SUR LES SYSTÈMES PARTIELS DU PREMIER ORDRE

AUXQUELS S'APPLIQUE LA MÉTHODE D'INTÉGRATION DE JACOBI

ET SUR LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE DE LEURS INTÉGRALES

PAR CH. RIQUIER,

Professeur à l'Université de Caen.

INTRODUCTION

Considérons le système

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial x}=S_x\dfrac{\partial u}{\partial s}+T_x\dfrac{\partial u}{\partial t}+U_x, & \dfrac{\partial v}{\partial x}=S_x\dfrac{\partial v}{\partial s}+T_x\dfrac{\partial v}{\partial t}+V_x, & \dfrac{\partial w}{\partial x}=S_x\dfrac{\partial w}{\partial s}+T_x\dfrac{\partial w}{\partial t}+W_x, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=S_y\dfrac{\partial u}{\partial s}+T_y\dfrac{\partial u}{\partial t}+U_y, & \dfrac{\partial v}{\partial y}=S_y\dfrac{\partial v}{\partial s}+T_y\dfrac{\partial v}{\partial t}+V_y, & \dfrac{\partial w}{\partial y}=S_y\dfrac{\partial w}{\partial s}+T_y\dfrac{\partial w}{\partial t}+W_y, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=S_z\dfrac{\partial u}{\partial s}+T_z\dfrac{\partial u}{\partial t}+U_z, & \dfrac{\partial v}{\partial z}=S_z\dfrac{\partial v}{\partial s}+T_z\dfrac{\partial v}{\partial t}+V_z, & \dfrac{\partial w}{\partial z}=S_z\dfrac{\partial w}{\partial s}+T_z\dfrac{\partial w}{\partial t}+W_z, \end{array}\right.$$

où les lettres S, T, U, V, W, affectées d'indices, désignent des fonctions connues de x, y, z, s, t, u, v, w; nous supposerons *réelles* les variables indépendantes x, y, z, s, t, et les fonctions inconnues u, v, w (par suite aussi, comme de raison, les diverses fonctions connues qui figurent dans les équations du système). Les énoncés que nous avons en vue nécessitent tout d'abord quelques définitions.

Dans l'espace réel $[(x, y, z)]$, que nous supposerons représenté, suivant l'usage, à l'aide de trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, nous nommerons *domaine* l'ensemble des points *intérieurs* à un parallélipipède rectangle dont les arêtes sont parallèles à ces trois axes.

Si, dans ce même espace $[(x, y, z)]$, on considère, d'une part, une région déterminée, d'autre part, un point déterminé étranger à la région, il arrive nécessairement de deux choses l'une : ou bien ce point est le centre de quelque domaine entièrement étranger à la région, ou bien il n'est le centre d'aucun domaine de cette espèce; nous dirons, dans le second cas, qu'il est *semi-extérieur* à la région.

Une région de l'espace $[(x, y, z)]$ sera dite *normale*, si elle remplit à la fois les deux conditions suivantes : 1° la région considérée est continue; 2° tout point de cette région est le centre de quelque domaine entièrement situé dans la région.

Nous qualifierons de *parfaite* toute région, $\mathfrak{P}_{x,y,z}$, qui, étant à la fois normale et limitée, jouit, en outre, de la propriété indiquée ci-après :

« Si l'on considère, d'une part, un point, (ξ, η, ζ), arbitrairement donné dans la région $\mathfrak{P}_{x,y,z}$, d'autre part, une constante positive donnée, ε, de petitesse arbitraire, on peut assigner quelque suite limitée de domaines (dont quelques-uns éventuellement répétés dans cette suite) ayant leurs trois dimensions moindres que ε, formant par leur ensemble une région qui comprend toute la région $\mathfrak{P}_{x,y,z}$ (avec des points étrangers à cette dernière), et tels : que le premier d'entre ces domaines comprenne le point (ξ, η, ζ), que l'un quelconque d'entre eux ait avec le précédent quelque point commun situé dans $\mathfrak{P}_{x,y,z}$, enfin, que la région commune à l'un quelconque d'entre eux et à la région formée par l'ensemble de tous les précédents soit continue. »

(Telle est, par exemple, la région intérieure à une sphère; il n'en est pas de même de la région comprise entre deux sphères concentriques, ni de celle qu'engendre l'intérieur d'un cercle tournant autour d'une droite de son plan qui n'a avec la circonférence aucun point commun).

Nous nommerons enfin *limite de région parfaite* toute région, $\mathfrak{L}_{x,y,z}$, remplissant la condition suivante :

« Il existe quelque suite illimitée de régions *parfaites*,

$$\mathfrak{P}'_{x,y,z},\quad \mathfrak{P}''_{x,y,z},\quad \ldots\ldots,\quad \mathfrak{P}^{(m)}_{x,y,z},\quad \ldots\ldots,$$

toutes extraites de $\mathfrak{L}_{x,y,z}$ et jouissant de la double propriété : 1° que tout point de $\mathfrak{L}_{x,y,z}$ finisse, à partir d'une valeur suffisamment grande de m, par être situé dans $\mathfrak{P}^{(m)}_{x,y,z}$; 2° que, pour toute valeur de m, la région (nécessairement limitée) obtenue par l'adjonction à $\mathfrak{P}^{(m)}_{x,y,z}$ des divers points semi-extérieurs à $\mathfrak{P}^{(m)}_{x,y,z}$ soit entièrement comprise dans $\mathfrak{P}^{(m+1)}_{x,y,z}$. »

(On voit aisément qu'une pareille région est nécessairement normale.)

Cela posé, on peut formuler les résultats suivants :

I. *Le système* (1) *étant linéaire par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées premières, et les fonctions* S, T (indépendantes de u, v, w) *étant, de plus, linéaires en s, t, supposons, d'une part, que les coefficients des expressions linéaires* S, T *soient analytiques et réguliers dans une région*, $\mathfrak{L}_{x,y,z}$, *qui soit limite de région parfaite; supposons, d'autre part, que les coefficients des expressions* U, V, W, *linéaires en u, v, w, soient analytiques et réguliers dans la région*

$$\left(\mathfrak{L}_{x,y,z},\ [(s,\ t)]\right).$$

Supposons enfin que tous ces coefficients satisfassent aux conditions requises pour la passivité du système (1).

Cela étant, *si l'on désigne par* (x_0, y_0, z_0) *un point pris à volonté dans la région* $\mathfrak{L}_{x,y,z}$, *et par* $\upsilon(s, t)$, $\varphi(s, t)$, $\psi(s, t)$ *des fonctions données, analytiques et régulières dans toute l'étendue de l'espace* (*réel*) $[(s, t)]$, *les intégrales particulières du système* (1) *qui répondent aux conditions initiales*

$$\left.\begin{aligned} u &= \upsilon(s, t) \\ v &= \varphi(s, t) \\ w &= \psi(s, t) \end{aligned}\right\} \text{ pour } \; x, y, z = x_0, y_0, z_0$$

sont analytiques et régulières dans la région

$$\left(\mathfrak{L}_{x,y,z}, [(s, t)]\right).$$

Comme on le verra dans le cours du présent travail, ce premier énoncé, que nous venons de formuler pour le monde des quantités *réelles*, s'étend de lui-même au cas des variables *imaginaires*. Il n'en est pas de même des trois suivants :

II. *Le système* (1) *étant* (comme dans I) *linéaire par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées premières* (mais les fonctions S, T n'étant pas linéaires en s, t, contrairement à ce qui avait lieu dans I), *supposons que les divers coefficients du système* (les S, T et les coefficients des expressions linéaires U, V, W) *soient analytiques et réguliers dans la région*

$$\left(\mathfrak{L}_{x,y,z}, [(s, t)]\right),$$

où $\mathfrak{L}_{x,y,z}$ *désigne une limite de région parfaite, et qu'ils remplissent les conditions requises pour la passivité du système; supposons, de plus, que chacune des fonctions* S, T *admette, par rapport à chacune des variables* s, t, *quelque période réelle.*

Cela étant, *la conclusion de l'énoncé précédent* I *reste applicable.*

III. *Les fonctions* S, T *étant indépendantes de* u, v, w *et linéaires en* s, t, *supposons* (comme dans I) *que leurs coefficients soient analytiques et réguliers dans une région,* $\mathfrak{L}_{x,y,z}$, *qui soit limite de région parfaite. Supposons, d'autre part, que les fonctions* U, V, W (non linéaires en u, v, w, contrairement à ce qui avait lieu dans I et II) *soient analytiques et régulières dans la région*

$$\left(\mathfrak{L}_{x,y,z}, [(s, t)], [(u, v, w)]\right),$$

et que chacune d'elles admette, par rapport à chacune des variables u, v, w, *quelque période réelle. Supposons enfin que toutes ces fonctions*, S, T, U, V, W, *satisfassent aux conditions requises pour la passivité du système* (1).

Cela étant, *la conclusion de l'énoncé* I *reste applicable.*

IV. *Supposons* (comme dans II) *que les fonctions* S, T, *indépendantes de* u, v, w (mais non linéaires en s, t) *soient analytiques et régulières dans la région*

$$\left(\mathfrak{L}_{x,y,z}, [(s, t)]\right),$$

où $\mathfrak{L}_{x,y,z}$ désigne une limite de région parfaite, et que chacune d'elles admette, par rapport à chacune des variables s, t, quelque période réelle. Supposons, d'autre part (comme dans III), *que les fonctions* U, V, W (non linéaires en u, v, w) *soient analytiques et régulières dans la région*

$$\left(\mathfrak{L}_{x,y,z}, [(s,\ t)],\ [(u,\ v,\ w)]\right),$$

et que chacune d'elles admette, par rapport à chacune des variables u, v, w, quelque période réelle. Supposons enfin que toutes ces fonctions, S, T, U, V, W, *satisfassent aux conditions requises pour la passivité du système* (1).

Cela étant, *la conclusion de l'énoncé* I *est encore applicable.*

Les exemples suivants permettent d'ailleurs de constater très simplement que cette conclusion peut tomber en défaut, lorsque les conditions relatives à la nature linéaire ou périodique des fonctions S, T par rapport à s, t, et des fonctions U, V, W par rapport à u, v, w, ne sont pas toutes satisfaites.

1° Dans l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 \frac{\partial u}{\partial y}$, impliquant la fonction inconnue u des variables indépendantes x, y, et où le coefficient y^2, non linéaire en y, n'admet par rapport à cette variable aucune période, l'intégrale particulière assujettie à se réduire à y pour $x = 0$ a pour expression $\frac{y}{1 - xy}$, et admet comme discontinuités, dans l'espace réel $[(x, y)]$, tous les points de l'hyperbole $xy = 1$.

2° Dans l'équation $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-y} \frac{\partial u}{\partial y}$, où le coefficient e^{-y}, non linéaire en y, n'admet par rapport à cette variable aucune période réelle, l'intégrale particulière assujettie à se réduire à e^{-y} pour $x = 0$ a pour expression $\frac{1}{x + e^y}$, et admet comme discontinuités tous les points de la courbe $x + e^y = 0$.

3° Dans l'équation $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + u^2$, où le terme u^2, non linéaire en u, n'admet par rapport à cette variable aucune période, l'intégrale particulière assujettie à se réduire à e^{-y} pour $x = 0$ a pour expression $\frac{1}{e^{x+y} - x}$, et admet comme discontinuités tous les points de la courbe $e^{x+y} - x = 0$.

4° Dans l'équation $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + e^u$, où le terme e^u, non linéaire en u, n'admet par rapport à cette variable aucune période réelle, l'intégrale particulière assujettie à se réduire à $\mathrm{L}\frac{1}{1 + y^2}$ pour $x = 0$ a pour expression $\mathrm{L}\frac{1}{(x + y)^2 - x + 1}$, et admet comme discontinuités tous les points de la parabole $(x + y)^2 - x + 1 = 0$.

Les résultats dont nous venons de donner l'indication sommaire ont été formulés en partie (énoncés II et IV) dans une Note communiquée à l'Académie des Sciences le 20 mars 1916, et le lecteur en trouvera ci-après l'exposé complet. Les considérations que nécessite cet exposé se simplifient notablement lorsque le système étudié ne contient dans ses premiers membres que les dérivées premières relatives à une seule des variables indépendantes (supposées réelles), x par exemple : en premier lieu, aucune condition de passivité n'intervient alors (il en serait ainsi, d'ailleurs, même dans l'hypothèse des variables imaginaires); en second lieu, toute région normale de l'espace réel $[(x)]$, à une seule dimension, se définissant par une double inégalité de la forme $a < x < b$ (où a, b désignent des constantes données, éventuellement infinies), les conditions analogues à celles que nous avons spécifiées plus haut pour la région $\mathfrak{R}_{x,y,z}$ se trouvent, en pareil cas, remplies d'elles-mêmes.

CHAPITRE PREMIER

Rappel de quelques notions fondamentales; observations diverses.

[**1**] Les variables $x, y, \ldots$ étant supposées, indifféremment, *réelles* ou *imaginaires*, nous nommerons *domaine* toute région de l'espace $[(x, y, \ldots)]$ définie par un système de relations de la forme

$$\operatorname{mod}(x - x_0) < R_x, \qquad \operatorname{mod}(y - y_0) < R_y, \quad \ldots\ldots,$$

où $(x_0, y_0, \ldots)$ désigne un point fixe, et $R_x, R_y, \ldots$ des constantes positives (> 0); ces constantes seront elles-mêmes les *rayons* du domaine, leurs produits par 2 ($2R_x, 2R_y, \ldots$) les *dimensions* du domaine, le point $(x_0, y_0, \ldots)$ en sera le *centre* (1).

Nous dirons qu'une région, $\mathfrak{R}$, de l'espace $[(x, y, \ldots)]$ est *normale*, si elle satisfait à la double condition suivante : 1° la région $\mathfrak{R}$ est *continue* (2); 2° tout point de la région $\mathfrak{R}$ est le centre de quelque domaine entièrement situé dans $\mathfrak{R}$.

---

(1) Si l'on suppose les variables réelles, l'ensemble des valeurs de x qui satisfont à la relation

$$\operatorname{mod}(x - x_0) < R_x$$

se trouve graphiquement représenté, sur un axe indéfini, Ox, par l'*intérieur d'un segment* ayant pour extrémités les deux points qui correspondent aux valeurs

$$x_0 - R_x, \qquad x_0 + R_x$$

(on doit exclure les deux points extrêmes); car l'inégalité dont il s'agit équivaut à l'ensemble des deux inégalités simultanées

$$x - x_0 < R_x, \qquad x - x_0 > -R_x,$$

c'est-à-dire à

$$x_0 - R_x < x < x_0 + R_x.$$

Si l'on suppose les variables imaginaires, l'ensemble des valeurs de x qui satisfont à la même inégalité, $\operatorname{mod}(x - x_0) < R_x$, se trouve graphiquement représenté, relativement à deux axes rectangulaires tracés dans un plan, par l'*intérieur d'un cercle* ayant pour rayon R_x et pour centre le point qui correspond à la valeur x_0 (on doit exclure les points de la circonférence) : car, en mettant en évidence les deux éléments de la variable imaginaire, et posant

$$x = x' + ix'', \qquad x_0 = x'_0 + ix''_0,$$

l'inégalité peut s'écrire

$$(x' - x'_0)^2 + (x'' - x''_0)^2 < R_x^2.$$

(2) On peut définir la *continuité* d'une région à l'aide des considérations suivantes :

I. Les variables $x, y, \ldots$ étant supposées, indifféremment, *réelles* ou *imaginaires*, une fonction $f(x, y, \ldots)$, bien définie dans toute l'étendue d'une région $\mathfrak{R}$ de l'espace $[(x, y, \ldots)]$, Nous dirons enfin qu'une fonction $f(x, y, \ldots)$, bien définie dans la région *normale* $\mathfrak{N}$, y est *olotrope*, si, autour d'un point quelconque, $(x_0, y_0, \ldots)$, de la région, pris comme centre, on peut assigner quelque domaine dans toute l'étendue duquel

---

est dite *continue* dans cette région, si, un point $(x_0, y_0, \ldots)$ de la région et une constante positive α étant donnés, on peut leur faire correspondre quelque constante positive, β, telle que les relations simultanées

$$\operatorname{mod}(x - x_0) < \beta, \qquad \operatorname{mod}(y - y_0) < \beta, \qquad \ldots\ldots,$$

supposées vérifiées pour un point $(x, y, \ldots)$ de la région $\mathfrak{N}$, entraînent comme conséquence nécessaire la relation

$$\operatorname{mod}[f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)] < \alpha; \tag{1}$$

ou, ce qui revient au même, si, le point $(x_0, y_0, \ldots)$ et la constante α étant donnés, on peut leur faire correspondre quelque constante positive, γ, telle que la relation

$$\sqrt{\operatorname{mod}(x - x_0)^2 + \operatorname{mod}(y - y_0)^2 + \ldots} < \gamma,$$

supposée vérifiée pour un point $(x, y, \ldots)$ de la région $\mathfrak{N}$, entraîne comme conséquence nécessaire la relation (1).

II. Désignant par $s, t, \ldots$ des variables *réelles* en nombre quelconque p, par $s_0, t_0, \ldots$ certaines valeurs particulières de ces variables, et par $S, T, \ldots$ d'autres valeurs particulières respectivement supérieures aux précédentes, nous nommerons *intervalle complexe* la région de l'espace $[(s, t, \ldots)]$ définie par les relations simultanées

$$s_0 \leqq s \leqq S, \qquad t_0 \leqq t \leqq T, \qquad \ldots\ldots,$$

dont chacune, considérée isolément, définit un *intervalle simple*.

Désignons maintenant par $x, y, \ldots$ des variables, indifféremment *réelles* ou *imaginaires*, en nombre quelconque n; par $s, t, \ldots$, comme ci-dessus, des variables *réelles*, en nombre quelconque p; enfin, par

$$\varphi(s, t, \ldots), \qquad \chi(s, t, \ldots), \qquad \ldots\ldots$$

n fonctions de $s, t, \ldots$, toutes *continues* dans un même intervalle complexe. Cela posé, l'ensemble des n formules

$$\left\{\begin{array}{l} x = \varphi(s, t, \ldots), \\ y = \chi(s, t, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{2}$$

où les divers systèmes de valeurs attribuées à $s, t, \ldots$ n'excèdent pas l'intervalle en question, définit ce que nous nommerons un *arc continu* (à p variables) tracé dans l'espace $[(x, y, \ldots)]$. Les *points de l'arc* seront les divers systèmes de valeurs de $x, y, \ldots$ qui correspondent, en vertu des formules (2), aux valeurs ci-dessus spécifiées de $s, t, \ldots$ Si, dans chacun des intervalles simples où $s, t, \ldots$ sont respectivement assujettis à varier, on considère l'une des deux valeurs extrêmes comme initiale, et l'autre comme finale, il faudra entendre par *extrémité initiale* de l'arc le point qui correspond aux valeurs initiales de $s, t, \ldots$, et par *extrémité finale* le point qui correspond à leurs valeurs finales. Des arcs, tracés dans l'espace $[(x, y, \ldots)]$, seront dits *placés bout à bout*, si l'extrémité finale de chacun la fonction $f(x, y, \ldots)$ soit exprimable à l'aide d'un même développement entier par rapport aux différences $x - x_0$, $y - y_0$, ... Les rayons d'un pareil domaine (qu'on doit supposer, naturellement, compris tout entier dans la région $\mathfrak{R}$)

---

d'eux coïncide avec l'extrémité initiale du suivant. Enfin, un arc sera dit *situé dans telle ou telle région* de l'espace $[(x, y, \ldots)]$, si chacun de ses points s'y trouve situé.

III. Cela posé, voici comment on peut définir la *continuité* d'une région.

Une région de l'espace $[(x, y, \ldots)]$ sera dite *continue*, si deux points, $(x_0, y_0, \ldots)$, $(X, Y, \ldots)$, arbitrairement choisis dans la région, peuvent toujours être reliés l'un à l'autre par une suite d'arcs continus placés bout à bout dans cette région, le premier des arcs dont il s'agit ayant son extrémité initiale en $(x_0, y_0, \ldots)$, et le dernier son extrémité finale en $(X, Y, \ldots)$.

Il est d'ailleurs toujours permis, comme nous allons l'établir ci-dessous (IV, V), de supposer que le nombre de ces arcs se réduit à 1, et que cet arc unique dépend d'une indéterminée unique.

IV. On nomme *composition* des fonctions l'opération qui consiste à substituer aux variables $u, v, \ldots$, en nombre quelconque j, d'une fonction donnée,

$$f(u, v, \ldots), \tag{3}$$

j fonctions données,

$$U(x, y, \ldots), \qquad V(x, y, \ldots), \qquad \ldots\ldots, \tag{4}$$

d'autres variables $x, y, \ldots$, en nombre quelconque g, ce qui engendre évidemment une nouvelle fonction de ces dernières,

$$F(x, y, \ldots) = f[U(x, y, \ldots), V(x, y, \ldots), \ldots\ldots]; \tag{5}$$

relativement à cette opération, les fonctions (4) seront dites *simples*, $f(u, v, \ldots)$ se nommera la fonction *composante*, et $F(x, y, \ldots)$ la fonction *composée*.

Cela étant, *si les fonctions simples* (4) *sont toutes continues dans une même région,*

$$\mathfrak{R}_{x, y, \ldots},$$

de l'espace $[(x, y, \ldots)]$; *si, de plus, la composante* (3) *est continue dans une région,*

$$\mathfrak{R}_{u, v, \ldots},$$

de l'espace $[(u, v, \ldots)]$; *si enfin, pour un choix arbitraire du point* $(x, y, \ldots)$ *dans la première région, le point fourni par l'association des valeurs* (4) *se trouve toujours compris dans la seconde : la fonction composée* (5) *est certainement continue dans la région*

$$\mathfrak{R}_{x, y, \ldots}.$$

Voir l'ouvrage intitulé : *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° **18**, III.

V. Revenons à la définition des régions continues et à l'observation qui s'y rattache (III).

En premier lieu, il est toujours permis de supposer que chacun des arcs continus placés bout à bout dont parle cette définition dépend d'une indéterminée unique. Considérons en effet l'ensemble des n formules

$$\left\{\begin{array}{l} x = \varphi(s, t, \ldots), \\ y = \chi(s, t, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{6}$$

où les seconds membres sont des fonctions continues (réelles ou imaginaires) des p variables *réelles* $s, t, \ldots$, assujetties à varier dans un certain intervalle complexe. Si l'on désigne se nommeront *olomètres* (simultanés) de la fonction au point $(x_0, y_0, \ldots)$.

Il ne faut jamais perdre de vue que *la définition*, donnée ci-dessus, *d'une fonction olotrope implique essentiellement la nature normale de la région où on la considère.*

Pour la définition des *dérivées*, les premières propriétés des fonctions olotropes, leur composition, l'exposé du principe général des fonctions implicites, etc., le lecteur pourra se reporter à l'ouvrage intitulé : *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*.

---

par $s_0, t_0, \ldots$ les valeurs initiales de $s, t, \ldots$, par $S, T, \ldots$ leurs valeurs finales, et que l'on pose,

$$s = s_0 + \lambda(S - s_0), \qquad t = t_0 + \lambda(T - t_0), \qquad \ldots\ldots,$$

où λ désigne une indéterminée réelle assujettie à varier dans l'intervalle de 0 à 1 $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$, les formules

$$\left\{\begin{array}{l} x = \varphi[s_0 + \lambda(S - s_0),\ t_0 + \lambda(T - t_0),\ \ldots], \\ y = \chi[s_0 + \lambda(S - s_0),\ t_0 + \lambda(T - t_0),\ \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

définiront un arc continu (IV), dépendant de la seule indéterminée λ, ayant mêmes extrémités que l'arc (6), et dont tous les points seront des points de l'arc (6) [sans que la réciproque soit généralement vraie] : car, λ variant de 0 à 1, les fonctions linéaires

$$s_0 + \lambda(S - s_0), \qquad t_0 + \lambda(T - t_0), \qquad \ldots\ldots$$

varient dans les intervalles respectifs s_0 à S, t_0 à T, ...

En second lieu, il est toujours permis de supposer que ces arcs placés bout à bout, et dépendant chacun d'une indéterminée unique, sont en nombre égal à 1. Supposons, pour fixer les idées, qu'il y en ait trois, respectivement définis par les trois groupes de formules

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \varphi_1(s), \\ y = \chi_1(s), \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \varphi_2(t), \\ y = \chi_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \varphi_3(u), \\ y = \chi_3(u), \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

et dépendant respectivement des indéterminées s, t, u, assujetties à varier dans les intervalles respectifs

$$s_0 \text{ à } S, \qquad t_0 \text{ à } T, \qquad u_0 \text{ à } U.$$

Cela étant, choisissons arbitrairement deux valeurs numériques, S', S'', sous la seule condition que les valeurs s_0, S, S', S'' se trouvent rangées par ordre de grandeur, et considérons les deux fonctions linéaires

$$\frac{T - t_0}{S' - S}\, s + \frac{S't_0 - ST}{S' - S}, \qquad \frac{U - u_0}{S'' - S'}\, s + \frac{S''u_0 - S'U}{S'' - S'},$$

dépendant l'une et l'autre de l'indéterminée s, que nous assujettirons à varier, pour la première fonction, de S à S', et, pour la seconde, de S' à S'' : les deux fonctions dont il s'agit

[**2**] Le principe général des fonctions implicites, que nous venons de mentionner, intervient, notamment, dans la *correspondance olotrope point par point*, dont nous allons rappeler la définition.

Nous plaçant, indifféremment, dans le monde des quantités *réelles* ou dans celui des quantités *imaginaires*, considérons un système de k équations reliant deux groupes de k quantités, par exemple le système des trois équations

$$(8) \qquad \begin{cases} F_1(x, y, z, \ x', y', z') = 0, \\ F_2(x, y, z, \ x', y', z') = 0, \\ F_3(x, y, z, \ x', y', z') = 0, \end{cases}$$

reliant entre eux le groupe des trois quantités x, y, z et celui des trois quantités x', y', z'. Supposons, de plus, que, dans les espaces respectifs $[(x, y, z)]$ et $[(x', y', z')]$, il existe deux régions, $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$, telles que les diverses conditions suivantes se trouvent à la fois satisfaites :

1° Ces deux régions sont *normales* (n° **1**), et les premiers membres de (8) sont *olotropes* dans la région, nécessairement normale, $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ [Voir n° **12**, I, *infrà*].

---

varient, en pareil cas, la première de t_0 à T, la seconde de u_0 à U. En conséquence, les trois groupes de formules

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi_1(s) \\ y = \chi_1(s) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (s \text{ variant de } s_0 \text{ à } S),$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi_2\left(\dfrac{T - t_0}{S' - S}\, s + \dfrac{S' t_0 - ST}{S' - S}\right) \\ y = \chi_2\left(\dfrac{T - t_0}{S' - S}\, s + \dfrac{S' t_0 - ST}{S' - S}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (s \text{ variant de } S \text{ à } S'),$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi_3\left(\dfrac{U - u_0}{S'' - S'}\, s + \dfrac{S'' u_0 - S' U}{S'' - S'}\right) \\ y = \chi_3\left(\dfrac{U - u_0}{S'' - S'}\, s + \dfrac{S'' u_0 - S' U}{S'' - S'}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (s \text{ variant de } S' \text{ à } S'')$$

définissent trois arcs continus fournissant respectivement les mêmes ensembles de points que les trois arcs (7), et on peut manifestement les considérer comme formant un arc continu unique, défini à l'aide de la seule indéterminée s, que l'on assujettit à varier de s_0 à S''.

2° Il existe entre $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$, par le moyen des relations (8), une *correspondance point par point*, c'est-à-dire que, étant donné dans la première de ces régions un point quelconque, il existe dans la seconde un point, et un seul, vérifiant, conjointement avec lui, les relations (8), et réciproquement.

3° *A partir de deux points correspondants quelconques des régions* $\mathfrak{R}$ *et* $\mathfrak{R}'$, *le système* (8) *est résoluble, conformément au principe général des fonctions implicites, tant par rapport à* x, y, z *que par rapport à* x', y', z'.

Quand ces diverses conditions se trouvent satisfaites, le système (1) peut visiblement être considéré comme déterminant trois fonctions,

$$(8\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \mathrm{X}(x', y', z'),\\ y &= \mathrm{Y}(x', y', z'),\\ z &= \mathrm{Z}(x', y', z'),\end{aligned}\right.$$

olotropes dans la région $\mathfrak{R}'$, ou, inversement, trois fonctions,

$$(8\ ter)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \mathrm{X}'(x, y, z),\\ y' &= \mathrm{Y}'(x, y, z),\\ z' &= \mathrm{Z}'(x, y, z),\end{aligned}\right.$$

olotropes dans la région $\mathfrak{R}$, et nous dirons qu'il définit, entre les deux régions normales $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$, une *correspondance olotrope point par point.*

Il va sans dire que, dans toute l'étendue de la région $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$, le système (8) équivaut numériquement tant au système (8 *bis*) qu'au système (8 *ter*), et que ces derniers sont numériquement équivalents entre eux.

[**3**] Considérons actuellement un système résolu par rapport à l'un des deux groupes de quantités x, y, z et x', y', z', par exemple par rapport à x, y, z, et soit

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= f_1(x', y', z'),\\ y &= f_2(x', y', z'),\\ z &= f_3(x', y', z')\end{aligned}\right.$$

le système dont il s'agit. Supposons en outre : 1° que les fonctions $f_1(x', y', z')$, $f_2(x', y', z')$, $f_3(x', y', z')$ soient olotropes dans une certaine région (normale), $\mathfrak{R}'$, de l'espace $[(x', y', z')]$; 2° que le déterminant différentiel de ces trois fonctions par rapport à x', y', z' reste différent de zéro dans toute l'étendue de la région $\mathfrak{R}'$; 3° qu'à deux points *distincts* de la région $\mathfrak{R}'$ correspondent toujours, en vertu des formules (9), deux points *distincts* de l'espace $[(x, y, z)]$.

