ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

LOUIS ROY

Sur les équations générales de la mécanique, le théorème de D'Alembert et celui du travail virtuel

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 12 (1920), p. 93-106

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1920_3_12__93_0>

SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA MÉCANIQUE,

LE THÉORÈME DE D'ALEMBERT ET CELUI DU TRAVAIL VIRTUEL

Par Louis ROY.

INTRODUCTION.

On sait que le théorème du travail virtuel est le suivant :

La condition nécessaire et suffisante de l'équilibre d'un système à liaisons sans frottement indépendantes du temps et soumis à des forces indépendantes du temps, est que le travail des forces directement appliquées soit nul ou négatif pour tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons.

De ce théorème démontré *a priori*, on déduit, ainsi que l'a montré Lagrange, les équations générales de l'équilibre.

Lorsque les liaisons ou les forces directement appliquées dépendent du temps, il n'existe généralement pas de positions d'équilibre; toutefois, de telles positions peuvent exceptionnellement exister. C'est ainsi qu'un point matériel soumis à une force verticale variable, mobile sur une circonférence tournant autour d'un diamètre vertical, est en équilibre absolu aux deux extrémités de ce diamètre. Et alors, on peut se demander si les équations précédentes, appliquées au cas actuel, feront encore connaître ces positions d'équilibre.

D'autre part, dans l'extension du théorème du travail virtuel au cas des liaisons unilatérales, il y a une conclusion par analogie qui n'est pas absolument convaincante (¹). Pour établir la réciproque de ce théorème dans le cas actuel, conformément à la méthode suivie dans le cas des liaisons bilatérales, on est conduit à dé-

(¹) P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. I, 3e édition, p. 279.

montrer que le travail élémentaire des forces de liaisons, dans le déplacement réel d'inégalité qui se produirait si l'équilibre n'avait pas lieu, est nul. Il en est certainement ainsi dans le cas d'un point mobile sur une surface qu'il peut quitter d'un côté, car, si le point quitte la surface, c'est qu'évidemment la réaction de celle-ci est devenue nulle; mais peut-on affirmer, par simple voie d'analogie, qu'il en sera encore de même dans le cas de liaisons absolument quelconques ayant un caractère purement analytique ?

Enfin, on sait qu'on passe de la Statique à la Dynamique par le théorème de d'Alembert; mais la réciproque du théorème du travail virtuel supposant essentiellement les liaisons indépendantes du temps, on peut se demander si l'application de l'équation de d'Alembert à un système dont les liaisons en dépendent conduira bien aux équations effectives de son mouvement.

Ces incertitudes nous paraissent résulter d'un simple défaut de présentation imputable à la tradition créée par Lagrange. Telle est, en effet, l'influence exercée depuis plus d'un siècle par la « Mécanique analytique », qu'on ne s'est pas encore écarté de la voie tracée par son auteur : Lagrange avait fait du principe du travail virtuel le fondement de sa Statique et en avait déduit les équations générales de l'équilibre par les méthodes analytiques régulières qui l'ont immortalisé; ses successeurs, sans rien changer à l'ordre qu'il avait suivi, se sont seulement efforcés de transformer le principe en théorème, sans modifier la place que lui avait fixée Lagrange. Le théorème du travail virtuel, péniblement démontré *a priori*, n'a pas cessé d'être le point de départ des équations générales de la Statique et, le théorème de d'Alembert, celui des équations générales de la Dynamique.

Le présent Mémoire a pour but de montrer qu'on obvie aux inconvénients que nous avons signalés, en exposant la Mécanique analytique sans s'appuyer sur ces deux théorèmes, qui, en réalité, ne sont nullement nécessaires. En effet, de la définition des liaisons sans frottement, on déduit aisément l'expression générale des forces de liaisons, ainsi que les conditions de signes imposées à certains multiplicateurs si certaines liaisons sont unilatérales, ce qui permet d'écrire immédiatement les équations générales du mouvement et, en particulier, celles de l'équilibre. Les équations du mouvement ainsi obtenues, le théorème de d'Alembert consiste en la remarque, alors évidente, qu'on obtiendrait ces mêmes équations, ainsi que les conditions de signes complémentaires, en écrivant que le travail des forces d'inertie et des forces directement appliquées est nul ou négatif pour tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons telles qu'elles sont à l'instant t.

