0. \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} + r\frac{\partial v}{\partial p} - f\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial v}{\partial \theta}(a\theta + b) = 0, \tag{4}$$

où

$$a = -\frac{\partial f}{\partial q}.$$

$$b = \frac{\partial R}{\partial x} + p\frac{\partial R}{\partial z} + r\frac{\partial R}{\partial p} - f\frac{\partial R}{\partial q} + f'\left(\frac{df}{dx}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} - q\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial p} + R\frac{\partial f}{\partial q}$$

admet une solution autre que y. Le système formé par l'équation (4) et les équations

$$\frac{\partial v}{\partial p} - f'\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial v}{\partial \theta}(a'\theta + b') = 0, \tag{5}$$

$$-f''\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial v}{\partial \theta}(a''\theta + b'') = 0, \tag{6}$$

où les accents désignent les dérivations par rapport à r, doit donc admettre une solution et une seule indépendante de r et différente de y. La combinaison de (4) et (5) donne une équation (7) où le coefficient de $\frac{\partial v}{\partial z}$ est 1, celui de $\frac{\partial v}{\partial \theta}$ étant encore linéaire en θ. En supposant $f'' \neq 0$, c'est-à-dire en supposant que l'équation n'est pas linéaire[1], on pourra alors résoudre les équations (4), (5), (6), (7) par rapport à $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial p}, \frac{\partial v}{\partial q}$: chacune de ces dérivées aura une expression de la forme

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}(\alpha\theta + \beta).$$

D'après un lemme de M. Goursat[2], le système admet une solution de la forme $\lambda\theta + \mu$. L'équation (4) donne alors :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + p\frac{\partial \lambda}{\partial z} + r\frac{\partial \lambda}{\partial p} - f\frac{\partial \lambda}{\partial q} + a\lambda = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + p\frac{\partial \mu}{\partial z} + r\frac{\partial \mu}{\partial p} + f\frac{\partial \mu}{\partial q} + b\lambda = 0. \tag{9}$$

---

(1) Voir, pour les équations linéaires, la fin de mon Mémoire, Annales de la Faculté de Toulouse, 1923.

(2) Voir Goursat, *loc, cit.*, p. 32.

En posant :

$$\lambda = \frac{\partial Q}{\partial q}(x, y, z, p, q) \qquad \frac{\partial Q}{\partial q} \neq 0,$$

on obtient, en intégrant la relation 8,

$$(10) \qquad f\frac{\partial Q}{\partial q} = \varphi(x, y, z, p, r) + \frac{\partial Q}{\partial x} + p\frac{\partial Q}{\partial z} + r\frac{\partial Q}{\partial p}.$$

Il faut en outre que l'équation (9), où l'on a remplacé λ par sa valeur, admette une solution indépendante de r.

[**4**] Si on considère la racine nulle de l'équation caractéristique, on est amené à discuter le système

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad \left(\frac{du}{dy}\right) + f'\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{df'}{dx}\right)$$

u et f étant indépendants de t, on a $\dfrac{\partial u}{\partial q} = 0$. Donc l'équation

$$Y \equiv \frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} - f\frac{\partial u}{\partial p} + f'\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} + r\frac{\partial u}{\partial p}\right) - \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{df}{dx}\right) = 0$$

doit admettre deux solutions ne dépendant que de x, y, z, p, r.

On voit qu'on peut immédiatement lui adjoindre l'équation :

$$Z \equiv \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial q}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} + r\frac{\partial u}{\partial p}\right) - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{df}{dx}\right) = 0.$$

Nous appellerons S le sytème

$$Y = 0, \qquad Z = 0.$$

CHAPITRE PREMIER

Études des équations où $\dfrac{\partial^2 f}{\partial r \partial q} = 0$.

[**5**] La condition (10) montre que cette condition s'écrit :

$$\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial^2 Q}{\partial p \partial q} - \frac{\partial^2 Q}{\partial q^2}\left(\rho' + \frac{\partial Q}{\partial p}\right) = 0;$$

ρ'' et $\dfrac{\partial Q}{\partial q}$ ne peuvent être nuls. Donc $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial q^2} = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial p \partial q} = 0$, et

$$Q = ql(x, y, z) + m(x, y, z, p).$$

On a alors

$$f = \frac{\rho + r\dfrac{\partial m}{\partial p}}{l} + q\left(\frac{\partial \mathfrak{L} l}{\partial x} + p\frac{\partial \mathfrak{L} l}{\partial z}\right).$$

Si on fait le changement d'inconnue $Z = h(x, y, z)$ où $l = \dfrac{\partial h}{\partial z}$, l'équation vient, après un changement de notations

$$s + \rho(x, y, z, p, r) = 0.$$

Pour cette équation $Q = q$ et l'on peut supposer $\dfrac{\partial \rho}{\partial z} \neq 0$: si ρ ne contient pas z, elle se ramène à deux équations du premier ordre.

Le système S donne alors

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} - \rho\frac{\partial u}{\partial p} + \rho'\left(\frac{\partial u}{\partial x} + r\frac{\partial u}{\partial p}\right) - \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{d\rho}{dx}\right) = 0.$$

La seconde de ces équations doit admettre deux solutions indépendantes de z; le système

$$\Sigma \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y} - \rho\frac{\partial u}{\partial p} + \rho'\left(\frac{\partial u}{\partial x} + r\frac{\partial u}{\partial p}\right) - \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{d\rho}{dx}\right) = 0, \\ &\qquad - \frac{\partial u}{\partial p} + \omega'\left(\frac{\partial u}{\partial x} + r\frac{\partial u}{\partial p}\right) - \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé $\omega = \mathfrak{L}\dfrac{\partial \rho}{\partial z}$, doit être complet.

Si $\omega' = 0$, on a

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + p\frac{\partial \omega}{\partial z} + r\frac{\partial \omega}{\partial p}\right) = 0,$$

d'où

$$\omega = zY(y) + \mathfrak{L}g(x, y, p), \qquad \rho = \varphi(x, y, p, r) + \int e^{Yz} g(x, y, p)\, dz.$$

Si ω' n'est pas nul, la seconde équation de $\sum$ divisée par ω' et dérivée par rapport à z donne

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\omega'}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + p\frac{\partial \omega}{\partial z} + r\frac{\partial \omega}{\partial p}\right) = 0.$$

On en conclut que

$$\omega = Yz + \mathfrak{L}\,.\,g(x, y, p, r), \qquad \rho = \varphi(x, y, p, r) + g(x, y, p, r)\int e^{Yz} dz.$$

On a donc, suivant que Y est nul ou non, les deux seules formes

$$\rho = Z\alpha(x, y, p, r) + \beta(x, y, p, r) \qquad \text{avec} \qquad Z = \begin{cases} z \\ \text{ou} \\ e^z \end{cases}.$$

[**6**] La relation 9 donne, dans ce cas,

$$(11) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial x} + p\frac{\partial \mu}{\partial z} + r\frac{\partial \mu}{\partial p} - f\frac{\partial \mu}{\partial q} + b = 0,$$

d'où

$$\rho''\frac{\partial \mu}{\partial q} = b''.$$

Un calcul facile montre qu'en tenant compte de la valeur de b (n° 3), on a

$$\frac{\partial \mu}{\partial q} = -\rho'\left(\frac{d\mathfrak{L}\rho''}{dx}\right) + \frac{\partial \mathfrak{L}\rho''}{\partial r}\left(\frac{d\rho}{dx}\right) + 3\frac{\partial \rho}{\partial p} - \frac{\partial \mathfrak{L}\rho''}{\partial y} - q\frac{\partial \mathfrak{L}\rho''}{\partial z} + f\frac{\partial \mathfrak{L}\rho''}{\partial p}.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial q^2} = -\frac{\partial \mathfrak{L}\rho''}{\partial z} = -\frac{\alpha'' Z'}{\alpha'' Z + \beta''}.$$

Si $\alpha'' = 0$, on a $\dfrac{\partial \mu}{\partial q} = -\gamma$, si on pose :

$$(12) \qquad -\gamma(x, y, y, p) = -\rho'\left(\frac{d\mathfrak{L}\rho''}{dx}\right) + \frac{\partial \mathfrak{L}\rho''}{\partial r}\left(\frac{d\rho}{dx}\right) + 3\frac{\partial \rho}{\partial p} - \frac{\partial \mathfrak{L}\rho''}{\partial y} + \rho\frac{\partial \mathfrak{L}\rho''}{\partial p}.$$

Si α'' n'est pas nul,

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial q^2} = -\frac{Z'}{Z + \dfrac{\beta''}{\alpha''}} = 2\mu_0(x, y, z, p)$$

et le rapport $\dfrac{\beta''}{\alpha''}$ a une valeur $g(x, y, p)$ indépendante de r.

Mais

$$\mu = \mu_0 q^2 + \mu_1 q + \mu_2.$$

Si on remplace μ par cette valeur dans la relation 11, en remarquant que b est du premier degré en q, on en conclut que $2\mu_0$ est une fonction de y seul en annulant le terme en q^2. Or $2\mu_0$ ne peut prendre que les deux valeurs $\dfrac{1}{z+g}$ et $\dfrac{1}{1+ge^{-z}}$.

Il faut donc dans ce cas que $Z = e^z$, $\beta'' = 0$, $\dfrac{\partial^2\mu}{\partial q^2} = -1$.

Nous avons donc à étudier les trois types d'équations :

$$\begin{array}{ll} \text{I} & s + e^z\alpha(x, y, p, r) + r\beta_1(x, y, p) + \beta_2(x, y, p) = 0, \\ \text{II} & s + z(\alpha_1 r + \alpha_2) + \beta(x, y, p, r) = 0, \\ \text{III} & s + e^z(\alpha_1 r + \alpha_2) + \beta(x, y, p, r) = 0, \end{array}$$

α_1 et α_2 étant des fonctions de x, y, p.

[7] *Équations I.* — On a successivement

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial q^2} = -1, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial q} = -q - \gamma(x, y, z, p), \qquad \mu = -\frac{1}{2}q^2 - q\gamma + \mu_1;$$

γ étant donné par l'équation 12 comme dans le cas où $\alpha'' = 0$. Cette relation montre que γ ne peut dépendre de z que par l'intermédiaire de e^z. Mais la relation (11) donne

$$-q\left(\frac{d\gamma}{dx}\right) + \left(\frac{d\mu_1}{dx}\right) + f(q+\gamma) + b = 0,$$

où

$$b = \frac{\partial R}{\partial x} + p\frac{\partial R}{\partial y} + r\frac{\partial R}{\partial p} + f'\left(\frac{df}{dx}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} - q\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial p}.$$

En annulant le coefficient de q, on obtient

$$r\beta_1 + \beta_2 = r\frac{\partial\gamma}{\partial p} + p\frac{\partial\gamma}{\partial z} + \frac{\partial\gamma}{\partial x}.$$

Mais β_1 et β_2 ne contiennent pas z; $\frac{\partial\gamma}{\partial z}$ est par suite une fonction de y seul et γ ne peut contenir z que linéairement. Il est donc indépendant de z et l'équation peut s'écrire :

$$\frac{d}{dx}\big(q + \gamma(x, y, p)\big) = e^z \alpha(x, y, p, r).$$

Faisons la transformation de contact

$$X = \varphi(x, y, p), \qquad Y = y, \qquad Z = z + \psi(x, y, p),$$

où

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial p} = \frac{\partial\varphi}{\partial p}\left(p + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right), \qquad P\frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{\partial\psi}{\partial p}, \qquad Q = q + \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial p}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}}.$$

On peut imposer aux fonctions φ et ψ la seconde condition

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial p}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}} = \gamma(x, y, p).$$

La relation

$$Q = q + \gamma$$

donne

$$\frac{d}{dx}(q+\gamma)\,dx + \frac{d}{dy}(q+\gamma)\,dy = T dy + S\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp\right),$$

d'où

$$\frac{d}{dx}(q+\gamma) = S\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + r\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right).$$

L'équation peut donc s'écrire

$$S = e^Z A(X, Y, P, R)$$

car R est lié à r par la relation

$$R\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + r\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial p}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}}\right\} + r\frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial p}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}}\right\}.$$

On peut donc, sans diminuer la généralité, prendre $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Si, dans le système $\sum$, on pose $\varphi = e^{z}\alpha(x, y, p, r)$, il donne :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \alpha'\left(\frac{\partial u}{\partial x} + r\frac{\partial u}{\partial p}\right) - \alpha\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + p\alpha + r\alpha'\right) = 0.$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}{\alpha'}\right) = 0, \qquad \alpha = XY\varphi(x, p, r),$$

et, en changeant de variable y, l'équation peut s'écrire

$$s + e^{z}\alpha(x, p, r) = 0. \tag{13}$$

La condition (11) s'écrit alors, en posant $\sigma = -\int \alpha'^2 dr$

$$e^{-2z}\left(\frac{d\mu_1}{dx}\right) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} + r\frac{\partial \sigma}{\partial p} + 2p\sigma + \alpha'\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + p\alpha + r\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right) + \alpha\frac{\partial \alpha}{\partial p} = 0.$$

On en déduit sans peine que $\mu_1 = e^{2z}l(x, p)$ et on obtient *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation* I *soit une équation* E *sous la forme* :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma + l) + 2p(\sigma + l) + r\frac{\partial}{\partial p}(\sigma + l) + \frac{\partial \alpha}{\partial r}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + p\alpha + r\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right) + \alpha\frac{\partial \alpha}{\partial p} = 0. \tag{14}$$

On peut vérifier directement par un calcul simple que l'équation (13) admet sous cette unique condition d'une part, les invariants

$$y \quad \text{et} \quad t - e^{2z}\int \alpha'^2 dr + le^{2z}$$

et d'autre part, les invariants u_1 et u_2, solutions distinctes de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial p}\left(r - \frac{\alpha}{\alpha'}\right) - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{\alpha'}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + p\alpha + r\alpha'\right) = 0.$$

Il est facile d'obtenir des exemples d'équations intégrables.

1° Supposons $\frac{\partial \alpha}{\partial p} = 0$. L'équation 14 donne par un calcul facile

$$\alpha\alpha' + 2X = 2\int \alpha'^2 dr, \qquad \alpha'\frac{\partial \alpha}{\partial x} + X' = 2\int \alpha'\frac{\partial \alpha'}{\partial x} dr.$$

La première donne $\alpha\alpha'' = \alpha'^2$ et la seconde $\alpha'' \dfrac{\partial\alpha}{\partial x} = \alpha' \dfrac{\partial\alpha'}{\partial x}$. Elles admettent la seule solution commune $\alpha = \xi(x)\, e^{y}$ et un changement de variable permet de prendre l'équation sous la forme

$$s = e^{z-r} \quad \text{ou} \quad r + z - \mathfrak{L}\,.\, s = 0.$$

Les équations des caractéristiques du second ordre sont :

$$dy = 0, \quad dz = pdx, \quad dp = rdx, \quad dq = sdx, \quad qdx + ds - \frac{dt}{s} = 0$$

pour le système y et pour l'autre système

$$dy = -\frac{dx}{s}, \qquad dz = pdx + qdy, \qquad dp = rdx + sdy;$$
$$dq = sdx + tdy, \qquad pdx + dr = 0.$$

On aperçoit immédiatement les combinaisons intégrables

$$y = \text{constante}, \qquad q^2 + s^2 - 2t = \text{constante};$$
$$p^2 + (r-1)^2 = u^2, \qquad \text{Arc sin}\,\frac{p}{u} = \frac{x+v}{u},$$

d'où

$$\frac{p}{u} = \sin\frac{x+v}{u}, \qquad \frac{r-1}{u} = \cos\frac{x+v}{u}.$$

La forme de ces résultats invite à prendre p comme inconnue. On obtient immédiatement l'équation de Monge-Ampère

$$r + z - \frac{s}{q} = 0$$

qui admet les deux invariants du premier ordre u et v définis par

$$\frac{z}{u} = \sin\frac{x+v}{u}, \qquad \frac{p-1}{u} = \cos\frac{x+v}{u}$$

et pour l'autre système, y et l'invariant du troisième ordre

$$\left(\frac{t}{q} - s\right)^2 + q^2 + 2\left(p_{12} - \frac{p_{03}}{q} + \frac{t^2}{q^2}\right) = \text{constante}$$

comme on le vérifie sans peine. D'après la théorie générale[1] la transformation de contact

$$X^2 = z^2 + (p-1)^2, \qquad Y = y, \qquad Z = x + \int \frac{(p-1)\,dp}{p\sqrt{X^2-(p-1)^2}}$$

doit la ramener à la forme

$$s = f(x, y, z, p, q)$$

et cette équation devra admettre une intégrale intermédiaire du premier ordre du système x et pour le système y, un invariant du troisième ordre. Le calcul donne

$$\frac{P}{X} = \frac{1}{pz} - \int \frac{(p-1)\,dp}{pz^{\frac{3}{2}}}, \qquad Q = -\frac{q}{p}, \qquad \frac{S}{X}\bigl(pz + (p-1)r\bigr) = \frac{qr-ps}{p^2}$$

et

$$p\left(r + z - \frac{s}{q}\right) = (qr - qs)\left(\frac{X}{p^2 S} + \frac{1}{q}\right).$$

L'équation transformée s'obtient donc en éliminant p entre les deux relations

$$pS = XQ, \qquad \frac{P}{X} = \frac{1}{p\left(X^2-(p-1)^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \int \frac{(p-1)\,dp}{p\left(X^2-(p-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Elle est de la forme $S = QF(X, P)$. On peut l'écrire

$$s\frac{\partial\varphi}{\partial p}(x, p) + q = 0$$

et on voit ainsi qu'elle admet l'intégrale intermédiaire

$$\varphi(x, p) + z = X(x).$$

Nous étudierons dans une autre partie de ce travail les équations d'une forme plus générale.

2° On trouve facilement que l'hypothèse $\alpha = \varphi(p)\psi(r)$ conduit à l'équation

$$s + (r+1)\,e^{z + \frac{p^2}{2} + \frac{1}{r+1}} = 0.$$

Cette équation se ramène à la précédente. En effet, posons $z + \dfrac{x^2}{2} = Z$.

---

[1] Voir GOURSAT, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles*, t. I, p. 82.