Cela étant, je dis qu'en désignant par $\mathfrak{R}$ la région de l'espace $[(x, y, z)]$ formée par l'ensemble des points qui, en vertu de (9), correspondent aux divers points de $\mathfrak{R}'$, les formules (9) et les régions $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ remplissent les diverses conditions indiquées au numéro précédent (**2**).

I. *Les formules* (9) *établissent, entre les deux régions* $\mathfrak{R}$ *et* $\mathfrak{R}'$, *une correspondance point par point.*

En vertu de l'hypothèse 3°, à deux points distincts de $\mathfrak{R}'$ correspondent toujours deux points distincts de $\mathfrak{R}$; lors donc que le point (x', y', z') décrit la région $\mathfrak{R}'$ en passant par chaque point une fois et une seule, le point (x, y, z) défini par (9) décrit de même la région $\mathfrak{R}$ en passant par chaque point une fois et une seule. En conséquence, étant donné, dans la première, un point quelconque, il existe, dans la seconde, un point, et un seul, vérifiant, conjointement avec lui, les relations (9), et réciproquement.

II. *La région* $\mathfrak{R}$ *est normale* (n° **1**).

En premier lieu, cette région est continue.

Soient, en effet, (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) deux points arbitrairement choisis dans $\mathfrak{R}$, et (x'_1, y'_1, z'_1), (x'_2, y'_2, z'_2) les deux points correspondants de $\mathfrak{R}'$. La région $\mathfrak{R}'$, que l'on suppose normale, étant par là même continue, les deux points (x'_1, y'_1, z'_1), (x'_2, y'_2, z'_2) peuvent être reliés l'un à l'autre par un arc continu ayant pour extrémités ces deux points, entièrement situé dans $\mathfrak{R}'$, et dépendant d'une indéterminée réelle, t, qui se trouve assujettie à varier dans un certain intervalle [1] : dans ces limites, les seconds membres, f_1, f_2, f_3, des formules (9) deviennent des fonctions continues de t, et le point (x, y, z) défini par (9) décrit, dans $\mathfrak{R}$, un arc continu ayant pour extrémités les deux points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2). La région $\mathfrak{R}$ est donc bien continue.

En second lieu, tout point de la région $\mathfrak{R}$ est le centre de quelque domaine entièrement situé dans $\mathfrak{R}$.

Soient, en effet, (x_1, y_1, z_1) un point arbitrairement choisi dans $\mathfrak{R}$, et (x'_1, y'_1, z'_1) le point correspondant de $\mathfrak{R}'$. Le système (9) admet alors la solution numérique

$$x, y, z, x', y', z' = x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1,$$

et il résulte d'ailleurs de nos hypothèses que le déterminant différentiel de f_1, f_2, f_3 est différent de zéro pour

$$x', y', z' = x'_1, y'_1, z'_1.$$

A partir de cette solution numérique, le système (9) est donc résoluble par rapport à x', y', z' conformément au principe général des fonctions implicites, et, dans le voisinage des valeurs $x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1$, il équivaut numériquement au système des formules de résolution : or, x, y, z étant arbitraires dans ce dernier système, on

---

[1] Voir plus haut la Note où se trouve définie la *continuité* d'une région.

voit que le point (x, y, z) fourni par (9) prendra toutes les positions possibles dans un voisinage suffisamment rapproché de (x_1, y_1, z_1).

Toutes les conditions requises pour la nature normale de la région $\mathfrak{R}$ se trouvent ainsi satisfaites.

III. *A partir de deux points correspondants quelconques des régions* $\mathfrak{R}$ *et* $\mathfrak{R}'$, *le système* (9) *est résoluble, conformément au principe général des fonctions implicites, tant par rapport à* x, y, z *que par rapport à* x', y', z'.

IV. Le simple rapprochement de I, II et III montre que les régions $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ et les formules (9) remplissent bien les diverses conditions indiquées au numéro précédent (**2**) : ces formules définissent donc, entre les deux régions normales $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$, une *correspondance olotrope point par point.*

[**4**] Les notions fondamentales que nous venons de rappeler doivent être complétées par des définitions et des observations diverses.

Étant données, dans l'espace $[(x, y, \ldots)]$, des régions, $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_g$ (en nombre limité), nous désignerons par $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \ldots \mathfrak{R}_g$ la région formée par l'ensemble des divers points appartenant à quelqu'une d'entre elles.

Cela posé :

I. *Si deux régions normales,* $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, *admettent quelque point commun, la région* $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ *est nécessairement normale.*

A) *Si deux régions continues,* $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, *admettent quelque point commun, la région* $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ *est nécessairement continue.*

Effectivement, soient M, N deux points pris à volonté dans la région $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$.

Si ces deux points appartiennent l'un et l'autre à la région $\mathfrak{R}_1$, on peut, en vertu de la continuité de cette dernière, les relier l'un à l'autre par quelque suite d'arcs continus placés bout à bout dans $\mathfrak{R}_1$, lesquels se trouveront, par là même, placés bout à bout dans $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$.

Même raisonnement si les points M, N appartiennent l'un et l'autre à la région $\mathfrak{R}_2$.

Supposons enfin que l'un des deux points, M, appartienne à la région $\mathfrak{R}_1$ sans appartenir à $\mathfrak{R}_2$, et que l'autre, N, appartienne à la région $\mathfrak{R}_2$ sans appartenir à $\mathfrak{R}_1$. Si l'on désigne par P quelque point commun aux deux régions $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, on pourra, comme ci-dessus, relier d'abord M à P par quelque suite d'arcs continus placés bout à bout dans $\mathfrak{R}_1$, puis P à N par quelque suite d'arcs continus placés bout à bout dans $\mathfrak{R}_2$, d'où résulte que, finalement, M se trouvera relié à N par quelque suite d'arcs continus placés bout à bout dans $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$.

B) Supposons maintenant que les régions $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, admettant quelque point commun, soient normales : je dis que la région $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ l'est nécessairement aussi.

En premier lieu, chacune des régions $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ étant continue, il résulte de *A* que la région $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ l'est elle-même.

En second lieu, à cause de la nature normale des régions $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, tout point de la région $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ est le centre de quelque domaine entièrement situé, soit dans $\mathfrak{R}_1$, soit dans $\mathfrak{R}_2$, et, par suite, entièrement situé dans $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$.

II. *Si la région commune à deux régions normales*, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, *est continue, elle est elle-même nécessairement normale.*

Car tout point de cette région commune, étant à la fois le centre de quelque domaine entièrement situé dans $\mathfrak{R}_1$, et le centre de quelque domaine entièrement situé dans $\mathfrak{R}_2$, est nécessairement aussi le centre de quelque domaine entièrement situé dans la région commune.

III. Considérons actuellement, d'une part, deux régions *normales*, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, admettant quelque point commun, et telles *que leur région commune soit continue;* d'autre part, deux fonctions, $F_1(x, y, \ldots)$, $F_2(x, y, \ldots)$, *respectivement olotropes dans* $\mathfrak{R}_1$ *et* $\mathfrak{R}_2$, *et présentant, dans quelque domaine faisant partie de la région commune, la propriété d'être identiquement égales l'une à l'autre.* Cela étant, *les deux fonctions* F_1, F_2 *peuvent être considérées comme n'en définissant qu'une seule et même, olotrope dans toute l'étendue de la région* $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$.

Effectivement, la région commune étant continue, par suite normale (II), les fonctions $F_1(x, y, \ldots)$, $F_2(x, y, \ldots)$, identiquement égales, par hypothèse, dans quelque domaine de cette région, le sont par là même dans toute l'étendue de la région commune : il en résulte évidemment que, dans toute l'étendue de la région normale $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ (I), la considération simultanée des deux fonctions $F_1(x, y, \ldots)$, $F_2(x, y, \ldots)$ définit une fonction bien déterminée de $x, y, \ldots$. Cette dernière, que nous nommerons $F(x, y, \ldots)$, y est d'ailleurs olotrope : si l'on désigne en effet par $(x_0, y_0, \ldots)$ un point quelconque de $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$, le point $(x_0, y_0, \ldots)$ appartient à quelqu'une des deux régions $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, par exemple à $\mathfrak{R}_1$, et on pourra dès lors, autour de ce point pris comme centre, assigner quelque domaine, n'excédant pas $\mathfrak{R}_1$, et dans toute l'étendue duquel la fonction $F_1(x, y, \ldots)$ soit exprimable à l'aide d'un certain développement entier par rapport aux différences $x - x_0$, $y - y_0$, ... : la fonction $F(x, y, \ldots)$ sera alors, dans toute l'étendue du même domaine (qui n'excède pas $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$), exprimable à l'aide du même développement.

[**5**] Ces remarques étant posées, considérons, dans l'espace $[(x, y, \ldots)]$, une suite limitée de régions normales,

$$\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \ldots\ldots, \mathfrak{R}_g \tag{10}$$

et supposons : 1° que l'une quelconque d'entre elles ait avec la précédente quelque point commun; 2° que la région commune à l'une quelconque d'entre elles et à la région formée par l'ensemble de toutes les précédentes soit continue.

On aperçoit d'abord, de proche en proche, par l'application répétée de la remarque I (n° **4**), la nature normale des régions

$$\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2, \quad \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3, \quad \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_4, \quad \ldots\ldots,$$
$$\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \ldots + \mathfrak{R}_g.$$

Considérons maintenant, en même temps qu'une fonction, $F_1(x, y, \ldots)$, olotrope dans $\mathfrak{R}_1$, une fonction, $F_2(x, y, \ldots)$, olotrope dans $\mathfrak{R}_2$, et supposons que, dans quelque domaine faisant partie de la région commune à $\mathfrak{R}_1$ et à $\mathfrak{R}_2$, ces deux fonctions soient identiquement égales l'une à l'autre : en vertu de la remarque III (n° **4**), la considération simultanée de ces deux fonctions définit, dans la région $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$, une seule et même fonction olotrope, en sorte que la fonction $F_1(x, y, \ldots)$, olotrope dans $\mathfrak{R}_1$, se trouve prolongée analytiquement dans $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$.

Cela étant, considérons, en même temps que cette dernière, une fonction, $F_3(x, y, \ldots)$, olotrope dans $\mathfrak{R}_3$, et supposons que, dans quelque domaine faisant partie de la région commune à $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ et à $\mathfrak{R}_3$, les fonctions $F_1(x, y, \ldots)$, $F_3(x, y, \ldots)$ soient identiquement égales l'une à l'autre : pour la même raison que ci-dessus, leur considération simultanée définit, dans la région $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3$, une seule et même fonction olotrope, en sorte que $F_1(x, y, \ldots)$ se trouve prolongée analytiquement dans $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3$.

Semblablement, considérons, en même temps que $F_1(x, y, \ldots)$, une fonction, $F_4(x, y, \ldots)$, olotrope dans $\mathfrak{R}_4$, et supposons que, dans quelque domaine faisant partie de la région commune à $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3$ et à $\mathfrak{R}_4$, les fonctions $F_1(x, y, \ldots)$, $F_4(x, y, \ldots)$ soient identiquement égales l'une à l'autre : comme ci-dessus, leur considération simultanée définit, dans la région $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_4$, une seule et même fonction olotrope, en sorte que $F_1(x, y, \ldots)$ se trouve prolongée analytiquement dans $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_4$.

Bref, si, par la considération ultérieure de fonctions, $F_5(x, y, \ldots)$, ..., $F_g(x, y, \ldots)$, satisfaisant à des conditions toutes semblables que l'on formulera de proche en proche, un raisonnement de ce genre peut être continué jusqu'à épuisement des régions de la suite (10), la fonction $F_1(x, y, \ldots)$ se trouvera, en définitive, prolongée analytiquement dans $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \ldots + \mathfrak{R}_g$.

[**6**] Étant donnés, dans l'espace $[(x, y, \ldots)]$, une région, $\mathfrak{R}$, et, dans cette région, un point, $(x_0, y_0, \ldots)$, supposons qu'il existe quelque suite illimitée de régions *normales*,

$$\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots\ldots, \mathfrak{R}^{(m)}, \ldots\ldots, \tag{11}$$

toutes extraites de la région $\mathfrak{R}$, comprenant toutes le point $(x_0, y_0, \ldots)$, et telles : 1° que tout point de la région $\mathfrak{R}$ finisse, à partir d'une valeur suffisamment grande de m, par être situé dans $\mathfrak{R}^{(m)}$; 2° que, pour toute valeur de m, $\mathfrak{R}^{(m)}$ soit entièrement situé dans $\mathfrak{R}^{(m+1)}$.

Il est tout d'abord aisé de voir que *la région $\mathfrak{R}$ est nécessairement normale.*

En premier lieu, elle est continue.

Soient en effet P, Q deux points de $\mathfrak{R}$: il résulte de notre hypothèse que, pour quelque valeur de m, ces points seront tous deux situés dans $\mathfrak{R}^{(m)}$; la région $\mathfrak{R}^{(m)}$ étant normale, et, par là même, continue, on pourra donc relier P à Q par quelque suite d'arcs continus placés bout à bout dans $\mathfrak{R}^{(m)}$; d'ailleurs, la région $\mathfrak{R}^{(m)}$ étant tout entière comprise dans $\mathfrak{R}$, les arcs dont il s'agit seront nécessairement situés dans $\mathfrak{R}$.

En second lieu, tout point, P, situé dans la région $\mathfrak{R}$ est le centre de quelque domaine entièrement situé dans $\mathfrak{R}$: car, pour quelque valeur de m, le point P se trouve situé dans $\mathfrak{R}^{(m)}$, d'où résulte, à cause de la nature normale de $\mathfrak{R}^{(m)}$, qu'il est le centre de quelque domaine entièrement situé dans $\mathfrak{R}^{(m)}$, et, par suite, entièrement situé dans $\mathfrak{R}$.

De ce double point résulte (n° **1**) la nature normale de la région $\mathfrak{R}$.

Considérons maintenant une fonction de $x, y, \ldots$ définie, dans le voisinage du point $(x_0, y_0, \ldots)$, par la somme d'un certain développement *fondamental*, entier en $x - x_0, y - y_0, \ldots$, et admettant quelque domaine de convergence.

Cela étant, *si la fonction dont il s'agit peut, quel que soit m, être prolongée analytiquement dans la région $\mathfrak{R}^{(m)}$, elle est assimilable à une fonction olotrope dans toute l'étendue de la région $\mathfrak{R}$.*

Considérons en effet, dans la suite (11), deux régions consécutives quelconques,

$$\mathfrak{R}^{(m)}, \quad \mathfrak{R}^{(m+1)},$$

et soient

$$F^{(m)}(x, y, \ldots), \quad F^{(m+1)}(x, y, \ldots)$$

deux fonctions respectivement olotropes dans ces deux régions, et obtenues par le prolongement analytique du développement fondamental. Il résulte immédiatement de nos hypothèses que la région $\mathfrak{R}^{(m)} + \mathfrak{R}^{(m+1)}$ coïncide avec $\mathfrak{R}^{(m+1)}$, et que la région commune à $\mathfrak{R}^{(m)}$ et $\mathfrak{R}^{(m+1)}$ coïncide avec $\mathfrak{R}^{(m)}$; cette région commune, qui comprend le point $(x_0, y_0, \ldots)$ et son voisinage, est donc continue. En outre, dans toute l'étendue d'un domaine suffisamment petit, de centre $(x_0, y_0, \ldots)$, décrit dans la région commune $\mathfrak{R}^{(m)}$, les deux fonctions $F^{(m)}(x, y, \ldots)$, $F^{(m+1)}(x, y, \ldots)$ sont identiquement égales entre elles, comme étant égales l'une et l'autre à la somme du développement fondamental. Leur considération simultanée définit donc, en vertu d'une remarque antérieure (n° **4**, III), une seule et même fonction, olotrope dans toute l'étendue de $\mathfrak{R}^{(m+1)}$.

Ce raisonnement étant applicable pour toute valeur de m, et tout point de $\mathfrak{R}$ finissant, à partir d'une valeur suffisamment grande de cet entier, par être situé dans $\mathfrak{R}^{(m)}$, la fonction dont il s'agit peut manifestement être considérée comme olotrope dans $\mathfrak{R}$.

[**7**] Les variables $x, y, \ldots$ étant supposées, comme dans tout ce qui précède, indifféremment *réelles* ou *imaginaires*, nous nommerons *distance* des deux points $(x_1, y_1, \ldots)$, $(x_2, y_2, \ldots)$ la racine carrée arithmétique (c'est-à-dire non négative) de la quantité

$$\operatorname{mod}(x_1 - x_2)^2 + \operatorname{mod}(y_1 - y_2)^2 + \ldots \text{ (1)}.$$

Cela posé, *si la distance de quelque point fixe de l'espace* $[(x, y, \ldots)]$ *à un point variable d'une région donnée,* $\mathfrak{R}$, *de cet espace reste toujours inférieure à quelque constante positive, tout point fixe de* $[(x, y, \ldots)]$ *jouit par rapport à* $\mathfrak{R}$ *de la même propriété :* la région $\mathfrak{R}$, en pareil cas, est dite *limitée.*

Voir l'ouvrage intitulé : *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles* (n^{os} **2** et **15**).

[**8**] Si, dans l'espace $[(x, y, \ldots)]$, on considère, d'une part, une région donnée, $\mathfrak{R}$, d'autre part, un point donné, $(X, Y, \ldots)$, étranger à la région, il arrive nécessairement de deux choses l'une : ou bien il existe quelque constante positive, α, telle que tous les points de $[(x, y, \ldots)]$ distants de $(X, Y, \ldots)$ d'une quantité moindre que α soient également étrangers à la région $\mathfrak{R}$; ou bien il n'existe aucune constante positive jouissant de cette propriété. Dans le premier cas, le point $(X, Y, \ldots)$ sera dit *complètement extérieur* à la région $\mathfrak{R}$, et, dans le second cas, *semi-extérieur* à cette région.

Ou, ce qui revient au même :

Un point étranger à la région $\mathfrak{R}$ sera dit *complètement extérieur* à cette région, s'il est le centre de quelque domaine entièrement étranger à la région ; *semi-extérieur*, s'il n'est le centre d'aucun domaine de cette espèce.

Enfin, une région de l'espace $[(x, y, \ldots)]$ sera dite *complète,* si tout point étranger à cette région lui est complètement extérieur.

[**9**] Si l'on désigne par $\mathfrak{R}$ une région normale de l'espace $[(x, y, \ldots)]$, par $f(x, y, \ldots)$ une fonction olotrope dans la région $\mathfrak{R}$, et par $\mathfrak{f}$ un fragment à la fois *limité et complet* de $\mathfrak{R}$, il existe, comme on sait (*Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° **57**, I), quelque constante positive, R', jouissant de la propriété que, en un point variable de $\mathfrak{f}$, la fonction $f(x, y, \ldots)$ admette un système d'olomètres (au moins) égaux à R'; ou, ce qui revient au même, il existe des constantes positives, $R'_x, R'_y, \ldots$, jouissant de la propriété que, en un point variable de $\mathfrak{f}$, la fonction $f(x, y, \ldots)$ admette un système d'olomètres (au moins) égaux respectivement à $R'_x, R'_y, \ldots$.

(1) Pour que deux points soient identiques, c'est-à-dire pour que leurs coordonnées semblables soient respectivement égales, il est évidemment nécessaire et suffisant que leur distance soit nulle.

Désignons maintenant par R_x, R_y, ... des constantes positives choisies comme on voudra, mais une fois pour toutes, au-dessous des précédentes ($R_x < R'_x$, $R_y < R'_y$, ...), et, dans le développement taylorien de notre fonction construit à partir d'un point quelconque, $(x, y, \ldots)$, de $\mathfrak{f}$, remplaçons chaque coefficient par son module, et les accroissements attribués aux valeurs initiales $x, y, \ldots$ respectivement par R_x, R_y, ... : la somme du développement résultant est une quantité positive dont la valeur est entièrement déterminée quand on se donne un point $(x, y, \ldots)$ du fragment $\mathfrak{f}$, et que nous nommerons $S(x, y, \ldots)$. Je dis que, *dans toute l'étendue du fragment* $\mathfrak{f}$, *la quantité* $S(x, y, \ldots)$ *ainsi définie tombe constamment au-dessous d'une quantité positive fixe*, M, *convenablement choisie*.

En effet, le fragment $\mathfrak{f}$ étant limité, la distance

$$\sqrt{\operatorname{mod} x^2 + \operatorname{mod} y^2 + \ldots}$$

du point $(x, y, \ldots)$, arbitrairement variable dans toute l'étendue de ce fragment, au point fixe $(0, 0, \ldots)$ de l'espace $[(x, y, \ldots)]$ reste inférieure à une constante positive, D, convenablement choisie (n° **7**); à plus forte raison a-t-on, entre les mêmes limites,

$$\operatorname{mod} x < D, \quad \operatorname{mod} y < D, \quad \ldots\ldots,$$

d'où résulte que, pour un point variable de $\mathfrak{f}$, les n coordonnées $x, y, \ldots$, si on les suppose *réelles*, ou leurs $2n$ éléments, si on les suppose *imaginaires*, restent compris entre $-D$ et D. Il existe donc quelque intervalle complexe, formé, suivant qu'on se place dans l'une ou dans l'autre des deux hypothèses, par l'association de n ou de $2n$ intervalles simples,

$$a \text{ à } A, \quad b \text{ à } B, \quad \ldots\ldots, \tag{12}$$

et comprenant (avec certains autres points) tous les points du fragment $\mathfrak{f}$. En désignant d'ailleurs par ε une constante positive inférieure aux n différences $R'_x - R_x$, $R'_y - R_y$, ..., cet intervalle complexe peut être subdivisé (¹) de telle façon que, pour deux points,

$$(x', y', \ldots), \quad (x'', y'', \ldots),$$

choisis à volonté dans l'un quelconque des intervalles complexes partiels résultant de cette subdivision, les différences

$$x' - x'', \quad y' - y'', \quad \ldots\ldots$$

aient toutes des modules inférieurs à ε : il suffit pour cela que les intervalles simples (12) aient été partagés, si les variables $x, y, \ldots$ sont réelles, en fragments d'am-

---

(¹) Voir l'ouvrage intitulé : *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° **8**, début de l'alinéa II.

plitude moindre que ε, et, si les variables $x, y, \ldots$ sont imaginaires, en fragments d'amplitude moindre que $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Considérons maintenant l'un quelconque des intervalles complexes partiels qui comprennent quelque point du fragment $\mathfrak{f}$, et soient

$\mathfrak{i}_1$ l'intervalle complexe dont il s'agit;

$(x_1, y_1, \ldots)$ un point particulier commun à $\mathfrak{f}$ et à $\mathfrak{i}_1$;

$\sum a_{m,n,\ldots} h^m k^n \ldots$ le développement taylorien qui, pour la fonction olotrope $f(x, y, \ldots)$, correspond au point $(x_1, y_1, \ldots)$, choisi comme initial;

$\alpha_{m,n,\ldots}$ le module de $a_{m,n,\ldots}$;

$h', k', \ldots$ des quantités dont les modules sont assujettis à ne pas surpasser respectivement $R_x, R_y, \ldots$;

$h'', k'', \ldots$ d'autres quantités dont les modules sont assujettis à tomber au-dessous de ε.

Entre les modules de $h', k', \ldots, h'', k'', \ldots$ subsisteront dès lors les relations

$$\begin{gathered}\operatorname{mod} h' + \operatorname{mod} h'' < R_x + \varepsilon < R'_x,\\ \operatorname{mod} k' + \operatorname{mod} k'' < R_y + \varepsilon < R'_y,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{gathered}$$

Dans les limites que nous venons d'assigner, la série

$$\sum a_{m,n,\ldots} (h' + h'')^m (k' + k'')^n \ldots\ldots$$

peut se transformer en une série, Ω, entière par rapport à toutes les quantités

$$h', k', \ldots, h'', k'', \ldots \text{ [1]},$$

et si, dans cette dernière, on groupe les termes suivant une loi quelconque, la somme des modules des groupes est moindre que

$$\sum \alpha_{m,n,\ldots} (\operatorname{mod} h' + \operatorname{mod} h'')^m (\operatorname{mod} k' + \operatorname{mod} k'')^n \ldots,$$

moindre, à plus forte raison, que

$$\sum \alpha_{m,n,\ldots} (R_x + \varepsilon)^m (R_y + \varepsilon)^n \ldots : \tag{13}$$

nous désignerons cette dernière quantité par M_1.

Cela étant, tout point commun à $\mathfrak{f}$ et à $\mathfrak{i}_1$ a, dans l'espace $[(x, y, \ldots)]$, des coordonnées qui peuvent se représenter par les sommes $x_1 + h''$, $y_1 + k''$, $\ldots$, où $h'', k'', \ldots$ ont des modules inférieurs à ε. Pour avoir, en un pareil point, la valeur de $S(x, y, \ldots)$,

---

[1] Voir l'ouvrage cité, n° **33**.

il suffit d'ordonner la série Ω par rapport à h', k', ..., et de remplacer, dans la série résultant de cette ordination, chaque coefficient par son module, et les quantités h', k', ... par R_x, R_y, ... respectivement : la somme positive ainsi obtenue sera donc inférieure à la quantité (13), d'où résulte que, dans toute l'étendue commune à $\mathfrak{f}$ et à $\mathfrak{i}_1$, $S(x, y, \ldots)$ est inférieur à M_1.

Finalement, si l'on désigne par g le nombre des intervalles complexes partiels qui comprennent quelque point de $\mathfrak{f}$, et par

$$\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{i}_g$$

les intervalles dont il s'agit, on pourra à ces derniers faire correspondre respectivement des constantes positives,

$$(14) \qquad M_1, M_2, \ldots\ldots, M_g,$$

telles que, dans toute l'étendue commune à $\mathfrak{f}$ et à $\mathfrak{i}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, g$), la valeur de $S(x, y, \ldots)$ soit inférieure à M_k. En désignant donc par M la plus grande des g constantes (14), la valeur de $S(x, y, \ldots)$ sera, dans toute l'étendue de $\mathfrak{f}$, inférieure à M.

[**10**] Les remarques suivantes nous seront prochainement utiles.

I. *Si à une région quelconque,* $\mathfrak{R}$, *de l'espace* $[(x, y, \ldots)]$ *on adjoint la région,* $\mathfrak{r}$, *que forment les points semi-extérieurs à* $\mathfrak{R}$, *la région ainsi obtenue est nécessairement complète* (n° **8**).

En dehors des régions $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{r}$, il n'existe, dans l'espace $[(x, y, \ldots)]$, que des points complètement extérieurs à la région $\mathfrak{R}$, et tout revient dès lors à prouver qu'un point A, complètement extérieur à $\mathfrak{R}$, est par là même complètement extérieur à $\mathfrak{r}$.

A cet effet, désignons par P un point variable de $\mathfrak{R}$, et par p un point variable de $\mathfrak{r}$. Puisque le point A est, par hypothèse, complètement extérieur à $\mathfrak{R}$, il existe quelque constante positive (>0), α, telle que la distance AP satisfasse, pour toute position de P dans $\mathfrak{R}$, à la relation

$$(15) \qquad AP > \alpha.$$

Je dis qu'en désignant par β une constante choisie comme on voudra au-dessous de α, on a, pour toute position de p dans $\mathfrak{r}$,

$$Ap > \beta.$$

Effectivement, la distance mutuelle de deux points ne pouvant surpasser la somme de leurs distances à un même troisième [1], on a, quels que soient P dans $\mathfrak{R}$ et p dans $\mathfrak{r}$,

$$AP \leqq Ap + Pp,$$

[1] Voir l'ouvrage cité, n° **2**, I, et n° **15**.

d'où l'on déduit, à cause de (15),

$$\alpha < Ap + Pp,$$

ou

$$Ap > \alpha - Pp.$$

En désignant par p' une position déterminée (quelconque) du point p dans $\mathfrak{r}$, on aura d'après cela, quel que soit le point P dans $\mathfrak{R}$,

$$(16) \qquad Ap' > \alpha - Pp';$$

enfin, le point p' étant semi-extérieur à $\mathfrak{R}$, il existe des points de $\mathfrak{R}$ dans un voisinage de p' aussi rapproché qu'on le voudra, et l'on pourra trouver dans $\mathfrak{R}$ quelque point P tel que l'on ait

$$(17) \qquad Pp' < \alpha - \beta;$$

la simple soustraction membre à membre des relations (16) et (17) donnera alors, comme il s'agissait de l'établir,

$$Ap' > \beta.$$

II. *Si à une région limitée,* $\mathfrak{R}$, *de l'espace* $[(x, y, \ldots)]$ *on adjoint la région,* $\mathfrak{r}$, *que forment les points semi-extérieurs à* $\mathfrak{R}$, *la région ainsi obtenue est elle-même limitée.*

Tout revient évidemment à prouver que la région $\mathfrak{r}$ est limitée.