Ce théorème donne alors, comme cas particulier, celui du travail virtuel, dont l'énoncé général doit être selon nous le suivant :

Lorsqu'un système à liaisons sans frottement est en équilibre, le travail des forces directement appliquées est nul ou négatif, pour tous les déplacements virtuels compa-

tibles avec les liaisons telles qu'elles sont à l'instant t ; réciproquement, on obtient les équations d'équilibre et les conditions complémentaires, en écrivant que le travail des forces directement appliquées est nul ou négatif, pour tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons telles qu'elles sont à l'instant t.

Or, pour qu'une solution des équations d'équilibre, satisfaisant aux conditions complémentaires, soit valable, c'est-à-dire corresponde à un état d'équilibre effectif, il faut et il suffit qu'elle fournisse pour les coordonnées des différents points du système des valeurs indépendantes du temps. Il n'en sera qu'exceptionnellement ainsi si les liaisons et les forces directement appliquées dépendent du temps, mais il en sera toujours ainsi dans le cas contraire. Les équations d'équilibre, jointes aux conditions complémentaires, constituant alors les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre, l'énoncé général précédent se réduit à l'énoncé restreint, que nous avons rappelé au début de cette Introduction.

Les théorèmes du travail virtuel et de d'Alembert, ayant ainsi cessé d'être la base de la Mécanique analytique, n'ont plus rien d'indispensable ; leur seul intérêt, devenu purement synthétique, n'est plus que de condenser en une formule unique des équations précédemment établies, au même titre que le théorème d'Hamilton et celui de la moindre contrainte de Gauss.

§ I. — Équations de liaisons et déplacements virtuels.

Considérons un système de n points matériels rapporté à un trièdre fixe trirectangle $Oxyz$ et soumis à des liaisons. Ces liaisons peuvent être de quatre sortes :

I. — Les liaisons holonomes bilatérales s'exprimant par p équations finies entre les $3n$ coordonnées $x_1, y_1, \ldots, z_n$ et le temps t

$$f_i(x_1, y_1, \ldots, z_n, t) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p); \tag{1}$$

II. — Les liaisons non holonomes bilatérales s'exprimant par p_1 équations linéaires entre les dérivées du premier ordre des coordonnées

$$\sum \left(A_i \frac{dx}{dt} + B_i \frac{dy}{dt} + C_i \frac{dz}{dt} \right) + \alpha_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p_1), \tag{2}$$

les sommations s'étendant à tous les points du système et les coefficients A_i, B_i, C_i, α_i étant des fonctions de $x_1, y_1, \ldots, z_n, t$;

III. — Les liaisons holonomes unilatérales s'exprimant par s relations finies analogues aux équations (1)

$$g_i(x_1, y_1, \ldots, z_n, t) \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{3}$$

le signe $=$ correspondant au cas où la liaison est réalisée et le signe $>$ au cas où elle ne l'est pas;

IV. — Les liaisons non holonomes unilatérales s'exprimant par s_1 relations linéaires analogues aux équations (2)

$$\sum \left(L_i \frac{dx}{dt} + M_i \frac{dy}{dt} + N_i \frac{dz}{dt} \right) + \beta_i \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s_1), \tag{4}$$

les coefficients L_i, M_i, N_i, β_i étant des fonctions de $x_1, y_1, \ldots, z_n, t$, le signe $=$ correspondant au cas où la liaison est réalisée et le signe $>$ au cas où elle ne l'est pas.

Cela posé, les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons telles qu'elles sont à l'instant t, les liaisons unilatérales étant supposées toutes réalisées à cet instant, sont de deux sortes : les *déplacements d'égalité* et les *déplacements d'inégalité*.

Les déplacements d'égalité vérifient les équations

$$\sum \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_i}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_i}{\partial z} \delta z \right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p), \tag{5}$$

$$\sum (A_i \delta x + B_i \delta y + C_i \delta z) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p_1), \tag{6}$$

$$\sum \left(\frac{\partial g_i}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g_i}{\partial y} \delta y + \frac{\partial g_i}{\partial z} \delta z \right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{7}$$

$$\sum (L_i \delta x + M_i \delta y + N_i \delta z) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s_1). \tag{8}$$

Ces équations permettent d'exprimer $p + p_1 + s + s_1$ des variations δ, appelées *variations dépendantes*, en fonction des $3n - (p + p_1 + s + s_1)$ autres restées arbitraires et appelées, pour cette raison, *variations indépendantes*.