L'équation vient

$$s + re^{z - px + \frac{p^2}{2} + \frac{1}{r}} = 0.$$

Effectuons la transformation d'Ampère. On obtient l'équation

$$s - e^{\frac{x^2}{2}} e^{z-r} = 0$$

qu'un changement de variables ramène à l'équation que nous venons d'étudier.

[8] *Équation II*. — μ est du premier degré en q. Si on pose

$$\mu = -q\gamma + \mu_1,$$

la relation (11) s'écrit

$$(15)\quad \left(\frac{d\mu_1}{dx}\right) - q\left(\frac{d\gamma}{dx}\right) + \gamma\rho + \frac{\partial R}{\partial x} + p\frac{\partial R}{\partial z} + r\frac{\partial R}{\partial p} + \rho'\left(\frac{d\rho}{dx}\right) - q\frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\frac{\partial \rho}{\partial p} = 0$$

et on a d'abord

$$r\alpha_1 + \alpha_2 = -\left(r\frac{\partial \gamma}{\partial p} + p\frac{\partial \gamma}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right).$$

α_1 et α_2 ne dépendent plus de z; on en conclut que

$$\gamma = -g(x, y, p) - zY_1, \qquad \alpha_1 = \frac{\partial g}{\partial p}, \qquad \alpha_2 = \frac{\partial g}{\partial x} + pY_1.$$

Dans l'équation

$$s + z\left(r\frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial g}{\partial x} + pY_1\right) + \beta(x, y, p, r) = 0,$$

faisons la transformation de contact

$$X = \varphi(x, y, p), \qquad Y = y, \qquad Z = z + \psi(x, y, p).$$

On a

$$P = \frac{\partial \psi}{\partial p} : \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \lambda(x, y, p), \qquad r = \frac{R\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}}{\frac{\partial \lambda}{\partial p} - R\frac{\partial \varphi}{\partial p}}, \qquad s = \frac{S + R\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}}{\frac{\partial \lambda}{\partial p} - R\frac{\partial \varphi}{\partial p}}.$$

Il vient

$$S + R\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} + (Z - \psi)\left\{\frac{\partial g}{\partial p}\left(R\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x} + pY_1\right)\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p} - R\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\right\} + \beta_1(x, y, P, R) = 0.$$

Si on prend

$$\frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(\frac{\partial g}{\partial x} + p\mathrm{Y}_1\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p}$$

l'équation II s'écrit alors

$$s + z\big(\mathrm{Y}p + h(x, y)\big) + \beta(x, y, p, r) = 0.$$

Posons

$$z = \mathrm{Z}, \qquad y = \mathrm{Y}, \qquad \varphi(x, y) = \mathrm{X}.$$

On a

$$p = \mathrm{P}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad s = \left(\mathrm{S} + \mathrm{R}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathrm{P}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \qquad r = \mathrm{R}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \mathrm{P}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Si Y est nul, on prendra $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = h(x, y)$ et on aura la forme

$$(17) \qquad s + z + \beta(x, y, p, r) = 0.$$

Si Y n'est pas nul, on peut au préalable le prendre égal à *un* par un changement de la variable y. Si h est nul, on a alors

$$(18) \qquad s + pz + \beta(x, y, p, r) = 0.$$

Si $h \neq 0$, en prenant $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = h$, on obtient la forme

$$s + z(p + 1) + \beta(x, y, p, r) = 0$$

qui se ramène à la précédente en posant $z = \mathrm{Z} - x$.

Pour l'équation 18, le système $\sum$ (n° 5) s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \beta'\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial p}(\beta' r - \beta) - \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + r\frac{\partial \beta}{\partial p} + p^2\right) = 0,$$

$$p\frac{\partial u}{\partial p} + r\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

En prenant comme variables indépendantes x, y, p et $\omega = \frac{r}{p}$, on voit que les coefficients de l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \beta'\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{p}\frac{\partial v}{\partial \omega}\left\{\frac{\partial \beta}{\partial x} + r\frac{\partial \beta}{\partial p} + p^2 + \frac{r}{p}(r\beta' - \beta)\right\} = 0$$

ne doivent contenir p que par l'intermédiaire de ω.

Si l'on pose

$$b(x, y, p, \omega) \equiv \beta(x, y, p, p\omega).$$

on a :

$$\frac{\partial\beta}{\partial r} = \frac{1}{p}\frac{\partial b}{\partial\omega}, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial p} = \frac{\partial b}{\partial p} - \frac{\omega}{p}\frac{\partial b}{\partial\omega}.$$

Donc

$$b = ph(x, y, \omega) + l(x, y, p)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{p}\frac{\partial l}{\partial x}\right) + 1 + \omega\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial l}{\partial p} - \frac{l}{p}\right) = 0.$$

On doit donc avoir à la fois

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial l}{\partial p} - \frac{l}{p}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial l}{\partial p} - \frac{l}{p}\right) + p = 0$$

ce qui est impossible.

Pour l'équation 18, le système $\sum$ donne

$$\frac{\partial u}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \beta'\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} + p + r\frac{\partial\beta}{\partial p}\right) = 0,$$

On en conclut que

$$\beta = h(x, y, r) + l(x, y, p), \qquad \frac{\partial^2 l}{\partial x\partial p} + 1 + r\frac{\partial p^2}{\partial^2 l} = 0$$

et l'équation s'écrit :

$$s + z + p(Y - x) + \beta_1(x, y, r) = 0$$

ou, en prenant comme variables y et $x - Y$,

$$s + z - px + \beta(x, y, r) = 0. \tag{19}$$

L'équation

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \beta'\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - rx\right) = 0$$

a deux solutions distinctes indépendantes de z et p. Ce sont les deux invariants cherchés.

Pour qu'il y ait un invariant du second ordre du système qui admet y comme invariant, il faut et il suffit que le nombre

$$\mu = qx + \mu_1(x, y, z, p)$$

vérifie la relation 11, ce qui donne

$$\left(\frac{d\mu_1}{dx}\right) - 2(\beta - px + z)x + \frac{\partial R}{\partial x} + \beta'\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - rx\right) - \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0\,;$$

$\left(\frac{d\mu_1}{dx}\right)$ est donc du premier degré en z et on peut prendre

$$\mu_1 = Yz^2 + mz + n\,.$$

On a alors

$$z\left(\frac{dm}{dx}\right) + \left(\frac{dn}{dx}\right) + p(2Yz + m) + \frac{\partial R}{\partial x} + \beta'\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - rx\right) = \frac{\partial \beta}{\partial y} + 2x(z + \beta - px).$$

La condition

$$\frac{\partial m}{\partial x} + r\frac{\partial m}{\partial p} + 2pY = 2x$$

donne

$$Y = 0, \qquad m = x^2 + Y_1$$

et il reste

$$\frac{\partial n}{\partial x} + r\frac{\partial n}{\partial p} + p(x^2 + Y_1) - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\int \beta'^2 dr\right\} + \beta'\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - rx\right) = \frac{\partial \beta}{\partial y} + 2x(\beta - px).$$

En dérivant par rapport à p, on voit que n doit être de la forme

$$n = b(x, y) - p(x^3 + xY_1 + Y_2)$$

et on a l'unique condition

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{b(x, y) - \int \beta'^2 dr\right\} + \beta'\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - rx\right) - r(x^3 + xY_1 + Y_2) - \frac{\partial \beta}{\partial y} - 2\beta x = 0.$$

On ne diminue pas la généralité en dérivant par rapport à r et *la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (19) *soit une équation* (E) *est que* β *soit une solution de l'équation aux dérivées partielles :*

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial r^2}\left(rx - \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) + \frac{\partial \beta}{\partial r}\frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial r} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y \partial r} + 3x\frac{\partial \beta}{\partial r} + x^3 + x\varphi(y) + \psi(y) = 0\,.$$

L'équation (19) admet alors les deux invariants

$$y \quad \text{et} \quad t - \int \beta'^2 dr + qx + z\big(x^2 + \varphi(y)\big) + b(x, y) - p(x^3 + x\varphi + \psi).$$

Pour donner un exemple, cherchons si β peut être le produit d'une fonction de x seul par une fonction de r seul.

En posant $\beta = XR$, on obtient la relation

$$XR''(rx - X'R) + XX'R'^2 + 3xXR' + x^3 = 0.$$

On doit prendre $X = x^2$ et

$$R''(2R - r) - 3R' - 2R'^2 = 1.$$

Si on pose $2R - r = u$, on a

$$uu'' = (u' + 2)(u' + 3).$$

Posons $u' + 2 = \frac{1}{\theta}$; on obtient, en intégrant,

$$u = \frac{(\theta + 1)^3}{\theta}, \qquad r + \frac{\theta^2}{2} + 2\theta + \mathcal{L}\theta = 0.$$

L'équation s'obtient en éliminant θ entre cette dernière relation et

$$s + z - px + \frac{x^2}{2}\left[r + \frac{(\theta + 1)^3}{\theta}\right] = 0.$$

Il est facile de déterminer ses invariants :

1° Le système $dy = 0$, $dz = pdx$, $dp = rdx$, $dq = sdx$;

$$dt + \frac{x^2}{2} ds\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) + (q - sx)dx = 0$$

qui définit les caractéristiques du second ordre du système y donne

$$d(t + qx - sx^2) + \frac{x^2}{2} ds\left(\frac{1}{\theta} + 1\right) = 0.$$

Or l'équation elle-même montre que

$$ds = -\frac{(\theta + 1)^3}{\theta} x dx - \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) d\theta;$$

donc

$$d(t + qx - sx^2) = \frac{x^2}{2}\frac{\theta + 1}{\theta^2}\left\{(\theta + 1)^3 x dx + \frac{x^2}{2}(\theta - 1)\frac{(\theta + 1)^2}{\theta} d\theta\right\}.$$

On vérifie sans peine que le second membre est une différentielle exacte et que le second invariant du système y est

$$t + qx - sx^2 - \frac{x^4}{8}\frac{(\theta + 1)^4}{\theta^2}.$$

2° On peut aussi déterminer directement les deux invariants de l'autre système. Il est plus simple de chercher les solutions de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \beta' \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - rx\right) = 0$$

qui s'écrit en prenant θ comme variable au lieu de r

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{x^2}{2}\left(\frac{1 - \theta}{\theta}\right) + x\frac{\partial u}{\partial \theta}(\theta + 1) = 0.$$

Le système différentiel

$$dy = \frac{2\theta dx}{x^2(1 - \theta)} = \frac{d\theta}{x(\theta + 1)}$$

admet évidemment l'intégrale première

$$\frac{x^2(1 + \theta)^2}{\theta} = u_1.$$

On a alors :

$$dy = \frac{d\theta}{\sqrt{u_1 \theta}}, \qquad y = u_2 + 2\sqrt{\frac{\theta}{u_1}}$$

et

$$u_2 = y - \frac{2\theta}{x(1 + \theta)}.$$

Les expressions u_1 et u_2 sont les invariants cherchés.

[**9**] *Équations III*. — Un calcul identique à celui qu'on a fait pour les équations II montre qu'on peut prendre

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 c^2 = -\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} + p\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right), \qquad \alpha_2 = e^2\left(ap + \frac{\partial a}{\partial x}\right),$$

a étant une fonction de x et de y. Le changement d'inconnue $z_1 = z - \mathfrak{L}a$ ramène l'équation à la forme

$$s - pe^z + \beta(x, y, p, r) = 0, \qquad \gamma = pe^z + Y$$

et le système $\sum$ s'écrit alors

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \beta' \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial p}(r\beta' - \beta) - \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + r\frac{\partial \beta}{\partial p}\right) = 0, \qquad p\frac{\partial u}{\partial p} + r\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il admette deux solutions est que

$$\beta = p\varphi\left(\frac{r}{p}, x, y\right) = p\varphi(\lambda, x, y).$$

L'identité 12 qui définit γ donne alors :

$$-pe^z - Y = -\beta'\left(\frac{d\mathfrak{L}\beta''}{\partial x}\right) + \frac{\partial \mathfrak{L}\beta''}{\partial r}\left(\left(\frac{d\beta}{dx}\right) - p^2e^z - re^z\right) - 3e^z - \frac{\partial \mathfrak{L}\beta''}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{L}\beta''}{\partial p}(\beta - pe^z),$$

d'où

$$\frac{\partial \mathfrak{L}\beta''}{\partial r}(p^2 + r) + p\frac{\partial \mathfrak{L}\beta''}{\partial p} + 2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(p + \lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda}\mathfrak{L}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} + 1 = 0$$

ce qui est impossible. Aucune équation III n'est une équation E.

CHAPITRE II

Étude du cas général.

[10] Si nous posons $h = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r \partial q}$ ($h \neq 0$), le système S du n° 3 s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial q} = 0, \qquad Y \equiv \frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} - f\frac{\partial u}{\partial p} + f'\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} + r\frac{\partial u}{\partial p}\right) - \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{df}{dx}\right) = 0,$$

$$Z \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} + r\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{1}{h}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{df}{dx}\right) = 0.$$

On en tire successivement

$$Z_1 = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{df}{dx}\right)\right) = 0,$$

$$Z_2 = \frac{\partial^2}{\partial q^2}\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial q^2}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2}{\partial q^2}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{df}{dx}\right)\right) = 0.$$

Les variables étant au nombre de 6, pour qu'il y ait deux solutions, il faut d'abord que Z_1 et Z_2 soient identiques. Nous distinguerons deux cas.

[11] *Premier cas :* $\dfrac{\partial h}{\partial q} = 0$, on a $\dfrac{\partial^3 f}{\partial r \partial q^2} = 0$.

La relation 10 (n° 3) donne alors

$$\rho' \frac{\partial^2}{\partial q^2}\left(\frac{1}{\dfrac{\partial Q}{\partial q}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial q^2}\left(\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial p}}{\dfrac{\partial Q}{\partial q}}\right) = 0.$$

On a donc deux cas à étudier

1° $\qquad \dfrac{\partial Q}{\partial q} = a, \qquad Q = aq + b, \qquad \dfrac{\partial a}{\partial p} \neq 0.$

L'équation s'écrit

$$\frac{d(aq+b)}{dx} + \rho(x, y, z, p, r) = 0.$$

Faisons la transformation de contact

$$\mathrm{T}\left\{\begin{array}{l} \mathrm{X} = \varphi(x, y, z, p), \qquad \mathrm{Y} = y, \qquad \mathrm{Z} = \psi(x, y, z, p), \qquad [\varphi, \psi] = 0. \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial p}\mathrm{P} = \dfrac{\partial\psi}{\partial p}, \qquad \mathrm{Q}\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial p}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial y} + q\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\right) - \dfrac{\partial\psi}{\partial p}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + q\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \end{array}\right.$$

Si j'impose aux deux fonctions arbitraires φ et ψ la seconde condition

$$a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)^2 = \frac{\partial\psi}{\partial p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

j'aurai

$$aq + b = \mathrm{PQ} + \lambda(x, y, z, p),$$

d'où

$$\frac{d(aq+b)}{dx} = (\mathrm{PS} + \mathrm{QR})\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\lambda}{dx}$$

et l'équation s'écrira

$$\mathrm{PS} + \mathrm{QR} + \mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \mathrm{P}, \mathrm{R}) = 0.$$

On peut donc, sans diminuer la généralité, prendre $b = 0$, $a = p$.

Mais si, dans l'équation

$$ps + qr + \rho(x, y, z, p, r) = 0$$

nous faisons la transformation d'Ampère, elle s'écrit

$$-\mathrm{XS} - \mathrm{Q} + \mathrm{R}\rho\left(-\mathrm{P}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z} - \mathrm{PX}, \mathrm{X}, -\frac{1}{\mathrm{R}}\right) = 0.$$

Elle est de la forme

$$s + \frac{q}{x} + \rho_1(x, y, z, p, r) = 0$$

et on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial r \partial q} = 0$. Nous avons ainsi ramené ce premier type d'équations à celles que l'on a étudiées au chapitre précédent.

$$2^\circ \qquad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial q} = \frac{a}{q+g}, \qquad \mathrm{Q} = a\,\mathfrak{L}(q+g) + b.$$

Une transformation de contact du type T, où l'on impose aux fonctions φ et ψ la condition

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - g\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = \frac{\partial\psi}{\partial p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - g\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

permet de ramener l'équation proposée à une équation de même type où g est nul.

On peut donc prendre

$$Q = a\mathfrak{L}.q + b$$

et on doit avoir

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial p} : \frac{\partial Q}{\partial q}\right) = 0, \qquad \text{c.-à.-d.} \qquad \frac{\partial a}{\partial p} = 0.$$

L'équation peut alors s'écrire, en modifiant ρ,

$$\frac{d}{dx}(a\mathfrak{L}q) + a\rho(x, y, z, p, r) = 0.$$

On a, dans ce cas,

$$f = q\rho + q\mathfrak{L}q\left(\frac{d\mathfrak{L}a}{dx}\right) = q\rho + \mathrm{H}q\mathrm{L}q.$$

H ne dépendant plus de r.

L'équation Y s'écrit alors :

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial p}(q\rho + q\mathrm{H}\mathfrak{L}q) + q\rho'\left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$-\frac{\partial u}{\partial r}\left\{q\left(\frac{d\rho}{dx}\right) + q\mathfrak{L}q\left(\frac{d\mathrm{H}}{dx}\right) + (q\rho + q\mathrm{H}\mathfrak{L}q)\big(\rho + \mathrm{H}(1 + \mathfrak{L}q)\big)\right\} = 0.$$

Elle doit être une identité en q; on a donc $\mathrm{H} = 0$.

Il reste le système

$$(20) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \rho'\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}(1 + p\rho') + \frac{\partial u}{\partial p}(r\rho' - \rho) - \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{d\rho}{dx} - \rho^2\right) = 0.$$

Nous pouvons nous borner à l'étude du cas où $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ n'est pas nul([1]).

La condition (11) (n° 6) donne, en posant $\sigma = \int \rho'^2 dr$.

$$(21) \qquad \left(\frac{d\mu}{dx}\right) - \rho q\frac{\partial \mu}{\partial q} - q^2\left(\frac{d\sigma}{dx}\right) + \rho q^2\sigma + q^2\rho'\left(\frac{d\rho}{dx} - \rho^2\right) - q\frac{\partial \rho}{\partial y}$$
$$- q^2\frac{\partial \rho}{\partial z} + q^2\rho\frac{\partial \rho}{\partial p} = 0.$$

([1]) Voir Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 173.