A cet effet, désignons par A un point fixe (quelconque) de l'espace $[(x, y, \ldots)]$, par P un point variable de $\mathfrak{R}$, et par p un point variable de $\mathfrak{r}$. Puisque la région $\mathfrak{R}$ est, par hypothèse, limitée, il existe quelque constante positive, Φ, telle que la distance AP satisfasse, pour toute position de P dans $\mathfrak{R}$, à la relation

$$(18) \qquad AP < \Phi.$$

Je dis qu'en désignant par Ψ une constante choisie comme on voudra au-dessus de Φ, on a, pour toute position du point p dans $\mathfrak{r}$,

$$Ap < \Psi.$$

Effectivement, la distance mutuelle de deux points ne pouvant surpasser la somme de leurs distances à un même troisième, on a, quels que soient P dans $\mathfrak{R}$ et p dans $\mathfrak{r}$,

$$Ap \leqq AP + Pp,$$

d'où l'on déduit, à cause de (18),

$$Ap < \Phi + Pp.$$

En désignant par p' une position déterminée (quelconque) du point p dans $\mathfrak{r}$, on aura d'après cela, quel que soit le point P dans $\mathfrak{R}$,

$$(19) \qquad Ap' < \Phi + Pp';$$

enfin, le point p' étant semi-extérieur à $\mathfrak{R}$, il existe des points de $\mathfrak{R}$ dans un voisinage de p' aussi rapproché qu'on le voudra, et l'on pourra trouver dans $\mathfrak{R}$ quelque point P tel que l'on ait

$$\mathrm{P}p' < \Psi - \Phi; \tag{20}$$

la simple addition membre à membre des relations (19) et (20) donnera alors, comme il s'agissait de l'établir,

$$\mathrm{A}p' < \Psi.$$

III. Supposons que les variables indépendantes aient été partagées en un nombre quelconque de groupes, trois par exemple,

$$x, \ldots; \qquad y, \ldots; \qquad z, \ldots,$$

et soient

$$\mathfrak{R}_{x,\ldots}, \quad \mathfrak{R}_{y,\ldots}, \quad \mathfrak{R}_{z,\ldots} \tag{21}$$

trois régions respectivement extraites des espaces

$$[(x, \ldots)], \qquad [(y, \ldots)], \qquad [(z, \ldots)]; \tag{22}$$

en associant par la pensée ces trois régions, on en obtient une,

$$(\mathfrak{R}_{x,\ldots}, \quad \mathfrak{R}_{y,\ldots}, \quad \mathfrak{R}_{z,\ldots}), \tag{23}$$

extraite de l'espace

$$[(x, \ldots, y, \ldots, z, \ldots)]. \tag{24}$$

Soient maintenant $\mathfrak{r}_{x,\ldots}$ la région de l'espace $[(x, \ldots)]$ formée par l'ensemble des points semi-extérieurs à $\mathfrak{R}_{x,\ldots}$; $\mathfrak{r}_{y,\ldots}$ la région de l'espace $[(y, \ldots)]$ formée par l'ensemble des points semi-extérieurs à $\mathfrak{R}_{y,\ldots}$; $\mathfrak{r}_{z,\ldots}$ la région de l'espace $[(z, \ldots)]$ formée par l'ensemble des points semi-extérieurs à $\mathfrak{R}_{z,\ldots}$. Si à chacune des régions (21) on adjoint l'ensemble des points qui lui sont semi-extérieurs, on obtiendra, dans les espaces respectifs (22), les trois régions

$$\mathfrak{R}_{x,\ldots} + \mathfrak{r}_{x,\ldots}, \quad \mathfrak{R}_{y,\ldots} + \mathfrak{r}_{y,\ldots}, \quad \mathfrak{R}_{z,\ldots} + \mathfrak{r}_{z,\ldots}.$$

Je dis que, *dans l'espace* (24), *la région*

$$(\mathfrak{R}_{x,\ldots} + \mathfrak{r}_{x,\ldots}, \quad \mathfrak{R}_{y,\ldots} + \mathfrak{r}_{y,\ldots}, \quad \mathfrak{R}_{z,\ldots} + \mathfrak{r}_{z,\ldots})$$

est précisément celle qu'on obtient en adjoignant à la région (23) *l'ensemble des points qui lui sont semi-extérieurs.*

Observons en effet que tout point de l'espace (24) se trouve forcément, ou situé dans la région (23), ou semi-extérieur à la région (23), ou complètement extérieur à cette région, et que, dès lors, la région résultant de l'adjonction dont parle notre énoncé se trouve constituée par l'ensemble des divers points *non complètement extérieurs* à la région (23).

Or, pour qu'un point

(25) $$(X, \ldots, Y, \ldots, Z, \ldots),$$

de l'espace (24), soit complètement extérieur à la région (23), il faut et il suffit, comme nous allons l'établir, que quelqu'un des trois points

(26) $$(X, \ldots), \quad (Y, \ldots), \quad (Z, \ldots),$$

appartenant aux espaces respectifs (22), soit complètement extérieur à celle des trois régions (21) qui lui correspond.

La condition formulée est nécessaire.

Supposons en effet qu'aucun des trois points (26) ne soit complètement extérieur à la région correspondante. Le point $(X, \ldots)$ n'étant pas complètement extérieur à la région $\mathfrak{R}_{x,\ldots}$, cette dernière contient quelque point dont la distance à $(X, \ldots)$ est inférieure à toute quantité positive donnée; la même chose est vraie de la région $\mathfrak{R}_{y,\ldots}$ par rapport au point $(Y, \ldots)$, et de la région $\mathfrak{R}_{z,\ldots}$ par rapport au point $(Z, \ldots)$. Il en résulte, si l'on se reporte à la formule de la distance (n° **7**), que la région (23) contient quelque point dont la distance au point (25) est inférieure à toute quantité positive donnée : le point (25) n'est donc pas complètement extérieur à la région (23).

La condition formulée est suffisante.

Supposons en effet que quelqu'un des trois points (26) soit complètement extérieur à la région correspondante, par exemple que $(X, \ldots)$ soit complètement extérieur à $\mathfrak{R}_{x,\ldots}$. En désignant par λ une constante positive convenablement choisie, la distance de $(X, \ldots)$ à un point variable de $\mathfrak{R}_{x,\ldots}$ sera constamment supérieure à λ; à plus forte raison, si l'on se reporte à la formule de la distance, celle du point (25) à un point variable de la région (23) sera-t-elle constamment supérieure à λ. Le point (25) est donc complètement extérieur à la région (23).

Ainsi, la condition formulée est à la fois nécessaire et suffisante.

On peut d'ailleurs l'énoncer comme il suit :

Pour que le point (25) soit *non complètement extérieur* à la région (23) [c'est-à-dire situé dans la région ou semi-extérieur], il faut et il suffit que *chacun* des trois points (26) soit *non complètement extérieur* à celle des trois régions (21) qui lui correspond.

Observons maintenant que, dans l'espace $[(x, \ldots)]$, l'ensemble des points non complètement extérieurs à $\mathfrak{R}_{x,\ldots}$ est $\mathfrak{R}_{x,\ldots} + \mathfrak{r}_{x,\ldots}$; que, dans l'espace $[(y, \ldots)]$, l'ensemble des points non complètement extérieurs à $\mathfrak{R}_{y,\ldots}$ est $\mathfrak{R}_{y,\ldots} + \mathfrak{r}_{y,\ldots}$; enfin que, dans l'espace $[(z, \ldots)]$, l'ensemble des points non complètement extérieurs à $\mathfrak{R}_{z,\ldots}$ est $\mathfrak{R}_{z,\ldots} + \mathfrak{r}_{z,\ldots}$. Cela étant, il est clair que, dans l'espace (24), l'ensemble des points non complètement extérieurs à la région (23) est bien, comme nous voulions l'établir,

$$(\mathfrak{R}_{x,\ldots} + \mathfrak{r}_{x,\ldots}, \quad \mathfrak{R}_{y,\ldots} + \mathfrak{r}_{y,\ldots}, \quad \mathfrak{R}_{z,\ldots} + \mathfrak{r}_{z,\ldots}).$$

IV. Considérons actuellement une région *normale* de l'espace $[(x, y, \ldots)]$.

Il résulte immédiatement de la définition posée au n° **1** que *tout point appartenant à une région normale lui est complètement intérieur*, c'est-à-dire qu'il est le centre de quelque domaine entièrement situé dans la région.

Pour ce qui est des points de $[(x, y, \ldots)]$ étrangers à la région (les uns complètement extérieurs, les autres semi-extérieurs), trois cas peuvent se présenter :

A) Il n'existe dans $[(x, y, \ldots)]$ *aucun point étranger à la région :* cette dernière coïncide alors avec l'étendue indéfinie de $[(x, y, \ldots)]$.

B) Il existe des points étrangers à la région, et ces points sont tous semi-extérieurs : c'est ce qui a lieu, par exemple, lorsque, désignant par x, y deux variables réelles, on considère dans l'espace $[(x, y)]$ la région normale obtenue par la simple suppression du point $x = y = 0$.

C) Il existe des points complètement extérieurs à la région : je dis que, *dans ce dernier cas, il existe forcément aussi des points semi-extérieurs.*

Effectivement, soient

$\mathfrak{n}$ la région normale considérée;

$(x_0, y_0, \ldots)$ un point appartenant à la région $\mathfrak{n}$, et, par suite, complètement intérieur à cette région;

$(X, Y, \ldots)$ un point complètement extérieur à $\mathfrak{n}$.

Joignons ces deux points l'un à l'autre par l'arc

$$(27)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = x_0 + t(X - x_0), \\ y = y_0 + t(Y - y_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

où t désigne une indéterminée réelle assujettie à varier de 0 à 1,

$$0 \leqq t \leqq 1;$$

pour la valeur initiale $t = 0$, le point variable que définissent les formules (27) coïncide avec $(x_0, y_0, \ldots)$, et, pour la valeur finale $t = 1$, avec $(X, Y, \ldots)$.

Cela étant, si l'on divise en deux parties égales l'intervalle de 0 à 1, il y aura un de ces intervalles partiels, et un seul, dont la valeur initiale, t_1, substituée dans les formules (27), fournira un point de $\mathfrak{n}$, tandis que la valeur finale, T_1, fournira un point étranger à $\mathfrak{n}$. Si l'on divise à son tour en deux parties égales l'intervalle de t_1 à T_1, il y aura encore un de ces nouveaux intervalles partiels, et un seul, dont la valeur initiale, t_2, fournira un point de $\mathfrak{n}$, tandis que la valeur finale, T_2, fournira un point étranger à $\mathfrak{n}$. Et ainsi de suite indéfiniment. On formera de cette manière une succession illimitée d'intervalles,

$$0 \text{ à } 1, \quad t_1 \text{ à } T_1, \quad t_2 \text{ à } T_2, \quad \ldots, \quad t_k \text{ à } T_k, \quad \ldots,$$

jouissant de la triple propriété : 1° que chacun d'eux soit contenu dans le précédent; 2° que la différence $T_k - t_k$, égale à $\frac{1}{2^k}$, soit infiniment petite pour k infini; 3° que la valeur initiale d'un intervalle quelconque, substituée à t dans les formules (27), fournisse un point de $\mathfrak{n}$, tandis que sa valeur finale fournit un point étranger à $\mathfrak{n}$.

Cela étant :

1° Les variantes t_k, T_k tendent vers une limite commune, τ (¹).

2° Cette limite τ, substituée à t dans les formules (27), ne peut fournir un point de $\mathfrak{n}$: car ce dernier serait complètement intérieur à $\mathfrak{n}$, et dès lors la variante T_k, qui tend vers τ, finirait, contrairement à ce qui précède, par fournir des points de $\mathfrak{n}$.

3° Cette limite τ, substituée à t dans les formules (27), ne peut fournir un point complètement extérieur à $\mathfrak{n}$: car, s'il en était ainsi, la variante t_k, qui tend vers τ, finirait, contrairement à ce qui précède, par fournir des points étrangers à $\mathfrak{n}$.

De tout cela, il résulte que la valeur τ, substituée à t dans les formules (27), fournit un point semi-extérieur à $\mathfrak{n}$.

V. *Lorsqu'une région normale,* $\mathfrak{n}$, *de l'espace* $[(x, y, \ldots)]$ *est limitée, il existe nécessairement dans* $[(x, y, \ldots)]$ *des points complètement extérieurs à la région, et par suite aussi,* en vertu de IV, *des points semi-extérieurs.* Il résulte d'ailleurs de I et II que *la région obtenue par l'adjonction à* $\mathfrak{n}$ *des points semi-extérieurs est limitée et complète.*

Puisque la région $\mathfrak{n}$ est limitée, la distance

$$\sqrt{\operatorname{mod} x^2 + \operatorname{mod} y^2 + \ldots} \tag{28}$$

du point fixe (o, o, ...) de l'espace $[(x, y, \ldots)]$ au point variable $(x, y, \ldots)$ reste toujours inférieure à une constante positive convenablement choisie, D, tant que le point $(x, y, \ldots)$ n'excède pas la région $\mathfrak{n}$. Désignant alors par α une constante positive choisie comme on voudra, je dis que le point

$$(D + \alpha,\ D + \alpha,\ \ldots\ldots) \tag{29}$$

est complètement extérieur à $\mathfrak{n}$.

Effectivement, si l'on désigne par n le nombre des variables $x, y, \ldots$, la distance du point (o, o, ...) au point (29), évaluée à l'aide de la formule (28), a pour valeur la quantité $(D + \alpha)\sqrt{n}$, évidemment supérieure à D; comme d'ailleurs l'expression (28) est une fonction continue de $x, y, \ldots$, la distance du point (o, o, ...) à tous les points $(x, y, \ldots)$ suffisamment voisins du point (29) est elle-même supérieure à D. Il en résulte que tous ces points sont extérieurs à la région $\mathfrak{n}$, c'est-à-dire que le point (29) lui est complètement extérieur.

(¹) Voir l'ouvrage cité, n° **9**, III.

[**11**] Désignant par n le nombre des variables $x, y, \ldots$, nous qualifierons de *parfaite* toute région, $\mathfrak{P}$, de l'espace $[(x, y, \ldots)]$, qui, étant à la fois *normale* et *limitée*, satisfait en outre à la condition suivante :

« Si l'on considère, d'une part, un point, $(x_0, y_0, \ldots)$, arbitrairement donné dans la région $\mathfrak{P}$, d'autre part, une constante positive donnée, ε, de petitesse arbitraire, il existe quelque suite limitée de domaines (dont quelques-uns éventuellement répétés dans cette suite) ayant leurs n dimensions (n° **1**) moindres que ε, formant par leur ensemble une région qui comprend toute la région $\mathfrak{P}$ (avec des points étrangers à cette dernière), et tels : que le premier d'entre ces domaines comprenne le point $(x_0, y_0, \ldots)$; que l'un quelconque d'entre eux ait avec le précédent quelque point commun situé dans $\mathfrak{P}$; enfin, que la région commune à l'un quelconque d'entre eux et à la région formée par l'ensemble de tous les précédents soit continue. »

Telle est, par exemple, si l'on suppose les variables réelles et en nombre égal à 3, la région intérieure à une sphère; il n'en est pas de même de la région comprise entre deux sphères concentriques, ni de celle qu'engendre l'intérieur d'un cercle tournant autour d'une droite de son plan qui n'a avec la circonférence aucun point commun.

[**12**] La définition précédente doit être complétée par deux remarques.

Supposons que les variables indépendantes aient été partagées en un nombre quelconque de groupes, trois par exemple,

$$x, \ldots; \quad y, \ldots; \quad z, \ldots,$$

et soient

$$\mathfrak{P}_{x,\ldots}, \quad \mathfrak{P}_{y,\ldots}, \quad \mathfrak{P}_{z,\ldots} \tag{30}$$

trois régions *parfaites* respectivement extraites des espaces correspondants

$$[(x, \ldots)], \quad [(y, \ldots)], \quad [(z, \ldots)]; \tag{31}$$

je dis que *la région*

$$(\mathfrak{P}_{x,\ldots}, \quad \mathfrak{P}_{y,\ldots}, \quad \mathfrak{P}_{z,\ldots}) \tag{32}$$

est, dans l'espace

$$[(x, \ldots, y, \ldots, z, \ldots)], \tag{33}$$

une région parfaite.

I. Nous rappellerons tout d'abord une remarque exposée ailleurs [1].

Si les régions $\quad \mathfrak{R}_{x,\ldots}, \quad \mathfrak{R}_{y,\ldots}, \quad \mathfrak{R}_{z,\ldots},$

---

[1] Voir l'ouvrage cité, n^{os} **4, 39** et **41**.

respectivement extraites des espaces (31), sont supposées, ou toutes limitées, ou toutes complètes, ou toutes continues, ou toutes normales, la région

$$(\mathfrak{R}_{x,\ldots},\quad \mathfrak{R}_{y,\ldots},\quad \mathfrak{R}_{z,\ldots})$$

jouit, dans l'espace (33), de la propriété correspondante, et ne peut manquer d'être elle-même, ou limitée, ou complète, ou continue, ou normale.

II. Revenons à l'énoncé qu'il s'agit d'établir.

Les régions (30), étant supposées parfaites, sont, par là même, normales et limitées, et il résulte alors de I que la région (32) est elle-même limitée et normale. Il reste à s'occuper de la dernière condition, formulée au numéro précédent, et à faire voir que, si elle se trouve remplie pour les diverses régions (30), elle l'est nécessairement aussi pour la région (32).

Considérons à cet effet, d'une part, un point,

$$(x_0, \ldots, y_0, \ldots, z_0, \ldots),$$

arbitrairement donné dans la région (32), d'autre part, une constante positive donnée, ε, de petitesse arbitraire. Les points

$$(x_0, \ldots), \quad (y_0, \ldots), \quad (z_0, \ldots),$$

des espaces respectifs (31), étant respectivement situés dans les régions (30), l'hypothèse faite sur ces dernières entraîne, si l'on considère par exemple la région $\mathfrak{P}_{x,\ldots}$ et le point $(x_0, \ldots)$, l'existence, dans l'espace $[(x, \ldots)]$, de quelque suite limitée de domaines,

$$(34) \qquad \mathfrak{d}^{(1)}_{x,\ldots}, \quad \mathfrak{d}^{(2)}_{x,\ldots}, \quad \ldots\ldots, \quad \mathfrak{d}^{(G)}_{x,\ldots},$$

ayant leurs dimensions moindres que ε, formant par leur ensemble une région qui comprend toute la région $\mathfrak{P}_{x,\ldots}$, et tels : que le premier d'entre ces domaines comprenne le point $(x_0, \ldots)$; que l'un quelconque d'entre eux ait avec le précédent quelque point commun situé dans $\mathfrak{P}_{x,\ldots}$; enfin, que la région commune à l'un quelconque d'entre eux et à la région formée par l'ensemble de tous les précédents soit continue. Si, au lieu de $\mathfrak{P}_{x,\ldots}$ et $(x_0, \ldots)$, on considère $\mathfrak{P}_{y,\ldots}$ et $(y_0, \ldots)$, puis $P_{z,\ldots}$ et $(z_0, \ldots)$, il existera de même, dans les espaces respectifs $[(y, \ldots)]$ et $[(z, \ldots)]$, deux suites limitées,

$$(35) \qquad \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\ldots}, \quad \mathfrak{d}^{(2)}_{y,\ldots}, \quad \ldots\ldots, \quad \mathfrak{d}^{(K)}_{y,\ldots},$$

$$(36) \qquad \mathfrak{d}^{(1)}_{z,\ldots}, \quad \mathfrak{d}^{(2)}_{z,\ldots}, \quad \ldots\ldots, \quad \mathfrak{d}^{(L)}_{z,\ldots},$$

jouissant de propriétés qui se formulent de la même manière, *mutatis mutandis*. Or, de l'existence simultanée des trois suites (34), (35), (36), on peut, comme nous allons le voir, déduire l'existence, dans l'espace (33), d'une suite analogue relative à la région (32) et au point $(x_0, \ldots, y_0, \ldots, z_0, \ldots)$.

Considérant d'abord les deux premières, (34), (35), des trois suites précédentes, on en déduira, dans l'espace $[(x, \ldots, y, \ldots)]$, l'existence d'une suite analogue relative à la région $(\mathfrak{P}_{x,\ldots}, \mathfrak{P}_{y,\ldots})$ et au point $(x_0, \ldots, y_0, \ldots)$. A cet effet, on associera le premier domaine, $\mathfrak{d}^{(1)}_{x,\ldots}$, de la suite (34) successivement avec les K domaines de la suite (35), pris d'abord dans l'ordre où ils sont écrits, puis dans l'ordre inverse, c'est-à-dire avec les $2K - 1$ domaines

$$(37) \qquad \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\ldots}, \quad \mathfrak{d}^{(2)}_{y,\ldots}, \quad \ldots\ldots, \quad \mathfrak{d}^{(K)}_{y,\ldots}, \quad \ldots\ldots, \quad \mathfrak{d}^{(2)}_{y,\ldots}, \quad \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\ldots},$$

ce qui donnera $2K - 1$ domaines de l'espace $[(x, \ldots, y, \ldots)]$. On associera ensuite le deuxième domaine, $\mathfrak{d}^{(2)}_{x,\ldots}$, de la suite (34) successivement avec les $2K - 1$ domaines (37); puis, le troisième domaine, $\mathfrak{d}^{(3)}_{x,\ldots}$, de la suite (34) successivement avec les $2K - 1$ domaines (37); et l'on continuera ainsi jusqu'à ce qu'on soit conduit à prendre le dernier domaine, $\mathfrak{d}^{(G)}_{x,\ldots}$, de la suite (34), que l'on se bornera alors à associer successivement avec les K premiers domaines de la suite (37). On obtiendra de cette manière la suite

$$(38) \qquad (\mathfrak{d}^{(1)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\ldots}), \quad (\mathfrak{d}^{(1)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(2)}_{y,\ldots}), \quad \ldots\ldots, \quad (\mathfrak{d}^{(G)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(K)}_{y,\ldots}),$$

formée avec des domaines de l'espace $[(x, \ldots, y, \ldots)]$, et qui, relativement à la région $(\mathfrak{P}_{x,\ldots}, \mathfrak{P}_{y,\ldots})$ et au point $(x_0, \ldots, y_0, \ldots)$, sera l'analogue des précédentes [1].

---

[1] On aperçoit sans peine que, dans l'espace $[(x, \ldots, y, \ldots)]$, chacun des domaines (38) a ses dimensions moindres que ε, que la région formée par l'ensemble de ces divers domaines comprend toute la région

$$(\mathfrak{P}_{x,\ldots}, \mathfrak{P}_{y,\ldots}),$$

que le premier d'entre eux comprend le point $(x_0, \ldots, y_0, \ldots)$, et que l'un quelconque d'entre eux a avec le précédent quelque point commun situé dans

$$(\mathfrak{P}_{x,\ldots}, \mathfrak{P}_{y,\ldots}).$$

Il reste à voir que la région commune à l'un quelconque d'entre eux et à la région formée par l'ensemble de tous les précédents est continue.

A) Nous ferons tout d'abord les remarques générales suivantes :

1° Si deux régions continues, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, extraites d'un même espace, admettent quelque point commun, la région $\mathfrak{S}' + \mathfrak{S}''$, formée par leur ensemble, est elle-même continue (n° **4**, I, *A*).

2° Étant données, dans un même espace, trois régions quelconques, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, il suffit, pour avoir la région commune à $\mathfrak{S}$ et à $\mathfrak{S}' + \mathfrak{S}''$, de former la région, $\mathfrak{T}'$, commune à $\mathfrak{S}$ et à $\mathfrak{S}'$, la région, $\mathfrak{T}''$, commune à $\mathfrak{S}$ et à $\mathfrak{S}''$, et de considérer leur ensemble $\mathfrak{T}' + \mathfrak{T}''$.

3° Désignons par $\mathfrak{R}'_{x,\ldots}$, $\mathfrak{R}''_{x,\ldots}$ deux régions extraites de l'espace $[(x, \ldots)]$, par $\mathfrak{R}'_{y,\ldots}$, $\mathfrak{R}''_{y,\ldots}$ deux régions extraites de l'espace $[(y, \ldots)]$, et considérons, dans l'espace $[(x, \ldots, y, \ldots)]$, les deux régions

$$(\mathfrak{R}'_{x,\ldots}, \mathfrak{R}'_{y,\ldots}), \qquad (\mathfrak{R}''_{x,\ldots}, \mathfrak{R}''_{y,\ldots}).$$

Cela étant, il suffit, pour avoir la région commune à ces deux dernières, de considérer, Cela fait, on opérera sur les suites (38) et (36) comme on vient de le faire sur les suites (34) et (35). On associera le premier domaine, $(\mathfrak{d}^{(1)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\ldots})$, de la suite (38) successivement avec les L domaines de la suite (36), pris d'abord dans l'ordre où ils sont écrits, puis dans l'ordre inverse, c'est-à-dire avec les $2L-1$ domaines

$$(50)\qquad \mathfrak{d}^{(1)}_{z,\ldots},\quad \mathfrak{d}^{(2)}_{z,\ldots},\quad \ldots\ldots,\quad \mathfrak{d}^{(L)}_{z,\ldots},\quad \ldots\ldots,\quad \mathfrak{d}^{(2)}_{z,\ldots},\quad \mathfrak{d}^{(1)}_{z,\ldots},$$

---

d'une part, la région, $\mathfrak{T}_{x,\ldots}$, commune à $\mathfrak{R}'_{x,\ldots}$ et à $\mathfrak{R}''_{x,\ldots}$, d'autre part, la région, $\mathfrak{T}_{y,\ldots}$, commune à $\mathfrak{R}'_{y,\ldots}$ et à $\mathfrak{R}''_{y,\ldots}$, et de former, en les associant, la région

$$(\mathfrak{T}_{x,\ldots}, \mathfrak{T}_{y,\ldots}).$$

4° Désignons par

$$\mathfrak{R}'_{x,\ldots},\quad \mathfrak{R}''_{x,\ldots},\quad \ldots\ldots,\quad \mathfrak{R}^{(p)}_{x,\ldots}$$

des régions, en nombre quelconque p, extraites de l'espace $[(x, \ldots)]$, par

$$\mathfrak{R}'_{y,\ldots},\quad \mathfrak{R}''_{y,\ldots},\quad \ldots\ldots,\quad \mathfrak{R}^{(q)}_{y,\ldots}$$

des régions, en nombre quelconque q, extraites de l'espace $[(y, \ldots)]$, et considérons, dans l'espace $[(x, \ldots, y, \ldots)]$, les pq régions obtenues en associant *de toutes les manières possibles* l'une quelconque des p premières avec l'une quelconque des q dernières.

Cela étant, la région formée, dans l'espace $[(x, \ldots, y, \ldots)]$, par l'ensemble des pq régions dont il s'agit n'est autre que

$$(\mathfrak{R}'_{x,\ldots} + \mathfrak{R}''_{x,\ldots} + \ldots + \mathfrak{R}^{(p)}_{x,\ldots},\ \ \mathfrak{R}'_{y,\ldots} + \mathfrak{R}''_{y,\ldots} + \ldots + \mathfrak{R}^{(q)}_{y,\ldots}).$$

B) Il s'agit actuellement d'établir que *la région commune à l'un quelconque des domaines de la suite* (38) *et à la région formée par l'ensemble de tous les précédents est continue.*

Désignant par g l'un quelconque des entiers 1, 2, ..., G, supposons qu'on associe tour à tour, avec les $2K-1$ domaines de la suite (37), d'abord le domaine $\mathfrak{d}^{(1)}_{x,\ldots}$, puis le domaine $\mathfrak{d}^{(2)}_{x,\ldots}$, etc., et finalement le domaine $\mathfrak{d}^{(g)}_{x,\ldots}$: on obtiendra ainsi, dans l'espace $[(x, \ldots, y, \ldots)]$, une suite de $g(2K-1)$ domaines. Cette dernière, que nous nommerons S_g, satisfait, comme nous allons l'établir, à la condition formulée il y a un instant au sujet de (38).

1° La suite S_1, formée par les $2K-1$ domaines

$$(39)\qquad (\mathfrak{d}^{(1)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\ldots}),\quad (\mathfrak{d}^{(1)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(2)}_{y,\ldots}),\quad \ldots\ldots,$$
$$(\mathfrak{d}^{(1)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(K)}_{y,\ldots}),\quad \ldots\ldots,\quad (\mathfrak{d}^{(1)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(2)}_{y,\ldots}),\quad (\mathfrak{d}^{(1)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\ldots}),$$

satisfait à la condition énoncée.

Effectivement, si, dans cette suite, on considère *l'un des* K *premiers domaines*, par exemple

$$(40)\qquad (\mathfrak{d}^{(1)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(k)}_{y,\ldots})\qquad [0 < k \leqq K],$$

la région formée par l'ensemble de tous les précédents est (*A*, 4°)

$$(41)\qquad (\mathfrak{d}^{(1)}_{x,\ldots},\ \ \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\ldots} + \mathfrak{d}^{(2)}_{y,\ldots} + \ldots + \mathfrak{d}^{(k-1)}_{y,\ldots}),$$

ce qui donnera $2L-1$ domaines de l'espace $[(x, \ldots, y, \ldots, z, \ldots)]$. On associera ensuite le deuxième domaine, $(\mathfrak{d}^{(1)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(2)}_{y,\ldots})$, de la suite (38) successivement avec les $2L-1$ domaines (50); puis le troisième domaine de la suite (38) successivement avec les $2L-1$ domaines (50); et l'on continuera ainsi jusqu'à ce qu'on soit conduit à

---

et la région commune aux deux régions (40), (41) est (A, 3°)

$$(\mathfrak{d}^{(1)}_{x,\ldots},\ \text{région commune à } \mathfrak{d}^{(k)}_{y,\ldots} \text{ et à } \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\ldots} + \mathfrak{d}^{(2)}_{y,\ldots} + \ldots + \mathfrak{d}^{(k-1)}_{y,\ldots}):$$

cette dernière est donc continue, en vertu de nos hypothèses sur la suite (35).