Les déplacements d'inégalité vérifient les équations (5), (6) et les relations

$$\sum \left(\frac{\partial g_i}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g_i}{\partial y} \delta y + \frac{\partial g_i}{\partial z} \delta z \right) \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{7'}$$

$$\sum (L_i \delta x + M_i \delta y + N_i \delta z) \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s_1), \tag{8'}$$

l'une au moins étant prise avec le signe $>$.

§ II. — Liaisons sans frottement; expressions des forces de liaisons.

Soient X', Y', Z' les composantes de la force de liaison appliquée à un point quelconque $M(x, y, z)$ du système; on dit que les liaisons sont *sans frottement* lorsque le travail virtuel des forces de liaisons est nul pour tous les déplacements d'égalité, et positif ou nul pour tous les déplacements d'inégalité, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$\Sigma(X' \delta x + Y' \delta y + Z' \delta z) = 0, \tag{9}$$

pour tous les déplacements d'égalité et

$$\Sigma(X' \delta x + Y' \delta y + Z' \delta z) \geqq 0, \tag{9'}$$

pour tous les déplacements d'inégalité.

La définition exprimée par la relation (9′) est la généralisation de ce qui se passe lorsqu'un point M, mobile sans frottement sur une surface qu'il peut quitter d'un côté, quitte cette surface dans un déplacement d'inégalité MM′ considéré à l'instant t. Comme le point, par suite de l'impénétrabilité de la surface, ne peut quitter celle-ci que du côté vers lequel est dirigée la force de liaison F′, l'angle que fait MM′ avec F′ est aigu, de sorte que le travail virtuel correspondant de cette force

$$F'.\,MM'\cos(MM',\ F')$$

est nécessairement positif, à moins que F′ ne soit nul.

Ici, une remarque est à faire pour bien fixer les idées : dans la définition générale du travail élémentaire d'une force, il est inutile de spécifier en quel point du déplacement est prise la force, quand celle-ci est continue. Mais, dans le cas particulier qui nous occupe, la force de liaison F′ est discontinue, puisqu'elle passe brusquement d'une valeur finie à zéro, dès que son point d'application quitte la liaison; autrement dit, elle est nulle en tout point du déplacement MM′, sauf à l'origine M de ce déplacement. Il est donc bien entendu que, lorsque nous disons que l'expression précédente est positive ou nulle, F′ est la force de liaison relative à l'origine M du déplacement, et la même convention est à faire pour la relation (9′).

La définition exprimée par les formules (9) et (9′) conduit immédiatement à l'expression des forces de liaisons, par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Écrivons tout d'abord que l'équation (9) est vérifiée pour toutes les variations δ vérifiant les équations (5), (6), (7), (8); en multipliant les équations (5) respectivement par $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_p$; les équations (6) par $-\lambda_1', -\lambda_2', \ldots, -\lambda'_{p_1}$; les équations (7) par $-\mu_1, -\mu_2, \ldots, -\mu_s$; les équations (8) par $-\mu_1', -\mu_2', \ldots, -\mu'_{s_1}$, les $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ étant des paramètres indéterminés, et en ajoutant membre à membre ces $p + p_1 + s + s_1$ équations ainsi que l'équation (9), il vient

$$(10)\qquad \sum\left[\left(X' - \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} - \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x} - \ldots - \mu'_{s_1}L_{s_1}\right)\delta x + \ldots\right] = 0.$$

Il résulte alors d'un raisonnement bien connu que les coefficients des $3n$ variations δ figurant dans cette équation doivent être nuls, de sorte que la force de liaison appliquée à chaque point du système a pour composantes

$$(11)\qquad \begin{cases} X' = \lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \ldots + \lambda_1'A_1 + \ldots + \mu_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x} + \ldots + \mu_1'L_1 + \ldots, \\[2ex] Y' = \lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial y} + \ldots + \lambda_1'B_1 + \ldots + \mu_1\dfrac{\partial g_1}{\partial y} + \ldots + \mu_1'M_1 + \ldots, \\[2ex] Z' = \lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial z} + \ldots + \lambda_1'C_1 + \ldots + \mu_1\dfrac{\partial g_1}{\partial z} + \ldots + \mu_1'N_1 + \ldots. \end{cases}$$