En dérivant deux fois par rapport à r, on obtient

$$\frac{\partial \mu}{\partial q} = 2\alpha q - \frac{\partial \mathfrak{L}\rho''}{\partial y}.$$

On en conclut que $\dfrac{\partial \mathfrak{L}\rho''}{\partial y}$ est une fonction de x, y, z, p qu'on peut prendre égale à $\dfrac{\partial}{\partial y}\mathfrak{L}a$; donc

$$\rho = a\beta(x, y, z, p, r) + a_1 r + a_2$$

les a_i ne dépendant que de x, y, z, p. On a alors

$$\mu = \alpha q^2 - q\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{L}a + \mu_1$$

et en annulant le coefficient de q dans la relation 21, on a

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{L}a\right) - \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{L}a\,(a_1 r + a_2) + r\frac{\partial a_1}{\partial y} + \frac{\partial a_2}{\partial y} = 0. \tag{22}$$

Remarquons que $\rho' = a\beta' + a_1$ ne peut être indépendant de y que si $\dfrac{\partial a}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial a_1}{\partial y}$ sont nuls. La relation 22 montre alors que $\dfrac{\partial a_2}{\partial y}$ est nul aussi et ρ ne dépendrait plus de y. L'équation 20, divisée par ρ' et dérivée par rapport à y, donne alors, en posant $\omega = \dfrac{1}{\rho'}$,

$$\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial}{\partial y}(\omega\rho) - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\omega\left(\left(\frac{d\rho}{dx}\right) - \rho^2\right)\right\} = 0. \tag{23}$$

On en conclut d'abord que :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\rho + \omega\frac{\partial \rho}{\partial y} : \frac{\partial \omega}{\partial y}\right\} = 0.$$

Or

$$\omega : \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\rho'} : \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho'}\right) = -\rho' : \frac{\partial \rho'}{\partial y} = -\frac{a\beta' + a_1}{\beta'\dfrac{\partial a}{\partial y} + \dfrac{\partial a_1}{\partial y}};$$

donc

$$-\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}\,\frac{a\beta' + a_1}{\beta'\dfrac{\partial a}{\partial y} + \dfrac{\partial a_1}{\partial y}} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\,\frac{(a\beta' + a_1)}{\left(\beta'\dfrac{\partial a}{\partial y} + \dfrac{\partial a_1}{\partial y}\right)^2}\left(\beta'\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2}\right) = 0,$$

d'où

$$\left(\beta'\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2}\right)\left(\beta\frac{\partial a}{\partial y}+r\frac{\partial a_1}{\partial y}+\frac{\partial a_2}{\partial y}\right)$$
$$=\left(\beta'\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\left(\beta\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}+r\frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial y^2}\right).$$

En développant et simplifiant, on trouve $\beta''=0$ par une dérivation par rapport à y. La relation doit se réduire à une identité et on trouve aisément que

$$a_1=K_1 a+l_1, \qquad a_2=K_2 a+l_2.$$

K_i et l_i étant des fonctions de x, z, p. En modifiant β, tout revient à supposer que a_1 et a_2 ne dépendent plus de y. Si on pose $u=\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{L}a\,(u\neq 0)$, la relation (22) montre que $\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{L}u$ ne dépend que de y. On peut par suite prendre $a=v_1 Y^r$ et en modifiant β, on a finalement

$$f=q\left(Y^r\beta(x,z,p,r)+\frac{d}{dx}\mathfrak{L}v\right),$$

v étant une fonction de x, z, p. En posant $A=\left(\frac{d\rho}{dx}\right)-\rho^2$, l'équation 23 montre qu'on doit avoir

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(A+\omega\frac{\partial A}{\partial y}:\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)=0,$$

d'où, par un calcul identique au précédent

$$\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(Y'Y^{r-1})=\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}Y'Y^{r-1}.$$

Or on a

$$\frac{\partial A}{\partial y}=Y'Y^{r-1}\left(v\left(\frac{d\beta}{dx}\right)-\beta\frac{dv}{dx}+v\beta\frac{dv}{dx}\mathfrak{L}Y-2v\beta Y^v\right),$$

$\frac{\partial A}{\partial y}$ ne peut s'annuler avec nos hypothèses. On a donc

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{L}\partial A}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{L}(Y'Y^{r-1})$$

ce qui exige que :

$$Y'\left\{\frac{dv}{dx}-2vY^v\right\}=0.$$

Ceci n'est possible que si Y est une constante. Il n'y a donc pas d'autres équations de la première classe du type étudié que celles où f ne dépend pas de y.

[**12**] Remarque. — Cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour que

$$f = \frac{\rho + \dfrac{\partial Q}{\partial x} + p\dfrac{\partial Q}{\partial z} + r\dfrac{\partial Q}{\partial p}}{\dfrac{\partial Q}{\partial q}}$$

soit linéaire en q. On doit avoir

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2}\left(\frac{1}{\dfrac{\partial Q}{\partial q}}\right) = 0.$$

On retrouve pour Q les deux formes que nous venons d'étudier. Nous avons donc déterminé toutes les équations (E) linéaires en q.

[**13**] *Deuxième cas :* $\dfrac{\partial h}{\partial q} \neq 0$. On peut alors tirer $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ de Z_1 (n° 10) et porter dans Z_2 qui doit être identiquement nul. On a donc

$$(24) \qquad \frac{\partial^2}{\partial q^2}\left(\frac{1}{h}\right) : \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\partial^2}{\partial q^2}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial q}\right) : \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial q}\right) = \frac{\partial^2}{\partial q^2}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{df}{dx}\right)\right) : \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{df}{dx}\right)\right)$$

La première égalité donne, tous calculs faits

$$(25) \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial q^3}\,\frac{\partial^3 f}{\partial r\,\partial q^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\,\frac{\partial^4 f}{\partial r\,\partial q^3}.$$

Nous désignerons dorénavant par Q_i des fonctions de $x, y, z. p$ qui contiennent q sans contenir r; nous pourrons alors sans crainte de confusion désigner aussi par des accents les dérivées de ces fonctions par rapport à q. Nous poserons

$$Q_1 = \frac{1}{Q'}, \qquad Q_2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + p\frac{\partial Q}{\partial z} + r\frac{\partial Q}{\partial p}\right) : Q', \qquad f = \rho Q_1 + Q_2.$$

La condition 25 vient en intégrant par rapport à r :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial q^3} = Q_3\frac{\partial^2 f}{\partial q^2},$$

c'est-à-dire

$$(26) \qquad \rho Q_1''' + Q_2''' = Q_3(\rho Q_1'' + Q_2'').$$

Si Q_1'' est nul, on a soit $Q = aq + b$, soit $Q = a\mathcal{L}(q + g) + b$.

Dans l'équation

$$\frac{dQ}{dx} + \rho(x, y, z, p, r) = 0,$$

on peut en modifiant ρ prendre $b = 0$ dans les deux cas et nous avons vu (n° 11) qu'une transformation de contact de la forme T permet, dans le premier cas, de prendre $a = p$; dans le second cas, $g = 0$. Si $Q = pq$, $\frac{\partial h}{\partial q} = 0$, ce qui est contraire à notre hypothèse. Il nous reste donc le seul type

$$f = \left(\rho q + \frac{da}{dx} q\mathfrak{L}q\right) : a$$

qu'on peut écrire en changeant les notations,

$$f = \rho q + q\mathfrak{L}q\frac{da}{dx}, \qquad \frac{\partial a}{\partial p} \neq 0.$$

Alors

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = q\left(\frac{d\rho}{dx}\right) + q\mathfrak{L}q\left(\frac{d^2a}{dx^2}\right) - q\left(\rho + \mathfrak{L}q\frac{da}{dx}\right)\left(\rho + \frac{da}{dx}(1 + \mathfrak{L}q)\right).$$

Mais il est clair que la seconde des égalités 24 donnera, par le même calcul qui a donné 25,

$$(27) \qquad \frac{\partial^3}{\partial q^3}\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial^3 f}{\partial r \partial q^2} = \frac{\partial^2}{\partial q^2}\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial^4 f}{\partial r \partial q^3}.$$

Or

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \rho' q + q\mathfrak{L}q\frac{\partial a}{\partial p}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial r \partial q^2} = \frac{\partial a}{\partial p}\frac{1}{q}, \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial r \partial q^3} = -\frac{\partial a}{\partial p}\frac{1}{q^2},$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = q\left(\left(\frac{d\rho}{dx}\right) - \rho^2 - \rho\frac{da}{dx}\right) + q\mathfrak{L}q\left(\left(\frac{d^2a}{dx^2}\right) - \left(\frac{da}{dx}\right)^2 - 2\rho\frac{da}{dx}\right) - q(\mathfrak{L}q)^2\left(\frac{da}{dx}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{1}{q}\left(\left(\frac{d^2a}{dx^2}\right) + \left(\frac{da}{dx}\right)^2 - 2\rho\frac{da}{dx}\right) - \frac{2}{q}\left(\frac{da}{dx}\right)^2\mathfrak{L}q,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial q^3}\left(\frac{df}{dx}\right) = -\frac{1}{q^2}\left\{\left(\frac{d^2a}{dx^2}\right) + \left(\frac{da}{dx}\right)^2 - 2\rho\frac{da}{dx}\right\} - 2\left(\frac{da}{dx}\right)^2\left(\frac{1 - \mathfrak{L}q}{q^2}\right).$$

Il est manifeste que l'égalité 27 n'est possible que si $\frac{da}{dx}$ est nul, ce qui est contraire à nos hypothèses.

[**14**] Dans l'égalité 26, nous devons donc prendre

$$Q_3 = \frac{Q_1'''}{Q_1''} \qquad \text{et} \qquad Q_2'''Q_1'' = Q_1'''Q_2''.$$

On en tire successivement

$$Q_2'' = u(x, y, z, p, r)\, Q_1'', \qquad \left(\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} + p\dfrac{\partial Q}{\partial z}}{Q'}\right)'' + r\left(\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial p}}{Q'}\right) = \left(\frac{1}{Q'}\right)''(u_1 r + u_2),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + p\frac{\partial Q}{\partial z} = u_1 + \frac{\partial Q}{\partial q}(a_1 q + b_1), \qquad \frac{\partial Q}{\partial p} = u_2 + \frac{\partial Q}{\partial q}(a_2 q + b_2);$$

u_i, a_i, b_i étant des fonctions de x, y, z, p. En modifiant ρ, on peut prendre nuls u_1 et u_2 et le système

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + p\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial q}(a_1 q + b_1), \qquad \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\partial Q}{\partial q}(a_2 q + b_2)$$

admet, comme nous l'avons fait remarquer plusieurs fois, une solution linéaire $\lambda q + \mu$. On a alors

$$a_1 = \frac{\partial \mathfrak{L}\lambda}{\partial x} + p\frac{\partial \mathfrak{L}\lambda}{\partial z}, \qquad a_2 = \frac{\partial \mathfrak{L}\lambda}{\partial p}, \qquad b_1 = \frac{\dfrac{\partial \mu}{\partial x} + p\dfrac{\partial \mu}{\partial z}}{\lambda}, \qquad b_2 = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \mu}{\partial p}$$

d'où l'on tire

$$Q = \varphi(\lambda q + \mu, y).$$

En posant $\lambda = a$, $\mu = ag$, on arrive à l'équation

$$s + \frac{\rho}{Q'} + (q + g)\frac{d\mathfrak{L}a}{dx} + \frac{dg}{dx} = 0, \quad \text{où} \quad Q = \varphi\big(a(q + g), y\big).$$

Une transformation de contact T permet de prendre $g = 0$ et on a finalement

$$s + \frac{\rho}{Q'} + q\frac{d\mathfrak{L}a}{dx} = 0, \qquad Q = \varphi(aq, y).$$

On a donc

$$f = \rho Q_1 + q\frac{d\mathfrak{L}a}{dx}, \qquad Q_1 = \frac{1}{Q'} = \psi(aq, y),$$

$$\frac{df}{dx} = Q_1\frac{d\rho}{dx} + \rho q Q_1'\frac{da}{dx} + q\left(\frac{d^2\mathfrak{L}a}{dx^2}\right) - \left(\frac{d\mathfrak{L}a}{dx} + Q_1' a\rho\right)\left(\rho Q_1 + q\frac{d\mathfrak{L}a}{dx}\right)$$

en posant

$$Q'_1 = \frac{\partial \psi}{\partial(aq)},$$

d'où

$$\frac{df}{dx} = Q_1\left(\left(\frac{d\rho}{dx}\right) - \rho\frac{d\mathfrak{L}a}{dx}\right) - Q_1 Q'_1 a\rho^2 + q\left(\frac{d^2\mathfrak{L}a}{dx^2} - \left(\frac{d\mathfrak{L}a}{dx}\right)^2\right).$$

L'équation Y (n° 10) s'écrit alors

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial p}\left(\rho Q_1 + q\frac{d\mathfrak{L}a}{dx}\right) + \left(\rho' Q_1 + q\frac{\partial \mathfrak{L}a}{\partial p}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$-\frac{\partial u}{\partial r}\left[Q_1\left(\left(\frac{d\rho}{dx}\right) - \rho\frac{d\mathfrak{L}a}{dx}\right) - Q_1 Q'_1 a\rho^2 + q\left(\frac{d^2\mathfrak{L}a}{dx^2} - \left(\frac{d\mathfrak{L}a}{dx}\right)^2\right)\right] = 0,$$

u ne dépend pas de q. On a $a\rho^2\frac{\partial u}{\partial r} \neq 0$. Il existe donc entre Q_1, Q'_1 et q une relation de la forme

$$Q_1 Q'_1 = K_0 Q_1 + K_1 q + K_2$$

et les nombres K_i ne sont fonctions que de a_1 et de y.

Écrivons alors l'équation donnée sous la forme

$$\frac{d(aq)}{dx} + \rho Q_1(aq, y) = 0$$

et faisons la transformation de contact

$$X = \varphi(x, z, p), \qquad Y = y, \qquad Z = \psi(x, z, p), \qquad [\varphi, \psi] = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} P = \frac{\partial \psi}{\partial p}, \qquad Q\frac{\partial \varphi}{\partial p} = q\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial \psi}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right).$$

On peut imposer aux fonctions φ et ψ la seconde condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = a\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial \psi}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

et on a alors

$$Q = aq,$$

d'où

$$\frac{d(aq)}{dx}dx + \frac{d(aq)}{dy}dy = S\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial \varphi}{\partial p}dp\right) + T dy$$

et

$$\frac{d(aq)}{dx} = \mathrm{S}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} + r\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right).$$

En modifiant ρ, l'équation peut donc s'écrire :

$$s + \rho(x, y, z, p, r)\,\mathrm{Q}(q, y) = 0 \quad \text{où} \quad \mathrm{QQ}' = \mathrm{YQ} + \mathrm{Y}_1 q + \mathrm{Y}_2$$

et le système S (n° 4),

$$\mathrm{X} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} + \omega\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{\rho'}\left(\left(\frac{d\rho}{dx}\right) - \rho^2\mathrm{Y}\right) = 0, \qquad \left(\omega = r - \frac{\rho}{\rho'}\right),$$

$$\mathrm{Y} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial r}\rho^2\mathrm{Y}_2 = 0, \qquad \mathrm{Z} \equiv \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r}\rho^2\mathrm{Y}_1 = 0.$$

On doit d'abord avoir

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho^2\mathrm{Y}_1) = \frac{\partial}{\partial z}(\rho^2\mathrm{Y}_2).$$

Si $\mathrm{Y}_1 = 0$, on a $\frac{\partial\rho}{\partial z} = 0$. Si $\mathrm{Y}_1 \neq 0$, on peut prendre $\mathrm{Y}_1 = 1$. On a alors

$$\frac{\partial\rho^2}{\partial y} = \mathrm{Y}_2\frac{\partial\rho^2}{\partial z}.$$

Si on change z en $z + \int \mathrm{Y}_2 dy$, on a une équation de même forme où $\frac{\partial\rho}{\partial z}$ est nul. Il reste $\mathrm{Y}_2\frac{\partial\rho}{\partial z} = 0$. Si Y_2 n'est pas nul $\frac{\partial\rho}{\partial z} = 0$. Mais on a

$$\mathrm{X}\big(\mathrm{Y}(u)\big) - \mathrm{Y}\big(\mathrm{X}(u)\big) \equiv 0, \qquad \text{c.-à.-d.} \qquad \mathrm{Y}(\omega) = 0, \qquad \omega' = 0,$$

ce qui est impossible. Nous n'avons donc que deux cas à distinguer :

$$1^\circ \quad \mathrm{Y}_1 = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial z} = 0, \quad \mathrm{Y}_2 = 1; \qquad 2^\circ \quad \mathrm{Y}_2 = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial y} = 0, \quad \mathrm{Y}_1 = 1.$$

[**15**] *Premier cas.* — En changeant de variable y et modifiant Q et ρ, on peut prendre

$$\text{(I)} \qquad s + \mathrm{Q}(q)\,\rho(x, y, p, r) = 0, \qquad \mathrm{QQ}' = a\mathrm{Q} + 1, \qquad a = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Le système S s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \omega\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{\rho'}\left(\frac{d\rho}{dx} - a\rho^2\right) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \rho^2\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

On voit immédiatement que la condition nécessaire et suffisante pour que ce système ait deux solutions est que ρ soit une solution commune aux deux équations :

(28) $$\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}\rho}{\partial y}\right) + \rho\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) = \rho\frac{\partial \rho}{\partial p} + a\frac{\partial \rho}{\partial y}.$$

(29) $$\frac{\partial^2 \mathcal{L}\rho}{\partial y \partial r} + \rho\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} = 0.$$

Je dis que ces conditions suffisent pour qu'il y ait un invariant du second ordre du système y. En effet, l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} + r\frac{\partial v}{\partial p} - \rho Q\frac{\partial v}{\partial q} + (a\theta + b)\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$$

s'écrit ici, en remarquant que l'équation 29 donne

$$\sigma = \int \rho'^2 dr = \rho\rho' + \frac{\partial \mathcal{L}\rho}{\partial y} + \alpha(x, y, p),$$

(30) $$\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} + r\frac{\partial v}{\partial p} - \rho Q\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\left[-\theta\rho Q' + \alpha\rho Q + Q^2\left(a\alpha\rho + \rho'\frac{d\rho}{dx} + \rho\frac{\partial \rho}{\partial p} - \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)\right)\right] = 0.$$

Mais on a :

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right) = \frac{d\alpha}{dx} + \rho\left(\frac{d\rho'}{dx}\right) + \rho'\left(\frac{d\rho}{dx}\right) + \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}\rho}{\partial y}\right)$$

et en tenant compte de 28, l'équation 30 s'écrit

$$\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} + r\frac{\partial v}{\partial p} - \rho Q\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\left(-\theta\rho Q' + Q^2\left(a\alpha\rho - \frac{d\alpha}{dx}\right) + \rho Q\alpha\right) = 0.$$

On a successivement

$$\frac{\partial v}{\partial p} - \rho' Q\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\left\{-\theta\rho' Q' + Q^2\left(a\alpha\rho' - \frac{\partial \alpha}{\partial p}\right) + \rho' Q\alpha\right\} = 0,$$

$$-Q\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\left\{-\theta Q' + \alpha Q(aQ + 1)\right\} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial p} - Q^2\frac{\partial \alpha}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0,$$

d'où finalement

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = Q^2\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial p} = Q^2\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \alpha}{\partial p}, \quad \frac{\partial v}{\partial q} = \frac{\partial v}{\partial \theta}QQ'\left(\alpha - \frac{\theta}{Q^2}\right).$$

Le système admet la seule solution

$$\frac{\theta}{Q} + \alpha Q = \frac{t}{Q} + Q \left\{ \alpha(x, y, p) - \int \beta'^2 dr \right\}.$$

D'ailleurs, les deux invariants de l'autre système sont de la forme $u_1(x, y, p, r)$ et $u_2(x, y, p, r)$.