Si l'on considère maintenant, dans la suite (39), *l'un des domaines qui suivent celui de rang* K, par exemple

$$(42)\qquad (\mathfrak{d}^{(1)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(h)}_{y,\ldots}) \qquad [0 < h < K],$$

la région formée par l'ensemble de tous les précédents est (A, 4°)

$$(43)\qquad (\mathfrak{d}^{(1)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\ldots} + \mathfrak{d}^{(2)}_{y,\ldots} + \ldots + \mathfrak{d}^{(K)}_{y,\ldots}),$$

et la région commune aux deux régions (42), (43) n'est autre, en pareil cas, que (42) : elle est donc continue.

2° L'entier g étant supposé inférieur à G, *si la suite* S_g *satisfait à la condition énoncée, la suite* S_{g+1} *ne peut manquer d'y satisfaire aussi.*

Effectivement, la suite S_{g+1} se compose de deux portions successives, dont la première n'est autre que S_g, et dont la seconde a pour éléments les $2K-1$ domaines

$$(44)\qquad (\mathfrak{d}^{(g+1)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\ldots}),\quad (\mathfrak{d}^{(g+1)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(2)}_{y,\ldots}),\quad \ldots\ldots,$$
$$(\mathfrak{d}^{(g+1)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(K)}_{y,\ldots}),\quad \ldots\ldots,\quad (\mathfrak{d}^{(g+1)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(2)}_{y,\ldots}),\quad (\mathfrak{d}^{(g+1)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\ldots}).$$

La suite S_g satisfaisant, par hypothèse, à la condition énoncée, nous avons donc à faire voir que si l'on compare l'un quelconque des domaines (44) à la région formée par l'ensemble de tous ceux qui le précèdent dans la suite S_{g+1}, la région commune ne peut manquer d'être continue.

a) Supposons d'abord que le domaine considéré dans (44) soit *l'un des* K *premiers*, par exemple

$$(45)\qquad (\mathfrak{d}^{(g+1)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(k)}_{y,\ldots}) \qquad [0 < k \leqq K].$$

Si l'on compare le domaine (45) à la région formée par l'ensemble de tous ceux qui se trouvent avant lui dans (44), c'est-à-dire (A, 4°) à la région

$$(46)\qquad (\mathfrak{d}^{(g+1)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\ldots} + \mathfrak{d}^{(2)}_{y,\ldots} + \ldots + \mathfrak{d}^{(k-1)}_{y,\ldots}),$$

la région commune à (45) et à (46) est (A, 3°)

$$\mathfrak{T}' = (\mathfrak{d}^{(g+1)}_{x,\ldots},\ \text{région commune à } \mathfrak{d}^{(k)}_{y,\ldots} \text{ et à } \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\ldots} + \mathfrak{d}^{(2)}_{y,\ldots} + \ldots + \mathfrak{d}^{(k-1)}_{y,\ldots});$$

elle est donc continue, en vertu de nos hypothèses sur la suite (35).

Si l'on compare le domaine (45) à la région formée par l'ensemble des domaines de la suite S_g, c'est-à-dire (A, 4°) à la région

$$(47)\qquad (\mathfrak{d}^{(1)}_{x,\ldots} + \mathfrak{d}^{(2)}_{x,\ldots} + \ldots + \mathfrak{d}^{(g)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\ldots} + \mathfrak{d}^{(2)}_{y,\ldots} + \ldots + \mathfrak{d}^{(K)}_{y,\ldots}),$$

prendre le dernier domaine, $(\mathfrak{d}^{(G)}_{x,\dots}, \mathfrak{d}^{(K)}_{y,\dots})$, de la suite (38), que l'on se bornera alors à associer successivement avec les L premiers domaines de la suite (50). On obtiendra de cette manière la suite

$$(\mathfrak{d}^{(1)}_{x,\dots}, \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\dots}, \mathfrak{d}^{(1)}_{z,\dots}), \quad (\mathfrak{d}^{(1)}_{x,\dots}, \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\dots}, \mathfrak{d}^{(2)}_{z,\dots}), \quad \dots\dots, \quad (\mathfrak{d}^{(G)}_{x,\dots}, \mathfrak{d}^{(K)}_{y,\dots}, \mathfrak{d}^{(L)}_{z,\dots}),$$

formée avec des domaines de l'espace $[(x, \dots, y, \dots, z, \dots)]$, et qui, relativement à la région (32) et au point $(x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots)$, sera l'analogue des précédentes.

Ainsi se trouve établie la nature parfaite de la région (32).

---

la région commune à (45) et à (47) est (A, 3°)

$$\mathfrak{T}'' = (\text{région commune à } \mathfrak{d}^{(g+1)}_{x,\dots} \text{ et à } \mathfrak{d}^{(1)}_{x,\dots} + \mathfrak{d}^{(2)}_{x,\dots} + \dots + \mathfrak{d}^{(g)}_{x,\dots}, \ \mathfrak{d}^{(k)}_{y,\dots});$$

elle est donc continue, en vertu de nos hypothèses sur la suite (34).

Ainsi, les deux régions $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$ sont l'une et l'autre continues; elles admettent d'ailleurs quelque point commun, puisque leur région commune (A, 3°) est

$$(\text{région commune à } \mathfrak{d}^{(g+1)}_{x,\dots} \text{ et à } \mathfrak{d}^{(1)}_{x,\dots} + \mathfrak{d}^{(2)}_{x,\dots} + \dots + \mathfrak{d}^{(g)}_{x,\dots},$$
$$\text{région commune à } \mathfrak{d}^{(k)}_{y,\dots} \text{ et à } \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\dots} + \mathfrak{d}^{(2)}_{y,\dots} + \dots + \mathfrak{d}^{(k-1)}_{y,\dots}):$$

il en résulte (A, 1°) que la région $\mathfrak{T}' + \mathfrak{T}''$ est continue.

Or, en vertu d'une des remarques faites plus haut (A, 2°), $\mathfrak{T}' + \mathfrak{T}''$ est la région commune au domaine (45) et à la région formée par l'ensemble de tous ceux qui le précèdent dans la suite S_{g+1} : cette région commune est donc continue.

b) Supposons maintenant que le domaine considéré dans (44) soit *l'un de ceux qui suivent celui de rang* K, par exemple

$$(48) \qquad (\mathfrak{d}^{(g+1)}_{x,\dots}, \mathfrak{d}^{(h)}_{y,\dots}) \qquad [0 < h < K].$$

Si l'on compare le domaine (48) à la région formée par l'ensemble de tous ceux qui se trouvent avant lui dans (44), c'est-à-dire (A, 4°) à la région

$$(49) \qquad (\mathfrak{d}^{(g+1)}_{x,\dots}, \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\dots} + \mathfrak{d}^{(2)}_{y,\dots} + \dots + \mathfrak{d}^{(K)}_{y,\dots}),$$

la région, $\mathfrak{T}'_1$, commune à (48) et à (49) n'est autre, en pareil cas, que (48); elle est donc continue.

Si l'on compare le domaine (48) à la région formée par l'ensemble des domaines de la suite S_g, c'est-à-dire (A, 4°) à la région (47), la région, $\mathfrak{T}''_1$, commune à (48) et à (47) est (A, 3°)

$$\mathfrak{T}''_1 = (\text{région commune à } \mathfrak{d}^{(g+1)}_{x,\dots} \text{ et à } \mathfrak{d}^{(1)}_{x,\dots} + \mathfrak{d}^{(2)}_{x,\dots} + \dots + \mathfrak{d}^{(g)}_{x,\dots}, \ \mathfrak{d}^{(h)}_{y,\dots});$$

elle est donc continue, en vertu de nos hypothèses sur la suite (34).

Ainsi, les deux régions $\mathfrak{T}'_1$, $\mathfrak{T}''_1$ sont l'une et l'autre continues; elles admettent d'ailleurs quelque point commun, car leur région commune n'est autre que $\mathfrak{T}''_1$; il en résulte (A, 1°) que la région $\mathfrak{T}'_1 + \mathfrak{T}''_1$ est continue.

Or, en vertu d'une remarque déjà invoquée (A, 2°), $\mathfrak{T}'_1 + \mathfrak{T}''_1$ est la région commune au domaine (48) et à la région formée par l'ensemble de tous ceux qui le précèdent dans la suite S_{g+1} : cette région est donc continue.

c) Du rapprochement de a et b il résulte, comme nous voulions l'établir, que, si l'on compare l'un quelconque des domaines (44) à la région formée par l'ensemble de tous ceux

[**13**] La seconde des deux remarques que nous avons annoncées au début du n° **12** concernant les régions parfaites se rapporte au calcul des fonctions par cheminement. Nous rappellerons tout d'abord quelques définitions.

Les variables $x, y, \ldots$ étant supposées, indifféremment, *réelles* ou *imaginaires*, une série entière en $x-x_0$, $y-y_0$, ..., admettant, autour du centre $(x_0, y_0, \ldots)$, quelque domaine de convergence, définit, comme on sait [1], une fonction olotrope à l'intérieur d'un pareil domaine. Donnons à ce développement la forme de Taylor [2]; puis, désignant par $(x_1, y_1, \ldots)$ un point intérieur au domaine, introduisons dans ce développement et dans toutes ses dérivées l'hypothèse numérique

$$x, y, \ldots = x_1, y_1, \ldots.$$

La connaissance des valeurs que prennent alors les sommes de ces divers développements nous permettra évidemment de construire celui de notre fonction à partir des nouvelles valeurs initiales $x_1, y_1, \ldots$: ce deuxième développement de Taylor, entier en $x-x_1$, $y-y_1$, ..., admettra certainement quelque domaine de convergence, et nous dirons, pour abréger le discours, qu'il *se raccorde* avec le précédent.

Cela posé, considérons, dans l'espace $[(x, y, \ldots)]$, un *chemin brisé* ayant pour *sommets* successifs

$$(51)\quad (x_0, y_0, \ldots),\quad (x_1, y_1, \ldots),\quad (x_2, y_2, \ldots),\quad \ldots,\quad (x_g, y_g, \ldots),\quad (X, Y, \ldots).$$

Si, à partir de ces sommets successifs, on peut construire autant de développements dont chacun se raccorde avec le précédent, et dont le premier ne soit autre que le développement donné, le chemin brisé (51) sera dit *praticable* par rapport au développement donné. D'après cela, il faudra donc, pour que le chemin (51) soit praticable, que le développement donné admette des rayons de convergence respectivement supérieurs aux modules des différences x_1-x_0, y_1-y_0, ..., ce qui permettra de construire, à partir des valeurs $x_1, y_1, \ldots$, un deuxième développement se raccordant avec le premier; il faudra ensuite que ce nouveau développement admette

---

qui le précèdent dans la suite S_{g+1}, la région commune ne peut manquer d'être continue, et que, dès lors, la suite S_{g+1} satisfait bien à la condition énoncée.

3° Du simple rapprochement des propositions 1° et 2°, savoir :

La suite S_1 *satisfait à la condition énoncée ;*

Si la suite S_g *y satisfait, la suite* S_{g+1} *y satisfait aussi*,

il résulte immédiatement que *la suite* S_G *satisfait à la condition énoncée.*

La suite (38) *y satisfait donc elle-même*, puisqu'elle se déduit de S_G par la simple suppression des K — 1 derniers domaines

$$(\mathfrak{d}^{(G)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(K-1)}_{y,\ldots}),\quad (\mathfrak{d}^{(G)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(K-2)}_{y,\ldots}),\quad \ldots\ldots,\quad (\mathfrak{d}^{(G)}_{x,\ldots}, \mathfrak{d}^{(1)}_{y,\ldots}).$$

(1) Voir l'ouvrage cité, n° **46**, I.

(2) *Ibid.*, n° **55**.

des rayons de convergence supérieurs aux modules des différences $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, ..., ce qui permettra de construire, à partir de x_2, y_2, ..., un troisième développement se raccordant avec le second; et ainsi de suite jusqu'au développement construit à partir de x_g, y_g, ..., qui doit admettre des rayons de convergence supérieurs aux modules des différences $X - x_g$, $Y - y_g$, ..., afin qu'un dernier développement puisse être finalement construit à partir de (X, Y, ...).

Le développement entier en $x - x_0$, $y - y_0$, ..., choisi comme base des calculs précédents, sera qualifié de *fondamental;* de même, les premières valeurs, x_0, y_0, ..., des variables indépendantes, ainsi que le point $(x_0, y_0, \ldots)$ dont elles sont les coordonnées réelles ou imaginaires.

Si l'on considère deux chemins brisés partant du point fondamental $(x_0, y_0, \ldots)$ et aboutissant au même sommet final, on sait que ces deux chemins, à supposer qu'ils soient l'un et l'autre praticables par rapport au développement donné, peuvent conduire, suivant les cas, soit au même développement final, soit, au contraire, à deux développements distincts. En conséquence, un développement fondamental donné (admettant quelque domaine de convergence) sera dit définir, non pas une fonction, mais une *pseudo-fonction* de $x, y, \ldots$: pour plus de simplicité toutefois, nous remplacerons souvent le mot *pseudo-fonction* par le mot *fonction*, auquel nous attacherons implicitement le même sens.

Si à un développement fondamental quelconque on substitue sa dérivée d'ordres partiels $p, q, \ldots$, tout chemin brisé praticable relativement aux anciennes données l'est encore relativement aux nouvelles, et les développements successifs obtenus dans le second cas sont les dérivées d'ordres partiels $p, q, \ldots$ de ceux qu'on obtient dans le premier. Cette deuxième pseudo-fonction se nomme la *dérivée d'ordres partiels* $p, q, \ldots$ de la proposée.

Enfin, si l'on considère simultanément diverses pseudo-fonctions de $x, y, \ldots$ définies par un même point fondamental et divers développements fondamentaux, une expression de forme entière par rapport aux sommes de ces développements et de telles ou telles de leurs dérivées (d'ordres quelconques) définit évidemment une nouvelle pseudo-fonction; et tout chemin praticable à la fois pour les diverses pseudo-fonctions données ne peut manquer de l'être aussi pour la nouvelle.

[**14**] Étant donné, dans l'espace $[(x, y, \ldots)]$, un chemin brisé, (51), si l'on forme, avec les coordonnées $x, y, \ldots$ de deux sommets consécutifs quelconques, le Tableau des différences

$$\begin{array}{cccc}
x_1 - x_0, & x_2 - x_1, & \ldots\ldots, & X - x_g, \\
y_1 - y_0, & y_2 - y_1, & \ldots\ldots, & Y - y_g, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots,
\end{array}$$

et qu'on évalue, dans les lignes respectives de ce Tableau, les plus grands modules,

$\mu_x, \mu_y, \ldots$, que présentent les différences dont il s'agit, ces quantités $\mu_x, \mu_y, \ldots$ se nommeront les *écarts maxima* du chemin brisé (51).

Cela posé, considérons, d'une part, une pseudo-fonction de $x, y, \ldots$, définie, conformément aux explications qui précèdent, par un point fondamental, $(x_0, y_0, \ldots)$, et par un développement fondamental; d'autre part, une région *continue*, $\mathfrak{R}$, extraite de l'espace $[(x, y, \ldots)]$, et contenant le point $(x_0, y_0, \ldots)$. Nous dirons que la pseudo-fonction dont il s'agit est *calculable par cheminement dans la région* $\mathfrak{R}$ *avec les rayons de convergence* $R_x, R_y, \ldots$, si tout chemin brisé ayant son premier sommet au point fondamental, ses divers sommets dans la région $\mathfrak{R}$, et des écarts maxima respectivement inférieurs à $R_x, R_y, \ldots$, est praticable pour la pseudo-fonction et conduit à des développements successifs admettant tous comme rayons de convergence $R_x, R_y, \ldots$.

Nous établirons maintenant, au sujet des régions parfaites, la proposition suivante :

Toute pseudo-fonction de $x, y, \ldots$, calculable par cheminement dans une région parfaite, $\mathfrak{P}$, avec les rayons $R_x, R_y, \ldots$, peut, dans cette même région, être assimilée à une véritable fonction olotrope.

Effectivement, si l'on désigne par r la plus petite des quantités positives $R_x, R_y, \ldots$, et si l'on considère, d'une part, cette quantité r, d'autre part, le point fondamental, $(x_0, y_0, \ldots)$, situé dans $\mathfrak{P}$, on peut, conformément à la définition des régions parfaites (n° **11**), assigner quelque suite limitée de domaines,

$$\mathfrak{d}^{(1)}, \quad \mathfrak{d}^{(2)}, \quad \ldots\ldots, \quad \mathfrak{d}^{(G)} \tag{52}$$

(dont quelques-uns éventuellement répétés dans cette suite), ayant leurs dimensions moindres que r, formant par leur ensemble une région qui comprend toute la région $\mathfrak{P}$ (avec des points étrangers à cette dernière), et tels : que le premier d'entre ces domaines comprenne le point fondamental $(x_0, y_0, \ldots)$, que l'un quelconque d'entre eux ait avec le précédent quelque point commun situé dans $\mathfrak{P}$, enfin, que la région commune à l'un quelconque d'entre eux et à la région formée par l'ensemble de tous les précédents soit continue.

Le point fondamental $(x_0, y_0, \ldots)$ étant commun à $\mathfrak{P}$ et à $\mathfrak{d}^{(1)}$, et les dimensions de $\mathfrak{d}^{(1)}$ étant toutes inférieures à r, notre fonction est évidemment olotrope dans la région $\mathfrak{d}^{(1)}$; d'ailleurs, son développement à partir de tout point commun à $\mathfrak{d}^{(1)}$ et à $\mathfrak{P}$ admet les rayons de convergence $R_x, R_y, \ldots$, et c'est ce qui a lieu, notamment, si, comme les propriétés de la suite (52) nous le permettent, on considère un point commun, $(x_1, y_1, \ldots)$, qui soit situé dans $\mathfrak{d}^{(2)}$.

Le point $(x_1, y_1, \ldots)$ étant commun à $\mathfrak{P}$ et à $\mathfrak{d}^{(2)}$, et les dimensions de $\mathfrak{d}^{(2)}$ étant toutes inférieures à r, notre fonction est de même olotrope dans $\mathfrak{d}^{(2)}$, d'où résulte, puisque la région commune à $\mathfrak{d}^{(1)}$ et $\mathfrak{d}^{(2)}$ est continue en vertu des propriétés de la suite (52), qu'elle l'est dans la région $\mathfrak{d}^{(1)} + \mathfrak{d}^{(2)}$ (n° **4**, III); d'ailleurs, son développement à partir de tout point commun à $\mathfrak{d}^{(2)}$ et $\mathfrak{P}$ admet les rayons de convergence R_x, R_y, ..., et c'est ce qui a lieu, notamment, si l'on considère un point commun, $(x_2, y_2, \ldots)$, qui soit situé dans $\mathfrak{d}^{(3)}$.

Le point $(x_2, y_2, \ldots)$ étant commun à $\mathfrak{P}$ et à $\mathfrak{d}^{(3)}$, et les dimensions de $\mathfrak{d}^{(3)}$ étant toutes inférieures à r, notre fonction est de même olotrope dans $\mathfrak{d}^{(3)}$, d'où résulte, puisque la région commune à $\mathfrak{d}^{(1)} + \mathfrak{d}^{(2)}$ et $\mathfrak{d}^{(3)}$ est continue par hypothèse, qu'elle l'est dans la région $\mathfrak{d}^{(1)} + \mathfrak{d}^{(2)} + \mathfrak{d}^{(3)}$; d'ailleurs, son développement à partir de tout point commun à $\mathfrak{d}^{(3)}$ et $\mathfrak{P}$ admet les rayons de convergence R_x, R_y, ..., et c'est ce qui a lieu, notamment, si l'on considère un point commun, $(x_3, y_3, \ldots)$, qui soit situé dans $\mathfrak{d}^{(4)}$.

Et ainsi de suite.

En continuant jusqu'à épuisement des domaines (52), on voit que notre fonction est olotrope dans la région

$$\mathfrak{d}^{(1)} + \mathfrak{d}^{(2)} + \ldots + \mathfrak{d}^{(G)};$$

elle l'est donc, à plus forte raison, dans $\mathfrak{P}$, qui se trouve compris dans

$$\mathfrak{d}^{(1)} + \mathfrak{d}^{(2)} + \ldots + \mathfrak{d}^{(G)}.$$

[**15**] Il nous reste à poser une dernière définition.

Considérons, dans l'espace $[(x, y, \ldots)]$, une région, $\mathfrak{L}$, remplissant la condition suivante :

« Il existe quelque suite illimitée de régions parfaites (n° **11**),

$$\mathfrak{P}', \quad \mathfrak{P}'', \quad \ldots\ldots, \quad \mathfrak{P}^{(m)}, \quad \ldots\ldots,$$

toutes extraites de $\mathfrak{L}$, et jouissant de la double propriété : 1° que tout point de $\mathfrak{L}$ finisse, à partir d'une valeur suffisamment grande de m, par être situé dans $\mathfrak{P}^{(m)}$; 2° que, pour toute valeur de m, la région (nécessairement limitée et complète) obtenue par l'adjonction à $\mathfrak{P}^{(m)}$ des divers points semi-extérieurs à $\mathfrak{P}^{(m)}$ (n° **10**, V) soit entièrement comprise dans $\mathfrak{P}^{(m+1)}$. »

Nous résumerons, d'un mot, l'énoncé de cette condition en disant que la région $\mathfrak{L}$ est une *limite de région parfaite :* de l'observation faite au début du n° **6** résulte immédiatement la nature *normale* de $\mathfrak{L}$.

Notons en passant que *l'étendue indéfinie de l'espace* $[(x, y, \ldots)]$ *peut être considérée comme une limite de région parfaite.*

[**16**] Il convient de compléter cette définition par une remarque analogue à celle du n° **12**.

Supposons que les variables indépendantes aient été partagées en un nombre quelconque de groupes, trois par exemple,

$$x, \ldots; \quad y, \ldots; \quad z, \ldots,$$

et soient

(53) $$\mathfrak{L}_{x,\ldots},\quad \mathfrak{L}_{y,\ldots},\quad \mathfrak{L}_{z,\ldots}$$

trois régions respectivement extraites des espaces correspondants

(54) $$[(x,\ldots)],\qquad [(y,\ldots)],\qquad [(z,\ldots)].$$

Je dis que *si les régions* (53), considérées chacune dans celui des espaces (54) qui lui convient, *sont des limites de régions parfaites, la région*

(55) $$(\mathfrak{L}_{x,\ldots},\quad \mathfrak{L}_{y,\ldots},\quad \mathfrak{L}_{z,\ldots}),$$

considérée dans l'espace

$$[(x,\ldots,\ y,\ldots,\ z,\ldots)],$$

ne peut manquer de l'être aussi.

En vertu de notre hypothèse sur les régions (53), et notamment sur la région $\mathfrak{L}_{x,\ldots}$, il existe, dans l'espace $[(x,\ldots)]$, quelque suite illimitée de régions parfaites,

$$\mathfrak{P}'_{x,\ldots},\quad \mathfrak{P}''_{x,\ldots},\quad \ldots\ldots,\quad \mathfrak{P}^{(m)}_{x,\ldots},\quad \ldots\ldots,$$

toutes extraites de $\mathfrak{L}_{x,\ldots}$, et jouissant de la double propriété : 1° que tout point de $\mathfrak{L}_{x,\ldots}$ finisse, à partir d'une valeur suffisamment grande de m, par être situé dans $\mathfrak{P}^{(m)}_{x,\ldots}$; 2° que, pour toute valeur de m, la région obtenue par l'adjonction à $\mathfrak{P}^{(m)}_{x,\ldots}$ des divers points semi-extérieurs à $\mathfrak{P}^{(m)}_{x,\ldots}$ soit entièrement comprise dans $\mathfrak{P}^{(m+1)}_{x,\ldots}$.

Semblablement, il existe, dans l'espace $[(y,\ldots)]$, quelque suite illimitée de régions parfaites,

$$\mathfrak{P}'_{y,\ldots},\quad \mathfrak{P}''_{y,\ldots},\quad \ldots\ldots,\quad \mathfrak{P}^{(m)}_{y,\ldots},\quad \ldots\ldots,$$

et, dans l'espace $[(z,\ldots)]$, quelque suite illimitée de régions parfaites,

$$\mathfrak{P}'_{z,\ldots},\quad \mathfrak{P}''_{z,\ldots},\quad \ldots\ldots,\quad \mathfrak{P}^{(m)}_{z,\ldots},\quad \ldots\ldots,$$

satisfaisant à des conditions qui se formuleront de la même manière, *mutatis mutandis*.

Cela étant, considérons, dans l'espace $[(x,\ldots,\ y,\ldots,\ z)]$, la suite illimitée de régions

(56) $$\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{P}'_{x,\ldots},\ \mathfrak{P}'_{y,\ldots},\ \mathfrak{P}'_{z,\ldots}),\qquad (\mathfrak{P}''_{x,\ldots},\ \mathfrak{P}''_{y,\ldots},\ \mathfrak{P}''_{z,\ldots}),\qquad \ldots\ldots\ldots,\\ \qquad \ldots\ldots\ldots,\qquad (\mathfrak{P}^{(m)}_{x,\ldots},\ \mathfrak{P}^{(m)}_{y,\ldots},\ \mathfrak{P}^{(m)}_{z,\ldots}),\qquad \ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

Il résulte du n° **12** que chacune des régions de la suite (56) est parfaite. Il est d'ailleurs manifeste qu'elles sont toutes extraites de (55), et que tout point de (55) finit, à partir d'une valeur suffisamment grande de m, par être situé dans

(57) $$(\mathfrak{P}^{(m)}_{x,\ldots},\quad \mathfrak{P}^{(m)}_{y,\ldots},\quad \mathfrak{P}^{(m)}_{z,\ldots}).$$

Il reste à faire voir que, pour toute valeur de m, la région obtenue par l'adjonction à (57) des divers points semi-extérieurs à (57) est entièrement située dans

$$(\mathfrak{P}_{x,\dots}^{(m+1)},\quad \mathfrak{P}_{y,\dots}^{(m+1)},\quad \mathfrak{P}_{z,\dots}^{(m+1)}). \tag{58}$$

Or, si l'on désigne par $\mathfrak{p}_{x,\dots}^{(m)}$ l'ensemble des points semi-extérieurs à $\mathfrak{P}_{x,\dots}^{(m)}$ par $\mathfrak{p}_{y,\dots}^{(m)}$ l'ensemble des points semi-extérieurs à $\mathfrak{P}_{y,\dots}^{(m)}$, et par $\mathfrak{p}_{z,\dots}^{(m)}$ l'ensemble des points semi-extérieurs à $\mathfrak{P}_{z,\dots}^{(m)}$, il résulte d'une remarque antérieurement exposée (n° **10**, III) que pour adjoindre à la région (57) l'ensemble des points qui lui sont semi-extérieurs, il suffit de former la région

$$(\mathfrak{P}_{x,\dots}^{(m)} + \mathfrak{p}_{x,\dots}^{(m)},\quad \mathfrak{P}_{y,\dots}^{(m)} + \mathfrak{p}_{y,\dots}^{(m)},\quad \mathfrak{P}_{z,\dots}^{(m)} + \mathfrak{p}_{z,\dots}^{(m)}). \tag{59}$$

Comme, en vertu de nos hypothèses, les régions

$$\mathfrak{P}_{x,\dots}^{(m)} + \mathfrak{p}_{x,\dots}^{(m)},\quad \mathfrak{P}_{y,\dots}^{(m)} + \mathfrak{p}_{y,\dots}^{(m)},\quad \mathfrak{P}_{z,\dots}^{(m)} + \mathfrak{p}_{z,\dots}^{(m)}$$

sont respectivement comprises dans

$$\mathfrak{P}_{x,\dots}^{(m+1)},\quad \mathfrak{P}_{y,\dots}^{(m+1)},\quad \mathfrak{P}_{z,\dots}^{(m+1)},$$

la région (59) est manifestement comprise dans (58).

CHAPITRE II

Systèmes passifs d'équations différentielles totales du premier ordre; généralités.

[**17**] Étant donné un système du premier ordre résolu par rapport à diverses dérivées (premières) des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, on peut, pour en disposer nettement les diverses équations, les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes et les colonnes aux fonctions inconnues, en mettant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre, dans la case qui appartient à la fois à la colonne (u) et à la ligne (x).

Cela posé, nous nommerons *système différentiel total du premier ordre* tout système du premier ordre (résolu, comme il vient d'être dit, par rapport à diverses dérivées premières), qui, n'ayant dans son Tableau que des lignes, les unes entièrement pleines, les autres entièrement vides, ne contient dans ses seconds membres aucune dérivée des inconnues.

[**18**] Soit

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}=\mathrm{F}_{i,j}(x_1,\ldots,x_h,\ y_1,\ldots,y_p,\ u_1,\ldots,u_k)\\ \qquad (i=1,2,\ldots,k;\ j=1,2,\ldots,h)\end{array}\right.$$

un système différentiel total du premier ordre *impliquant les k fonctions inconnues*

$$u_1,\ \ldots\ldots,\ u_k$$

des $h+p$ variables indépendantes

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l}x_1,\ \ldots\ldots,\ x_h,\\ y_1,\ \ldots\ldots,\ y_p;\end{array}\right.$$

ce système, composé de hk équations, a pour premiers membres les hk dérivées premières des u par rapport aux x, et ne contient dans ses seconds membres aucune dérivée; nous supposerons essentiellement qu'il est *passif*.

Considérons maintenant, parallèlement au système (1), le système

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}=\mathrm{F}_{i,j}(x_1,\ldots,x_h,\ y_1,\ldots,y_p,\ u_1,\ldots,u_k)\\ \qquad (i=1,2,\ldots,k;\ j=1,2,\ldots,h),\end{array}\right.$$

extérieurement représenté par la même écriture que (1), mais où *les fonctions inconnues* $u_1, \ldots, u_k$ *sont supposées dépendre, non plus seulement*, comme dans (1), *des* $h+p$ *variables* (2), *mais encore d'autres variables*,

$$(4) \qquad t_1, \ldots\ldots, t_l,$$

en nombre quelconque, qui ne figurent pas explicitement dans ses hk équations : le système (1) étant supposé *passif*, le système (3) l'est évidemment aussi.