Écrivons maintenant que les forces de liaisons satisfont en outre à la relation (9') pour toutes les variations δ vérifiant les relations (5), (6), (7') et (8'); en substituant les expressions (11) déjà obtenues dans la relation (9') et en tenant compte des équations (5) et (6), il vient

$$\begin{aligned} &\mu_1 \sum \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial g_1}{\partial z} \delta z \right) \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \mu_1' \sum (L_1 \delta x + M_1 \delta y + N_1 \delta z) \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \geqq 0. \end{aligned}$$

Comme tous les coefficients des multiplicateurs μ, μ' sont positifs ou nuls d'après les relations (7'), (8'), la relation précédente exige qu'il en soit de même de ces multiplicateurs, c'est-à-dire qu'on ait

$$(12) \qquad \begin{cases} \mu_i \geqq 0 & (i = 1, 2, \dots, s), \\ \mu_i' \geqq 0 & (i = 1, 2, \dots, s_1). \end{cases}$$

Ainsi, les liaisons étant supposées toutes réalisées, les forces de liaisons sont données par les formules (11), les paramètres μ, μ' qui y figurent étant assujettis à satisfaire aux conditions (12), que nous appellerons *conditions complémentaires*.

§ III. — Equations du mouvement du système.

Soient X, Y, Z les composantes de la force directement appliquée à un point quelconque $M(x, y, z)$ du système, de masse m; ce point pouvant être considéré comme libre sous l'action de cette force et de la force de liaison (X', Y', Z'), les équations de son mouvement sont

$$(13) \qquad m \frac{d^2 x}{dt^2} = X + X', \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + Y', \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + Z'.$$

En y remplaçant les composantes X', Y', Z' par leurs valeurs (11), ces équations deviennent

$$(14) \quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \ldots + \lambda_1'A_1 + \ldots + \mu_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x} + \ldots + \mu_1'L_1 + \ldots, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial y} + \ldots + \lambda_1'B_1 + \ldots + \mu_1\dfrac{\partial g_1}{\partial y} + \ldots + \mu_1'M_1 + \ldots, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial z} + \ldots + \lambda_1'C_1 + \ldots + \mu_1\dfrac{\partial g_1}{\partial z} + \ldots + \mu_1'N_1 + \ldots. \end{cases}$$

Les n groupes de trois équations analogues écrites pour chaque point constituent les équations du mouvement du système. Ces $3n$ équations, jointes aux $p+p_1+s+s_1$ équations de liaisons (1), (2), (3), (4) et aux conditions initiales, déterminent les $3n+p+p_1+s+s_1$ inconnues

$$x_1, y_1, \ldots, z_n; \quad \lambda_1, \ldots; \quad \lambda_1', \ldots; \quad \mu_1, \ldots; \quad \mu_1', \ldots.$$

en fonction du temps; cette solution est valable tant qu'elle donne pour les μ, μ' des valeurs satisfaisant aux conditions (12), c'est-à-dire tant que toutes les liaisons sont réalisées.

Supposons qu'il en soit ainsi jusqu'à l'instant t_1, où l'un des multiplicateurs μ, μ', μ_1 par exemple, s'annule en changeant de signe. On en conclut qu'à partir de cet instant, la première des liaisons (3) cesse d'être réalisée, de sorte que le mouvement du système, pour $t \geqslant t_1$, est défini par les équations (14), où l'on fait $\mu_1 = 0$, et par les mêmes équations de liaisons que précédemment, dont on a toutefois supprimé la première (3). On a donc encore, pour reprendre le problème à partir de l'instant t_1, autant d'équations que d'inconnues, et la nouvelle solution ainsi obtenue est valable, tant qu'elle satisfait à l'inégalité

$$g_1(x_1, y_1, \ldots, z_n, t) > 0.$$

Supposons qu'il en soit ainsi jusqu'à l'instant t_2, où la fonction g_1 s'annule en changeant de signe. On en conclut qu'à cet instant la première des liaisons (3) se trouve rétablie, ce qui détermine en général une discontinuité dans le régime des vitesses; les nouvelles vitesses qui succèdent ainsi brusquement aux anciennes à l'instant t_2 se déterminent alors en résolvant un problème de percussions.

§ IV. — Équations d'équilibre du système.