On est donc amené, pour intégrer l'équation I, à essayer la transformation $p = Z$.

On peut mettre I sous la forme $q = f(x, y, p, r, s)$,

On a alors

$$q = f(x, y, Z, P, Q)$$

et la transformée est :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + P\frac{\partial f}{\partial Z} + R\frac{\partial f}{\partial P} + S\frac{\partial f}{\partial Q} = Q.$$

C'est une équation de Monge-Ampère qui admet comme invariants, d'une part :

$$y \quad \text{et} \quad \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y} + Q\dfrac{\partial f}{\partial Z} + S\dfrac{\partial f}{\partial P} + T\dfrac{\partial f}{\partial Q}}{\varphi(x, y, z, P, Q)} + \varphi\left\{\alpha(x, y, Z) + \gamma(x, y, Z, P)\right\}$$

et, d'autre part :

$$u_1(x, y, Z, P), \qquad u_2(x, y, Z, P).$$

On sait qu'on peut la ramener par une transformation de contact à une équation de la forme

$$s = F(x, y, z, p, q)$$

qui admettra une intégrale intermédiaire du premier ordre pour le système X et un invariant du second ordre pour le système Y. Il en résulte qu'elle sera ou bien linéaire ou bien d'une des formes indiquées par M. Goursat. L'intégrale générale est facile à trouver dans les deux cas.

[**16**] *Deuxième cas.* — Un calcul qui ne diffère de celui du n° 15 que par le changement de y en z, donne, comme conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation

$$s + Q(q)\,\rho(x, z, p, r) = 0,$$

soit une équation E,

$$Q\frac{dQ}{dq} = aQ + q, \qquad (a = 0 \text{ ou } 1), \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{L}\rho}{\partial r \partial z} + \rho\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}\rho}{\partial z}\right) + \rho\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) = \rho\frac{\partial \rho}{\partial p} + a\frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

[17] Il est aisé d'obtenir dans les deux cas des équations intégrables de forme simple. Dans le premier cas, on peut ajouter à celles que j'ai signalées dans ma Note aux Comptes Rendus déjà citée, l'équation

$$s^2 = q(r^2 - e^{2y})$$

Dans le second cas, proposons-nous de déterminer les équations où $\frac{\partial \rho}{\partial p}$ est nul. On doit avoir

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{L}\rho}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial^2 \rho}{\partial r \partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} = \frac{\partial \rho}{\partial r}\frac{\partial^2 \rho}{\partial r \partial z}.$$

En posant $u = r + h(x, z)$, ρ est une fonction de u et de x, vérifiant l'équation

$$\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial^2 \mathfrak{L}\rho}{\partial u^2} + \rho \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} = 0,$$

h doit par suite être linéaire en z: en changeant de variable x et en posant $z_1 = z + \xi(x)$, on peut prendre $h = z$. On trouve alors sans peine que ρ ne peut contenir x et que a doit être nul. En intégrant l'équation

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{L}\rho}{\partial u^2} + \rho \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} = 0$$

on parvient à l'équation :

$$s = \sqrt{q^2 + 1}\, sh.\varphi,$$

où φ est une fonction de r et de z définie par la relation

$$r + z = ch\varphi + \mathfrak{L} th \frac{\varphi}{2}.$$

Cette équation admet comme invariants

$$y \quad \text{et} \quad \frac{t}{\sqrt{q^2+1}} - \sqrt{q^2+1}\, ch\varphi$$

et les deux solutions du système

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \rho^2 \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} + \left(r - \frac{\rho}{\rho'}\right)\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{1}{\rho'}\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{d\rho}{dx}\right) = 0.$$

Si on pose $\omega = r - \frac{\rho}{\rho'} = r - ch.\theta$ et $u = v(x, p, z, \omega)$, le système s'écrit

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \omega \frac{\partial v}{\partial p} - p\frac{\partial v}{\partial \omega} = 0.$$

Les invariants sont les deux nombres α et β définis par les relations

$$p^2 + \omega^2 = \alpha^2, \qquad \beta = -x + \text{Arc sin}\frac{p}{\sqrt{p^2+\omega^2}}$$

qui s'écrivent

$$p = \alpha \sin(x + \beta), \qquad r - ch\theta = \alpha \cos(x + \beta).$$

DEUXIÈME PARTIE

Les équations $s = p\theta(x, y, z, q) + \omega(x, y, z, q)$ qui sont de la première classe.

[**1**] Nous avons rencontré, dans la première partie, une équation de cette forme qui est de la première classe sans se ramener à aucun des types classés. Dans cette deuxième partie, nous reprendrons d'abord rapidement l'exposé de résultats connus pour établir dans toute sa généralité un théorème fondamental(1) relatif aux équations $s = f(x, y, z, p, q)$ qui admettent une involution d'ordre(2) $n > 2$. En confrontant les conditions nécessaires qu'il fournit, nous serons amenés à cette conclusion remarquable que *les équations étudiées*(3) *ne peuvent admettre d'involution d'ordre supérieur à deux du système* Y *que si elles admettent une intégrale intermédiaire du premier ordre du système* X. Enfin nous déterminerons toutes les équations $s = f$ ayant une intégrale intermédiaire du premier ordre qui sont de la première classe : elles se réduisent à deux types que nous étudierons complètement.

Ces résultats complètent et terminent la recherche et la classification des équations $s = f$ de la première classe(4).

[**2**] Supposons donc qu'il existe pour chaque système de caractéristiques un invariant d'ordre $n > 2$.

1° S'il existe une fonction $\alpha(x, y, z, p) \neq 0$ telle que

$$\Gamma_1(\alpha) \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial y} + q\frac{\partial \alpha}{\partial z} + f\frac{\partial \alpha}{\partial p} + \alpha\frac{\partial f}{\partial p} = 0,$$

(1) Ce théorème a été démontré par M. Goursat (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. I, 1899, pp. 439-464) et par M. Gau (Thèse de Doctorat, chez Gauthier-Villars, 1911) avec quelques restrictions que nous levons.

(2) Pour $n = 2$, voir le premier chapitre de ma Thèse (Privat, Toulouse, 1921).

(3) Nous nous bornerons au cas où l'équation n'est pas à la fois linéaire en p et q. Pour le cas réservé, l'étude a été complètement faite par M. Gau (Thèse de Doctorat et Annales de l'Université de Grenoble).

(4) Pour les notations, voir la Thèse de M. Gau.

j'ai démontré dans ma Thèse (pp. 27-37) qu'il existe une fonction β telle que

$$\Gamma_2(\beta) \equiv \frac{\partial \beta}{\partial y} + q\frac{\partial \beta}{\partial z} + f\frac{\partial \beta}{\partial p} - \alpha X\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial q}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

Nous appellerons ces conditions *les conditions* Γ. Il est d'ailleurs manifeste que, de même s'il existe un nombre $\alpha(x, y, z, q) \neq 0$ vérifiant

$$\Gamma'_1(\alpha) \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial x} + p\frac{\partial \alpha}{\partial z} + f\frac{\partial \alpha}{\partial q} + \alpha\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

il existe une fonction $\beta(x, y, z, q)$ telle que

$$\Gamma'_2(\beta) \equiv \frac{\partial \beta}{\partial x} + p\frac{\partial \beta}{\partial z} + f\frac{\partial \beta}{\partial q} - \alpha Y\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial p}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

2° Supposons que la première condition Γ ne soit pas vérifiée et que l'involution d'ordre minimum soit d'ordre $n > 2$.

Lemme. — *Toute fonction u telle que*

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial p_m}\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right) + u\frac{\partial f}{\partial p} = 0, \qquad m < n$$

est identiquement nulle.

Si u n'est pas nul, son logarithme v vérifie

$$(2)\qquad \frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial v}{\partial p_m}\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right) + \frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

Par hypothèse, m est supérieur à 1. En posant $w = \mathfrak{L}\frac{\partial v}{\partial p_m}$ on a, en dérivant par rapport à p_m,

$$(3)\qquad \frac{\partial w}{\partial y} + q\frac{\partial w}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial w}{\partial p_m}\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right) + \frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

En retranchant 3 de 2, on voit que $w - v$ est un invariant d'ordre m. On doit donc avoir

$$\mathfrak{L}\frac{\partial v}{\partial p_m} - v = \mathfrak{L}X(x), \qquad e^v = \frac{X}{p_m + \psi(x, y, z \ldots p_{m-1})}.$$

En portant dans (2), on voit qu'il existe une involution d'ordre m, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc u est identiquement nul.

Ceci posé, on a

$$(4)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}+q\frac{\partial\varphi}{\partial z}+f\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial p_{n-1}}\left(\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\right)+\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)=(p_n+\varphi)\frac{\partial f}{\partial p}.$$

Si on désigne par des accents les dérivées par rapport à p_{n-1},

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+q\frac{\partial\varphi'}{\partial z}+f\frac{\partial\varphi'}{\partial p_1}+\ldots+\frac{\partial\varphi'}{\partial p_{n-1}}\left(\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\right)+\mathrm{M}_{n-1}^{n-1}=0.$$

Si φ' est d'ordre effectif m, en posant $u=\dfrac{\partial\varphi'}{\partial p_m}\neq 0$. on retrouve la relation (1) si $m>2$. On doit avoir $u=0$ ce qui est contradictoire. Il faut donc que $m=2$.

La relation

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+q\frac{\partial\varphi'}{\partial z}+f\frac{\partial\varphi'}{\partial p_1}+\frac{\partial\varphi'}{\partial p_2}\left(\frac{df}{dx}\right)+\mathrm{M}_{n-1}^{n-1}=0,$$

où M_{n-1}^{n-1} est du premier degré en p_2 montre en dérivant deux fois que la dérivée $\dfrac{\partial^2\varphi'}{\partial p_2^2}$ est nulle en vertu du Lemme; φ' est du premier degré en p_2.

En posant

$$\varphi'=(n-1)\,\alpha(x,y,z,p)\,p_2+\beta(x,y,z,p)$$

on trouve les conditions de M. Gau :

$$\mathrm{C}_1(\alpha)\equiv\frac{\partial\alpha}{\partial y}+q\frac{\partial\alpha}{\partial z}+f\frac{\partial\alpha}{\partial p}+\alpha\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}=0,$$

$$\mathrm{C}_2(\beta)\equiv\frac{\partial\beta}{\partial y}+q\frac{\partial\beta}{\partial z}+f\frac{\partial\beta}{\partial p}+(n-1)\,\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial f}{\partial q}\right)$$
$$+(n-1)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial x}+p\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial z}+f\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q}\right)+\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}=0.$$

On peut écrire immédiatement celles qui s'en déduisent en permutant les rôles de x et de y. *Nous les appellerons les conditions* C.

Remarques. — 1° Si on a

$$\frac{\partial a}{\partial y}+q\frac{\partial a}{\partial z}+f\frac{\partial a}{\partial p}+\mathrm{K}a\frac{\partial f}{\partial p}=0,\qquad (\mathrm{K}\ \text{constant});$$

en posant $a=\alpha^{\mathrm{K}}$, on retrouve la condition Γ_1.

2° Si on a

$$\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial v}{\partial p_m}\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right) + \mathrm{K}v\frac{\partial f}{\partial p} = 0,$$

en posant $v = u^{\mathrm{K}}$, on retrouve la relation (1).

[**3**] La méthode qui donne les conditions C permet d'en obtenir de nouvelles. On a en effet

$$\varphi = p_{n-1}\big((n-1)\,\alpha p_2 + \beta\big) + \psi(x, y, z, \ldots, p_{n-2})$$

et la relation 4 donne, en supprimant les termes en p_{n-1},

$$(5)\quad \frac{\partial \psi}{\partial y} + q\frac{\partial \psi}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial p_{n-2}}\left(\frac{d^{n-3}f}{dx^{n-3}}\right) + \big\{(n-1)\,\alpha p_2 + \beta\big\}\big\{p_{n-2}\mathrm{M}_{n-2}^{n-2} + \ldots\big\}$$
$$+ p_{n-2}\mathrm{M}_{n-1}^{n-2} + \ldots = \psi\frac{\partial f}{\partial p},$$

les termes non écrits ne contenant plus que les dérivées d'ordre inférieur à $n-2$. Nous n'étudierons cette relation que dans les cas particuliers où ce sera nécessaire

CHAPITRE PREMIER

Nous allons appliquer ce qui précède à la recherche des équations

$$s = p\theta(x, y, z, q) + \omega(x, y, z, q)$$

qui sont de la première classe.

[**4**] *Premier cas : Il n'existe aucune fonction* $\lambda(x, y, z, p)$ *non nulle telle que :*

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} + q\frac{\partial\lambda}{\partial z} + f\frac{\partial\lambda}{\partial p} + \lambda\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

On a alors les conditions C et il est clair que α est nul. Donc

$$\frac{\partial\beta}{\partial y} + q\frac{\partial\beta}{\partial z} + f\frac{\partial\beta}{\partial p} + (n-1)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} + \omega\frac{\partial\theta}{\partial q}\right) + \frac{\partial\omega}{\partial z} + \theta\frac{\partial\omega}{\partial q} + np\left(\frac{\partial\theta}{\partial z} + \theta\frac{\partial\theta}{\partial q}\right) = 0.$$

On en conclut que

$$\beta = npl_1(x, y, z) + l(x, y, z).$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} + \theta\frac{\partial\theta}{\partial q} + l_1\theta + q\frac{\partial l_1}{\partial z} + \frac{\partial l_1}{\partial y} = 0,$$

$$(n-1)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} + \omega\frac{\partial\theta}{\partial q}\right) + \frac{\partial\omega}{\partial z} + \theta\frac{\partial\omega}{\partial q} + nl_1\omega + q\frac{\partial l}{\partial z} + \frac{\partial l}{\partial y} = 0.$$

Un changement d'inconnue permet de prendre $l_1 = 0$. On a alors

$$(6) \qquad F(\theta) \equiv \frac{\partial\theta}{\partial z} + \theta\frac{\partial\theta}{\partial q} = 0, \qquad (n-1)\,L + M + q\frac{\partial l}{\partial z} + \frac{\partial l}{\partial y} = 0,$$

en posant

$$L = \frac{\partial\theta}{\partial x} + \omega\frac{\partial\theta}{\partial q}, \qquad M = \frac{\partial\omega}{\partial z} + \theta\frac{\partial\omega}{\partial q}.$$

Étudions dans ce cas la relation 5. En posant

$$H = \frac{\partial\omega}{\partial x} + \omega\frac{\partial\omega}{\partial q}, \qquad F(u) = \frac{\partial u}{\partial z} + \theta\frac{\partial u}{\partial q},$$

on obtient

$$M_{n-1}^{n-1} = (n-1)L + M, \qquad M_{n-1}^{n-2} = -Ap - B$$

avec

$$A = (n-3)F\left(\frac{nL}{2} + \frac{\partial l}{\partial y} + q\frac{\partial l}{\partial z}\right), \quad B = \frac{(n-1)(n-4)}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \omega\frac{\partial L}{\partial q}\right) + F(H) + (n-2)\left(\omega\frac{\partial l}{\partial z} + q\frac{\partial^2 l}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 l}{\partial y\partial x}\right).$$

Supposons $n > 3$. L'égalité 5 où $\alpha = 0$, $\beta = l$, donne par deux dérivations par rapport à p_{n-2}

$$\frac{\partial\psi''}{\partial y} + q\frac{\partial\psi''}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial\psi''}{\partial p_{n-2}}\left(\frac{d^{n-3}f}{dx^{n-3}}\right) + \psi''\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

Le lemme montre que ψ'' est nul. Soit m l'ordre affectif de ψ'.

$$\frac{\partial\psi'}{\partial y} + q\frac{\partial\psi'}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial\psi'}{\partial p_m}\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right) + lM_{n-2}^{n-2} + M_{n-1}^{n-2} = 0.$$

Si m est plus grand que 1, le calcul fait au n° 2 nous amène à une contradiction. Donc ψ' est du premier ordre. La relation

$$\frac{\partial\psi'}{\partial y} + q\frac{\partial\psi'}{\partial z} + f\frac{\partial\psi'}{\partial p} + l\{(n-1)L + M\} = Ap + B$$

montre que ψ' est de la forme $ap + b$ et donne la condition

$$(n-3)F\left(\frac{n}{2}L + q\frac{\partial l}{\partial z} + \frac{\partial l}{\partial y}\right) = a\theta + q\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial a}{\partial y}.$$

Si $n = 3$, un calcul direct donne facilement

$$F\left(L + q\frac{\partial l}{\partial z} + \frac{\partial l}{\partial y}\right) = a_1\theta + q\frac{\partial a_1}{\partial z} + \frac{\partial a_1}{\partial y}$$

et ces deux relations peuvent se mettre sous la seule forme

$$F\left(L + \frac{\partial m}{\partial y} + q\frac{\partial m}{\partial z}\right) = 0. \tag{7}$$

Nous allons montrer que les conditions 6 et 7 sont incompatibles.