Soient enfin

$$(5) \qquad \begin{cases} u_1 = \mathrm{U}_1(x_1, \ldots, x_h,\ y_1, \ldots, y_p,\ t_1, \ldots, t_l), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_k = \mathrm{U}_k(x_1, \ldots, x_h,\ y_1, \ldots, y_p,\ t_1, \ldots, t_l) \end{cases}$$

k fonctions des $h+p+l$ variables (2) et (4); et

$$\mathfrak{R}_x, \quad \mathfrak{R}_y, \quad \mathfrak{R}_u, \quad \mathfrak{R}_t$$

quatre régions *normales*, respectivement extraites des espaces

$$[(x_1, \ldots, x_h)], \quad [(y_1, \ldots, y_p)], \quad [(u_1, \ldots, u_k)], \quad [(t_1, \ldots, t_l)],$$

que nous désignerons souvent par les écritures abrégées

$$[(x)], \quad [(y)], \quad [(u)], \quad [(t)].$$

Nous supposerons :

1° que les seconds membres du système (1) [ou (3)] et les fonctions (5) sont olotropes, les premiers dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_u)$, les dernières dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t)$;

2° que, pour un choix arbitraire du point

$$(x_1, \ldots, x_h,\ y_1, \ldots, y_p,\ t_1, \ldots, t_l)$$

dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t)$, l'association des valeurs prises par les fonctions (5) donne un point constamment situé dans $\mathfrak{R}_u$ (cette deuxième condition se trouve manifestement remplie d'elle-même, si $\mathfrak{R}_u$ coïncide avec $[(u)]$).

Cela étant, *si, pour toutes valeurs numériques de* $t_1, \ldots, t_l$ *(n'excédant pas la région* $\mathfrak{R}_t$*), les formules* (5) *fournissent des groupes d'intégrales particulières du système* (1), *les seconds membres de ces formules, considérés comme fonctions des* $h+p+l$ *variables* (2) *et* (4), *constituent un groupe d'intégrales particulières du système* (3).

Réciproquement, *si les seconds membres des formules* (5) *constituent un groupe d'intégrales particulières du système* (3), *les formules dont il s'agit fournissent, pour toutes valeurs numériques de* $t_1, \ldots, t_l$, *des groupes d'intégrales particulières du système* (1).

I. Soient

$$z_1, \ldots, z_g: \qquad s_1, \ldots, s_q$$

deux groupes de variables indépendantes, et

$$\mathfrak{R}_z, \quad \mathfrak{R}_s$$

deux régions normales extraites des espaces respectifs

$$[(z_1, \ldots, z_g)], \quad [(s_1, \ldots, s_q)];$$

soient en outre

$$\text{(6)} \qquad P(z_1, \ldots, z_g, s_1, \ldots, s_q)$$

une fonction olotrope dans la région $(\mathfrak{R}_z, \mathfrak{R}_s)$, et $(\sigma_1, \ldots, \sigma_q)$ un point particulier de la région $\mathfrak{R}_s$. Si, dans la fonction (6), on introduit *d'abord* l'hypothèse numérique

$$\text{(7)} \qquad s_1, \ldots, s_q = \sigma_1, \ldots, \sigma_q,$$

et que l'on prenne *ensuite* une dérivée quelconque de la fonction de $z_1, \ldots, z_g$ ainsi obtenue, le résultat final est le même que si l'on avait *d'abord* effectué sur la fonction (6) la dérivation dont il s'agit (relative aux seules variables $z_1, \ldots, z_g$), et que l'on eût introduit *ensuite* dans la dérivée résultante l'hypothèse numérique (7).

On le voit immédiatement en développant la fonction (6) suivant les puissances des accroissements attribués aux g variables z.

II. Supposons que, pour toutes valeurs numériques de $t_1, \ldots, t_l$, les formules (5) fournissent des groupes d'intégrales particulières du système (1). En désignant par $(\tau_1, \ldots, \tau_l)$ un point particulier arbitrairement choisi dans la région $\mathfrak{R}_t$, il résulte de notre hypothèse que les fonctions $V_1, \ldots, V_k$, définies par les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p) = U_1(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, \tau_1, \ldots, \tau_l), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ V_k(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p) = U_k(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, \tau_1, \ldots, \tau_l) \end{array} \right.$$

sont des intégrales particulières du système (1), c'est-à-dire que l'on a, quels que soient les x et les y,

$$\text{(8)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial V_i}{\partial x_j} = F_{i,j}(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, V_1, \ldots, V_k) \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, k; \quad j = 1, 2, \ldots, h). \end{array} \right.$$

Cela étant, observons que la série des opérations à effectuer sur les fonctions (5) pour en déduire les hk premiers membres de (8) consiste à y introduire *d'abord* l'hypothèse numérique

$$\text{(9)} \qquad t_1, \ldots, t_l = \tau_1, \ldots, \tau_l,$$

et à prendre *ensuite* les dérivées premières par rapport aux x des fonctions de $x_1, \ldots, x_h$, $y_1, \ldots, y_p$ ainsi obtenues. Or, on peut, en vertu de I, intervertir l'ordre de ces deux opérations sans changer le résultat final; en désignant donc par $\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_\tau$ ce que devient la fonction $\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ dans l'hypothèse numérique (9), on a

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_\tau,$$

et les identités (8) peuvent tout aussi bien s'écrire sous la forme

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_\tau = F_{i,j}(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, V_1, \ldots, V_k) \\ \qquad (i=1, 2, \ldots, k; \quad j=1, 2, \ldots, h); \end{array} \right.$$

en d'autres termes, si, dans le système (3), on remplace $u_1, \ldots, u_k$ par les fonctions (5), les relations ainsi obtenues deviennent, par l'introduction de l'hypothèse numérique (9), des identités en $x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p$. Comme d'ailleurs le point $(\tau_1, \ldots, \tau_l)$ est entièrement arbitraire dans la région $\mathfrak{R}_t$, on en conclut que les fonctions (5) constituent bien un groupe d'intégrales particulières du système (3).

III. Réciproquement, supposons que les fonctions (5) constituent un groupe d'intégrales particulières du système (3), et soit $(\tau_1, \ldots, \tau_l)$ un point arbitrairement choisi dans la région $\mathfrak{R}_t$: si, dans le système (3), on remplace $u_1, \ldots, u_k$ par les fonctions (5), les identités en

$$x_1, \ldots, x_h, \quad y_1, \ldots, y_p, \quad t_1, \ldots, t_l$$

ainsi obtenues deviennent, par l'introduction de l'hypothèse numérique (9), des identités en

$$x_1, \ldots, x_h, \quad y_1, \ldots, y_p;$$

en d'autres termes, et les mêmes notations étant adoptées qu'à l'alinéa II, les relations (10) sont des identités par rapport aux $h+p$ variables x et y. Finalement, comme les identités (10) peuvent, en vertu de I, s'écrire sous la forme (8), les fonctions $V_1, \ldots, V_k$ constituent un groupe d'intégrales particulières du système (1).

[**19**] Il convient d'observer ici que *si l'on intègre le système* (3) *avec des conditions initiales quelconques*,

$$u_i = \psi_i(y_1, \ldots, y_p, t_1, \ldots, t_l) \quad \text{pour} \quad x_1, \ldots, x_h = x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}$$
$$(i=1, 2, \ldots, k),$$

il existe nécessairement, autour des valeurs initiales des quantités x, y, t *et* u, *des régions normales plus ou moins étendues*, $\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t, \mathfrak{R}_u$, *remplissant, vis-à-vis des* *seconds membres du système et des intégrales considérées, les conditions* 1° *et* 2° *énoncées au début du numéro précédent,* savoir :

1° Les seconds membres du système (3) et les intégrales dont il s'agit sont olotropes. les premiers dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_u)$, les dernières dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t)$.

2° Pour un choix arbitraire du point

$$(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, t_1, \ldots, t_l)$$

dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t)$, l'association des valeurs prises par ces intégrales donne un point constamment situé dans $\mathfrak{R}_u$.

Il va sans dire en effet que, pour effectuer l'intégration du système (3) avec les conditions initiales indiquées, on se place dans les hypothèses spécifiées par l'énoncé même du théorème d'existence relatif aux intégrales de ce système. Si donc on désigne par

$$y_1^{(0)}, \ldots, y_p^{(0)}, \tag{11}$$

$$t_1^{(0)}, \ldots, t_l^{(0)} \tag{12}$$

les valeurs initiales des y et des t, adjointes aux valeurs initiales,

$$x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}, \tag{13}$$

des x, et que l'on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{(0)} = \psi_i(y_1^{(0)}, \ldots, y_p^{(0)}, t_1^{(0)}, \ldots, t_l^{(0)}) \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \end{array} \right. \tag{14}$$

on doit supposer : 1° que les fonctions ψ_i sont développables en séries tayloriennes à partir des valeurs initiales, (11), (12), des y et des t; 2° que les seconds membres $F_{i,j}$ du système (3) le sont à partir des valeurs initiales, (13), (11), (14), des x, des y et des u.

Cette simple observation, rapprochée des généralités élémentaires relatives aux fonctions olotropes, suffit à assurer l'exactitude du point que nous avons en vue.

[20] *Nous plaçant désormais dans l'hypothèse* $l = k$, désignons par

$$\mathfrak{R}_x, \quad \mathfrak{R}_y, \quad \mathfrak{R}_u, \quad \mathfrak{R}_t$$

quatre régions *normales* extraites des espaces respectifs

$$[(x_1, \ldots, x_h)], \quad [(y_1, \ldots, y_p)], \quad [(u_1, \ldots, u_k)], \quad [(t_1, \ldots, t_k)];$$

supposons ensuite que les seconds membres du système (3) et les fonctions (5) soient olotropes, les premiers dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_u)$, les dernières dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t)$, et que, pour un choix arbitraire du point

$$(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, t_1, \ldots, t_k)$$

dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t)$, l'association des valeurs prises par les fonctions (5) donne un point constamment situé dans $\mathfrak{R}_u$; supposons enfin que les fonctions (5) constituent un groupe d'intégrales particulières du système (3).

Cela étant, *pour que le déterminant différentiel des fonctions* (5) *par rapport à* $t_1, \ldots, t_k$,

$$(15)\qquad \Delta(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, t_1, \ldots, t_k) = \begin{vmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial t_1} & \frac{\partial U_2}{\partial t_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial U_k}{\partial t_1} \\ \frac{\partial U_1}{\partial t_2} & \frac{\partial U_2}{\partial t_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial U_k}{\partial t_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial U_1}{\partial t_k} & \frac{\partial U_2}{\partial t_k} & \cdots\cdots & \frac{\partial U_k}{\partial t_k} \end{vmatrix},$$

évidemment olotrope dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t)$, *y reste constamment différent de zéro, il suffit qu'en désignant par* $x^{(0)}$ *quelque point particulier,* $(x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)})$, *de la région* $\mathfrak{R}_x$, *il reste différent de zéro dans la région* $(x^{(0)}, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t)$.

I. D'après la règle connue pour prendre la dérivée première d'un déterminant par rapport à l'une des variables dont il dépend, la dérivée $\frac{\partial \Delta}{\partial x_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$ est la somme des k déterminants

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_j \partial t_1} & \frac{\partial U_2}{\partial t_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial U_k}{\partial t_1} \\ \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_j \partial t_2} & \frac{\partial U_2}{\partial t_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial U_k}{\partial t_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_j \partial t_k} & \frac{\partial U_2}{\partial t_k} & \cdots\cdots & \frac{\partial U_k}{\partial t_k} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial t_1} & \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_j \partial t_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial U_k}{\partial t_1} \\ \frac{\partial U_1}{\partial t_2} & \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_j \partial t_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial U_k}{\partial t_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial U_1}{\partial t_k} & \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_j \partial t_k} & \cdots\cdots & \frac{\partial U_k}{\partial t_k} \end{vmatrix},$$

etc.,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial t_1} & \frac{\partial U_2}{\partial t_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_j \partial t_1} \\ \frac{\partial U_1}{\partial t_2} & \frac{\partial U_2}{\partial t_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_j \partial t_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial U_1}{\partial t_k} & \frac{\partial U_2}{\partial t_k} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_j \partial t_k} \end{vmatrix},$$

qui se déduisent du déterminant (15) en remplaçant, dans ses colonnes de rangs respectifs 1, 2, ..., k, les divers éléments par leurs dérivées premières relatives à x_j. On a d'ailleurs, puisque les fonctions (5), en vertu de notre hypothèse, vérifient identiquement le système (3),

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x_j} &= F_{1,j}(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, U_1, \ldots, U_k),\\ \frac{\partial U_2}{\partial x_j} &= F_{2,j}(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, U_1, \ldots, U_k),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{\partial U_k}{\partial x_j} &= F_{k,j}(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, U_1, \ldots, U_k); \end{aligned}\right.$$

il résulte enfin de nos hypothèses que les fonctions composées de

$$x_1, \ldots, x_h, \quad y_1, \ldots, y_p, \quad t_1, \ldots, t_k$$

qui figurent dans les seconds membres de (16) ont leurs dérivées de tous ordres calculables par l'application des règles générales. On déduira dès lors de la première formule (16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_j \partial t_1} &= \frac{\partial F_{1,j}}{\partial U_1}\frac{\partial U_1}{\partial t_1} + \frac{\partial F_{1,j}}{\partial U_2}\frac{\partial U_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial F_{1,j}}{\partial U_k}\frac{\partial U_k}{\partial t_1},\\ \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_j \partial t_2} &= \frac{\partial F_{1,j}}{\partial U_1}\frac{\partial U_1}{\partial t_2} + \frac{\partial F_{1,j}}{\partial U_2}\frac{\partial U_2}{\partial t_2} + \ldots + \frac{\partial F_{1,j}}{\partial U_k}\frac{\partial U_k}{\partial t_2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_j \partial t_k} &= \frac{\partial F_{1,j}}{\partial U_1}\frac{\partial U_1}{\partial t_k} + \frac{\partial F_{1,j}}{\partial U_2}\frac{\partial U_2}{\partial t_k} + \ldots + \frac{\partial F_{1,j}}{\partial U_k}\frac{\partial U_k}{\partial t_k}, \end{aligned}$$

d'où résulte que le premier des k déterminants dont la somme exprime, comme il a été dit, $\frac{\partial \Delta}{\partial x_j}$, a pour valeur $\frac{\partial F_{1,j}}{\partial U_1}\Delta$; par un calcul semblable, les suivants deviendront

$$\frac{\partial F_{2,j}}{\partial U_2}\Delta, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\partial F_{k,j}}{\partial U_k}\Delta,$$

et l'on aura

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial F_{1,j}}{\partial U_1} + \frac{\partial F_{2,j}}{\partial U_2} + \ldots + \frac{\partial F_{k,j}}{\partial U_k}\right)\Delta.$$

Dans le second membre de cette dernière relation, le multiplicateur de Δ est, en vertu du théorème des fonctions composées, olotrope dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t)$; en le désignant par

$$P_j(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, t_1, \ldots, t_k),$$

on aura

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_j} = P_j\,\Delta,$$

d'où, en faisant successivement $j = 1, 2, \ldots, h$,

(17) $$\frac{\partial\Delta}{\partial x_1} = P_1\Delta, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial x_2} = P_2\Delta, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial x_h} = P_h\Delta.$$

II. Notre énoncé général suppose que la fonction

$$\Delta(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, t_1, \ldots, t_k)$$

reste constamment différente de zéro dans la région $(x^{(0)}, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t)$, où $x^{(0)}$ désigne un certain point, $(x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)})$, de la région $\mathfrak{R}_x$, et il s'agit d'établir qu'en désignant par

$$(X_1, \ldots, X_h), \quad (Y_1, \ldots, Y_p), \quad (T_1, \ldots, T_k)$$

trois points choisis comme on voudra dans les régions respectives $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$, $\mathfrak{R}_t$, la fonction Δ est numériquement différente de zéro au point

$$(X_1, \ldots, X_h, Y_1, \ldots, Y_p, T_1, \ldots, T_k).$$

Posons à cet effet

$$\Delta(x_1, \ldots, x_h, Y_1, \ldots, Y_p, T_1, \ldots, T_k) = \Theta(x_1, \ldots, x_h),$$
$$P_j(x_1, \ldots, x_h, Y_1, \ldots, Y_p, T_1, \ldots, T_k) = Q_j(x_1, \ldots, x_h);$$

les fonctions Θ, Q_j, de $x_1, \ldots, x_h$, ainsi définies, sont évidemment olotropes dans la région R_x. Si, dans les relations (17), on introduit l'hypothèse numérique

$$y_1, \ldots, y_p = Y_1, \ldots, Y_p,$$
$$t_1, \ldots, t_k = T_1, \ldots, T_k,$$

leurs seconds membres deviennent

$$Q_1\Theta, \quad Q_2\Theta, \quad \ldots, \quad Q_h\Theta;$$

d'autre part, en vertu d'une remarque antérieure (n° **18**, I), leurs premiers membres deviennent

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial x_2}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial x_h}:$$

on tombe ainsi sur les relations

(18) $$\frac{\partial\Theta}{\partial x_1} = Q_1\Theta, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial x_2} = Q_2\Theta, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial x_h} = Q_h\Theta,$$

vérifiées quels que soient $x_1, \ldots, x_h$.

Cela étant, si l'on supposait, contrairement à ce qu'il s'agit d'établir, que

$$\Delta(X_1, \ldots, X_h, Y_1, \ldots, Y_p, T_1, \ldots, T_k)$$

a pour valeur numérique zéro, la fonction $\Theta(x_1, \ldots, x_h)$ s'annulerait dans l'hypothèse numérique

$$x_1, \ldots, x_h = X_1, \ldots, X_h,$$

et les relations (18), indéfiniment différentiées (par rapport aux x), fourniraient de proche en proche, dans cette même hypothèse numérique, des valeurs toutes nulles pour les dérivées d'ordres successifs 1, 2, 3, ... de la fonction Θ; la fonction Θ serait donc identiquement nulle, et il en résulterait, notamment,

$$\Theta(x_1^{(0)}, \ldots\ldots, x_h^{(0)}) = 0,$$

ou

$$\Delta(x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_p, \mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_k) = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

[**21**] Le nombre l des variables t étant égal, comme ci-dessus (n° **20**), au nombre k des variables u, et les notations

$$t_1, \ldots\ldots, t_k$$

étant simplement remplacées par les notations

$$u'_1, \ldots\ldots, u'_k,$$

adoptons les mêmes hypothèses qu'au début du numéro précédent. Supposons, en d'autres termes :

1° que les seconds membres

$$\mathrm{F}_{i,j}(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, u_1, \ldots, u_k)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k; \quad j = 1, 2, \ldots, h)$$

du système (3), et les fonctions

$$(19) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_i = \mathrm{U}_i(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, u'_1, \ldots, u'_k) \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \end{array} \right.$$

soient olotropes, les premiers dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_u)$, les dernières dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_{u'})$;

2° que, pour un choix arbitraire du point

$$(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, u'_1, \ldots, u'_k)$$

dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_{u'})$, l'association des valeurs prises par les fonctions (19) donne un point constamment situé dans $\mathfrak{R}_u$ (cette condition, comme nous l'avons fait observer au n° **18**, se trouve remplie d'elle-même si $\mathfrak{R}_u$ coïncide avec $[(u)]$);

3° que les fonctions (19) constituent un groupe d'intégrales particulières du système (3).

Supposons enfin, hypothèse qui n'était pas encore intervenue, *que les intégrales dont il s'agit satisfassent aux conditions initiales*

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = u'_1 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ u_k = u'_k \end{array} \right\} \text{pour } x_1, \ldots, x_h = x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)},$$

où $(x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)})$ désigne un point donné dans la région $\mathfrak{R}_x$.

Cela étant, *le déterminant différentiel des fonctions* (19) *par rapport à* $u'_1, \ldots, u'_k$ *reste différent de zéro dans toute l'étendue de la région* $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_{u'})$.

Aux valeurs initiales $x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}$ des variables $x_1, \ldots, x_h$ adjoignons en effet, pour les p variables y et pour les k variables u', des valeurs initiales choisies comme on voudra dans les régions respectives $\mathfrak{R}_y$ et $\mathfrak{R}_{u'}$. Si l'on considère les développements tayloriens des fonctions (19) construits à partir de ces valeurs, on peut, par un groupement convenable de leurs termes, les mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
u_1 &= u'_1 + (x_1 - x_1^{(0)})\,\mathrm{M}_{1,1} + (x_2 - x_2^{(0)})\,\mathrm{M}_{1,2} + \ldots + (x_h - x_h^{(0)})\,\mathrm{M}_{1,h},\\
u_2 &= u'_2 + (x_1 - x_1^{(0)})\,\mathrm{M}_{2,1} + (x_2 - x_2^{(0)})\,\mathrm{M}_{2,2} + \ldots + (x_h - x_h^{(0)})\,\mathrm{M}_{2,h},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
u_k &= u'_k + (x_1 - x_1^{(0)})\,\mathrm{M}_{k,1} + (x_2 - x_2^{(0)})\,\mathrm{M}_{k,2} + \ldots + (x_h - x_h^{(0)})\,\mathrm{M}_{k,h},
\end{aligned}$$

où les hk coefficients M sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, u'_1, \ldots, u'_k$ développables à partir des valeurs particulières dont il s'agit. Or, dans les formules ainsi obtenues, le déterminant différentiel des seconds membres par rapport à $u'_1, \ldots, u'_k$ se réduit manifestement à l'unité pour

$$x_1, \ldots, x_h = x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)},$$

quels que soient $y_1, \ldots, y_p, u'_1, \ldots, u'_k$ dans le voisinage de leurs valeurs initiales; en raison du choix arbitraire de ces dernières, il se réduit donc à l'unité dans toute l'étendue de la région $(x^{(0)}, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_{u'})$. Cela étant, il résulte immédiatement du numéro précédent qu'il reste différent de zéro dans toute l'étendue de la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_{u'})$.

[22] De la propriété que nous venons d'établir résulte immédiatement la conséquence suivante, qui s'en déduit par la simple supposition que le groupe des variables $y_1, \ldots, y_p$ n'existe pas.

Considérons le système *passif* des hk équations

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = \mathrm{F}_{i,j}(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) \\ (i = 1, 2, \ldots, k;\ \ j = 1, 2, \ldots, h), \end{array}\right.$$

où les fonctions inconnues $u_1, \ldots, u_k$ sont supposées dépendre, *non seulement des h variables $x_1, \ldots, x_h$, mais encore des k variables*

$$u'_1, \ldots\ldots, u'_k,$$

qui ne figurent pas explicitement dans le système.

Considérons en même temps les fonctions

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_i = \mathrm{U}_i(x_1, \ldots, x_h, u'_1, \ldots, u'_k) \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \end{array}\right.$$

et, désignant par $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_u$, $\mathfrak{R}_{u'}$ trois régions normales respectivement extraites des espaces

$$[(x_1, \ldots, x_h)], \quad [(u_1, \ldots, u_k)], \quad [(u'_1, \ldots, u'_k)],$$

supposons :

1° Que les seconds membres de (20) et les fonctions (21) soient olotropes, les premiers dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_u)$, les dernières dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_{u'})$.

2° Que, pour un choix arbitraire du point

$$(x_1, \ldots, x_h, u'_1, \ldots, u'_k)$$

dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_{u'})$, l'association des valeurs prises par les fonctions (21) donne un point constamment situé dans $\mathfrak{R}_u$.

3° Que les fonctions (21) constituent un groupe d'intégrales particulières du système (20), et *qu'elles satisfassent aux conditions initiales*

$$(22) \qquad \left.\begin{array}{l} u_1 = u'_1 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ u_k = u'_k \end{array}\right\} \text{pour } x_1, \ldots, x_h = x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)},$$

où $(x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)})$ désigne un point donné dans la région $\mathfrak{R}_x$.

Cela étant, *le déterminant différentiel des fonctions* (21) *par rapport à* $u'_1, \ldots, u'_k$ *reste différent de zéro dans toute l'étendue de la région* $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_{u'})$.

[**23**] Les mêmes choses étant posées et les mêmes notations étant adoptées qu'au numéro précédent, considérons, outre les trois groupes de quantités

$$u_1, \ldots, u_k,$$
$$u'_1, \ldots, u'_k,$$
$$x_1, \ldots, x_h,$$

un quatrième groupe,

$$x'_1, \ldots, x'_h,$$

et adjoignons aux k formules (21) les h formules

$$(23) \qquad \left\{\begin{array}{c} x_j = x'_j \\ (j = 1, 2, \ldots, h). \end{array}\right.$$

Considérant ensuite la région $\mathfrak{R}_x$, extraite de l'espace $[(x_1, \ldots, x_h)]$, désignons par $\mathfrak{R}_{x'}$ la région de l'espace $[(x'_1, \ldots, x'_h)]$ qui correspond à $\mathfrak{R}_x$ en vertu des formules (23). Considérant enfin la région $\mathfrak{R}_u$, extraite de l'espace $[(u_1, \ldots, u_k)]$, désignons par $\mathfrak{S}_u$ la portion de $\mathfrak{R}_u$ formée par l'ensemble des points que fournissent les formules (21) quand on fait varier arbitrairement les x et les u' dans les régions respectives $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_{u'}$. En remplaçant, dans les formules (21), les quantités x par leurs valeurs x' tirées de (23), on aura, entre les $h+k$ quantités x, u, d'une part, et les $h+k$ quantités x', u', d'autre part, le système, équivalent à [(21), (23)], des $h+k$ relations

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_j = x'_j \\ \quad (j=1, 2, \ldots, h); \\ u_i = \mathrm{U}_i(x'_1, \ldots, x'_h, u'_1, \ldots, u'_k) \\ \quad (i=1, 2, \ldots, k). \end{array}\right.$$

Je dis que *les $h+k$ formules* (24) *établissent une correspondance olotrope point par point entre les deux régions*

$$\mathfrak{R} = (\mathfrak{R}_x, \mathfrak{S}_u), \qquad \mathfrak{R}' = (\mathfrak{R}_{x'} \mathfrak{R}_{u'}).$$

Si l'on se reporte, d'une part, aux considérations qui font l'objet du n° **3** sur la correspondance olotrope point par point, d'autre part, à la proposition formulée au numéro précédent, il suffit, pour établir le point que nous avons actuellement en vue, de prouver qu'à deux points *différents* de la région $\mathfrak{R}'$ correspondent, en vertu des formules (24), deux points *différents* de la région $\mathfrak{R}$.

Soient en effet

$$(25)\qquad (\xi'_1, \ldots, \xi'_h, \upsilon'_1, \ldots, \upsilon'_k),$$

$$(26)\qquad (\Xi'_1, \ldots, \Xi'_h, \Upsilon'_1, \ldots, \Upsilon'_k)$$

les deux points considérés de $\mathfrak{R}'$. Pour les deux points de $\mathfrak{R}$ qui leur correspondent respectivement, les h premières coordonnées, $x_1, \ldots, x_h$, ont évidemment pour valeurs

$$\xi'_1, \ldots\ldots, \xi'_h$$

et

$$\Xi'_1, \ldots\ldots, \Xi'_h.$$

Si donc, pour les deux points (25), (26), on n'a pas

$$(27)\qquad \xi'_1, \ldots, \xi'_h = \Xi'_1, \ldots, \Xi'_h,$$

les deux points correspondants de $\mathfrak{R}$ sont manifestement différents.