Il peut arriver, même si les liaisons et les forces directement appliquées dépendent du temps, que les équations du mouvement (14), jointes à celles de liaisons (1), (2), (3) et (4), admettent des solutions satisfaisant aux conditions (12), pour lesquelles les $3n$ coordonnées $x_1, y_1, \ldots, z_n$ soient des constantes; s'il en est ainsi, chacune de ces solutions définit une position d'équilibre du système. Les équations de liaisons non holonomes (2) et (4), supposées toutes vérifiées, se réduisent dans cette hypothèse à

$$\alpha_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p_1), \tag{15}$$

$$\beta_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s_1) \tag{16}$$

et les équations (14) à

$$\left\{\begin{aligned} &X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \ldots + \lambda_1' A_1 + \ldots + \mu_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} + \ldots + \mu_1' L_1 + \ldots = 0, \\ &Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \ldots + \lambda_1' B_1 + \ldots + \mu_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} + \ldots + \mu_1' M_1 + \ldots = 0, \\ &Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \ldots + \lambda_1' C_1 + \ldots + \mu_1 \frac{\partial g_1}{\partial z} + \ldots + \mu_1' N_1 + \ldots = 0. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Les n groupes de trois équations analogues écrites pour chaque point constituent les équations d'équilibre du système. Ces $3n$ équations, jointes aux $p + p_1 + s + s_1$ équations (1), (15), (3) et (16), déterminent les $3n + p + p_1 + s + s_1$ inconnues

$$x_1, y_1, \ldots, z_n; \quad \lambda_1, \ldots; \quad \lambda_1', \ldots; \quad \mu_1, \ldots; \quad \mu_1', \ldots,$$

en fonction du temps; chaque solution n'est valable, c'est-à-dire ne correspond à un état d'équilibre effectif, que si elle satisfait à l'hypothèse faite, c'est-à-dire si elle fournit pour les $3n$ coordonnées $x_1, y_1, \ldots, z_n$ des valeurs indépendantes du temps, et si elle donne pour les μ, μ' des valeurs satisfaisant aux conditions complémentaires (12). Lorsque les liaisons et les forces directement appliquées sont indépendantes du temps, il en est de même des équations précédentes; toute solution satisfaisant aux conditions (12) fournira donc toujours pour $x_1, y_1, \ldots, z_n$ des valeurs indépendantes du temps, c'est-à-dire correspondant à une position d'équilibre du système. On peut donc dire, dans ce cas, que les équations (17), jointes aux conditions (12), constituent les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre.

§ V. — Equations du mouvement et de l'équilibre en coordonnées généralisées.

Les équations de liaisons holonomes bilatérales (1) permettent d'exprimer p des coordonnées en fonction du temps et des $3n - p = r$ autres; plus généralement, d'exprimer les $3n$ coordonnées en fonction de r coordonnées généralisées $q_1, q_2, \ldots, q_r$ et du temps t; ce qui donne, pour les coordonnées d'un point quelconque $M(x, y, z)$ du système, des expressions de la forme

$$(18) \qquad \begin{cases} x = f(q_1, q_2, \ldots, q_r, t), \\ y = g(q_1, q_2, \ldots, q_r, t), \\ z = h(q_1, q_2, \ldots, q_r, t). \end{cases}$$

Les paramètres q ne sont pas indépendants, mais liés par les $p_1 + s + s_1$ relations obtenues en remplaçant, dans les formules (2), (3) et (4), les x, y, z par leurs valeurs (18), soit

$$(19) \qquad \mathcal{A}_{i1}\frac{dq_1}{dt} + \mathcal{A}_{i2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \mathcal{A}_{ir}\frac{dq_r}{dt} + \mathcal{B}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p_1),$$

$$(20) \qquad G_i(q_1, q_2, \ldots, q_r, t) \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

$$(21) \qquad \mathcal{L}_{i1}\frac{dq_1}{dt} + \mathcal{L}_{i2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \mathcal{L}_{ir}\frac{dq_r}{dt} + \mathcal{M}_i \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s_1),$$

les $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ étant des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_r, t$ et le signe $=$ correspondant au cas où la liaison est réalisée, le signe $>$ au cas où elle ne l'est pas.