[5] Puisque la première condition Γ n'est pas vérifiée, θ n'est pas nul. Si $\frac{\partial\theta}{\partial z}$ était nul, il en serait de même de $\frac{\partial\theta}{\partial q}$ et un changement d'inconnue nous ramènerait au cas où θ est nul. La première condition 6 peut donc s'écrire, en intégrant,

$$q = \theta z + g(x, y, \theta). \tag{8}$$

La condition 7 et la seconde condition 6 donnent alors

$$\mathrm{L} + \frac{\partial m}{\partial y} + q\frac{\partial m}{\partial z} = \psi(x, y, \theta). \tag{9}$$

$$\mathrm{M} + \frac{\partial}{\partial y}\big(l-(n-1)m\big) + q\frac{\partial}{\partial z}\big(l-(n-1)m\big) = -(n-1)\psi. \tag{10}$$

Dérivons (9) par rapport à z et q; ajoutons; il vient, en tenant compte de 10

$$n\mathrm{L} + q\frac{\partial l}{\partial z} + \frac{\partial l}{\partial y} = (z+g')\left(\theta\frac{\partial m}{\partial z} + q\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial y\,\partial z}\right)$$

qui s'écrit

$$n\psi + q\frac{\partial(\alpha+m)}{\partial z} + \frac{\partial(\alpha+m)}{\partial y} = (z+g')\left(\theta\frac{\partial m}{\partial z} + q\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial y\,\partial z}\right), \quad \big(\alpha = l-(n+1)m\big). \tag{11}$$

Si on remplace dans cette condition q par sa valeur tirée de 8, elle doit se réduire à une identité en θ et z. Si on dérive par rapport à z, on obtient

$$\theta\frac{\partial\alpha}{\partial z} + (\theta z+g)\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial z} = (z+g')\left(2\theta\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 m}{\partial y\,\partial z^2} + (\theta z+g)\frac{\partial^3 m}{\partial z^3}\right). \tag{12}$$

Avant de discuter cette relation, remarquons que si θ est linéaire en q, un changement d'inconnue classique peut le rendre indépendant de q. Comme $\frac{\partial\theta}{\partial q}$ n'est pas nul, il en est de même de g''. De plus, on a

$$\omega = \frac{\partial g}{\partial x} + (z+g')\left\{\psi(x, y, \theta) - \frac{\partial m}{\partial y} - (\theta z+g)\frac{\partial m}{\partial z}\right\}$$

et, d'après 8,

$$s = p\theta + (z+g')\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Si on prend θ comme inconnue, on est donc ramené à l'équation qui s'obtient en éliminant z entre

$$q = \theta z + g, \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \psi(x, y, \theta) - \frac{\partial m}{\partial y} - (\theta z + g)\frac{\partial m}{\partial z}.$$

Si m ne contient pas z, on est ramené à la forme $s = f(x, y, q)$ que nous étudierons en dernier lieu. Si m est du premier degré en z, on obtient une équation bilinéaire.

La relation 12 ne peut donc pas se réduire à une identité et g doit être solution d'une équation de la forme

$$g'(a_0 g + a_1 \theta + a_2) = b_0 g + b_1 \theta + b_2 \tag{13}$$

les a_i et b_i ne contenant que x et y. En éliminant g' entre 12 et 13, on voit que g est donné par une relation qu'on peut écrire :

$$Ag^2 + g(B\theta + c) + D\theta^2 + E\theta + F = 0.$$

Il ne peut avoir que les deux formes

$$g = \lambda\theta + \lambda_1 + \sqrt{\beta\theta^2 + 2\beta_1\theta + \beta_2}, \qquad g = \lambda\theta + \lambda_1 + \frac{\mu}{\theta + h}.$$

Le trinôme doit être premier avec sa dérivée et μ n'est pas nul. Il suffit de remplacer g par ces valeurs dans 12 pour être conduit dans tous les cas à la condition $\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} = 0$.

Ce premier cas ne donne donc aucune équation intégrable.

[6] *Deuxième cas.* — Il y a une fonction $\lambda(x, y, z, p) \neq 0$, telle que

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} + q\frac{\partial \lambda}{\partial z} + f\frac{\partial \lambda}{\partial p} + \lambda\frac{\partial f}{\partial p} = 0. \tag{14}$$

1° $\frac{\partial \lambda}{\partial p} = 0$. On a alors

$$\theta = -\frac{\partial \mathfrak{L}\lambda}{\partial y} - q\frac{\partial \mathfrak{L}\lambda}{\partial z}$$

et un changement d'inconnue donne $\theta = 0$. L'équation s'écrit

$$s = f(x, y, z, q).$$

Nous réserverons le cas où $\frac{\partial f}{\partial z}$ est nul. La seconde condition Γ donne

$$\zeta = \frac{1}{2}X_1(x)p_2 + pa(x, y z) + b(x, y, z).$$

$$X(x)\frac{\partial f}{\partial z} = X_1 f + \frac{\partial a}{\partial y} + q\frac{\partial a}{\partial z}. \tag{15}$$

$$X\left(\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial q}\right) = \frac{\partial f}{\partial z} + af + \frac{\partial b}{\partial y} + q\frac{\partial b}{\partial z}. \tag{16}$$

Associons d'abord à ces deux conditions les conditions

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + p\frac{\partial \mu}{\partial z} + f\frac{\partial \mu}{\partial q} + \mu\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$
$$\frac{\partial \beta}{\partial x} + p\frac{\partial \beta}{\partial z} + f\frac{\partial \beta}{\partial q} - \mu Y\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

En posant $\mu = \frac{\partial \alpha}{\partial q}(x, y, q)$, la première donne

$$f\frac{\partial \alpha}{\partial q} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} = l(x, y, z)$$

et la seconde

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\mathfrak{L}\frac{\partial l}{\partial z}\right) = \mu Y \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\mathfrak{L}\frac{\partial l}{\partial z}\right) + q\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\mathfrak{L}\frac{\partial l}{\partial z}\right)\right\}.$$

Si $\frac{\partial^2}{\partial z^2}\mathfrak{L}\frac{\partial l}{\partial z}$ n'est pas nul, on peut prendre $Y = 1$ et

$$\alpha = \mathfrak{L}\big(q + h(x, y)\big) + h_1(x, y)$$

f est alors du premier degré en q. Sinon, l vérifie la relation

$$\frac{\partial l}{\partial z} = la(x, y) + b(x, y)$$

et en posant $q = Z$, l'équation

$$s\frac{\partial \alpha}{\partial q} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} = l(x, y, z)$$

se transforme en une équation bilinéaire.

Nous n'avons donc plus qu'à examiner le cas où

$$(17) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x} + p\frac{\partial \alpha}{\partial z} + f\frac{\partial \alpha}{\partial q} + \alpha\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = 0.$$

$$(18) \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} + p\frac{\partial \beta}{\partial z} + f\frac{\partial \beta}{\partial q} + (m-1)\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) + (m-1)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q \partial y} + q\frac{\partial^2 f}{\partial q \partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Remarquons qu'en faisant au besoin un changement de la variable x, les conditions 15 et 16 donnent toujours

$$f(x, y, z, q) = f_1(x, y, q) + q\frac{\partial l}{\partial z}(x, y, z) + \frac{\partial l}{\partial y}.$$

Si $\dfrac{\partial^2 l}{\partial z^2}$ est nul, l'équation correspondante se ramène à une équation bilinéaire en posant $q = Z$. Si non, la condition 17 donne

$$\frac{\partial \mathfrak{L}\alpha}{\partial q} + \frac{1}{q + h(x, y)} = 0.$$

Un changement d'inconnue donne $\dfrac{\partial l}{\partial y} = 0$, $\alpha = \dfrac{a(x, y)}{q}$ et la condition 18 donne

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial q}\frac{\partial^2 l}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 l}{\partial z^3}\left(\frac{a(m-1)}{q} + m\right) = 0.$$

On en conclut que

$$\frac{\partial^2 l}{\partial z^2} = h\frac{\partial l}{\partial z} + h_1.$$

L'équation

$$s = f_1(x, y, q) + q\frac{\partial l}{\partial z}$$

se ramène encore à une équation bilinéaire en posant $q = Z$.

2° Si $\dfrac{\partial \lambda}{\partial p}$ n'est pas nul, la relation 14 donne

$$\lambda = \frac{1}{p + a(x, y, z)}, \qquad f = \theta(p + a) - q\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial y}.$$

Un changement d'inconnue ramène l'équation à la forme $s = p\theta(x, y, z, q)$. Nous allons étudier ces équations, en réservant le cas où $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ est nul.

[**7**] S'il existe un nombre $\mu(x, y, z, q) \neq 0$ tel que

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} + p\frac{\partial\mu}{\partial z} + f\frac{\partial\mu}{\partial q} + \mu\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

on sait que l'équation proposée peut s'écrire

$$\frac{d}{dx}\Big(\alpha(y, z, q) + l(x, y, z)\Big) = \frac{\partial l}{\partial x}.$$

Si on prend comme nouvelle inconnue $\alpha(y, z, q) + l$, on est ramené à l'équation

$$S\frac{\partial\varphi}{\partial P}(x, y, P) + \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \psi(x, y, Z, P)$$

qu'on vient d'étudier au paragraphe précédent.

Nous n'avons donc qu'à discuter l'ensemble des conditions

$$(19)\quad \frac{\partial\beta}{\partial y} + q\frac{\partial\beta}{\partial z} + p\theta\frac{\partial\beta}{\partial p} - X\left\{\frac{\partial\theta}{\partial x} + p\left(\frac{\partial\theta}{\partial z} + \theta\frac{\partial\theta}{\partial q}\right)\right\} + p\left(\frac{\partial\theta}{\partial z} + \theta\frac{\partial\theta}{\partial q}\right) = 0,$$

$$(20)\quad \frac{\partial\alpha}{\partial x} + p\frac{\partial\alpha}{\partial z} + p\theta\frac{\partial\alpha}{\partial q} + p\alpha\frac{\partial\theta}{\partial q} + p\frac{\partial^2\theta}{\partial q^2} = 0$$

qui nous donne, en posant $\alpha = \frac{\partial}{\partial q}\,\mathcal{L}\frac{\partial u}{\partial q}(y, z, q)$,

$$(20')\quad \frac{\partial u}{\partial z} + \theta\frac{\partial u}{\partial q} = uh(x, y, z) + h_1(x, y, z),$$

$$(21)\quad \frac{\partial\gamma}{\partial x} + p\frac{\partial\gamma}{\partial z} + f\frac{\partial\gamma}{\partial q} + p(n-1)\left(\frac{\partial h}{\partial y} + q\frac{\partial h}{\partial z} + \theta h\right) + p\left(\frac{\partial\theta}{\partial z} + \theta\frac{\partial\theta}{\partial q}\right) = 0.$$

La condition 19 donne sans peine

$$X\frac{\partial\theta}{\partial x} = \theta X_1 + \frac{\partial b}{\partial y} + q\frac{\partial b}{\partial z},$$

$$(1 - X)\left(\frac{\partial\theta}{\partial z} + \theta\frac{\partial\theta}{\partial q}\right) + a\theta + q\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial a}{\partial y} = 0,$$

a et b étant des fonctions de x, y, z. Nous distinguerons deux cas dans la discussion. D'abord, si X n'est pas nul, on peut poser, après un changement de notations

$$\theta = \frac{\partial b}{\partial y} + q\frac{\partial b}{\partial z} + \theta_1(y, z, q). \tag{22}$$

La deuxième relation peut disparaître, si on prend $X = 1$, $a = 0$.

Si au contraire, $X = 0$, on a

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} + \theta\frac{\partial \theta}{\partial q} + a\theta + q\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial a}{\partial y} = 0 \tag{23}$$

et l'autre condition donne simplement $X_1 = b = 0$.

[8] $X \neq 0$. Les conditions (20′) et (22) donnent

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial q}\left(\frac{\partial b}{\partial y} + q\frac{\partial b}{\partial z} + X\theta_1\right) = uh + h_1. \tag{24}$$

$$\frac{\partial u}{\partial q}\left(\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} + q\frac{\partial^2 b}{\partial z \partial x} + X'\theta_1\right) = u\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial x}. \tag{25}$$

1° $X' \neq 0$. On a la relation

$$\frac{\partial u}{\partial q}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{X'}\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y}\right) + q\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{X'}\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial z}\right)\right\} = u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{X'}\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{X'}\frac{\partial h_1}{\partial x}\right). \tag{26}$$

Si cette relation se réduit à une identité, on peut prendre $\theta = X\theta_1(y, z, q)$ et la condition (21) conduit à une impossibilité.

Si non, on peut avoir pour u une des formes

$$u = ce^{aq}, \qquad u = a\mathfrak{L}q + c, \qquad u = cq^a;$$

a et c étant des fonctions de y et de z. La relation (24) permet alors de calculer θ; en portant dans la relation 21, on est conduit chaque fois à une impossibilité.

2° $X' = 0$. On peut prendre $X = 1$. La relation (22) ne se réduit à une identité que si $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$; mais alors (20′) montre que l'équation proposée peut s'écrire, en posant $h = -\frac{\partial \mathfrak{L}l}{\partial z}$,

$$\frac{d(ul + l_1)}{dx} = \frac{\partial l_1}{\partial x}(x, y, z).$$

En prenant $ul + l_1$ comme nouvelle inconnue, on est ramené au calcul du n° 7 et par conséquent à un cas déjà discuté. La relation 25 donne alors

$$u = ce^{aq} \quad \text{ou} \quad u = cq^a.$$

Dans le premier cas, on a facilement

$$\theta = e^q l(y, z) + l_1(y, z) + \lambda(x, y), \qquad h = -l_2(y, z) - \lambda (l \neq 0).$$

En portant dans la relation 21, on voit que l doit être nul, ce qui conduit à une contradiction.

Dans le second cas, on est conduit, par un calcul analogue, à des impossibilités, sauf si

$$a(n-1) + 1 = 0.$$

L'équation

$$\text{E)} \qquad s = pq\left(lq^{\frac{1}{n-1}} + l_1 + \mu(x, z)\right)$$

vérifie toutes les conditions nécessaires écrites.

[**11**] *Étude de l'équation* E. — Il revient au même d'étudier

$$s = pq\left(l(x, z)\,p^{\frac{1}{n-1}} + l_1(x, z) + \mu(y, z)\right).$$

Pour cette équation

$$\alpha = -\frac{n}{(n-1)p}, \qquad \gamma = -X - p\left(lp^{\frac{1}{n-1}} + l_1\right)$$

et il faut revenir à l'étude de la relation (5).

Il est donc d'abord nécessaire de calculer M_{n-1}^{n-2} pour les équations où

$$f = q\theta(x, y, z, p).$$

On a

$$M_K^K = q\left\{K\left(r\frac{\partial^2\theta}{\partial p^2} + A\right) + F(\theta)\right\}$$

en posant

$$A = \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial p} + p\frac{\partial^2\theta}{\partial z\,\partial p} + \theta\frac{\partial\theta}{\partial p}, \qquad F(\theta) = \frac{\partial\theta}{\partial z} + \theta\frac{\partial\theta}{\partial p}.$$

et on voit que

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = q\left\{ r\frac{\partial\theta}{\partial p} + \frac{\partial\theta}{\partial x} + p\frac{\partial\theta}{\partial z} + \theta^2 \right\},$$

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) = q\left\{ \begin{array}{l} p_3\dfrac{\partial\theta}{\partial p} + p^2_2\dfrac{\partial^2\theta}{\partial p^2} + p_2\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + 2\dfrac{\partial^2\theta}{\partial p\,\partial x} + 2p\dfrac{\partial^2\theta}{\partial p\,\partial z} + 3\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial p}\right) \\ + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + 2p\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial z} + p^2\dfrac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + \theta\left(\theta^2 + 3\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + 3p\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\right) \end{array} \right\},$$

$$= q\left\{ p_3\frac{\partial\theta}{\partial p} + p^2_2\frac{\partial^2\theta}{\partial p^2} + p_2 u + v \right\}.$$

De même

$$\left(\frac{d^3f}{dx^3}\right) = p_4 q\frac{\partial\theta}{\partial p} + p_3 M^3_3 + qw$$

en posant

$$w = p^3_2\frac{\partial^3\theta}{\partial p^3} + p^2_2\left(\frac{\partial^3\theta}{\partial p^2\,\partial x} + p\frac{\partial^3\theta}{\partial p^2\,\partial z} + \theta\frac{\partial^2\theta}{\partial p^2} + \frac{\partial u}{\partial p}\right)$$
$$+ p_2\left(u\theta + \frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial p}\right) + \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} + v\theta;$$

$$\left(\frac{d^4f}{dx^4}\right) = p_5 q\frac{\partial\theta}{\partial p} + p_4 M^4_4 + 3p^2_3 q\frac{\partial^2\theta}{\partial p^2} + p_3\mu + \ldots$$

où les termes non écrits sont au plus du second ordre et où

$$\mu = q\frac{\partial w}{\partial p_2} + \left[\frac{d}{dx}M^3_3\right];$$

on a alors

$$\left(\frac{d^5f}{dx^5}\right) = p_6 q\frac{\partial\theta}{\partial p} + p_5 M^5_5 + p_4\left\{\left(\frac{dM^4_4}{dx}\right) + 6p_3\frac{\partial^2\theta}{\partial p^2} + \mu\right\} + \ldots.$$

On en conclut que

$$M^{n-2}_{n-1} = \left(\frac{d}{dx}\left\{Aq\frac{(n+2)(n-5)}{2} + (n-5)qF\right\}\right) + 6qp_3\frac{\partial^2\theta}{\partial p^2} + \mu$$

que nous écrirons

$$M^{n-2}_{n-1} = q\left\{p_3\frac{\partial^2\theta}{\partial p^2}\,\frac{(n-1)(n-2)}{2} + B\right\},$$

B étant une fonction du second ordre qu'il est facile de calculer. Cette expression ne vaut que pour $n-1>5$. Pour $n=6$, la loi se continue, comme le montre un calcul direct. Elle est donc vraie pour $n>5$.