Supposons maintenant que les points (25), (26) satisfassent aux relations (27), d'où résulte, puisque ces points sont supposés différents, qu'on n'a pas

$$\upsilon'_1, \ldots, \upsilon'_k = \Upsilon'_1, \ldots, \Upsilon'_k;$$

pour les points de $\mathfrak{R}$ qui leur correspondent respectivement, les h premières coordonnées, $x_1, \ldots, x_h$, ont les mêmes valeurs respectives, et il faut alors établir qu'on n'a pas à la fois les k relations numériques

$$(28)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{U}_i(\xi'_1, \ldots, \xi'_h, \upsilon'_1, \ldots, \upsilon'_k) = \mathrm{U}_i(\xi'_1, \ldots, \xi'_h, \Upsilon'_1, \ldots, \Upsilon'_k) \\ \qquad (i=1, 2, \ldots, k). \end{array}\right.$$

Admettons en effet pour un instant que les k relations (28) se trouvent à la fois vérifiées. Il est alors manifeste qu'en considérant dans le système (20) les inconnues $u_1, \ldots, u_k$ comme ne dépendant que de $x_1, \ldots, x_h$ (à l'exclusion de $u'_1, \ldots, u'_k$), les intégrales particulières de ce système qui répondent aux conditions initiales

$$(29)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_i = \mathrm{U}_i(\xi'_1, \ldots, \xi'_h, \upsilon'_1, \ldots, \upsilon'_k) \text{ pour } x_1, \ldots, x_h = \xi'_1, \ldots, \xi'_h \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \end{array}\right.$$

seront identiques à celles qui répondent aux conditions initiales

$$(30)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_i = \mathrm{U}_i(\xi'_1, \ldots, \xi'_h, \Upsilon'_1, \ldots, \Upsilon'_k) \text{ pour } x_1, \ldots, x_h = \xi'_1, \ldots, \xi'_h \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \end{array}\right.$$

D'ailleurs, les deux groupes d'intégrales particulières dont il s'agit ne sont autres respectivement que

$$(31)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_i = \mathrm{U}_i(x_1, \ldots, x_h, \upsilon'_1, \ldots, \upsilon'_k) \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \end{array}\right.$$

et

$$(32)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_i = \mathrm{U}_i(x_1, \ldots, x_h, \Upsilon'_1, \ldots, \Upsilon'_k) \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) : \end{array}\right.$$

car, en vertu du n° **18**, les deux groupes de fonctions (31) et (32) vérifient bien le système que nous considérons actuellement, et, d'autre part, il est manifeste que, pour

$$x_1, \ldots, x_h = \xi'_1, \ldots, \xi'_h,$$

ces fonctions prennent bien les valeurs initiales respectivement indiquées dans (29) et (30). Or, en prenant, comme dans (22), $x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}$ pour valeurs initiales de $x_1, \ldots, x_h$, les deux groupes d'intégrales (31) et (32) satisfont respectivement aux conditions initiales

$$u_i = \upsilon'_i \text{ pour } x_1, \ldots, x_h = x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

et

$$u_i = \Upsilon'_i \text{ pour } x_1, \ldots, x_h = x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

Dès lors, et contrairement à ce qui résulte de ce que nous avons provisoirement admis, ils ne peuvent être identiques l'un à l'autre, puisque, d'après notre hypothèse, on n'a pas

$$\upsilon'_1, \ldots, \upsilon'_k = \Upsilon'_1, \ldots, \Upsilon'_k.$$

[**24**] Les mêmes choses étant posées et les mêmes notations étant adoptées qu'aux deux numéros précédents, résolvons les formules (21),

$$u_i = \mathrm{U}_i(x_1, \ldots, x_h, u'_1, \ldots, u'_k)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

par rapport aux quantités u'_i. Le système ainsi obtenu,

$$(33)\qquad \left\{\begin{array}{c} u'_i = \mathrm{U}'_i(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) \\ (i = 1, 2, \ldots, k), \end{array}\right.$$

a ses seconds membres olotropes dans toute l'étendue de la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{S}_u)$, et il est, de plus, numériquement équivalent à (21) dans toute l'étendue de la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{S}_u, \mathfrak{R}_{u'})$: car, d'une part, les $h+k$ formules

$$\left\{\begin{array}{c} x_j = x'_j \\ (j = 1, 2, \ldots, h), \\ u_i = \mathrm{U}_i(x'_1, \ldots, x'_h, u'_1, \ldots, u'_k) \\ (i = 1, 2, \ldots, k) \end{array}\right.$$

établissent une correspondance olotrope point par point entre les deux régions $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{S}_u)$, $(\mathfrak{R}_{x'}, \mathfrak{R}_{u'})$, et, d'autre part, les $h+k$ formules

$$\left\{\begin{array}{c} x'_j = x_j \\ (j = 1, 2, \ldots, h), \\ u'_i = \mathrm{U}'_i(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) \\ (i = 1, 2, \ldots, k) \end{array}\right.$$

proviennent de la résolution des $h+k$ précédentes par rapport aux x' et aux u'.

Je dis qu'en désignant par U' une fonction inconnue des $h+k$ variables indépendantes

$$(34)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1, \ldots, x_h, \\ u_1, \ldots, u_k, \end{array}\right.$$

chaque second membre, U'_i, *des formules* (33) *vérifie le système partiel passif*

$$(35)\qquad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial \mathrm{U}'}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \mathrm{U}'}{\partial u_1} \mathrm{F}_{1,j} + \ldots\ldots + \dfrac{\partial \mathrm{U}'}{\partial u_k} \mathrm{F}_{k.j} = 0 \\ (j = 1, 2, \ldots, h) \end{array}\right.$$

avec la condition initiale

$$(36)\qquad \mathrm{U}' = u_i \quad \text{pour} \quad x_1, \ldots, x_h = x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}.$$

I. *La passivité de l'un quelconque des deux systèmes* (20), (35) *entraîne nécessairement celle de l'autre.*

Voir l'ouvrage déjà cité, nº **203**.

II. La fonction U'_i satisfait bien à la condition initiale (36). En effet, les systèmes (21) et (33) étant numériquement équivalents dans toute l'étendue de la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{S}_u, \mathfrak{R}_{u'})$, les systèmes

$$(37)\qquad \left\{\begin{array}{c} u_i = \mathrm{U}_i(x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}, u'_1, \ldots, u'_k) \\ (i = 1, 2, \ldots, k) \end{array}\right.$$

et

$$u'_i = \mathrm{U}'_i(x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}, u_1, \ldots, u_k)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

jouissent de la même propriété dans toute l'étendue de la région $(\mathfrak{S}_u, \mathfrak{R}_{u'})$. Or, en vertu des conditions initiales (22), le système (37) se réduit à

$$u_i = u'_i \quad \text{ou} \quad u'_i = u_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k):$$

on a donc nécessairement, quels que soient $u_1, \ldots, u_k$ dans $\mathfrak{S}_u$,

$$\mathrm{U}'_i(x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}, u_1, \ldots, u_k) = u_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

III. Enfin, la fonction $\mathrm{U}'_i(x_1, \ldots x_h, u_1, \ldots, u_k)$ vérifie bien le système (35). Soit, en effet,

$$(\xi_1, \ldots, \xi_h, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_k) \tag{38}$$

un point arbitrairement choisi dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{S}_u)$. Les inconnues $u_1, \ldots, u_k$ du système (20) étant considérées comme dépendant uniquement des variables $x_1, \ldots, x_h$, celles d'entre ses intégrales particulières qui répondent aux conditions initiales

$$u_i = \upsilon_i \quad \text{pour} \quad x_1, \ldots, x_h = \xi_1, \ldots, \xi_h$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

seront fournies par les formules (21), ou par les formules équivalentes (33), moyennant l'attribution à $u'_1, \ldots, u'_k$ des valeurs $\upsilon'_1, \ldots, \upsilon'_k$ définies par les formules

$$\upsilon'_i = \mathrm{U}'_i(\xi_1, \ldots, \xi_h, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_k)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

L'équation

$$\mathrm{U}'_i(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = \upsilon'_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k),$$

si l'on y substitue à $u_1, \ldots, u_k$ les intégrales particulières considérées de (20), devient donc une identité en $x_1, \ldots, x_h$; cette identité, différentiée par rapport à x_j ($j = 1, 2, \ldots, h$) d'après la règle des fonctions composées, fournit la nouvelle identité

$$\frac{\partial \mathrm{U}'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathrm{U}'_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \ldots\ldots + \frac{\partial \mathrm{U}'_i}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = 0$$

(où la même substitution doit être faite); et, comme les intégrales $u_1, \ldots, u_k$ vérifient le système (20), on tombe finalement sur la relation

$$\frac{\partial \mathrm{U}'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathrm{U}'_i}{\partial u_1}\mathrm{F}_{1,j} + \ldots\ldots + \frac{\partial \mathrm{U}'_i}{\partial u_k}\mathrm{F}_{k,j} = 0. \tag{39}$$

Si, dans l'identité en $x_1, \ldots, x_h$ ainsi obtenue, on introduit l'hypothèse numérique

$$x_1, \ldots, x_h = \xi_1, \ldots, \xi_h,$$

les intégrales $u_1, \ldots, u_k$ prennent respectivement les valeurs numériques $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_k$, en sorte que la relation (39) se trouve numériquement vérifiée pour

$$x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k = \xi_1, \ldots, \xi_h, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_k.$$

Elle est donc identiquement vérifiée par rapport aux $h+k$ quantités (34), considérées comme autant de variables indépendantes distinctes, puisque le point (38) a été arbitrairement choisi dans la région $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{S}_u)$.

CHAPITRE III

Systèmes passifs linéaires d'équations différentielles totales du premier ordre ; prolongement analytique de leurs intégrales.

[**25**] Les systèmes passifs *linéaires* d'équations différentielles totales du premier ordre jouissent, au point de vue du prolongement analytique de leurs intégrales, d'intéressantes propriétés que nous allons exposer. Ces propriétés, qui ont lieu, indifféremment, dans le monde des quantités réelles ou dans celui des quantités imaginaires, ne sont d'ailleurs que l'application à un cas très particulier des résultats d'un Mémoire publié en 1903 (¹) : mais leur démonstration, restreinte, comme ci-dessous, au cas particulier dont il s'agit, se simplifie considérablement.

Nous établirons tout d'abord la proposition suivante, relative aux rayons de convergence des développements initiaux des intégrales :

Si, dans un système passif d'équations différentielles totales du premier ordre (nº **17**), *linéaire par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, on considère les intégrales particulières répondant à des conditions initiales données, les développements de ces intégrales, effectués à partir des valeurs initiales des variables, ne peuvent manquer de converger dans les limites où convergent à la fois les développements similaires des coefficients du système et ceux des fonctions données figurant dans les conditions initiales.*

(Cette proposition est indifféremment applicable dans le monde des quantités réelles ou dans celui des quantités imaginaires).

En d'autres termes, considérons le système des hk équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = \mathrm{F}_{i,j} \\ (i=1, 2, \ldots, k;\quad j=1, 2, \ldots, h), \end{array}\right.$$

impliquant les k fonctions inconnues

$$u_1, \ldots u_k$$

des $h+p$ variables indépendantes

$$x_1, \ldots, x_h,$$
$$y_1, \ldots, y_p,$$

(¹) *Sur le Calcul par cheminement des intégrales de certains systèmes différentiels.* (Annales de l'École Normale, janvier et février 1903.)

et supposons que les seconds membres $F_{i,j}$ soient des expressions linéaires en $u_1, \ldots, u_k$, ayant pour coefficients certaines fonctions connues des x et des y, choisies de telle façon que le système (1) soit passif. Désignons ensuite par

$$\begin{gathered} x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}, \\ y_1^{(0)}, \ldots, y_p^{(0)} \end{gathered}$$

des valeurs particulières des x et des y à partir desquelles ces divers coefficients soient développables en séries tayloriennes, et par

$$\omega_i(y_1, \ldots, y_p) \qquad (i=1, 2, \ldots, k) \tag{2}$$

k fonctions données de $y_1, \ldots, y_p$, développables elles-mêmes en séries tayloriennes à partir de $y_1^{(0)}, \ldots, y_p^{(0)}$. Considérons enfin les intégrales particulières de (1) qui répondent aux conditions initiales

$$\left\{ \begin{aligned} & u_i = \omega_i(y_1, \ldots, y_p) \quad \text{pour} \quad x_1, \ldots, x_h = x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)} \\ & \qquad\qquad (i=1, 2, \ldots, k). \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Cela étant, si les développements considérés des coefficients du système admettent les rayons de convergence

$$R_{x_1}, \ldots\ldots, R_{x_h}, \tag{4}$$

$$R_{y_1}, \ldots\ldots, R_{y_p}, \tag{5}$$

et si en même temps ceux des fonctions données (2) admettent les rayons de convergence (5), les développements des intégrales répondant aux conditions initiales (3) ne peuvent manquer d'admettre les rayons de convergence (4), (5).

I. Désignons par u une fonction inconnue des variables indépendantes $x, y, \ldots$, en nombre quelconque, par $A(x, y, \ldots)$ et $A_1(x, y, \ldots)$ deux fonctions connues de ces mêmes variables, par $U_0(y, \ldots)$ une fonction connue des seules variables $y, \ldots$, et considérons, dans l'équation différentielle

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A + A_1 u, \tag{6}$$

l'intégrale particulière qui répond à la condition initiale

$$u = U_0(y, \ldots) \quad \text{pour} \quad x = x_0. \tag{7}$$

Cela étant, *si l'on suppose, d'une part, que les fonctions* A, A_1 *soient développables à partir des valeurs*

$$x_0, y_0, \ldots \tag{8}$$

avec les rayons de convergence

$$R_x, R_y, \ldots, \tag{9}$$

si l'on suppose, d'autre part, que la fonction $U_0(y, \ldots)$ *le soit à partir des valeurs* $y_0, \ldots$

avec les rayons $R_y, \ldots$, *l'intégrale de* (6) *déterminée par la condition initiale* (7) *ne peut manquer d'être développable à partir des valeurs* (8) *avec les rayons* (9).

Effectivement, soient :

$H_1(x, y, \ldots)$ la fonction qui satisfait à la relation

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} = A_1$$

et à la condition initiale

$$H_1 = 0 \quad \text{pour} \quad x = x_0;$$

$A_2(x, y, \ldots)$ le produit Ae^{-H_1};

$H_2(x, y, \ldots)$ la fonction qui satisfait à la relation

$$\frac{\partial H_2}{\partial x} = A_2$$

et à la condition initiale

$$H_2 = 0 \quad \text{pour} \quad x = x_0.$$

Il résulte de propriétés bien connues [relatives, notamment, au Calcul inverse de la dérivation (¹)] que les fonctions H_1, A_2 et H_2 sont, comme A et A_1, développables à partir des valeurs (8) avec les rayons (9). Cela étant, la fonction

$$u = e^{H_1}[U_0(y, \ldots) + H_2]$$

jouit aussi de cette même propriété, et satisfait visiblement à la condition initiale (7); on vérifie d'ailleurs par un calcul immédiat qu'elle satisfait à l'équation (6).

II. En particulier, *si, désignant par* M, μ, r_x, r_y, $\ldots$ *des constantes positives données, on considère l'équation*

$$\text{(10)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{r_x}\right)\left(1 - \frac{y - y_0}{r_y}\right)\cdots\cdots}(\mu u + 1),$$

l'intégrale de cette dernière qui répond à la condition initiale

$$u = 0 \quad \text{pour} \quad x = x_0$$

admet, pour son développement taylorien effectué à partir de $x_0, y_0, \ldots$, *les rayons de convergence* $r_x, r_y, \ldots$.

Il résulte d'ailleurs du choix de la condition initiale que *cette intégrale et celles d'entre ses dérivées (de tous ordres) n'intéressant que les seules variables* $y, \ldots$, *à l'exclusion de* x, *ont des valeurs initiales toutes nulles; quant aux dérivées restantes* (celles qui intéressent la variable x, avec ou sans $y, \ldots$), *elles ont*, comme on le voit

(¹) Voir l'ouvrage intitulé : *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° **76**.

sans peine d'après la forme du second membre de (10), *des valeurs initiales toutes positives.*

III. Désignant par $u_1, \ldots, u_k$ des fonctions inconnues de $x, y, \ldots$, par $x_0, y_0, \ldots$ des valeurs initiales données de ces variables, et par M, r_x, r_y, ... des constantes positives données, considérons le système

$$
(11)\quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = \dfrac{M}{\left(1-\dfrac{x-x_0}{r_x}\right)\left(1-\dfrac{y-y_0}{r_y}\right)\cdots\cdots}(u_1+\ldots+u_k+1), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\dfrac{\partial u_k}{\partial x} = \dfrac{M}{\left(1-\dfrac{x-x_0}{r_x}\right)\left(1-\dfrac{y-y_0}{r_y}\right)\cdots\cdots}(u_1+\ldots+u_k+1),
\end{array}\right.
$$

(manifestement passif, puisque son Tableau, construit d'après les indications du n° **17**, ne contient qu'une seule ligne entièrement pleine, les autres étant entièrement vides).

Cela étant, *les intégrales particulières du système* (11) *qui répondent aux conditions initiales*

$$
\left.\begin{array}{l}
u_1 = 0 \\
\cdots\cdots \\
\cdots\cdots \\
u_k = 0
\end{array}\right\} \text{pour } x = x_0
$$

admettent, pour leurs développements tayloriens effectués à partir de $x_0, y_0, \ldots$, les rayons de convergence $r_x, r_y, \ldots$. Ces intégrales et celles d'entre leurs dérivées (*de tous ordres*) *n'intéressant que les seules variables $y, \ldots$, à l'exclusion de x, ont des valeurs initiales toutes nulles; les dérivées restantes* (celles qui intéressent la variable x avec ou sans $y, \ldots$) *ont des valeurs initiales toutes positives.*

Si l'on considère en effet, dans l'équation

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{M}{\left(1-\dfrac{x-x_0}{r_x}\right)\left(1-\dfrac{y-y_0}{r_y}\right)\cdots\cdots}(ku+1),
$$

l'intégrale particulière, $U(x, y, \ldots)$, qui répond à la condition initiale

$$
u = 0 \quad \text{pour} \quad x = x_0,
$$

le système (11) est manifestement vérifié pour

$$
u_1 = \ldots\ldots = u_k = U(x, y, \ldots);
$$

car on a alors

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \ldots\ldots\ldots = \frac{\partial u_k}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$= \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{r_x}\right)\left(1 - \frac{y - y_0}{r_y}\right)\cdots\cdots}(kU + 1)$$

$$= \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{r_x}\right)\left(1 - \frac{y - y_0}{r_y}\right)\cdots\cdots}(u_1 + \ldots + u_k + 1).$$

Cela étant, le point que nous avons en vue résulte immédiatement de l'alinéa précédent II.

IV. Soient

$f(x, y, \ldots)$ une fonction développable à partir de $x_0, y_0, \ldots$ avec les rayons de convergence R_x, R_y, ...;

r_x, r_y, ... des constantes positives respectivement inférieures à R_x, R_y, ...;

N une constante positive supérieure à la somme L que l'on obtient en remplaçant dans le développement de $f(x, y, \ldots)$, effectué à partir de $x_0, y_0, \ldots$, tous les coefficients par leurs modules, et les différences $x - x_0$, $y - y_0$, ... par les quantités respectives r_x, r_y, ...;

enfin p, q, ... des entiers positifs.

Cela étant, la fonction

$$\Psi(x, y, \ldots) = \frac{N}{\left(1 - \frac{x - x_0}{r_x}\right)^p \left(1 - \frac{y - y_0}{r_y}\right)^q \cdots\cdots},$$

développable à partir de x_0, y_0, ... avec les rayons r_x, r_y, ..., est majorante pour $f(x, y, \ldots)$ relativement aux valeurs $x_0, y_0, \ldots$, c'est-à-dire que les valeurs numériques prises, en x_0, y_0, ..., par la fonction $\Psi(x, y, \ldots)$ et toutes ses dérivées, sont positives et respectivement supérieures aux modules des valeurs correspondantes de la fonction $f(x, y, \ldots)$ et de ses dérivées semblables.

Faisons suivre en effet de l'indice zéro les notations des diverses fonctions à considérer et de leurs dérivées, pour désigner leurs valeurs particulières en x_0, y_0, ...

On a

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^{i+l+\cdots}\Psi}{\partial x^i\,\partial y^l\ldots}\right)_0 = \frac{1}{r_x^i\, r_y^l \ldots} &\times N \times p(p+1)\ldots\ldots(p+i-1)\\ &\times q(q+1)\ldots\ldots(q+l-1)\\ &\times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \geqq N\,\frac{1.2\ldots i}{r_x^i}\,.\,\frac{1.2\ldots l}{r_y^l}&\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

et, à plus forte raison, à cause de $N > L$,

$$\left(\frac{\partial^{i+l+\cdots}\Psi}{\partial x^i\,\partial y^l}\right)_0 > L\,\frac{1.2\ldots i}{r_x^i}\,\frac{1.2\ldots l}{r_y^l}\cdots\cdots$$

D'ailleurs, dans une série convergente à termes tous positifs, la somme est au moins égale à la valeur d'un terme quelconque, et l'on a par conséquent

$$L \geqq \operatorname{mod}\left(\frac{\partial^{i+l+\cdots}f}{\partial x^i\,\partial y^l\ldots}\right)_0 \frac{r_x^i}{1.2\ldots i}\,\frac{r_y^l}{1.2\ldots l}\cdots\cdots$$

On en déduit immédiatement, par comparaison avec la relation précédente,

$$\left(\frac{\partial^{i+l+\cdots}\Psi}{\partial x^i\,\partial y^l\ldots}\right)_0 > \operatorname{mod}\left(\frac{\partial^{i+l+\cdots}f}{\partial x^i\,\partial y^l\ldots}\right)_0,$$

ce qu'il s'agissait d'établir.

V. *La proposition formulée par notre énoncé général est exacte, si le Tableau du système* (n° **17**) *ne comprend qu'une seule ligne entièrement pleine, les autres étant entièrement vides, et si, de plus, les fonctions données qui figurent dans les conditions initiales imposées aux intégrales sont identiquement nulles.*

En désignant par $x, y, \ldots$ les variables indépendantes, par $u_1, \ldots, u_k$ les fonctions inconnues, et par $F_1, \ldots, F_k$ des expressions linéaires en $u_1, \ldots, u_k$, ayant pour coefficients des fonctions données de $x, y, \ldots$, le système considéré, manifestement passif, aura la forme

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_i}{\partial x} = F_i \\ (i = 1, 2, \ldots, k). \end{array}\right.$$

Soient maintenant $x_0, y_0, \ldots$ des valeurs particulières de $x, y, \ldots$ à partir desquelles les divers coefficients des expressions linéaires $F_1, \ldots, F_k$ soient tous développables, et $R_x, R_y, \ldots$ un système de rayons de convergence commun à tous ces développements : il s'agit d'établir que si l'on considère, dans le système (12), les intégrales particulières qui répondent aux conditions initiales

$$(13)\qquad \left.\begin{array}{l} u_1 = 0 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ u_k = 0 \end{array}\right\} \text{pour } x = x_0,$$

ces intégrales, développées à partir de $x_0, y_0, \ldots$, admettent les rayons de convergence $R_x, R_y, \ldots$.

A cet effet, désignons par $r_x, r_y, \ldots$ des quantités positives respectivement inférieures à $R_x, R_y, \ldots$, et d'ailleurs arbitrairement choisies; puis, dans les développements tayloriens, construits à partir de $x_0, y_0, \ldots$, des diverses fonctions de

$x, y, \ldots$ qui servent de coefficients aux expressions linéaires $F_1, \ldots, F_k$, imaginons qu'on remplace chaque coefficient (numérique) par son module, et les différences $x - x_0$, $y - y_0$, ... par les quantités respectives $r_x, r_y, \ldots$; désignons enfin par M une constante positive supérieure aux diverses sommes ainsi obtenues, et considérons le système

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = \dfrac{M}{\left(1 - \dfrac{x - x_0}{r_x}\right)\left(1 - \dfrac{y - y_0}{r_y}\right)\cdots\cdots}(u_1 + \ldots + u_k + 1), \\ \dotfill \\ \dotfill \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial x} = \dfrac{M}{\left(1 - \dfrac{x - x_0}{r_x}\right)\left(1 - \dfrac{y - y_0}{r_y}\right)\cdots\cdots}(u_1 + \ldots + u_k + 1), \end{array}\right.$$

impliquant, comme le système (12), les k fonctions inconnues $u_1, \ldots, u_k$ des variables indépendantes $x, y, \ldots$, et passif comme lui. Chacun de ces deux systèmes, (12) et (14), admet un groupe d'intégrales répondant aux conditions initiales (13) : or, si l'on observe que, de part et d'autre, les intégrales considérées et leurs dérivées paramétriques de tous ordres ont des valeurs initiales nulles, que, dans le système (14), leurs dérivées principales ont des valeurs initiales toutes positives [1], et enfin que la fonction

$$\frac{M}{\left(1 - \dfrac{x - x_0}{r_x}\right)\left(1 - \dfrac{y - y_0}{r_y}\right)\cdots\cdots}$$

est, relativement aux valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots$, une majorante commune (IV) des divers coefficients du système (12), on verra, à l'aide du raisonnement usité en pareille circonstance, que les développements des intégrales de (12) convergent dans des limites au moins aussi étendues que ceux des intégrales de (14), et, par suite (III), qu'ils admettent les rayons de convergence $r_x, r_y, \ldots$.

Finalement, comme les quantités positives $r_x, r_y, \ldots$, respectivement inférieures à $R_x, R_y, \ldots$, en sont aussi rapprochées qu'on le veut, les intégrales du système (12) qui répondent aux conditions initiales (13) admettent les rayons de convergence R_x, $R_y, \ldots$. C'est ce qu'il s'agissait d'établir.

VI. *La proposition formulée par notre énoncé général est exacte, quelles que soient les conditions initiales imposées aux intégrales, si le Tableau du système* (n° **17**) *ne comprend qu'une seule ligne entièrement pleine, les autres étant entièrement vides.*

---

[1] Pour la signification des mots *dérivées principales*, *dérivées paramétriques*, voir l'ouvrage intitulé : *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles* (nos **76** et **90**).

Attribuant aux notations

$$x, y, \ldots\ldots,$$
$$x_0, y_0, \ldots\ldots,$$
$$u_1, \ldots\ldots, u_k,$$
$$F_1, \ldots\ldots, F_k$$

le même sens qu'à l'alinéa précédent V, désignons en outre par

$$\lambda_1(y, \ldots), \quad \ldots\ldots, \quad \lambda_k(y, \ldots)$$

des fonctions données de $y, \ldots$, développables à partir de $y_0, \ldots$, et considérons les intégrales particulières du système (12) qui répondent aux conditions initiales

$$(15) \qquad \left.\begin{array}{l} u_1 = \lambda_1(y, \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_k = \lambda_k(y, \ldots) \end{array}\right\} \text{pour } x = x_0.$$

On suppose, d'une part, que les coefficients des expressions linéaires $F_1, \ldots, F_k$, développés à partir de $x_0, y_0, \ldots$, admettent les rayons de convergence R_x, $R_y, \ldots$, d'autre part, que les fonctions données $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, développées à partir de $y_0, \ldots$, admettent les rayons de convergence $R_y, \ldots$; et il s'agit d'établir que si l'on considère, dans le système (12), les intégrales répondant aux conditions initiales (15), ces intégrales, développées à partir de x_0, $y_0, \ldots$, admettent les rayons de convergence R_x, $R_y, \ldots$.

A cet effet, on opérera la transformation

$$u_1 = \lambda_1(y, \ldots) + \mathbf{u}_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_k = \lambda_k(y, \ldots) + \mathbf{u}_k,$$

où $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ désignent de nouvelles fonctions inconnues substituées à $u_1, \ldots, u_k$; le système (12) prend alors la forme

$$(16) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x} = H_i \\ (i = 1, 2, \ldots, k), \end{array}\right.$$

où $H_1, \ldots, H_k$ désignent des expressions linéaires en $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, dont les coefficients, développés à partir de $x_0, y_0, \ldots$, admettent les rayons de convergence R_x, $R_y, \ldots$. Tout revient à établir que si, dans le système (16), on considère les intégrales particulières répondant aux conditions initiales

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{u}_1 = 0 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \mathbf{u}_k = 0 \end{array}\right\} \text{pour } x = x_0,$$

ces intégrales, développées à partir de $x_0, y_0, \ldots$, admettent les rayons de convergence R_x, R_y, ... Or, c'est ce qui résulte immédiatement de l'alinéa précédent V.

VII. Revenons maintenant aux intégrales particulières du système (1) que déterminent les conditions initiales (3); pour fixer les idées et avoir des écritures plus commodes, nous supposerons $k=3$, $j=3$, $p=2$, et nous remplacerons les notations

$$(17)\qquad \begin{cases} u_1, u_2, u_3, \ x_1, x_2, x_3, \ y_1, y_2, \\ \omega_1(y_1, y_2), \ \omega_2(y_1, y_2), \ \omega_3(y_1, y_2) \end{cases}$$

par les notations respectives

$$(18)\qquad \begin{cases} u, v, w, \ x, y, z, \ s, t, \\ \upsilon(s, t), \ \varphi(s, t), \ \psi(s, t). \end{cases}$$

Nous aurons alors le système

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = Au + Bv + Cw + D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = A'u + B'v + C'w + D', \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = A''u + B''v + C''w + D'', \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = Eu + Fv + Gw + H, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = E'u + F'v + G'w + H', \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} = E''u + F''v + G''w + H'', \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = Ku + Lv + Pw + Q, \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = K'u + L'v + P'w + Q', \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = K''u + L''v + P''w + Q'', \end{cases}$$

où les lettres A, B, C, D, E, F, G, H, K, L, P, Q, pourvues ou non d'accents, désignent des fonctions connues de x, y, z, s, t, remplissant toutes les conditions requises pour la passivité. On suppose, comme nous l'avons expliqué au début du présent numéro, que ces fonctions, développées à partir des valeurs initiales, x_0, y_0, z_0, s_0, t_0, de x, y, z, s, t, admettent les rayons de convergence

$$R_x, \ R_y, \ R_z, \ R_s, \ R_t,$$

que les fonctions

$$\upsilon(s, t), \quad \varphi(s, t), \quad \psi(s, t),$$

développées à partir de s_0, t_0, admettent les rayons de convergence

$$R_s, \ R_t,$$

et il s'agit d'établir que les développements initiaux des intégrales assujetties aux conditions initiales

$$\left.\begin{aligned} u &= \upsilon(s, t) \\ v &= \varphi(s, t) \\ w &= \psi(s, t) \end{aligned}\right\} \text{ pour } \ x, y, z = x_0, y_0, z_0$$

admettent les rayons de convergence

$$R_x, R_y, R_z, R_s, R_t.$$

Considérant à cet effet le Tableau (n° **17**) du système (19), savoir

(20)

	(u)	(v)	(w)
(x)	$\frac{\partial u}{\partial x} = \dots.$	$\frac{\partial v}{\partial x} = \dots.$	$\frac{\partial w}{\partial x} = \dots.$
(y)	$\frac{\partial u}{\partial y} = \dots.$	$\frac{\partial v}{\partial y} = \dots.$	$\frac{\partial w}{\partial y} = \dots.$
(z)	$\frac{\partial u}{\partial z} = \dots.$	$\frac{\partial v}{\partial z} = \dots.$	$\frac{\partial w}{\partial z} = \dots.$
(s)			
(t)			

,

introduisons dans la ligne (z) l'hypothèse numérique

$$x, y = x_0, y_0,$$

et désignons par $u_{0,0}$, $v_{0,0}$, $w_{0,0}$ les fonctions des seules variables z, s, t auxquelles se réduisent, dans cette hypothèse, les intégrales considérées, par

$$A''_{0,0}, \ B''_{0,0}, \ \dots\dots, \ P''_{0,0}, \ Q''_{0,0}$$

celles auxquelles se réduisent les coefficients

$$A'', B'', \dots\dots, P'', Q''.$$

Les fonctions $u_{0,0}$, $v_{0,0}$, $w_{0,0}$ vérifient (n° **18**, I) le système

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u_{0,0}}{\partial z} &= A''_{0,0}\, u_{0,0} + B''_{0,0}\, v_{0,0} + C''_{0,0}\, w_{0,0} + D''_{0,0}, \\ \frac{\partial v_{0,0}}{\partial z} &= E''_{0,0}\, u_{0,0} + F''_{0,0}\, v_{0,0} + G''_{0,0}\, w_{0,0} + H''_{0,0}, \\ \frac{\partial w_{0,0}}{\partial z} &= K''_{0,0}\, u_{0,0} + L''_{0,0}\, v_{0,0} + P''_{0,0}\, w_{0,0} + Q''_{0,0}, \end{aligned}\right.$$

avec les conditions initiales

$$\left.\begin{aligned} u_{0,0} &= \upsilon(s, t) \\ v_{0,0} &= \varphi(s, t) \\ w_{0,0} &= \psi(s, t) \end{aligned}\right\} \text{pour } z = z_0;$$

et comme, d'une part, les coefficients des seconds membres de (21), développés à partir de z_0, s_0, t_0, admettent les rayons R_z, R_s, R_t, comme, d'autre part, les fonctions $\upsilon(s, t)$, $\varphi(s, t)$, $\psi(s, t)$, développées à partir de s_0, t_0, admettent les rayons R_s, R_t, il résulte de l'alinéa VI que les fonctions $u_{0,0}$, $v_{0,0}$, $w_{0,0}$ admettent les rayons R_z, R_s, R_t.