Les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons, telles qu'elles sont à l'instant t, ont pour expressions

$$(22) \qquad \begin{cases} \delta x = \dfrac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \dfrac{\partial x}{\partial q_r}\delta q_r, \\ \delta y = \dfrac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \dfrac{\partial y}{\partial q_r}\delta q_r, \\ \delta z = \dfrac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \dfrac{\partial z}{\partial q_r}\delta q_r, \end{cases}$$

les δq étant liés par les relations

$$(23)\quad \begin{cases} \mathcal{A}_{i1}\delta q_1 + \mathcal{A}_{i2}\delta q_2 + \ldots + \mathcal{A}_{ir}\delta q_r = 0 & (i = 1, 2, \ldots, p_1), \\ \dfrac{\partial G_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial G_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \dfrac{\partial G_i}{\partial q_r}\delta q_r \overline{\overline{>}}\, 0 & (i = 1, 2, \ldots, s), \\ \mathcal{L}_{i1}\delta q_1 + \mathcal{L}_{i2}\delta q_2 + \ldots + \mathcal{L}_{ir}\delta q_r \overline{\overline{>}}\, 0 & (i = 1, 2, \ldots, s_1), \end{cases}$$

toutes prises avec le signe $=$ pour les déplacements d'égalité et l'une au moins étant prise avec le signe $>$ pour les déplacements d'inégalité.

Cela posé, les formules (9) et (9'), condensées en une seule et définissant les liaisons sans frottement, deviennent, d'après les formules (22) :

$$(24)\qquad Q_1'\delta q_1 + Q_2'\delta q_2 + \ldots + Q_r'\delta q_r \overline{\overline{>}}\, 0,$$

avec

$$(25)\qquad Q_i' = \sum \left(X' \frac{\partial x}{\partial q_i} + Y' \frac{\partial y}{\partial q_i} + Z' \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Écrivons alors que la formule (24), prise avec le signe $=$, est vérifiée pour tous les déplacements d'égalité; il vient, comme au paragraphe II,

$$(26)\quad \begin{cases} Q_1' = \lambda_1'\mathcal{A}_{11} + \ldots + \mu_1 \dfrac{\partial G_1}{\partial q_1} + \ldots + \mu_1'\mathcal{L}_{11} + \ldots, \\ Q_2' = \lambda_1'\mathcal{A}_{12} + \ldots + \mu_1 \dfrac{\partial G_1}{\partial q_2} + \ldots + \mu_1'\mathcal{L}_{12} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_r' = \lambda_1'\mathcal{A}_{1r} + \ldots + \mu_1 \dfrac{\partial G_1}{\partial q_r} + \ldots + \mu_1'\mathcal{L}_{1r} + \ldots, \end{cases}$$

les λ', μ, μ' étant des paramètres indéterminés. Si, maintenant, on écrit que la formule (24) est vérifiée pour tous les déplacements d'inégalité, il vient les conditions complémentaires

$$(27)\quad \begin{cases} \mu_i \geqq 0 & (i = 1, 2, \ldots, s), \\ \mu_i' \geqq 0 & (i = 1, 2, \ldots, s_1). \end{cases}$$

Les formules (26) et (27), auxquelles doivent satisfaire les forces de liaisons, correspondent aux formules (11) et (12).

Pour en déduire les équations du mouvement, il n'y a qu'à remplacer, dans les équations (26), les Q_i' par leurs valeurs (25) et chaque force de liaisons (X', Y', Z') par sa valeur tirée des équations (13); si donc on pose

$$\left.\begin{aligned} P_i &= \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial q_i}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial q_i}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)\\ Q_i &= \sum m\left(X\frac{\partial x}{\partial q_i}+Y\frac{\partial y}{\partial q_i}+Z\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)\end{aligned}\right\} \quad (i=1, 2, \ldots, r),$$

ces équations deviennent

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} P_1 &= Q_1+\lambda_1'\mathcal{B}_{11}+\ldots+\mu_1\frac{\partial G_1}{\partial q_1}+\ldots+\mu_1'\mathcal{L}_{11}+\ldots,\\ P_2 &= Q_2+\lambda_1'\mathcal{B}_{12}+\ldots+\mu_1\frac{\partial G_1}{\partial q_2}+\ldots+\mu_1'\mathcal{L}_{12}+\ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ P_r &= Q_r+\lambda_1'\mathcal{B}_{1r}+\ldots+\mu_1\frac{\partial G_1}{\partial q_r}+\ldots+\mu_1'\mathcal{L}_{1r}+\ldots.\end{aligned}\right.$$

Ces r équations, analogues aux équations (14), sont les équations du mouvement en coordonnées généralisées; jointes aux p_1+s+s_1 équations de liaisons (19), (20), (21) et aux conditions initiales, elles déterminent les $r+p_1+s+s_1$ inconnues

$$q_1, q_1, \ldots, q_r;\quad \lambda_1', \ldots;\quad \mu_1, \ldots;\quad \mu_1', \ldots.$$

en fonction du temps; cette solution est valable tant qu'elle donne pour les μ, μ' des valeurs satisfaisant aux conditions (27), c'est-à-dire tant que toutes les liaisons sont réalisées. On pourrait ici répéter, presque mot pour mot, tout ce qui a été dit à la fin du paragraphe III.