1° Supposons $n > 5$. On a $n-2 > 3$. Si on dérive la relation (5) par rapport à p_{n-2}, elle vient en posant $\psi' = \frac{\partial \psi}{\partial p_{n-2}}$,

$$(27) \quad \frac{\partial \psi'}{\partial y} + q\frac{\partial \psi'}{\partial z} + \dots + \frac{\partial \psi'}{\partial p_{n-2}}\left(\frac{d^{n-3}f}{dx^{n-3}}\right) + \mathrm{M}_{n-2}^{n-2}\left((n-1)\alpha p_2 + \gamma\right) + \mathrm{M}_{n-1}^{n-2} = 0.$$

Soit m l'ordre effectif de ψ'. Le lemme établi au début de cette seconde partie montre que m est au plus égal à 3 et que ψ' est une fonction linéaire de p_3.

$$\psi' = (n-1)(n-2)p_3\lambda(x, y, z, p, p_2) + \lambda_1(x, y, z, p, p_2).$$

En remplaçant ψ' par cette expression dans 27, on voit que λ doit être du premier ordre d'après le lemme. Il est donc égal à α. Il reste la condition

$$(28) \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + q\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + f\frac{\partial \lambda_1}{\partial p} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial \lambda_1}{\partial p_2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\alpha\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right] + \mathrm{M}_{n-1}^{n-2}\left\{(n-1)\alpha p_2 + \gamma\right\} + q\mathrm{B} = 0.$$

Mais l'expression $\omega = (n-1)\alpha p_2 + \gamma$ vérifie la relation

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial y} + q\frac{\partial \omega^2}{\partial z} + f\frac{\partial \omega^2}{\partial p} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial \omega^2}{\partial p_2} + 2\omega\mathrm{M}_{n-1}^{n-1} = 0.$$

On en conclut qu'il existe une fonction $\lambda(x, y, z, p, p_2)$ telle que

$$(29) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} + q\frac{\partial \lambda}{\partial z} + f\frac{\partial \lambda}{\partial p} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial p_2} + (n-1)^2(n-2)\alpha\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right] + nq\omega\mathrm{F}(\theta) + 2q(n-1)\mathrm{B} = 0.$$

L'application du lemme montre encore que λ est une fonction du second degré en p_2. Posons

$$\lambda = a(n-1)^2(n-2)p_2^2 + bp_2 + c;$$

a, b, c étant des fonctions de x, y, z, p. On voit d'abord que a n'est autre que $\frac{\partial \alpha}{\partial p}$ et il reste la condition

$$\begin{aligned}(30) \quad & \frac{\partial b}{\partial y} + q\frac{\partial b}{\partial z} + f\frac{\partial b}{\partial p} + \frac{\partial \alpha}{\partial p}(n-1)^2(n-2)q\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + p\frac{\partial \theta}{\partial z} + \theta^2\right) + b\frac{\partial f}{\partial p} \\ & + (n-1)^2(n-2)\alpha q\left(2\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial p} + 2p\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial p} + 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial p} + \frac{\partial \theta}{\partial z} + \theta\frac{\partial \theta}{\partial p}\right) \\ & + n(n-1)q\alpha\mathrm{F}(\theta) + q(n-1)(n-2)\left(\frac{\partial^3 \theta}{\partial p^2 \partial x} + p\frac{\partial^3 \theta}{\partial p^2 \partial z} + \theta\frac{\partial^2 \theta}{\partial p^2}\right) \\ & + \frac{n(n-1)}{2}q\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial p} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial p}\right)^2\right) + (n-2)q\theta\frac{\partial \theta}{\partial p} = 0.\end{aligned}$$

Si, dans cette condition, on remplace θ par sa valeur tirée de l'équation E, on voit que l'on a

$$\frac{\partial b}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = p, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial y} = p\mu'.$$

En dérivant 30 par rapport à y, on obtient pour μ une équation de la forme

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} + K\mu^2 = Z\mu + Z_1,$$

K étant une fraction non nulle, Z et Z_1 des fonctions de z. C'est là une équation de Riccati qui donne

$$\mu = \zeta_1 Y + \zeta_2 + \frac{\zeta_3}{Y + \zeta_4}$$

les ζ_i étant des fonctions de z seul. En remplaçant μ par cette valeur dans l'équation qu'on déduit de 30 en y faisant $\frac{\partial b}{\partial y} = 0$, et divisant par q, on est immédiatement conduit à une impossibilité.

2° Supposons $n \leqslant 5$. Il faut examiner directement les trois cas où n a l'une des valeurs 5, 4, 3. Pour $n = 5$ et $n = 4$, le calcul est en tous points identique à celui que nous venons d'indiquer. Pour $n = 3$, il doit exister une fonction $\varphi(x, y, z, p, p_2)$ telle que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + q\frac{\partial \varphi}{\partial z} + f\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = (p_3 + \varphi)\frac{\partial f}{\partial p}$$

ce qui donne le système

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \theta\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\left(p_2\frac{\partial \theta}{\partial p} + \frac{\partial \theta}{\partial x} + p\frac{\partial \theta}{\partial z} + \theta^2\right) + p_2^2\frac{\partial^2 \theta}{\partial p^2} + up_2 + v = \varphi\frac{\partial \theta}{\partial p}.$$

On en conclut que

$$\varphi = \alpha p_2^2 + \beta p_2 + a(y, z, p)$$

et on a la condition :

$$\frac{\partial a}{\partial z} + \theta\frac{\partial a}{\partial p} + \beta\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + p\frac{\partial \theta}{\partial z} + \theta^2\right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 2p\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z} + p^2\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \theta\left(\theta^2 + 3\frac{\partial \theta}{\partial x} + 3p\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) = a\frac{\partial \theta}{\partial p}.$$

En dérivant par rapport à y et en remplaçant $\frac{\partial\theta}{\partial y}$ par $p\mu'$, on voit que μ doit vérifier les deux équations

$$\frac{\partial\mu'}{\partial z} = \mu\mu' + Z\mu',$$

$$\frac{1}{\mu'}\frac{\partial^2\mu'}{\partial z^2} + 6\frac{\partial\mu}{\partial z} + \frac{3}{2}\mu^2 = Z_1$$

et ces deux équations ne peuvent avoir une solution commune dépendant de y.

L'équation E n'est jamais de la première classe.

[**12**] Il ne nous reste donc qu'à étudier le cas où, dans l'équation $s = p\,\theta(x, y, z, q)$, on a les conditions 20 ou 20', 21 et 23. Il est alors plus commode de faire un changement d'inconnue qui donnera pour l'équation la forme

$$s = (p + a)\,\theta(x, y, z, q) - q\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial y}, \qquad \lambda = \frac{1}{p + a},$$

mais qui permettra de mettre la condition 23 sous la forme

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} + \theta\frac{\partial\theta}{\partial q} = 0,$$

d'où

$$q = \theta z + \varphi(x, y, \theta), \qquad \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} \neq 0\right).$$

La condition 20' peut alors s'écrire, après un changement de notations,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} + f\frac{\partial u}{\partial q} = u(h + ph_1) + h_2 + ph_3, \tag{31}$$

les h_i étant des fonctions de x, y, z. On en tire :

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \theta\frac{\partial u}{\partial q} = uh_1 + h_3 = -\frac{u\frac{\partial l}{\partial z} + \frac{\partial l_1}{\partial z}}{l}.$$

Si on pose

$$v(x, y, z, \theta) = u(x, y, z, \theta z + \varphi),$$

la relation précédente donne

$$vl + l_1 = \psi(x, y, \theta)$$

et l'équation proposée s'écrit

$$\left(\frac{d(ul + l_1)}{dx}\right) = (ul + l_1)\,\mathrm{A}(x, y, z) + \mathrm{B}(x, y, z).$$

Si A et B ne dépendent pas de z, on retombe sur une équation linéaire en prenant $ul + l_1$ comme nouvelle inconnue. Sinon, l'équation

$$\left(\frac{d}{dx}\,\psi(x, y, \theta)\right) = \mathrm{A}\,\psi(x, y, \theta) + \mathrm{B}$$

donne, en prenant θ comme nouvelle inconnue Z,

$$z = \mathrm{L}(x, y, \mathrm{Z}, \mathrm{P}), \qquad q = \mathrm{ZL} + \varphi(x, y, \mathrm{Z})$$

et l'équation transformée

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y} + \mathrm{Q}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{Z}} + \mathrm{S}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{P}} = \mathrm{ZL} + \varphi(x, y, \mathrm{Z})$$

devient, en intervertissant les rôles des variables

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} + p\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial z} + s\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial q} = z\mathrm{L}(x, y, z, q) + \varphi(x, y, z).$$

C'est la condition 31 où $h = z$, $h_1 = h_3 = 0$. Nous pouvons par suite nous borner au cas où les nombres h_i ont ces valeurs simples.

Il existe donc une fonction $u(x, y, z, q)$ telle que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} + \left((p + a)\theta - q\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial q} = uz + g(x, y, z), \qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} \neq 0\right).$$

Donc $\dfrac{\partial u}{\partial z} + \theta\dfrac{\partial u}{\partial q} = 0$ et u est une fonction de x, y, θ.

En désignant par des accents les dérivées par rapport à θ, on a ensuite :

$$(32) \qquad \left(uz + g - \frac{\partial u}{\partial x}\right)(z + \varphi') = u'\left(q\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial a}{\partial y} - a\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right).$$

La condition 21 donne, en y faisant $h = z$,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} + p\frac{\partial \gamma}{\partial z} + \left\{(p + a)\theta - q\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial y}\right\}\frac{\partial \gamma}{\partial q} + (n - 1)\,q + \theta\frac{\partial a}{\partial z} = q\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y\,\partial z}.$$

D'où

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \theta\frac{\partial\gamma}{\partial q} = 0, \qquad \gamma = v(x, y, \theta)$$

et la relation 21 équivaut à

$$(33) \quad v'\left\{\frac{\partial a}{\partial z}(\theta z + \varphi) + \frac{\partial a}{\partial y} - a\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\} = (z + \varphi')\left\{\frac{\partial v}{\partial x} + \left(n - 1 - \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\right)(\theta z + \varphi) - \frac{\partial^2 a}{\partial y\,\partial z}\right\}.$$

En posant

$$\mathrm{H} = \frac{\partial a}{\partial z}(\theta z + \varphi) + \frac{\partial a}{\partial y} - a\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

cette relation donne

$$(34) \quad \mathrm{H}v' + (z + \varphi')\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial z} = (z + \varphi')\left\{\frac{\partial v}{\partial x} + (n - 1)\left\{\theta(z + \varphi') + \varphi - \theta\varphi'\right\}\right\}.$$

Si v' est nul, v ne contient plus θ et le second membre de la relation 33 montre qu'on doit avoir

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 a}{\partial y\,\partial z}, \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = n - 1, \qquad a = \frac{n-1}{2}z^2 + z\lambda(x, y) + \lambda_1(x, y).$$

Dans ce cas, le second membre de la relation 32 est du second degré en z et on a

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3}\left\{g(z + \varphi')\right\} = 0, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 0.$$

Remarquons alors que l'équation peut s'écrire

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = uz + zg_1(x, y) + g_2(x, y)$$

et en changeant u en $u + g_1$

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = uz + g(x, y).$$

En posant $u = \mathrm{Z}$, on obtient l'équation en Z en éliminant z entre

$$z = \frac{\mathrm{P} - g(x, y)}{\mathrm{Z}}, \qquad q = \theta z + \varphi(x, y, \theta), \qquad u(x, y, \theta) = \mathrm{Z}.$$

On a donc en posant $\theta = Z\psi(x, y, Z)$

$$q = (P - g)\psi + \Phi(x, y, Z) = \frac{S - \dfrac{\partial g}{\partial y}}{Z} - \frac{Q(P - g)}{Z^2}.$$

C'est encore une équation bilinéaire.

Si v' n'est pas nul, l'équation 34 donne

$$\left\{\begin{aligned}
H &= \left\{\frac{\partial v}{\partial x} + (n-1)(\varphi - \theta\varphi')\right\}\frac{z+\varphi'}{v'+1} + \frac{(n-1)\theta(z+\varphi')^2}{v'+2} + \frac{K(x, y, \theta)}{(z+\varphi')^{v'}}, \quad \big((v'+1)(v'+2) \neq 0\big);\\
H &= \left\{\frac{\partial v}{\partial x} + (n-1)(\varphi - \theta\varphi')\right\}(z+\varphi')\mathfrak{L}(z+\varphi') + \frac{(n-1)\theta(z+\varphi')^2}{v'+2} + K(z+\varphi'), \quad (v'+1=0);\\
H &= \left\{\frac{\partial v}{\partial x} + (n-1)(\varphi - \theta\varphi')\right\}\frac{z+\varphi'}{v'+1} + (n-1)\theta(z+\varphi')^2\mathfrak{L}(z+\varphi') + K(z+\varphi')^2, \quad (v'+2=0)
\end{aligned}\right.$$

et la relation 32 donne

$$uz + g - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Hu'}{z+\varphi'}, \qquad \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{Hu'}{z+\varphi'}\right) = u'z - \frac{\partial u'}{\partial x}. \tag{35}$$

La dérivée par rapport à θ de $\dfrac{Hu'}{z+\varphi'}$ doit être du premier degré en z.

Ce n'est possible pour la première valeur de H que si K est nul; g est alors du premier degré en z, et c'est le cas que nous venons de traiter; pour la seconde valeur de H, on doit avoir

$$\frac{\partial v}{\partial x} + (n-1)(\varphi - \theta\varphi') = 0$$

et g est encore du premier degré; pour la troisième valeur, on tombe sur une impossibilité.

Il n'y a donc aucune équation de la forme $s = p\theta(x, y, z, q)$ qui soit de la première classe si $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$ n'est pas nul.

CHAPITRE II

[**13**] Nous n'avons réservé, au cours de l'étude précédente, que les deux cas où

$$\text{(I)}\quad s = f(x, y, q); \qquad \text{(II)}\quad s = p\theta(y, z, q).$$

Dans les deux cas, il y a une intégrale intermédiaire du premier ordre, qui est

$$\varphi(x, y, q) = \mathrm{Y}(y) \quad \text{où } \varphi \text{ est une solution de } \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + f\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0,$$

ou

$$\psi(y, z, q) = \mathrm{Y}(y) \quad \text{où } \psi \text{ est une solution de } \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} + \theta\frac{\partial\psi}{\partial q} = 0.$$

Toute équation de la forme $s = f(x, y, z, p, q)$ qui admet une intégrale intermédiaire du premier ordre se ramène donc à l'une des formes (I) ou (II) si elle est de la première classe. Il nous reste à étudier ces deux types d'équations.

[**14**] *Étude des équations* $s = f(x, y, q)$. — Nous poserons :

$$\mathrm{F}_1(u) = \frac{\partial u}{\partial x} + f\frac{\partial u}{\partial q}, \qquad \mathrm{F}_n(u) = \mathrm{F}\left\{\mathrm{F}_{n-1}(u)\right\}.$$

On a alors

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial q} = \mathrm{F}_1(f).$$

Supposons que

$$\left(\frac{d^p f}{dx^p}\right) = \mathrm{F}_p(f).$$

On a

$$\left(\frac{d^{p+1} f}{dx^{p+1}}\right) = \frac{\partial \mathrm{F}_p}{\partial x} + f\frac{\partial \mathrm{F}_p}{\partial q} = \mathrm{F}\big(\mathrm{F}_p(f)\big) = \mathrm{F}_{p+1}(f).$$

Il y aura une involution d'ordre n s'il existe une fonction $\psi(x, y, z, p_1 \ldots p_{n-1})$ telle que

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + q\frac{\partial\psi}{\partial z} + f\frac{\partial\psi}{\partial p} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_2} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial p_{n-1}}\left(\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\right) + \left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right) = 0,$$

c'est-à-dire si

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}+q\frac{\partial\psi}{\partial z}+f\frac{\partial\psi}{\partial p}+F_1\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\ldots+F_{n-2}\frac{\partial\psi}{\partial p_{n-1}}+F_{n-1}=0.$$

Les coefficients des dérivées de ψ ne dépendent que de x, y, q. En désignant par des accents les dérivées par rapport à p_{n-1}, on a donc

$$\frac{\partial\psi'}{\partial y}+q\frac{\partial\psi'}{\partial z}+f\frac{\partial\psi'}{\partial p}+\ldots+F_{n-2}\frac{\partial\psi'}{\partial p_{n-1}}=0.$$

Si n est l'ordre minimum d'involution, cette condition exige que ψ' soit une fonction X_{n-1} de x seul. Donc

$$\psi=p_{n-1}X_{n-1}+\psi_1(x, y, z\ldots p_{n-2}).$$

Supposons que, d'une façon générale,

$$\psi=p_{n-1}X_{n-1}+\ldots+p_K X_K+\psi_K(x, y, z\ldots p_{K-1}).$$

On doit avoir :

$$\frac{\partial\psi_K}{\partial y}+q\frac{\partial\psi_K}{\partial z}+\ldots+F_{K-2}\frac{\partial\psi_K}{\partial p_{K-1}}+X_K F_{K-1}+\ldots+X_{n-1}F_{n-2}+F_{n-1}=0.$$

Si on représente par des accents les dérivées par rapport à p_{K-1}, on a

$$\frac{\partial\psi'_K}{\partial y}+q\frac{\partial\psi'_K}{\partial y}+\ldots+F_{K-2}\frac{\partial\psi'_K}{\partial p_{K-1}}=0,$$

ψ' est donc une fonction X_{K-1} de x et ψ_k est encore linéaire en p_{K-1}. On a donc nécessairement

$$\Psi=X_{n-1}p_{n-1}+X_{n-2}p_{n-2}+\ldots+X_1 p_1+X_0 z+g(x, y)$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $p_n+\psi=0$ soit en involution avec la proposée s'écrit :

$$\text{A)}\quad \frac{\partial g}{\partial y}+qX_0+fX_1+F_1X_2+\ldots+F_{n-2}X_{n-1}+F_{n-1}=0.$$

C'est là une équation aux dérivées partielles d'ordre n, que doit vérifier la fonction f : elle ne peut en vérifier aucune autre de même forme et d'ordre inférieur, si l'invariant d'ordre minimum est d'ordre n.