Introduisons maintenant, dans la ligne (y) du système (20), l'hypothèse numérique $x = x_0$, et désignons par u_0, v_0, w_0 les fonctions des seules variables y, z, s, t auxquelles se réduisent, dans cette hypothèse, les intégrales considérées de (20), par

$$A'_0,\ B'_0,\ \ldots\ldots,\ P'_0,\ Q'_0$$

celles auxquelles se réduisent les coefficients

$$A',\ B',\ \ldots\ldots,\ P',\ Q'.$$

Les fonctions u_0, v_0, w_0 vérifient (n° **18**, I) le système

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial y} &= A'_0 u_0 + B'_0 v_0 + C'_0 w_0 + D'_0, \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} &= E'_0 u_0 + F'_0 v_0 + G'_0 w_0 + H'_0, \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} &= K'_0 u_0 + L'_0 v_0 + P'_0 w_0 + Q'_0, \end{aligned}\right.$$

avec les conditions initiales

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= u_{0,0}(z, s, t) \\ v_0 &= v_{0,0}(z, s, t) \\ w_0 &= w_{0,0}(z, s, t) \end{aligned}\right\} \text{pour } y = y_0;$$

et comme, d'une part, les coefficients des seconds membres de (22), développés à partir de y_0, z_0, s_0, t_0, admettent les rayons R_y, R_z, R_s, R_t, comme, d'autre part, en vertu de ce qui précède, les fonctions

$$u_{0,0}(z, s, t), \quad v_{0,0}(z, s, t), \quad w_{0,0}(z, s, t),$$

développées à partir de z_0, s_0, t_0, admettent les rayons R_z, R_s, R_t, il résulte de l'alinéa VI que les fonctions u_0, v_0, w_0 admettent les rayons R_y, R_z, R_s, R_t.

Finalement, les intégrales considérées de (20) vérifient le système

$$(23) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= Au + Bv + Cw + D, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= Eu + Fv + Gw + H, \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= Ku + Lv + Pw + Q, \end{aligned}\right.$$

formé par la ligne (x), avec les conditions initiales

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0(y, z, s, t) \\ v &= v_0(y, z, s, t) \\ w &= w_0(y, z, s, t) \end{aligned}\right\} \text{ pour } x = x_0;$$

et comme, d'une part, les coefficients des seconds membres de (23), développés à partir de x_0, y_0, z_0, s_0, t_0, admettent les rayons R_x, R_y, R_z, R_s, R_t, comme, d'autre part, en vertu de ce qui précède, les fonctions

$$u_0(y, z, s, t), \quad v_0(y, z, s, t), \quad w_0(y, z, s, t),$$

développées à partir de y_0, z_0, s_0, t_0, admettent les rayons R_y, R_z, R_s, R_t, il résulte de l'alinéa VI que les intégrales considérées de (20) admettent les rayons R_x, R_y, R_z, R_s, R_t. C'est ce qu'il s'agissait d'établir.

[**26**] Considérons, comme au numéro précédent, les intégrales particulières du système (1) qui répondent aux conditions initiales (3), et regardons désormais comme *fondamentales* (n° **13**) les valeurs initiales,

$$\begin{gathered} x_1^{(0)}, \quad \ldots\ldots, \quad x_h^{(0)}, \\ y_1^{(0)}, \quad \ldots\ldots, \quad y_p^{(0)}, \end{gathered}$$

choisies pour les variables indépendantes

$$\begin{gathered} x_1, \quad \ldots\ldots, \quad x_h, \\ y_1, \quad \ldots\ldots, \quad y_p. \end{gathered}$$

Considérons ensuite, dans les espaces respectifs

$$[(x_1, \ldots\ldots, x_h)] \text{ ou } [(x)],$$
$$[(y_1, \ldots\ldots, y_p)] \text{ ou } [(y)],$$

des régions *continues*, $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$, comprenant respectivement les points

$$(x_1^{(0)}, \ldots\ldots, x_h^{(0)}), \quad (y_1^{(0)}, \ldots\ldots, y_p^{(0)}) :$$

la considération simultanée de ces deux régions en fournit une, $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y)$, extraite de l'espace $\big([(x)], [(y)]\big)$, continue comme les précédentes (n° **12**, I), et contenant le point

$$(x_1^{(0)}, \ldots\ldots, x_h^{(0)}, \quad y_1^{(0)}, \ldots\ldots, y_p^{(0)}).$$

Cela posé, *si, d'une part, les coefficients du système* (1) *sont tous calculables par cheminement dans la région* $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y)$ *avec les rayons*

$$\text{(24)} \qquad R_{x_1}, \ldots\ldots, R_{x_h},$$
$$\text{(25)} \qquad R_{y_1}, \ldots\ldots, R_{y_p},$$

(n° **14**), *si, d'autre part, les fonctions* (2), *qui figurent dans les conditions initiales* (3), *le sont dans la région* $\mathfrak{R}_y$ *avec les rayons* (25), *les intégrales particulières répondant à ces conditions initiales ne peuvent manquer d'être elles-mêmes calculables dans la région* $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y)$ *avec les rayons* (24), (25).

(Cette proposition est indifféremment applicable dans le monde des quantités réelles ou dans celui des quantités imaginaires).

Pour fixer les idées et avoir des écritures plus commodes, on supposera, comme à l'alinéa VII du numéro précédent, $k=3$, $j=3$, $p=2$, et on remplacera les notations (17) par les notations (18), ce qui donnera le système (19) ou (20). Désignant alors par $\mathfrak{R}_{x,y,z}$, $\mathfrak{R}_{s,t}$ deux régions *continues*, respectivement extraites des espaces $[(x, y, z)]$, $[(s, t)]$, par (x_0, y_0, z_0), (s_0, t_0) deux points respectivement situés dans ces régions, et par R_x, R_y, R_z, R_s, R_t des constantes positives, on supposera, conformément à l'énoncé ci-dessus, d'une part, que les coefficients du système (19) ou (20) sont tous calculables par cheminement dans la région

$$\text{(26)} \qquad (\mathfrak{R}_{x,y,z}, \mathfrak{R}_{s,t})$$

à partir du point $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$ avec les rayons

$$\text{(27)} \qquad R_x, R_y, R_z, R_s, R_t,$$

d'autre part, que les fonctions $\upsilon(s, t)$, $\varphi(s, t)$, $\psi(s, t)$ le sont dans la région $\mathfrak{R}_{s,t}$ à partir du point (s_0, t_0) avec les rayons R_s, R_t. Cela étant, il s'agit d'établir que les intégrales particulières assujetties aux conditions initiales

$$\text{(28)} \qquad \left.\begin{aligned} u &= \upsilon(s, t) \\ v &= \varphi(s, t) \\ w &= \psi(s, t) \end{aligned}\right\} \text{pour } x, y, z = x_0, y_0, z_0$$

ne peuvent manquer d'être elles-mêmes calculables dans la région (26) à partir du point $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$ avec les rayons (27).

I. Nous poserons tout d'abord les remarques suivantes :

A) Si une fonction de x, y, z, s, t est calculable, par cheminement direct, de

$$[(x_0, y_0, z_0), (s_0, t_0)]$$

en

$$[(x_0, y_0, z_0), (s_1, t_1)]\ (^1),$$

et si, après l'avoir ainsi calculée, on introduit dans le développement résultant l'hypothèse numérique

$$x, y, z = x_0, y_0, z_0, \tag{29}$$

on peut, sans changer le résultat final, procéder dans l'ordre inverse, c'est-à-dire introduire dans le développement initial l'hypothèse numérique (29), *et effectuer ensuite un cheminement direct de (s_0, t_0) en (s_1, t_1).*

B) Si une fonction est calculable, par cheminement direct, de

$$[(x_0, y_0, z_0), (s_0, t_0)]$$

en

$$[(x_1, y_1, z_1), (s_1, t_1)],$$

et si, après l'avoir ainsi calculée, on introduit dans le développement résultant l'hypothèse numérique

$$x, y, z = x_1, y_1, z_1, \tag{30}$$

on peut, sans changer le résultat final, cheminer de

$$[(x_0, y_0, z_0), (s_0, t_0)]$$

en

$$[(x_0, y_0, z_0), (s_1, t_1)],$$

et introduire dans le développement résultant l'hypothèse numérique (30).

C) Les variables indépendantes étant, comme ci-dessus, partagées en deux groupes, (x, y, z), (s, t), désignons par (x_0, y_0, z_0) un point de l'espace $[(x, y, z)]$; par $\mathfrak{R}_{s,t}$ une région continue de l'espace $[(s, t)]$; par (s_0, t_0) un point de cette région; par F une fonction de x, y, z, s, t calculable avec les rayons R_x, R_y, R_z, R_s, R_t dans la région

$$[(x_0, y_0, z_0), \quad \mathfrak{R}_{s,t}]$$

---

(1) Nous voulons dire que le point $[(x_0, y_0, z_0), (s_1, t_1)]$ se trouve dans les limites de convergence du développement construit à partir de $[(x_0, y_0, z_0), (s_0, t_0)]$, de telle sorte qu'on peut, sans introduire aucun sommet intermédiaire, cheminer *directement* du sommet $[(x_0, y_0, z_0), (s_0, t_0)]$ au sommet $[(x_0, y_0, z_0), (s_1, t_1)]$.

à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$; enfin, par (s_1, t_1) un point de $\mathfrak{R}_{s,t}$ tel que les différences $s_1 - s_0$, $t_1 - t_0$ soient de modules respectivement inférieurs à R_s, R_t. Cela posé, *si l'on calcule la fonction dont il s'agit par cheminement direct de*

$$[(x_0, y_0, z_0), (s_0, t_0)]$$

en

$$[(x_0, y_0, z_0), (s_1, t_1)],$$

qu'on ordonne par rapport à $s - s_1$, $t - t_1$ le développement résultant, et qu'on attribue à x, y, z des valeurs numériques vérifiant les relations

$$(31) \qquad \mathrm{mod}\,(x - x_0) < R_x, \qquad \mathrm{mod}\,(y - y_0) < R_y, \qquad \mathrm{mod}\,(z - z_0) < R_z,$$

la fonction ainsi obtenue est calculable avec les rayons R_s, R_t dans la région $\mathfrak{R}_{s,t}$ à partir de (s_1, t_1).

Considérons en effet un chemin brisé,

$$(32) \qquad (s_1, t_1), \quad (s_2, t_2), \quad \ldots\ldots, \quad (s_g, t_g), \quad (S, T),$$

commençant en (s_1, t_1), ayant tous ses sommets dans la région $\mathfrak{R}_{s,t}$, et présentant des écarts maxima (n° **14**) respectivement moindres que R_s, R_t. Il résulte évidemment de nos hypothèses que le chemin

$$\begin{array}{l}
[(x_0, y_0, z_0), (s_0, t_0)], \\
[(x_0, y_0, z_0), (s_1, t_1)], \\
[(x_0, y_0, z_0), (s_2, t_2)], \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
[(x_0, y_0, z_0), (s_g, t_g)], \\
[(x_0, y_0, z_0), (S, T)]
\end{array}$$

est praticable pour la fonction F, et conduit à des développements successifs admettant des rayons (au moins) égaux respectivement à R_x, R_y, R_z, R_s, R_t. Cela étant, calculons F de $[(x_0, y_0, z_0), (s_0, t_0)]$ en $[(x_0, y_0, z_0), (s_1, t_1)]$, et, une fois parvenu en ce dernier sommet, considérons le développement correspondant comme fondamental : nous avons alors une fonction calculable suivant le chemin brisé

$$\begin{array}{l}
[(x_0, y_0, z_0), (s_1, t_1)], \\
[(x_0, y_0, z_0), (s_2, t_2)], \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
[(x_0, y_0, z_0), (s_g, t_g)], \\
[(x_0, y_0, z_0), (S, T)],
\end{array}$$

avec des développements successifs admettant des rayons (au moins) égaux respectivement à R_x, R_y, R_z, R_s, R_t. Il en résulte, puisque les variables x, y, z du premier groupe ont, pour tous les sommets, les mêmes valeurs numériques, x_0, y_0, z_0, qu'en ordonnant ce développement fondamental par rapport à $s - s_1$, $t - t_1$, et attribuant à x, y, z des valeurs numériques quelconques sous les seules restrictions (31), on a une fonction de s, t calculable suivant le chemin brisé (32) avec des développements successifs admettant des rayons (au moins) égaux respectivement à R_s, R_t. C'est ce qu'il s'agissait d'établir.

II. Les mêmes notations étant adoptées qu'à la suite de notre énoncé général, *les intégrales u, v, w, du système* (19) *ou* (20) *répondant aux conditions initiales* (28) *sont calculables avec les rayons* (27) *dans la région*

$$[(x_0, y_0, z_0), \quad \mathfrak{R}_{s,t}] \tag{33}$$

à partir de $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$.

Imaginons en effet, à partir de (s_0, t_0), un chemin brisé,

$$(s_0, t_0), \quad (s_1, t_1), \quad (s_2, t_2), \quad \ldots\ldots, \quad (s_g, t_g), \quad (\mathrm{S}, \mathrm{T}),$$

ayant tous ses sommets dans $\mathfrak{R}_{s,t}$, avec des écarts maxima moindres que R_s, R_t. A ce chemin correspond, dans la région (33), le chemin

$$\left\{\begin{array}{l} [(x_0, y_0, z_0), \ (s_0, t_0)], \\ [(x_0, y_0, z_0), \ (s_1, t_1)], \\ [(x_0, y_0, z_0), \ (s_2, t_2)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ [(x_0, y_0, z_0), \ (s_g, t_g)], \\ [(x_0, y_0, z_0), \ (\mathrm{S}, \mathrm{T})]. \end{array}\right. \tag{34}$$

Tout revient à prouver que ce dernier chemin est praticable pour les intégrales u, v, w, et conduit, pour chacune de ces trois fonctions, à des développements successifs admettant les rayons (27).

Effectivement, il résulte de nos hypothèses, d'une part, que les coefficients du système (19) ou (20) sont calculables, avec ces mêmes rayons (27), dans la région (33) à partir du point $[(x_0, y_0, z_0), (s_0, t_0)]$; d'autre part, que les fonctions $\upsilon(s, t)$, $\varphi(s, t)$, $\psi(s, t)$, qui figurent dans les conditions initiales (28), relatives à ce point, sont calculables dans la région $\mathfrak{R}_{s,t}$ à partir de (s_0, t_0) avec les rayons R_s, R_t. En vertu du n° **25**, les intégrales u, v, w admettent donc, en

$$[(x_0, y_0, z_0), \ (s_0, t_0)],$$

les rayons de convergence (27), et l'on peut calculer par cheminement direct, du premier sommet de (34) au deuxième, tant les coefficients du système (19) que les intégrales u, v, w. Ce premier pas étant fait, il est clair que les coefficients du système (19) sont des fonctions calculables avec les rayons (27) dans la région (33) à partir du point

(35) $$[(x_0, y_0, z_0), (s_1, t_1)];$$

nous allons prouver en outre que les seconds membres des conditions initiales *relatives à ce dernier point* sont calculables dans la région $\mathfrak{R}_{s,t}$ à partir du point (s_1, t_1) avec les rayons R_s, R_t. Quand nous aurons établi cette dernière propriété, nous nous trouverons, vis-à-vis du deuxième sommet de (34), dans la situation où nous étions il y a un instant vis-à-vis du premier; les intégrales u, v, w y admettront donc encore les rayons (27), et nous pourrons calculer par cheminement direct, du deuxième sommet de (34) au troisième, tant les coefficients du système (19) que les intégrales u, v, w.

Et le même raisonnement pourra se continuer jusqu'au dernier sommet du chemin (34), où les intégrales u, v, w admettront encore les rayons (27).

Ainsi, tout revient à établir le point formulé il y a un instant, à savoir que les seconds membres des conditions initiales *relatives au deuxième sommet* (35) sont calculables dans la région $\mathfrak{R}_{s,t}$ à partir du point (s_1, t_1) avec les rayons R_s, R_t.

Or, pour avoir les seconds membres de ces conditions initiales, il faut, après avoir calculé par cheminement direct les intégrales u, v, w du premier sommet de (34) au deuxième, introduire dans les développemenls obtenus l'hypothèse numérique

$$x, y, z = x_0, y_0, z_0.$$

Mais, au lieu d'opérer comme il vient d'être dit, c'est-à-dire de calculer *d'abord* u, v, w du premier sommet de (34) au deuxième, et de faire *ensuite* l'hypothèse numérique ci-dessus indiquée, on peut (I, A) procéder dans l'ordre inverse, c'est-à-dire considérer les fonctions $\upsilon(s, t)$, $\varphi(st, t)$, $\psi(s, t)$, qui figurent dans les seconds membres de (28), et les calculer par cheminement de (s_0, t_0) en (s_1, t_1).

Cela étant, puisque les fonctions dont il s'agit sont calculables dans la région $\mathfrak{R}_{s,t}$ à partir de (s_0, t_0) avec les rayons R_s, R_t, il est clair que les seconds membres des conditions initiales relatives au sommet (35) le sont, avec ces mêmes rayons, dans la région $\mathfrak{R}_{s,t}$ à partir du point (s_1, t_1).

III. *Les intégrales*, u, v, w, *du système* (19) *ou* (20) *qui répondent aux conditions initiales* (28) *sont*, conformément à notre énoncé général, *calculables avec les rayons* (27) *dans la région* (26) *à partir de*

$$[(x_0, y_0, z_0), (s_0, t_0)].$$

Imaginons en effet, à partir de ce point, un chemin brisé,

$$(36)\quad \begin{cases} [(x_0, y_0, z_0), (s_0, t_0)], \\ [(x_1, y_1, z_1), (s_1, t_1)], \\ [(x_2, y_2, z_2), (s_2, t_2)], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ [(x_g, y_g, z_g), (s_g, t_g)], \\ [(X, Y, Z), (S, T)], \end{cases}$$

ayant tous ses sommets dans la région (26), avec des écarts maxima moindres que les rayons (27). Tout revient à prouver que le chemin (36) est praticable pour les intégrales u, v, w, et conduit, pour chacune de ces trois fonctions, à des développements successifs admettant les rayons (27).

Effectivement, il résulte de nos hypothèses, d'une part, que les coefficients du système (19) sont calculables avec les rayons (27) dans la région (26) à partir du point $[(x_0, y_0, z_0), (s_0, t_0)]$; d'autre part, que les fonctions $\upsilon(s, t)$, $\varphi(s, t)$, $\psi(s, t)$, qui figurent dans les conditions initiales (28), relatives à ce point, sont calculables dans la région $\mathfrak{R}_{s,t}$ à partir de (s_0, t_0) avec les rayons R_s, R_t. En vertu du n° **25**, les intégrales u, v, w admettent donc, en

$$[(x_0, y_0, z_0), (s_0, t_0)],$$

les rayons de convergence (27), et l'on peut calculer par cheminement direct, du premier sommet de (36) au deuxième, tant les coefficients du système (19) que les intégrales u, v, w. Ce premier pas étant fait, il est clair que les coefficients du système (19) sont des fonctions calculables avec les rayons (27) dans la région (26) à partir du point $[(x_1, y_1, z_1), (s_1, t_1)]$, et tout revient alors à prouver que les seconds membres des conditions initiales *relatives à ce dernier point* sont calculables dans la région $\mathfrak{R}_{s,t}$ à partir du point (s_1, t_1) avec les rayons R_s, R_t : car, cette dernière propriété une fois établie, on se trouvera, vis-à-vis du deuxième sommet de (36), dans la situation où l'on était il y a un instant vis-à-vis du premier.

Or, pour avoir les seconds membres des conditions initiales relatives au deuxième sommet, $[(x_1, y_1, z_1), (s_1, t_1)]$, du chemin (36), il faut, après avoir calculé par cheminement direct les intégrales u, v, w du premier sommet de (36) au deuxième, introduire dans les développements obtenus l'hypothèse numérique

$$x, y, z = x_1, y_1, z_1.$$

Mais on peut, au lieu de cela, procéder d'une manière un peu différente : il revient au même en effet (I, *B*) de cheminer de

$$[(x_0, y_0, z_0), (s_0, t_0)]$$

en

$$[(x_0, y_0, z_0), (s_1, t_1)],$$

et de faire ensuite

$$x, y, z = x_1, y_1, z_1.$$

D'ailleurs, les intégrales u, v, w étant, en vertu de II, calculables avec les rayons (27) dans la région

$$[(x_0, y_0, z_0), \mathfrak{R}_{s,t}]$$

à partir de

$$[(x_0, y_0, z_0), (s_0, t_0)],$$

la fonction obtenue par cette dernière suite d'opérations est calculable (I, C) avec les rayons R_s, R_t dans la région $\mathfrak{R}_{s,t}$ à partir du point (s_1, t_1). C'est ce que nous voulions établir.

[**27**] Désignant par $\mathfrak{L}_x$ une région de l'espace $[(x_1, \ldots, x_h)]$ qui soit *limite de région parfaite* (n° **15**), par $\mathfrak{L}_y$ une région de l'espace $[(y_1, \ldots, y_p)]$ qui jouisse de la même propriété, et par $(x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)})$ un point particulier choisi comme on voudra dans $\mathfrak{L}_x$, considérons, dans le système *linéaire et passif* des hk équations (1), les intégrales particulières répondant aux conditions initiales (3), que nous transcrivons ci-dessous :

$$u_i = \omega_i(y_1, \ldots, y_p) \quad \text{pour} \quad x_1, \ldots, x_h = x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

Cela étant, *si, d'une part, les coefficients du système* (1) *sont olotropes dans la région* $(\mathfrak{L}_x, \mathfrak{L}_y)$, *si, d'autre part, les fonctions données*

$$\omega_i(y_1, \ldots, y_p)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k),$$

qui figurent dans les conditions initiales (3), *sont olotropes dans la région* $\mathfrak{L}_y$, *les intégrales dont il s'agit le sont elles-mêmes dans la région* $(\mathfrak{L}_x, \mathfrak{L}_y)$.

(Cette proposition est indifféremment applicable dans le monde des quantités réelles ou dans celui des quantités imaginaires).

Pour fixer les idées et avoir des écritures plus commodes, on supposera, comme dans les démonstrations des deux numéros précédents, $k = 3$, $j = 3$, $p = 2$, et on remplacera les notations (17) par les notations (18), ce qui donnera, au lieu de (1), le système (19) ou (20). Les deux régions désignées dans l'énoncé ci-dessus par $\mathfrak{L}_x$, $\mathfrak{L}_y$ seront remplacées respectivement par $\mathfrak{L}_{x,y,z}$, $\mathfrak{L}_{s,t}$ (limites, l'une et l'autre, de régions parfaites), et l'énoncé lui-même prendra la forme suivante :

Un point, (x_0, y_0, z_0), étant pris à volonté dans la région $\mathfrak{L}_{x,y,z}$, considérons, dans le système passif (19) ou (20), les intégrales particulières qui répondent aux conditions initiales

$$(37) \qquad \left.\begin{aligned} u &= \upsilon(s, t) \\ v &= \varphi(s, t) \\ w &= \psi(s, t) \end{aligned}\right\} \text{pour } x, y, z = x_0, y_0, z_0.$$

Si, d'une part, les coefficients du système sont olotropes dans la région $(\mathfrak{L}_{x,y,z}, \mathfrak{L}_{s,t})$, si, d'autre part, les fonctions $\upsilon(s, t)$, $\varphi(s, t)$, $\psi(s, t)$ le sont dans la région $\mathfrak{L}_{s,t}$, les intégrales dont il s'agit le sont elles-mêmes dans la région $(\mathfrak{L}_{x,y,z}, \mathfrak{L}_{s,t})$.

I. Aux valeurs fondamentales, x_0, y_0, z_0, choisies pour x, y, z dans la région $\mathfrak{L}_{x,y,z}$, adjoignons des valeurs fondamentales, s_0, t_0, choisies pour s, t dans la région $\mathfrak{L}_{s,t}$. De la définition des *limites de régions parfaites* (n° **15**) résultent les conséquences suivantes :

Il existe, dans l'espace $[(x, y, z)]$, quelque suite illimitée de régions parfaites,

$$\mathfrak{P}'_{x,y,z}, \quad \mathfrak{P}''_{x,y,z}, \quad \ldots\ldots, \quad \mathfrak{P}^{(m)}_{x,y,z}, \quad \ldots\ldots,$$

toutes extraites de $\mathfrak{L}_{x,y,z}$, comprenant toutes le point (x_0, y_0, z_0), et jouissant de la double propriété : 1° que tout point de $\mathfrak{L}_{x,y,z}$ finisse, à partir d'une valeur suffisamment grande de m, par être situé dans $\mathfrak{P}^{(m)}_{x,y,z}$; 2°, que, pour toute valeur de m, la région (limitée et complète), $\mathfrak{f}^{(m)}_{x,y,z}$, obtenue par l'adjonction à $\mathfrak{P}^{(m)}_{x,y,z}$ des divers points semi-extérieurs à $\mathfrak{P}^{(m)}_{x,y,z}$ soit entièrement comprise dans $\mathfrak{P}^{(m+1)}_{x,y,z}$.

Semblablement, il existe, dans l'espace $[(s, t)]$, quelque suite illimitée de régions parfaites,

$$\mathfrak{P}'_{s,t}, \quad \mathfrak{P}''_{s,t}, \quad \ldots\ldots, \quad \mathfrak{P}^{(m)}_{s,t}, \quad \ldots\ldots,$$

toutes extraites de $\mathfrak{L}_{s,t}$, comprenant toutes le point (s_0, t_0), et jouissant de la double propriété : 1° que tout point de $\mathfrak{L}_{s,t}$ finisse, à partir d'une valeur suffisamment grande de m, par être situé dans $\mathfrak{P}^{(m)}_{s,t}$; 2° que, pour toute valeur de m, la région (limitée et complète), $\mathfrak{f}^{(m)}_{s,t}$, obtenue par l'adjonction à $\mathfrak{P}^{(m)}_{s,t}$ des divers points semi-extérieurs à $\mathfrak{P}^{(m)}_{s,t}$ soit entièrement comprise dans $\mathfrak{P}^{(m+1)}_{s,t}$.

Je dis qu'en attribuant à l'entier m une valeur particulière déterminée (quelconque), *les intégrales de* (19) *répondant aux conditions initiales* (37) *sont olotropes dans la région*

$$(38) \qquad (\mathfrak{P}^{(m)}_{x,y,z}, \quad \mathfrak{P}^{(m)}_{s,t}).$$

Effectivement, la région limitée et complète (n° **12,** I)

$$(39) \qquad (\mathfrak{f}^{(m)}_{x,y,z}, \quad \mathfrak{f}^{(m)}_{s,t})$$

se trouvant entièrement comprise dans la région normale

$$(\mathfrak{P}^{(m+1)}_{x,y,z}, \quad \mathfrak{P}^{(m+1)}_{s,t}),$$

où les divers coefficients du système (19) sont olotropes, il résulte d'une propriété connue (voir le début du n° **9**) que ces coefficients admettent, en un point variable de (39), un système d'olomètres (au moins) égaux à des quantités positives fixes convenablement choisies; à plus forte raison en est-il de même en un point variable de la région (38), entièrement comprise dans (39).

Semblablement, la région limitée et complète $\mathfrak{f}_{s,t}^{(m)}$ se trouvant entièrement comprise dans la région normale $\mathfrak{P}_{s,t}^{(m+1)}$, où les fonctions données $\upsilon(s, t)$, $\varphi(s, t)$, $\psi(s, t)$ sont olotropes, ces dernières admettent, en un point variable de $\mathfrak{f}_{s,t}^{(m)}$, un système d'olomètres (au moins) égaux à des quantités positives fixes convenablement choisies; à plus forte raison en est-il de même en un point variable de $\mathfrak{P}_{s,t}^{(m)}$.