On reconnaît, dans les équations (28), celles qui conduisent aux équations de Lagrange, par la transformation des fonctions P_i au moyen de la force vive; en réduisant leur nombre à $r-p_1$ par l'élimination de p_1 variations δq entre les formules (22) et (23), ce qui supprimerait les termes en λ', la transformation des fonctions P_i au moyen de l'énergie d'accélération conduirait aux équations de M. Appell.

En particulier, les positions d'équilibre sont les solutions des équations (19), (20), (21) et (28) qui donnent pour $x_1, y_1, \ldots, z_n$ des valeurs indépendantes de t; les équations d'équilibre du système sont donc les équations (28), où chaque premier membre est remplacé par zéro.

§ VI. — Théorèmes de d'Alembert et du travail virtuel.

Nous voyons, d'après ce qui précède, que toute la Mécanique analytique peut être exposée sans faire intervenir les théorèmes du travail virtuel et de d'Alembert. L'intérêt de ces deux théorèmes, auxquels nous allons maintenant parvenir *a posteriori* n'est plus, dès lors, que de condenser en une formule unique des équations précédemment établies, au même titre que le théorème d'Hamilton et celui de la moindre contrainte de Gauss.

Il résulte des équations (9) et (13) qu'on a, si le système est en mouvement,

$$(29) \qquad \sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0,$$

pour tous les déplacements d'égalité; des relations (9′) et (13), qu'on a

$$(29') \qquad \sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] \leqq 0,$$

pour tous les déplacements d'inégalité. Réciproquement, si l'on écrit que l'équation (29) est vérifiée pour toutes les variations δ vérifiant les équations (5), (6), (7) et (8), la méthode des multiplicateurs nous conduira tout d'abord à l'équation

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \ldots + \lambda_1' A_1 + \ldots + \mu_1\frac{\partial g_1}{\partial x} + \ldots + \mu_1' L_1 + \ldots\right)\delta x + \ldots\right] = 0,$$

d'où nous déduirons immédiatement les équations du mouvement (14).

Si l'on écrit ensuite que la relation (29′) est vérifiée pour toutes les variations δ vérifiant les relations (5), (6), (7′) et (8′), les expressions de $X - m\frac{d^2x}{dt^2}$, ..., tirées des équations ainsi obtenues et substituées dans la relation (29′), nous conduiront immédiatement aux conditions complémentaires (12). De là le théorème de d'Alembert :

Lorsqu'un système à liaisons sans frottement est en mouvement, le travail des forces directement appliquées et des forces d'inertie est nul ou négatif, pour tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons telles qu'elles sont à l'instant t; réciproquement, on obtient les équations du mouvement et les conditions complémentaires, en écrivant que le travail des forces directement appliquées et des forces d'inertie est nul ou négatif, pour tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons telles qu'elles sont à l'instant t.

Dans le cas particulier de l'équilibre, les formules (29) et (29′) condensées en une seule se réduisent à

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \overline{\gtrless} 0$$

et le théorème de d'Alembert devient celui du travail virtuel :

Lorsqu'un système à liaisons sans frottement est en équilibre, le travail des forces directement appliquées est nul ou négatif, pour tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons telles qu'elles sont à l'instant t; réciproquement, on obtient les équations d'équilibre et les conditions complémentaires, en écrivant que le travail des forces directement appliquées est nul ou négatif, pour tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons telles qu'elles sont à l'instant t.

Dans le cas particulier où les liaisons et les forces directement appliquées sont indépendantes du temps, nous avons vu qu'il suffit que les équations d'équilibre et les conditions complémentaires soient vérifiées pour que la position correspondante du système soit une position d'équilibre; de là, l'énoncé restreint du théorème du travail virtuel, dont les auteurs ont fait jusqu'ici le fondement de la Statique :

La condition nécessaire et suffisante de l'équilibre d'un système à liaisons sans frottement indépendantes du temps et soumis à des forces indépendantes du temps, est que le travail des forces directement appliquées soit nul ou négatif pour tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons.

Les théorèmes de d'Alembert et du travail virtuel sont ainsi établis très simplement en toute rigueur et dans toute leur généralité.