[**15**] Pour intégrer l'équation A, nous démontrerons d'abord les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Si on a, f étant une fonction de u et de v,*

$$F_K(f) + A_K(u)\,F_{K-1}(f) + \ldots + A_2(u)\,F_1(f) + A_1(u)f + A_0(u)\,v = \sum_1^h l_i(\varphi)\,B_i(u),$$

φ étant une fonction qui vérifie la relation $F_1(\varphi) = 0$, on a aussi

$$F_{K-1}(f) + C_{K-1}(u)\,F_{K-2}(f) + \ldots + C_1(u)f + C_0(u)\,v = \sum_1^h l_i D_i(u) + l_{h+1}(\varphi)\,D_{h+1}(u).$$

Remarquons en effet que pour que l'on ait identiquement :

$$U \left\{ F_K(f) + A_K F_{K-1}(f) + \ldots + A_1 f + A_0 v \right\}$$
$$\equiv F \left\{ UF_{K-1}(f) + E_{K-1}(u)\,F_{K-2}(f) + \ldots + E_0(u)\,v \right\},$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$E_{K-1} = A_K U - U', \quad E'_{K-1} + E_{K-2} = A_{K-1} U \ldots, \quad E'_1 + E_0 = UA_1, \quad E'_0 = UA_0.$$

D'où l'on tire immédiatement :

$$0 = UA_0 - [UA_1]' + \ldots + (-1)^i [UA_i]^{(i)} + (-1)^{i+1} [UA_{i+1}]^{(i+1)} + \ldots + (-1)^K [UA_K - U']^{(K)}.$$

Prenons pour U une solution autre que zéro de cette équation différentielle et posons

$$\psi = UF_{K-1} + E_{K-1} F_{K-2} + \ldots + E_0 v.$$

La relation donnée s'écrit

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} + f\frac{\partial\psi}{\partial v} = U \sum_1^h B_i l_i(\varphi).$$

Donc

$$\psi = l_{h+1}(\varphi) + \sum_1^h l_i(\varphi) \int UB_i(u)\,du.$$

En remplaçant dans cette formule ψ par sa valeur et divisant par U, on obtient bien une relation de la forme annoncée.

Théorème II. — *L'intégrale générale de l'équation*

$$F_{n-1}(f) + A_{n-1}(u)\,F_{n-2}(f) + \ldots + A_1 f + A_0 v = B(u) \tag{4}$$

s'obtient en éliminant φ *entre les deux équations*

$$f = u'_1 l_1(\varphi) + \ldots + u'_n l_n(\varphi) + u'_{n+1}, \tag{5}$$

$$v = u_1 l_1(\varphi) + \ldots + u_n l_n(\varphi) + u_{n+1}, \tag{6}$$

les accents désignant les dérivées par rapport à u.

Si la fonction f ne vérifie aucune équation de même forme et d'ordre inférieur, les nombres l_i sont n fonctions linéairement indépendantes de φ; les nombres u_1, $u_2, \ldots, u_{n-1}$ forment un système fondamental d'intégrales de l'équation

$$E \equiv U^{(n)} + A_{n-1} U^{(n-1)} + \ldots + A_1 U' + A_0 U = 0, \tag{7}$$

u_n étant une solution particulière de l'équation $E = B(u)$.

En effet, le théorème I donne, de proche en proche,

$$F_{n-2}(f) + B_{n-2}F_{n-3}(f) + \ldots + B_0 v = C(u) + C_1 l_1(\varphi),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_1(f) + D_1 f + v D_0 = E_1 l_1 + \ldots + E_{n-2} l_{n-2} + E(u),$$
$$f + vG_1 = H_1 l_1 + \ldots + H_{n-1} l_{n-1} + H(u).$$

$$v = \alpha_1(u)\,l_1 + \alpha_2(u)\,l_2 + \ldots + \alpha_n l_n + \alpha(u); \tag{8}$$

v est donc certainement de la forme 8, les fonctions $l_1 l_2 \ldots l_n$ étant arbitraires.

Mais on a alors :

$$f = -\frac{\partial\varphi}{\partial u} : \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \alpha'(u) + \sum_1^n \alpha'_i l_i(\varphi) \quad \text{et} \quad F_j(f) = \alpha^{(j+1)}(\varphi) + \sum_1^n \alpha_i^{(j+1)} l_i(\varphi).$$

En écrivant que ces nombres vérifient l'équation 4 quelles que soient les fonctions arbitraires l_i, on a :

$$\alpha^n(u) + A_{n-1}\alpha^{n-1}(u) + \ldots + A_0\alpha(u) = B(u)$$

et

$$\alpha_i^{(n)}(u) + A_{n-1}\alpha_i^{(n-1)}(u) + \ldots + A_0\alpha_i(u) = 0;$$

on retrouve bien toutes les propriétés annoncées.

L'intégration de l'équation A est alors immédiate et on en conclut que *toutes les équations de la forme* $s = f(x, y, q)$, *qui admettent un invariant d'ordre supérieur à* 2, *s'obtiennent en éliminant* φ *entre les deux relations :*

$$q = \xi_1(x)\, l_1(y, \varphi) + \ldots + \xi_{n-1}(x)\, l_{n-1}(y, \varphi) + \xi_n(x)\, l_n(y, \varphi) + \xi_{n+1}(x),$$
$$s = l_1 \frac{d\xi_1}{dx} + \ldots + l_n \frac{d\xi_n}{dx} + \frac{d\xi_{n+1}}{dx}.$$

Un changement d'inconnue nous montre qu'on peut se borner au cas où ξ_{n+1} est nul et on peut poser $l_n(y, \varphi) = \varphi$, d'après la façon dont φ est défini.

Comme $\varphi = \mathrm{Y}$ est une intégrale intermédiaire, on en conclut que l'intégrale générale des équations précédentes est donnée par la formule

$$z = \mathrm{X}(x) + \xi_1(x) \int l_1(y, \mathrm{Y})\, dy + \ldots + \xi_{n-1}(x) \int l_{n-1}(y, \mathrm{Y})\, dy + \xi_n(x) \int \mathrm{Y}\, dy.$$

[**16**] Il est facile d'en déduire toutes les équations qui admettent une intégrale entièrement explicite. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le système de Pfaff à n équations et à $n + 2$ variables

$$\text{S)} \quad a_i = dy_i - l_i(y, t)\, dy = 0, \qquad i = 1, 2 \ldots, n$$

admette une intégrale explicite; il faut et suffit qu'il soit un système spécial (¹).

On a

$$a'_i = da_i(\delta) - \delta a_i(d) = \frac{\partial l_i}{\partial t}(dy\,\delta t - dt\,\delta y).$$

Toutes les fois que $\dfrac{\partial l_i}{\partial t}$ est nul, une des intégrales à calculer se calcule immédiatement. Nous pouvons donc supposer $\dfrac{\partial l_1}{\partial t} \neq 0$. Le premier dérivé de S est alors

$$\text{S')} \quad a'_i = a_i - a_1 \mathrm{H}'_i \quad \text{où} \quad \mathrm{H}'_i = \frac{\partial l_i}{\partial t} : \frac{\partial l_1}{\partial t}, \qquad i = 2, \ldots, n.$$

On a

$$(a'_i)' = \frac{\partial \mathrm{H}'_i}{\partial y}(dy\,\delta y_1 - dy_1\,\delta y) + \frac{\partial \mathrm{H}'_i}{\partial t}(dt\,\delta y_1 - dy_1\,\delta t).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le second dérivé S″ comprenne $n - 2$ équations est que le rapport $\dfrac{\partial \mathrm{H}'_i}{\partial y} : \dfrac{\partial \mathrm{H}'_i}{\partial t}$ soit indépendant de i.

(¹) Voir CARTAN, *Bulletin de la Société Mathématique*, t. XLII, 1914, pp. 12-48.

Si $\dfrac{\partial H^1_i}{\partial t}$ était nul, on aurait $l_i = Yl_1 + Y_1$. Nous supposons qu'il n'y a entre les fonctions l aucune relation de cette forme. On peut alors poser

$$\frac{\partial H^1_i}{\partial y} : \frac{\partial H^1_i}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial y} : \frac{\partial A}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} A(y, t) \neq 0.$$

Par suite

$$\frac{\partial l_i}{\partial t} : \frac{\partial l_1}{\partial t} = \varphi_i(A).$$

En prenant A comme variable t, on a une série de conditions nécessaires qui s'écrivent :

(1) $$\frac{\partial l_i}{\partial t} : \frac{\partial l_1}{\partial t} = H^1_i(t), \qquad i = 2, \ldots, n.$$

Dans ce cas, on a d'ailleurs,

$$(a^1_i)' = \frac{dH^1_i}{dt}(dt\,\delta y_1 - dy_1\,\delta t).$$

On a évidemment

$$(a^1_2)' = \frac{dH^1_2}{dt}(dt\,\delta y_1 - dy_1\,\delta t)$$

et si on pose

$$H^2_i = \frac{dH^1_i}{dt} : \frac{dH^1_2}{dt}, \qquad \frac{dH^1_2}{dt} \neq 0,$$

on a identiquement

$$(a'_i)' = (a^1_2)'\,H^2_i.$$

Le second dérivé est alors

$$S'')\quad a^2_i = a^1_i - a^1_2 H^2_i, \qquad i = 3, \ldots, n.$$

Supposons d'une façon générale qu'on pose

$$H^K_i = \frac{dH^{K-1}_i}{dt} : \frac{dH^{K-1}_K}{dt}, \qquad \frac{dH^{K-1}_K}{dt} \neq 0,$$

que l'on ait

$$(a^{K-1}_i)' \equiv (a^{K-1}_K)'\,H^K_i$$

et que le K^ième^ dérivé soit

$$S^K)\quad a^K_i = a^{K-1}_i - a^{K-1}_K H^K_i, \qquad i = K+1, \ldots, n.$$

La loi qui donne les nombres H montre qu'ils sont des fonctions de t seul. On a donc

$$(a_i^{\kappa})' = \frac{d\mathrm{H}_i^{\kappa}}{dt}\left\{ a_{\kappa}^{\kappa-1}(d)\,\delta t - a_{\kappa}^{\kappa-1}(\delta)\,dt \right\}.$$

Par suite, le $(\mathrm{K}+1)^{\text{ième}}$ dérivé est

$$\mathrm{S}^{(\kappa+1)})\quad a_i^{\kappa+1} \equiv a_i^{\kappa} - a_{\kappa+1}^{\kappa}\,\mathrm{H}_i^{\kappa+1}, \qquad i = \mathrm{K}+2, \ldots, n,$$

si on pose encore

$$\mathrm{H}_i^{\kappa+1} = \frac{d\mathrm{H}_i^{\kappa}}{dt} : \frac{d\mathrm{H}_{\kappa+1}^{\kappa}}{dt}.$$

On a d'ailleurs

$$(a_{\kappa+1}^{\kappa})' = \frac{d\mathrm{H}_{\kappa+1}^{\kappa}}{dt}\left\{ a_{\kappa}^{\kappa-1}(d)\,\delta t - a_{\kappa}^{\kappa-1}(\delta)\,dt \right\}$$

et par conséquent

$$(a_i^{\kappa})' \equiv (a_{\kappa+1}^{\kappa})'\,\mathrm{H}_i^{\kappa+1}.$$

Il en résulte que chaque nouveau système dérivé comprend une équation de moins que le précédent et, partant, les conditions nécessaires (1) sont aussi suffisantes pour que le système soit spécial.

Nous avons supposé $\dfrac{d\mathrm{H}_{\kappa}^{\kappa-1}}{dt} \neq 0$. S'il n'en est pas ainsi,

$$\mathrm{H}_{\kappa}^{\kappa-1} = \frac{d\mathrm{H}_{\kappa}^{\kappa-2}}{dt} : \frac{d\mathrm{H}_{\kappa}^{\kappa-2}}{dt} = \mathrm{C}_1$$

et

$$\mathrm{H}_{\kappa}^{\kappa-2} = \mathrm{C}_1\mathrm{H}_{\kappa-1}^{\kappa-2} + \mathrm{C}_2,$$

on en tire

$$\mathrm{H}_{\kappa}^{\kappa-3} = \mathrm{C}_1\mathrm{H}_{\kappa-1}^{\kappa-3} + \mathrm{C}_2\mathrm{H}_{\kappa-2}^{\kappa-3} + \mathrm{C}_3.$$

Comme le dénominateur de H^p_i ne dépend que de l'indice supérieur et que celui-ci est toujours le même pour les nombres H qui figurent dans l'égalité précédente, on aura encore

$$\mathrm{H}_{\kappa}^{\kappa-4} = \mathrm{C}_1\mathrm{H}_{\kappa-1}^{\kappa-4} + \mathrm{C}_2\mathrm{H}_{\kappa-2}^{\kappa-4} + \mathrm{C}_3\mathrm{H}_{\kappa-3}^{\kappa-4} + \mathrm{C}_4$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\mathrm{H}_{\kappa}^{1} = \mathrm{C}_1\mathrm{H}_{\kappa-1}^{1} + \ldots + \mathrm{C}_{\kappa-2}\mathrm{H}_2^{1} + \mathrm{C}_{\kappa-1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial l_{\kappa}}{\partial t} = C_1 \frac{\partial l_{\kappa-1}}{\partial t} + \ldots + C_{\kappa-2}\frac{\partial l_2}{\partial t} + C_{\kappa-1}\frac{\partial l_1}{\partial t} + C_{\kappa},$$

d'où

$$l_{\kappa} = C_1 l_{\kappa-1} + C_2 l_{\kappa-2} + \ldots + C_{\kappa-1} l_1 + C_{\kappa} t + Y_{\kappa+1}.$$

L'intégrale $I_{\kappa} = \int l_{\kappa} dy$ se ramène au calcul des intégrales d'indice inférieur et à celui de $\int t\,dy$. Il suffit de poser $t = \frac{dY}{dy}$ pour ramener le calcul de I_{κ} à celui de $I_{\kappa-1} \ldots I_1$. On est donc en droit de supposer, dans le cas général, que $\frac{dH_{\kappa}^{\kappa-1}}{dt}$ n'est pas nul.

[**17**] Nous écrivons les conditions trouvées sous la forme symétrique

$$\frac{\frac{\partial l_1}{\partial t}}{\varphi_1(t)} = \ldots = \frac{\frac{\partial l_i}{\partial t}}{\varphi_i(t)} = f(y, t).$$

On est ramené aux formules précédentes en posant $\varphi_1(t) = 1$.

Proposons-nous d'abord d'expliciter les fonctions l_i. On a

$$l_1 = \int \varphi_1 f\,dt, \qquad l_i = \int \varphi_i f\,dt;$$

y étant considéré comme une constante dans les intégrations. Si nous posons

$$f\varphi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial t}(y, t),$$

on aura

$$l_1 = \psi_1, \qquad l_i = \int \frac{\varphi_i}{\varphi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial t}\,dt = H^1_i \psi_1 \frac{dH^1_i}{dt}\,dt - \int \psi_1 \frac{dH^1_i}{dt}\,dt, \qquad i = 2, \ldots, n.$$

Posons, en désignant par des accents les dérivées par rapport à t,

$$\psi_1 (H^1_2)' = \psi'_2.$$

Il vient

$$l_1 = \frac{\psi'_2}{(H^1_2)'}, \qquad l_2 = \frac{H^1_2 \psi'_2}{(H^1_2)'} - \psi_2, \qquad f = \frac{1}{\varphi_1}\left(\frac{\psi'_2}{(H^1_2)'}\right)';$$

$$l_i = \frac{H^1_i}{(H^1_2)'}\psi'_2 - \int \psi'_2 \frac{(H^1_i)'}{(H^1_2)'}\,dt = \frac{H^1_i}{(H^1_2)'}\psi'_2 - \psi_2 H^2_i + \int \psi_2 (H^2_i)'\,dt$$

pour $i = 3, \ldots n$. Si on pose encore $(H^2_3)'\psi_2 = \psi'_3$, on pourra recommencer le même calcul. Supposons que l'on ait

$$(2)\qquad \begin{cases} f = a_{01}\psi'_K + \ldots + a_{0K}\psi_K^{(K)}, \\ l_j = a_{j0}\psi_K + a_{j1}\psi'_K + \ldots + a_{jK}\psi_K^{K-1}, \qquad j \leqslant K; \\ l_i = a_{i0}\psi_K + \ldots + a_{iK}\psi_K^{K-1} - (-1)^K \int \psi_K (H_i^K)'\, dt, \qquad K < i < n. \end{cases}$$

Posons

$$\psi_K (H^K_{K+1})' = \psi'_{K+1};$$

f et l_j, pour $j \leqslant K$, reprendront la même forme avec un terme de plus et si les anciens coefficients a_{iK} ne dépendent que des fonctions φ, il en sera de même des nouveaux. Pour $j = K + 1$, on obtiendra une expression linéaire de même forme et si on a $K + 1 < i < n$, la partie linéaire de l_i subira la même modification que celle décrite pour les nombres l_j; l'intégrale deviendra

$$-(-1)^K \int \psi'_{K+1} H_i^{K+1}\, dt = -(-1)^K \psi_{K+1} H_i^{K+1} - (-1)^{K+1} \int \psi_{K+1} (H_i^{K+1})'\, dt.$$

On pourra donc continuer le calcul que nous indiquons jusqu'à ce que toutes les intégrales aient disparu et on arrivera à des formules de la forme :

$$f = \alpha_{01}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \alpha_{02}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \ldots + \alpha_{0\,n+1}\frac{\partial^{n+1}\psi}{\partial y \partial t^n} = \sum_1^{n+1} \alpha_{0K}\frac{\partial^K \psi}{\partial y \partial t^{K-1}},$$

$$l_i = \alpha_{i1}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \alpha_{i2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \ldots + \alpha_{in}\frac{\partial^n \psi}{\partial y \partial t^{n-1}} = \sum_1^{n} \alpha_{iK}\frac{\partial^K \psi}{\partial y \partial t^{K-1}},$$

où $\alpha_{01} = 0$, où les nombres α_{ik} sont des fonctions de t qui ne dépendent que des fonctions φ_i et où on a remplacé la dernière fonction ψ_n par $\frac{\partial \psi}{\partial y}(y, t)$. Cette fonction étant arbitraire, on a identiquement

$$\frac{\partial l_i}{\partial t} = \varphi_i f,$$

c'est-à-dire

$$\sum_1^{n+1} \frac{\partial^K \psi}{\partial y \partial t^{K-1}} (\alpha'_{iK} + \alpha_{i\,K-1}) = \varphi_i \sum_1^{n+1} \alpha_{0K}\frac{\partial^K \psi}{\partial y \partial t^{K-1}}$$

et par suite :

$$\alpha'_{iK} + \alpha_{i\,K-1} = \varphi_i \alpha_{0K}.$$

Si donc on pose

$$L_i = \sum_{1}^{n} \alpha_{i\kappa} \frac{\partial^{\kappa-1}\psi}{\partial t^{\kappa-1}}, \qquad F = \sum_{1}^{n+1} \alpha_{0\kappa} \frac{\partial^{\kappa-1}\psi}{\partial t^{\kappa-1}},$$

on a

$$\frac{\partial L_i}{\partial t} = \sum_{1}^{n+1} \frac{\partial^{\kappa-1}\psi}{\partial t^{\kappa-1}} (\alpha'_{i\kappa} + \alpha_{i\,\kappa-1}) = \sum_{1}^{n+1} \varphi_i \alpha_{0\kappa} \frac{\partial^{\kappa-1}\psi}{\partial t^{\kappa-1}} = \varphi_i F.$$

[**18**] Il est dès lors facile de calculer les intégrales $I_i = \int l_i(y, t)\, dy$ dans lesquelles t est une fonction arbitraire de y, ou y, une fonction arbitraire de t. On a en effet :

$$I_i = \int l_i\, dy = \int \frac{\partial L_i}{\partial y} dy = L_i - \int \frac{\partial L_i}{\partial t} dt = L_i - \int \varphi_i(t)\, F(t, y)\, dt$$

et il faut expliciter les expressions

$$G_i = \int \varphi_i F\big(t, \theta(t)\big)\, dt,$$

θ étant une fonction arbitraire de t.

Je peux toujours remplacer la fonction arbitraire θ par une fonction arbitraire $\theta_1(t)$ telle que

$$\varphi_1(t)\, F(t, \theta) = \theta'_1.$$

J'aurai alors

$$G_1 = \theta_1, \qquad G_i = \int \theta'_1 H^1{}_i\, dt = \theta_1 H^1{}_i - \int \theta_1 (H^1{}_i)'\, dt.$$

Je poserai

$$\theta_1 (H^1{}_2)' = \theta'_2;$$

F, G_1 et G_2 seront alors exprimés en fonction de $\theta_2, \theta'_2, \theta''_2$ et par un calcul exactement semblable à celui du n° 17, j'obtiendrai

$$G_i = \alpha_{i1} \tau(t) + \dots + \alpha_{in} \tau^{(n-1)},$$

la fonction θ étant reliée à la fonction arbitraire $\tau(t)$ par l'équation implicite

$$F(\theta, t) = \alpha_{01} \tau(t) + \dots + \alpha_{0\,n+1} \tau^{(n)}.$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{I}_i = \mathrm{L}_i(\theta, t) - \sum_1^n \alpha_{i\kappa}\tau^{(\kappa-1)} = \sum_1^n \alpha_{i\kappa}\left(\frac{\partial^{\kappa-1}\psi(y, t)}{\partial t^{\kappa-1}} - \tau^{(\kappa-1)}\right) = \sum_1^n \alpha_{i\kappa}\frac{\partial^{\kappa-1}(\psi-\tau)}{\partial t^{\kappa-1}},$$

y étant considéré comme une constante dans les dérivations et remplacé dans leur résultat par une fonction de t définie par l'équation

$$\sum_1^{n+1} \alpha_{0\kappa}\frac{\partial^{\kappa-1}(\psi-\tau)}{\partial t^{\kappa-1}} = 0,$$

y est alors exprimé au moyen d'une fonction arbitraire τ de t; et z au moyen de x, d'une fonction arbitraire de x; de y, de t et d'une fonction arbitraire de t, par des formules débarrassées de tout signe d'intégration.

[**19**] *Étude des équations* $s = p\theta(y, z, q)$. — Nous poserons encore

$$\mathrm{F}_0(u) = \theta, \qquad \mathrm{F}_1(u) = \frac{\partial u}{\partial z} + \theta\frac{\partial u}{\partial q}, \qquad \mathrm{F}_n(u) = \mathrm{F}_1\{\mathrm{F}_{n-1}(u)\}.$$

Si u ne contient que y, z, q, on aura

$$\frac{d\mathrm{F}_i(u)}{dx} = p\frac{\partial \mathrm{F}_i}{\partial z} + p\theta\frac{\partial \mathrm{F}_i}{\partial q} = p\,\mathrm{F}_{i+1}(u).$$

Par suite

$$\frac{df}{dx} = p_2\theta + p\left(p\frac{\partial\theta}{\partial z} + s\frac{\partial\theta}{\partial q}\right) = p_2\theta + p^2\mathrm{F}_1(\theta).$$

Supposons que

$$\frac{d^{\kappa-1}f}{dx^{\kappa-1}} = \sum_0^{\kappa-1} a_\kappa^i\,\mathrm{F}_i(\theta)$$

avec

$$a_\kappa^0 = p_\kappa, \qquad a_\kappa^{\kappa-1} = p_1^\kappa,$$

on aura

$$\frac{d^\kappa f}{dx^\kappa} = p_{\kappa+1}\theta + \ldots + \mathrm{F}_i\left(p a_\kappa^{i-1} + \frac{da_\kappa^i}{dx}\right) + \ldots + p^{\kappa+1}\mathrm{F}_\kappa = \sum_0^\kappa a_{\kappa+1}^i\mathrm{F}_i$$

avec

$$a_{\kappa+1}^i = p a_\kappa^{i-1} + \frac{da_\kappa^i}{dx}.$$

Si a_{K}^i est un polynôme homogène de degré $i+1$, d'ordre $\text{K}-i$, isobare et de poids K par rapport aux variables p_j, il est clair que $a_{\text{K}+1}^i$ sera aussi un polynôme homogène de degré $i+1$, d'ordre $\text{K}+1-i$ et de poids $\text{K}+1$. Comme la propriété est exacte pour $\dfrac{df}{dx} = a^0{}_2\theta + a^1{}_2\text{F}_1(\theta)$, elle est toujours vraie.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un invariant d'ordre n $\varphi(x, y, z, p_1 \dots p_n)$ s'écrit alors :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi}{\partial z} + p\text{F}_0\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{\text{K}}}\sum_0^{\text{K}+1} a_{\text{K}}^i \text{F}_i(\theta) + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\sum_0^{n-1} a^i{}_n \text{F}_i(\theta) = 0$$

ou encore

$$\text{C}_{n-1}\text{F}_{n-1} + \dots + \text{C}_i\text{F}_i + \dots + \text{C}_0\text{F}_0 + q\text{C} + \text{D} = 0 \tag{4}$$

avec

$$\text{D} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad \text{C} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \qquad \text{C}_i = \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}a^i{}_n + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{i+1}}a^i{}_{i+1}.$$

La relation 4 montre qu'il y a une relation linéaire à coefficients fonctions de y et de z [1] entre les nombres F_i : donnons en effet aux variables p_j des valeurs fixes. Les nombres $a^i{}_n$, φ et toutes ses dérivées ne dépendent plus que de y et de z. Les nombres F_i ne dépendent pas des variables p_j. Il suffit de désigner par D, C, C_i les fonctions de y et de z ainsi obtenues pour voir qu'il existe entre les nombres F_i une relation de la forme 4 où les coefficients ne dépendent que de y et de z. Nous écrivons cette relation :

$$\text{F}_{\text{K}}(\theta) + \text{A}_{\text{K}-1}\text{F}_{\text{K}-1}(\theta) + \dots + \text{A}_0\text{F}_0 + \text{A}q = \text{B}(y, z). \tag{5}$$

Si nous supposons que la fonction θ ne vérifie aucune équation de même forme et d'ordre inférieur. le théorème II du n° 15 nous montre que toutes les équations correspondantes s'obtiennent en éliminant ψ entre les deux relations

$$\left\{\begin{aligned} q &= \sum_1^{\text{K}} l_i(y, \psi)\,\text{Z}_i(y, z) + \text{Z}_{\text{K}+1}(y, z), \\ \theta = \frac{s}{p} &= \sum_1^{\text{K}} l_i(y, \psi)\frac{\partial \text{Z}_i}{\partial z} + \frac{\partial \text{Z}_{\text{K}+1}}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

---

[1] x est en effet un invariant du même système et on peut le supposer constant.

Faisons le changement d'inconnue $z = h(y, z')$, la fonction h vérifiant la relation

$$\frac{\partial h}{\partial y} = Z_{K+1}(y, h),$$

on a

$$\frac{\partial h}{\partial z'} q' = \sum l_i Z_i(y, h) \quad \text{c.-à-d.} \quad q' = \sum l_i \zeta_i(y, z') \quad \text{avec} \quad \zeta_i = \frac{Z_i(y, h)}{\dfrac{\partial h}{\partial z'}}.$$

Remarquons que l'on a alors

$$\frac{\partial h}{\partial z'} \frac{\partial Z_i}{\partial z} = \zeta_i \frac{\partial^2 h}{\partial z'^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial z'}\right)^2 \frac{\partial \zeta_i}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z'} = \frac{\partial Z_{K+1}}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z'}.$$

On a alors

$$\frac{s'}{p'} + q' \frac{\partial}{\partial z'} \mathfrak{L} \frac{\partial h}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial y} \mathfrak{L} \frac{\partial h}{\partial z'} = \sum l_i(y, \varphi) \frac{\partial Z_i}{\partial z}(y, h) + \frac{\partial Z_{K+1}}{\partial z},$$

c'est-à-dire

$$\frac{s'}{p'} = \sum l_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial z'}.$$

On peut donc garder les formules 6 en y faisant $Z_{K+1} = 0$.

Remplaçons alors dans la condition (4) q et θ par leur valeur. On a

$$F_1(\varphi) = 0, \qquad F_1(\theta) = \sum l_i \frac{\partial^2 Z_i}{\partial z^2}, \qquad \ldots, \qquad F_{n-1}(\theta) = \sum l_i \frac{\partial^n Z_i}{\partial z^n}$$

et par conséquent

$$C_{n-1} \sum_1^K l_i \frac{\partial^n Z_i}{\partial z_n} + \ldots + C_0 \sum_1^K l_i \frac{\partial Z_i}{\partial z} + C \sum_1^K l_i Z_i + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Le théorème II montre que les fonctions l_i ne peuvent être reliées par aucune relation linéaire de cette forme. On doit donc avoir $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ et

(6) $$C_{n-1} \frac{\partial^n Z_i}{\partial z^n} + \ldots + C_0 \frac{\partial Z_i}{\partial z} + C Z_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, K.$$

Il y a au moins une fonction Z_i qui n'est pas nulle[1]. Considérons l'équation

$$s = pq\frac{Z'_i}{Z_i} \tag{7}$$

où les accents désignent les dérivées par rapport à z. On a dans ce cas

$$F_1(\theta) = q\frac{Z_i''}{Z_i}, \qquad \ldots, \qquad F_h = q\frac{Z_i^{(h+1)}}{Z_i}$$

et la condition 6 exprime que l'équation 7 admet un invariant d'ordre n de la forme $\varphi(z, p, p_1 \ldots p_n)$. Mais cette équation est de la forme $s = pq\dfrac{\partial \mathcal{L}b(y, z)}{\partial z}$ qui a été complètement étudié par M. Gau dans sa Thèse (pp. 108-117). Elle ne peut admettre d'invariants que de l'ordre 2 ou 3. Nous n'avons donc à étudier que le cas où $n = 3$, $K = 2$, les autres ayant été complètement étudiés par M. Goursat (*loc. cit.*).

Posons donc

$$F_2(\theta) = bF_1(\theta) + \beta q + \alpha.$$

La condition 4 donne alors immédiatement

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial p_3}p_1^3 = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial p_3}p_1^3 = 0,$$

$$p\frac{\partial\varphi}{\partial p} + p_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} + (p_3 + ap_1^3)\frac{\partial\varphi}{\partial p_3} = 0,$$

$$p\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_3}(3p_2 + bp^2) = 0.$$

Ce système n'admet de solutions que si

$$b = 0, \qquad a = -2c(y, z), \qquad \beta = -\frac{\partial c}{\partial z}, \qquad \alpha = -\frac{\partial c}{\partial y}$$

et l'invariant correspondant est

$$u = \frac{p_3}{p} - \frac{3}{2}\frac{p_2^2}{p^2} - cp^2.$$

C'est le même que celui que M. Gau avait trouvé, comme il fallait s'y attendre.

---

[1] M. Goursat a montré que, si $K = 1$, il y a un invariant du second ordre (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. I, 1899, pp. 31-78).

D'ailleurs un changement d'inconnue $Z' = h(y, z)$ montre que, si on pose

$$\frac{\partial h}{\partial z} = e^{\lambda}, \qquad c = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2,$$

on a identiquement

$$e^{2\lambda} F'_2(\theta') = F_2(\theta) + 2c\theta + q\frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial y}.$$

On en conclut que toutes les équations considérées se ramènent à celles pour lesquelles $F_2(\theta)$ est nul. Elles s'obtiennent donc en éliminant φ entre les deux relations

$$q = z^2 l(y, \varphi) + zm(y, \varphi), \qquad \frac{s}{p} = 2zl(y, \varphi) + m(y, \varphi).$$

[**20**] Ces équations admettent l'intégrale intermédiaire $\varphi = Y$ et la solution générale sera l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z} m(y, Y) + l(y, Y) = 0.$$

Si m ne dépendait pas de Y, on pourrait l'écrire

$$Y_1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{z}\right) + Y'_1 \frac{1}{z} + \lambda(y, Y) = 0,$$

d'où

$$\frac{Y_1}{z} + \int \lambda(y, Y)\, dy = 0$$

et en posant $\lambda(y, Y) = -f'(y)$, on aurait comme intégrale générale

$$\frac{Y_1}{z} = f(y) + g(x);$$

f et g étant deux fonctions arbitraires, Y_1 étant déterminé.

Si m dépend de Y, soit η une fonction arbitraire de y liée à Y par la relation

$$\eta' - \eta m(y, Y) = 0.$$

L'équation à intégrer deviendra alors

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\eta}{z}\right) = \eta \lambda\left(y, \frac{\eta'}{\eta}\right),$$

d'où, après un changement de notations

$$\frac{e^{Y}}{z} = X(x) + \int e^{Y}\lambda(y, Y')\,dy;$$

X et Y étant deux fonctions arbitraires. Il reste à calculer $y_2 = \int e^{Y}\lambda(y, Y')\,dy$.

On a identiquement

$$d\left(y_2 - e^{Y}\frac{\partial\lambda}{\partial Y'}\right) = e^{Y}\left(\left(\lambda - \frac{\partial^2\lambda}{\partial y\,\partial Y'} - Y'\frac{\partial\lambda}{\partial Y'}\right)dy - \frac{\partial^2\lambda}{\partial Y'^2}\,dY'\right).$$

Si $\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial Y'^2} = 0$, on a

$$\lambda = aY' + b, \qquad y_2 = ae^{Y} + \int (b - a')\,e^{Y}dy.$$

On peut supposer $b - a' \neq 0$ et poser $e^{Y} = \dfrac{Y'_1}{b - a'}$; y_2 est alors débarrassé de tout signe $\int$. Dans le cas général, soit $Y' = f(y, u)$ la solution générale de l'équation différentielle

$$\lambda - \frac{\partial^2\lambda}{\partial y\,\partial Y'} - Y'\frac{\partial\lambda}{\partial Y'} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial Y'^2}\frac{dY'}{dy}.$$

On a identiquement

$$\lambda - \frac{\partial^2\lambda}{\partial y\,\partial Y'} - Y'\frac{\partial\lambda}{\partial Y'} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial Y'^2}\frac{\partial f}{\partial y} \tag{8}$$

quels que soient y et u et de plus,

$$d\left(y_2 - e^{Y}\frac{\partial\lambda}{\partial Y'}\right) + e^{Y}\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2\lambda}{\partial Y'^2}\,du = 0, \qquad dY = f\,dy. \tag{9}$$

D'après nos hypothèses, le coefficient de du n'est jamais nul. Posons

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2\lambda}{\partial Y'^2} = A \neq 0, \qquad w = e^{Y}A.$$

On a

$$dY = d\mathfrak{L}w - d\mathfrak{L}A, \qquad \frac{dw}{w} = f\,dy + \frac{\partial\mathfrak{L}A}{\partial u}\,du + \frac{\partial\mathfrak{L}A}{\partial y}\,dy.$$

L'identité 8 dérivée par rapport à u, donne

$$\frac{\partial \mathfrak{L}A}{\partial y} + f \equiv 0.$$

Donc

$$dw = w \frac{\partial \mathfrak{L}A}{\partial u} du.$$

Si nous posons $w = F'(u)$, F étant une fonction arbitraire de u, on a

$$\frac{\partial \mathfrak{L}A}{\partial u} = \frac{F''(u)}{F'(u)}.$$

Cette équation donnera y en fonction de u; en effet $\frac{\partial^2 \mathfrak{L}A}{\partial u \partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u}$ et n'est pas nul.

La relation 9 donne alors

$$y_2 = \frac{\partial \lambda}{\partial Y'}(y, f) \frac{F'(u)}{A(y, f)} = F(u).$$

y et z sont alors calculés au moyen de u par des formules débarrassées de tout signe de quadrature.