En conséquence, on peut assigner des constantes positives, R_x, R_y, R_z, R_s, R_t, telles : 1° que les divers coefficients du système (19) soient calculables par cheminement dans la région (38) avec les rayons R_x, R_y, R_z, R_s, R_t; 2° que les fonctions données $\upsilon(s, t)$, $\varphi(s, t)$, $\psi(s, t)$ soient calculables par cheminement dans la région $\mathfrak{P}_{s,t}^{(m)}$ avec les rayons R_s, R_t.

Cela étant, il résulte du numéro précédent que les intégrales de (19) répondant aux conditions initiales (37) sont calculables par cheminement dans la région (38); et, comme cette dernière est une région parfaite, il résulte du n° **14** que les intégrales considérées y peuvent être assimilées à de véritables fonctions olotropes.

II. *Les intégrales de* (19) *répondant aux conditions initiales* (37) *sont*, comme nous voulions l'établir, *olotropes dans la région* $(\mathfrak{L}_{x,y,z}, \mathfrak{L}_{s,t})$.

Il suffit, pour s'en convaincre, d'observer qu'en vertu de I, elles sont olotropes, quel que soit m, dans la région (38), et de se reporter à notre remarque du n° **6**.

[**28**] Dans les espaces respectifs

$$[(x_1, \ldots, x_h)], \qquad [(y_1, \ldots, y_p)],$$

désignons, comme au début du numéro précédent, par $\mathfrak{L}_x$, $\mathfrak{L}_y$ des régions qui soient *limites de régions parfaites*, et considérons, dans le système *linéaire et passif* des hk équations (1), les inconnues $u_1, \ldots, u_k$ comme dépendant, *non seulement des* $h+p$ *variables*

$$x_1, \ldots, x_h,$$

$$y_1, \ldots, y_p,$$

mais encore des k *variables*

$$u'_1, \ldots, u'_k,$$

qui ne figurent pas explicitement dans le système.

Cela étant, *si les coefficients du système* (1) *sont olotropes dans la région* $(\mathfrak{L}_x, \mathfrak{L}_y)$, *si, de plus, on désigne par* $(x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)})$ *un point particulier choisi à volonté dans* $\mathfrak{L}_x$, *les intégrales particulières de* (1) *qui répondent aux conditions initiales*

$$(40) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_i = u'_i \quad \text{pour} \quad x_1, \ldots, x_h = x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)} \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \end{array} \right.$$

jouissent, dans toute l'étendue de la région

$$\left(\mathfrak{L}_x,\ \mathfrak{L}_y,\ [(u')]\right),$$

de la double propriété suivante :

1° *Elles y sont olotropes.*

2° *Leur déterminant différentiel, pris par rapport à* $u'_1, \ldots, u'_k$, *y est constamment différent de zéro.*

Observons tout d'abord qu'en vertu des nos **15** et **16**, la région $\left(\mathfrak{L}_y,\ [(u')]\right)$, extraite de l'espace

$$[(y_1,\ \ldots,\ y_p,\ u'_1,\ \ldots,\ u'_k)],$$

est une limite de région parfaite.

Cela étant, la première des deux propriétés formulées dans notre énoncé est une simple conséquence du numéro précédent, puisque les coefficients du système (1), considérés comme fonctions des x, des y et des u', sont olotropes dans la région

$$\left(\mathfrak{L}_x,\ \mathfrak{L}_y,\ [(u')]\right),$$

et que les seconds membres, u'_i, des conditions initiales (40), considérés comme fonctions des y et des u', le sont dans la région $\left(\mathfrak{L}_y,\ [(u')]\right)$.

L'olotropie des intégrales une fois constatée, la non-nullité de leur déterminant différentiel, pris par rapport à $u'_1,\ \ldots,\ u'_k$, découle immédiatement du n° **21**.

[**29**] Si l'on suppose que le groupe des variables $y_1,\ \ldots,\ y_p$ n'existe pas, les propositions des nos **27** et **28** deviennent les suivantes :

La région $\mathfrak{L}_x$ étant, dans l'espace $[(x_1,\ \ldots,\ x_h)]$, une *limite de région parfaite*, considérons le système *passif* des *hk* équations

$$(41)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = \mathrm{F}_{i,j} \\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k), \end{array}\right.$$

où les seconds membres $\mathrm{F}_{i,j}$ sont des expressions *linéaires* en $u_1, \ldots, u_k$, ayant pour coefficients des fonctions données de $x_1,\ \ldots,\ x_h$.

I. *Les inconnues* $u_1,\ \ldots,\ u_k$ *étant supposées dépendre uniquement des h variables* $x_1,\ \ldots,\ x_h$, *et les coefficients du système linéaire et passif* (41) *étant supposés olotropes dans la région* $\mathfrak{L}_x$, spécifiée ci-dessus, *les intégrales particulières de* (41) *assujetties à prendre des valeurs numériques arbitrairement données quand les variables* $x_1,\ \ldots,\ x_h$ *prennent elles-mêmes des valeurs numériques arbitrairement données dans* $\mathfrak{L}_x$, *ne peuvent manquer d'être olotropes dans toute l'étendue de cette dernière région.*

II. *Considérons actuellement les inconnues* $u_1,\ \ldots,\ u_k$ *du système linéaire et passif* (41) *comme dépendant non seulement des h variables* $x_1,\ \ldots,\ x_h$, *mais encore des k variables* $u'_1,\ \ldots,\ u'_k$, qui ne figurent pas explicitement dans le système.

Cela étant, *si les coefficients du système* (41) *sont olotropes dans la région* $\mathfrak{R}_x$, spécifiée ci-dessus, *si, de plus, on désigne par* $(x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)})$ *un point particulier choisi à volonté dans cette région, les intégrales particulières de* (41) *qui répondent aux conditions initiales*

$$u_i = u'_i \quad \text{pour} \quad x_1, \ldots, x_h = x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

sont données par des formules

$$(42) \qquad \begin{cases} u_i = \mathrm{U}_i(x_1, \ldots, x_h, u'_1 \ldots, u'_k) \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \end{cases}$$

dont les seconds membres, U_i, *jouissent, dans toute l'étendue de la région* $\big(\mathfrak{R}_x, [(u')]\big)$, *de la double propriété suivante :* 1° *Ils y sont olotropes.* 2° *Leur déterminant différentiel, pris par rapport à* $u'_1, \ldots, u'_k$, *y est constamment différent de zéro.*

[**30**] Les mêmes choses étant posées et les mêmes notations étant adoptées que dans l'énoncé II du numéro précédent, considérons, outre les trois groupes de quantités

$$u_1, \ldots, u_k,$$
$$u'_1, \ldots, u'_k,$$
$$x_1, \ldots, x_h,$$

un quatrième groupe,

$$x'_1, \ldots, x'_h,$$

et adjoignons aux k formules (42) les h formules

$$(43) \qquad \begin{cases} x_j = x'_j \\ (j = 1, 2, \ldots, h); \end{cases}$$

puis, considérant la région $\mathfrak{R}_x$, de l'espace $[(x_1, \ldots, x_h)]$, désignons par $\mathfrak{R}_{x'}$ la région correspondante de l'espace $[(x'_1, \ldots, x'_h)]$ qui s'en déduit à l'aide des formules (43). En remplaçant, dans les formules (42), les quantités x par leurs valeurs x', tirées de (43), on aura, entre les $h+k$ quantités x et u, d'une part, et les $h+k$ quantités x' et u', d'autre part, le système, équivalent à [(42), (43)], des $h+k$ relations

$$(44) \qquad \begin{cases} x_j = x'_j \\ (j = 1, 2, \ldots, h); \\ u_i = \mathrm{U}_i(x'_1, \ldots, x'_h, u'_1, \ldots, u'_k) \\ (i = 1, 2, \ldots, k). \end{cases}$$

Je dis que *les $h+k$ formules* (44) *établissent une correspondance olotrope point par point entre les deux régions*

$$\mathfrak{R} = \big(\mathfrak{R}_x, [(u)]\big), \quad \mathfrak{R}' = \big(\mathfrak{R}_{x'}, [(u')]\big).$$

I. *Si le point*

$$(x'_1, \ldots, x'_h, u'_1, \ldots, u'_k)$$

décrit toute la région $\mathfrak{L}'$, *le point*

$$(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k),$$

défini par les formules (44), *et évidemment situé dans la région* $\mathfrak{L}$, *ne peut manquer, pour des valeurs convenablement choisies des variables* x' *et* u', *de passer par tout point,*

$$(\xi_1, \ldots, \xi_h, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_k),$$

donné dans cette dernière région.

Considérons en effet, dans le système (41), les inconnues $u_1, \ldots, u_k$ comme dépendant uniquement des h variables $x_1, \ldots, x_h$. Cela étant, l'énoncé I du numéro précédent **29** nous montre que les intégrales particulières répondant aux conditions initiales

$$u_i = \upsilon_i \quad \text{pour} \quad x_1, \ldots, x_h = \xi_1, \ldots, \xi_h$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

sont olotropes dans la région $\mathfrak{L}_x$. Si l'on rapproche maintenant du n° **18** l'énoncé II, qui définit les formules (42), on voit qu'en désignant par

$$u_1^{(0)}, \ldots, u_k^{(0)}$$

les valeurs numériques prises par les intégrales considérées pour

$$x_1, \ldots, x_h = x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)},$$

ces intégrales, qui répondent tout aussi bien aux conditions initiales

$$u_i = u_i^{(0)} \quad \text{pour} \quad x_1, \ldots, x_h = x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)},$$

seront fournies par les formules

$$u_i = \mathrm{U}_i(x_1, \ldots, x_h, u_1^{(0)}, \ldots, u_k^{(0)})$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k):$$

on a dès lors, en revenant aux conditions initiales primitives, les relations numériques

$$\upsilon_i = \mathrm{U}_i(\xi_1, \ldots, \xi_h, u_1^{(0)}, \ldots, u_k^{(0)})$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k),$$

d'où résulte que, dans l'hypothèse

$$\begin{cases} x'_j = \xi_j & (j = 1, 2, \ldots, h), \\ u'_i = u_i^{(0)} & (i = 1, 2, \ldots, k), \end{cases}$$

les relations (44) donnent bien

$$\begin{cases} x_j = \xi_j & (j = 1, 2, \ldots, h), \\ u_i = v_i & (i = 1, 2, \ldots, k). \end{cases}$$

II. Ce fait une fois établi, la correspondance olotrope point par point dont il s'agit de prouver l'existence résulte, à titre de simple cas particulier, de la proposition exposée au n° **23**.

CHAPITRE IV

Systèmes passifs non linéaires d'équations différentielles totales du premier ordre; examen d'un cas où leurs intégrales peuvent être prolongées analytiquement.

[**31**] Les notions exposées ou rappelées dans les Chapitres I, II et III s'appliquent indifféremment, comme nous l'avons fait observer, au monde des quantités réelles ou à celui des quantités imaginaires. Dans le présent Chapitre IV, nous nous bornerons à la considération exclusive du monde des quantités *réelles* : on en verra plus loin la raison (nº **33**).

Nous établirons tout d'abord le lemme suivant :

Considérons le système *passif* des hk équations

(1)
$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}=\mathrm{F}_{i,j}(x_1,\ldots,x_h,\,y_1,\ldots,y_p,\,u_1,\ldots,u_k)\\ \qquad (i=1,2,\ldots,k;\quad j=1,2,\ldots,h),\end{array}\right.$$

impliquant les k fonctions inconnues

$$u_1,\ \ldots,\ u_k$$

des $h+p$ variables indépendantes

$$x_1,\ \ldots,\ x_h,$$
$$y_1,\ \ldots,\ y_p.$$

Désignant ensuite par $\mathfrak{P}_x$ une région *parfaite* (nº **11**) de l'espace

$$[(x_1,\ \ldots,\ x_h)]\quad \text{ou}\quad [(x)],$$

par $\mathfrak{P}_y$ une région *parfaite* de l'espace

$$[(y_1,\ \ldots,\ y_p)]\quad \text{ou}\quad [(y)],$$

et leur associant l'étendue indéfinie de l'espace

$$[(u_1,\ \ldots,\ u_k)]\quad \text{ou}\quad [(u)],$$

supposons que les seconds membres $\mathrm{F}_{i,j}$ *du système passif* (1) *soient olotropes dans toute l'étendue de la région*

(2)
$$\big(\mathfrak{P}_x,\ \mathfrak{P}_y,\ [(u)]\big),$$

et qu'ils y jouissent, en outre, de la double propriété formulée ci-après :

1º On peut assigner $h+p+k$ constantes positives,

(3)
$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{R}'_{x_1},\ \ldots\ldots,\ \mathrm{R}'_{x_h},\\ \mathrm{R}'_{y_1},\ \ldots\ldots,\ \mathrm{R}'_{y_p},\\ \mathrm{R}'_{u_1},\ \ldots\ldots,\ \mathrm{R}'_{u_k},\end{array}\right.$$

telles que, en un point variable de la région (2), chacune des fonctions $F_{i,j}$ admette un système d'olomètres (au moins) égaux respectivement aux constantes (3).

2° Si l'on désigne par

$$(4) \qquad \begin{cases} R_{x_1}, \ldots\ldots, R_{x_h}, \\ R_{y_1}, \ldots\ldots, R_{y_p}, \\ R_{u_1}, \ldots\ldots, R_{u_k} \end{cases}$$

$h+p+k$ nouvelles constantes positives, choisies comme on voudra, mais une fois pour toutes, au-dessous des précédentes (3) respectivement, et si, dans le développement taylorien de l'un quelconque des $F_{i,j}$, construit à partir d'un point quelconque,

$$(5) \qquad (x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, u_1, \ldots, u_k),$$

de la région (2), on remplace chaque coefficient par son module, et les accroissements des $h+p+k$ variables x, y, u respectivement par les quantités (4), la somme (positive) ainsi obtenue reste, pour tout choix du point (5) dans la région (2), constamment inférieure à une quantité positive fixe convenablement choisie.

Toutes ces choses étant posées, si l'on désigne par $(x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)})$ *un point particulier choisi comme on voudra dans* $\mathfrak{P}_x$, *et par*

$$\omega_i(y_1, \ldots, y_p)$$
$$(i=1, 2, \ldots, k)$$

des fonctions données, olotropes dans la région $\mathfrak{P}_y$, *les intégrales particulières du système* (1) *qui répondent aux conditions initiales*

$$(6) \qquad \begin{cases} u_i = \omega_i(y_1, \ldots, y_p) \quad \text{pour} \quad x_1, \ldots, x_h = x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)} \\ \qquad (i=1, 2, \ldots, k) \end{cases}$$

sont olotropes dans la région $(\mathfrak{P}_x, \mathfrak{P}_y)$.

I. Supposons actuellement que les seconds membres, $F_{i,j}$, du système (1) soient tous développables en séries tayloriennes à partir de certaines valeurs initiales,

$$(7) \qquad \begin{cases} \xi_1, \ldots\ldots, \xi_h, \\ \eta_1, \ldots\ldots, \eta_p, \\ \upsilon_1, \ldots\ldots, \upsilon_k, \end{cases}$$

des variables x, y, u, et que tous ces développements admettent les rayons simultanés de convergence

$$r_{x_1}, \ldots\ldots, r_{x_h},$$
$$r_{y_1}, \ldots\ldots, r_{y_p},$$
$$r_{u_1}, \ldots\ldots, r_{u_k}.$$

Soient, en outre :

r une constante positive inférieure à tous ces rayons;

M une autre constante positive supérieure aux hk sommes que l'on obtient en remplaçant, dans les développements des hk fonctions $F_{i,j}$, tous les coefficients par leurs modules, et les différences

$$\begin{array}{l} x_1 - \xi_1, \; \ldots\ldots, \; x_h - \xi_h, \\ y_1 - \eta_1, \; \ldots\ldots, \; y_p - \eta_p, \\ u_1 - \upsilon_1, \; \ldots\ldots, \; u_k - \upsilon_k \end{array}$$

par la quantité positive r.

Cela étant, *considérons, dans le système* (1), *les fonctions inconnues* $u_1, \ldots, u_k$ *comme dépendant à la fois des* $h+p$ *variables*

$$\begin{array}{l} x_1, \; \ldots\ldots, \; x_h, \\ y_1, \; \ldots\ldots, \; y_p, \end{array}$$

et de k *autres variables*,

$$u'_1, \; \ldots, \; u'_k,$$

qui ne figurent pas explicitement dans ses équations. Si l'on intègre le système (1) *à partir du point*

$$\begin{array}{l} x_1 = \xi_1, \; \ldots\ldots, \; x_h = \xi_h, \\ y_1 = \eta_1, \; \ldots\ldots, \; y_p = \eta_p, \\ u'_1 = \upsilon_1, \; \ldots\ldots, \; u'_k = \upsilon_k \end{array}$$

avec les conditions initiales

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_i = u'_i \quad \text{pour} \quad x_1, \; \ldots, \; x_h = \xi_1, \; \ldots, \; \xi_h \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \end{array} \right.$$

les développements initiaux des intégrales correspondantes admettent certain système de rayons de convergence ne dépendant que de M *et* r.

Effectivement, si l'on pose $\dfrac{M}{1 - \dfrac{\omega}{r}} = \Psi(\omega)$, la fonction

$$\Psi[(x_1 - \xi_1) + \ldots + (x_h - \xi_h) + (y_1 - \eta_1) + \ldots + (y_p - \eta_p) + (u_1 - \upsilon_1) + \ldots + (u_k - \upsilon_k)]$$

est, comme on sait, majorante des seconds membres $F_{i,j}$ relativement aux valeurs initiales (7) des variables x, y, u [1]. Observons, d'autre part, que, d'après les conditions initiales (8), les dérivées de tous ordres des fonctions inconnues $u_1, \ldots, u_k$ relatives aux seules variables y et u' ont des valeurs initiales toutes nulles, sauf quel-

---

[1] Voir l'ouvrage cité, n° **114**, II.

ques-unes (en nombre k) du premier ordre, dont la valeur initiale est positive et égale à 1. Cela étant, si, dans le système

$$(9)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}=\Psi[(x_1-\xi_1)+\ldots+(x_h-\xi_h)+(y_1-\eta_1)+\ldots+(y_p-\eta_p)+(u_1-v_1)+\ldots+(u_k-v_k)] \\ \qquad\qquad (i=1, 2, \ldots, k;\quad j=1, 2, \ldots, h),\end{array}\right.$$

dont on constatera aisément la passivité ([1]), on considère les intégrales particulières qui répondent aux conditions initiales (8), les rayons de convergence des développements initiaux de ces intégrales sont en même temps, comme il est bien facile de le voir, rayons de convergence pour les développements initiaux des intégrales similaires de (1). Or, pour avoir les développements initiaux des intégrales considérées du système (9), il suffit d'effectuer la transformation

$$\begin{array}{lcl} x_1-\xi_1=\mathfrak{x}_1, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & x_h-\xi_h=\mathfrak{x}_h, \\ y_1-\eta_1=\mathfrak{y}_1, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & y_p-\eta_p=\mathfrak{y}_p, \\ u_1-v_1=\mathfrak{u}_1, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & u_k-v_k=\mathfrak{u}_k, \\ u'_1-v_1=\mathfrak{u}'_1, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & u'_k-v_k=\mathfrak{u}'_k, \end{array}$$

de considérer le système (passif)

$$\frac{\partial \mathfrak{u}_i}{\partial \mathfrak{x}_j}=\Psi(\mathfrak{x}_1+\ldots+\mathfrak{x}_h+\mathfrak{y}_1+\ldots+\mathfrak{y}_p+\mathfrak{u}_1+\ldots+\mathfrak{u}_k)$$
$$(i=1, 2, \ldots, k;\quad j=1, 2, \ldots, h),$$

et de l'intégrer, à partir de valeurs toutes nulles des nouvelles variables indépendantes, avec les conditions initiales

$$\mathfrak{u}_i=\mathfrak{u}'_i \quad \text{pour} \quad \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_h=0, \ldots, 0$$
$$(i=1, 2, \ldots, k).$$

Les développements ainsi obtenus admettent évidemment certain système de rayons de convergence ne dépendant que de M et r; la même chose a lieu, dès lors, pour ceux qui s'en déduisent par la transformation inverse, c'est-à-dire pour les développements initiaux des intégrales particulières de (1) qui répondent aux conditions initiales (8).

II. Les mêmes choses étant posées que dans notre énoncé général, désignons par r une constante positive inférieure ou au plus égale à la plus petite des constantes (4), et, dans les développements tayloriens des $F_{i,j}$, construits à partir d'un point quelconque, (5), de la région (2), remplaçons chaque coefficient par son module, et les accroissements des $h+p+k$ variables x, y, u par r : il résulte de nos hypothèses que les hk sommes positives ainsi obtenues restent, pour tout choix du point (5) dans la région (2), constamment inférieures à une quantité positive fixe, M, convenablement choisie.

([1]) Voir l'ouvrage cité, n° **116**.

Cela étant, *si, dans le système* (1), *on considère les inconnues* $u_1, \ldots, u_k$ *comme dépendant des* $h+p+k$ *variables*

$$x_1, \ldots\ldots, x_h,$$
$$y_1, \ldots\ldots, y_p,$$
$$u'_1, \ldots\ldots, u'_k,$$

dont les k dernières, $u'_1, \ldots, u'_k$, ne figurent pas explicitement dans ses équations, *et si l'on désigne par* $\xi_1, \ldots, \xi_h$ *des valeurs initiales de* $x_1, \ldots, x_h$ *choisies comme on voudra dans la région* $\mathfrak{P}_x$, par $[(u')]$ l'étendue indéfinie de l'espace $[(u'_1, \ldots, u'_k)]$, *les intégrales de* (1) *qui répondent aux conditions initiales* (8) *sont olotropes dans la région*

$$(10) \qquad \left(\begin{matrix}\xi_j - \varepsilon < x_j < \xi_j + \varepsilon \\ (j=1, 2, \ldots, h)\end{matrix}, \ \mathfrak{P}_y, \ [(u')]\right),$$

où ε *désigne une quantité positive fixe convenablement choisie, ne dépendant que de* r *et* M, *et, par suite, ne dépendant pas du choix de* $\xi_1, \ldots, \xi_h$ *dans la région* $\mathfrak{P}_x$.

Considérons en effet la région

$$(11) \qquad \{(\xi_1, \ldots, \xi_h), \ \mathfrak{P}_y, \ [(u')]\},$$

où $(\xi_1, \ldots, \xi_h)$ désigne le point *fixe* donné dans $\mathfrak{P}_x$, et intégrons le système (1) à partir d'un point quelconque de cette région avec les conditions initiales (8). En vertu de l'alinéa I, quelques valeurs initiales de $y_1, \ldots, y_p$ et $u'_1, \ldots, u'_k$ que l'on choisisse dans $\mathfrak{P}_y$ et $[(u')]$ pour les associer aux valeurs initiales $\xi_1, \ldots, \xi_h$ de $x_1, \ldots, x_h$, les développements tayloriens obtenus pour les intégrales admettront des rayons de convergence (au moins) égaux à une quantité positive fixe ε, convenablement choisie, ne dépendant que de M et r.

Cela posé, désignons par $(\eta_1, \ldots, \eta_p)$ un point arbitrairement choisi dans $\mathfrak{P}_y$, par Q une constante positive de grandeur arbitraire, par $\mathfrak{Q}_{u'}$ le domaine de l'espace $[(u')]$ ayant pour centre le point $(0, \ldots, 0)$ avec des rayons tous égaux à Q, enfin par $\mathfrak{R}_{y,u'}$ la région de l'espace $\big([(y)], [(u')]\big)$ constituée par l'association des régions $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{Q}_{u'}$. Les k domaines

$$-Q < u'_1 < Q, \quad \ldots\ldots, \quad -Q < u'_k < Q,$$

respectivement extraits des k espaces

$$[(u'_1)], \quad \ldots\ldots, \quad [(u'_k)],$$

étant tous, comme on le voit aisément, des régions parfaites, le domaine $\mathfrak{Q}_{u'}$, de l'espace $[(u'_1, \ldots, u'_k)]$ ou $[(u')]$, qui résulte de leur simple association, sera une région parfaite de ce dernier espace (n° **12**); et, cela étant, la région $(\mathfrak{P}_y, \mathfrak{Q}_{u'})$, ou $\mathfrak{R}_{y,u'}$, de l'espace $\big([(y)], [(u')]\big)$, sera aussi, pour la même raison, une région parfaite. Si donc on considère, d'une part, le point

$$(12) \qquad (\eta_1, \ldots, \eta_p, 0, \ldots, 0)$$

de cette dernière, d''autre part, le rayon de convergence ε spécifié ci-dessus, il existe quelque suite limitée de domaines (dont quelques-uns éventuellement répétés dans cette suite) ayant leurs $p+k$ dimensions moindres que ε, formant par leur ensemble une région qui comprend toute la région $\mathfrak{R}_{y,u'}$ (avec des points étrangers à celle-ci), et tels : que le premier des domaines de la suite contienne le point (12), que l'un quelconque d'entre eux ait avec le précédent quelque point commun situé dans $\mathfrak{R}_{y,u'}$, enfin, que la région commune à l'un quelconque d'entre eux et à la région formée par l'ensemble de tous les précédents soit continue. Soit

$$(13) \qquad \mathfrak{d}^{(1)}_{y,u'}, \quad \mathfrak{d}^{(2)}_{y,u'}, \quad \ldots\ldots, \quad \mathfrak{d}^{(\mathrm{H})}_{y,u'}$$

une semblable suite. Après avoir intégré le système (1) à partir du point

$$(14) \qquad (\xi_1, \ldots, \xi_h, \eta_1, \ldots, \eta_p, 0, \ldots, 0)$$

de la région (11) avec les conditions initiales (8), nous prolongerons analytiquement, à l'aide des considérations exposées au n° **5**, les développements initiaux obtenus.

Désignons à cet effet par $a^{(1)}_{y,u'}$ le point (12) de l'espace $\big([(y)], [(u')]\big)$, par ξ le point $(\xi_1, \ldots, \xi_h)$ de l'espace $[(x)]$, et par $\mathfrak{c}_x$ le domaine de ce dernier espace qui a pour centre le point ξ avec des rayons tous égaux à ε. Le point $a^{(1)}_{y,u'}$ étant commun à $\mathfrak{R}_{y,u'}$ et à $\mathfrak{d}^{(1)}_{y,u'}$, il résulte de ce que nous avons dit au début de la démonstration du présent alinéa II que l'intégration de (1), effectuée à partir du point $(\xi, a^{(1)}_{y,u'})$ [c'est-à-dire du point (14)] avec les conditions initiales (8), donne pour les inconnues des fonctions olotropes dans la région

$$(\mathfrak{c}_x, \ \mathfrak{d}^{(1)}_{y,u'}).$$

Cela étant, si, comme les propriétés de la suite (13) nous le permettent, on considère un point, $a^{(2)}_{y,u'}$, de $\mathfrak{R}_{y,u'}$ situé à la fois dans les deux domaines $\mathfrak{d}^{(1)}_{y,u'}$, $\mathfrak{d}^{(2)}_{y,u'}$, et qu'on développe les intégrales dont il s'agit à partir du point $(\xi, a^{(2)}_{y,u'})$, choisi maintenant comme initial, ces intégrales, qu'on peut encore, relativement au nouveau choix où ξ n'a pas changé, considérer comme déterminées par les conditions initiales (8), seront, pour la même raison que ci-dessus, olotropes dans la région

$$(\mathfrak{c}_x, \ \mathfrak{d}^{(2)}_{y,u'});$$

il en résulte, puisque, en vertu des propriétés de la suite (13), la région commune à $\mathfrak{d}^{(1)}_{y,u'}$ et à $\mathfrak{d}^{(2)}_{y,u'}$ est continue, qu'elles sont olotropes dans la région

$$(\mathfrak{c}_x, \ \mathfrak{d}^{(1)}_{y,u'} + \mathfrak{d}^{(2)}_{y,u'}).$$

Semblablement, si l'on considère un point, $a^{(3)}_{y,u'}$, de $\mathfrak{R}_{y,u'}$ situé à la fois dans les deux domaines $\mathfrak{d}^{(2)}_{y,u'}$, $\mathfrak{d}^{(3)}_{y,u'}$, et qu'on développe les intégrales dont il s'agit à partir du point $(\xi, a^{(3)}_{y,u'})$, choisi à son tour comme initial, ces intégrales, qu'on peut encore, relativement au nouveau choix où ξ n'a pas changé, considérer comme déterminées par les conditions initiales (8), seront, pour la raison déjà invoquée deux fois, olotropes dans la région

$$(\mathfrak{e}_x,\ \mathfrak{d}^{(3)}_{y,u'});$$

il en résulte, puisque la région commune à $\mathfrak{d}^{(1)}_{y,u'} + \mathfrak{d}^{(2)}_{y,u'}$ et à $\mathfrak{d}^{(3)}_{y,u'}$ est continue, qu'elles sont olotropes dans la région

$$(\mathfrak{e}_x,\ \mathfrak{d}^{(1)}_{y,u'} + \mathfrak{d}^{(2)}_{y,u'} + \mathfrak{d}^{(3)}_{y,u'}).$$

Et ainsi de suite.

En continuant jusqu'à épuisement des domaines de la suite (13), on voit que les intégrales considérées sont olotropes dans la région

$$(\mathfrak{e}_x,\ \mathfrak{d}^{(1)}_{y,u'} + \mathfrak{d}^{(2)}_{y,u'} + \ldots + \mathfrak{d}^{(H)}_{y,u'});$$

elles le sont donc, à plus forte raison, dans la région

$$(\mathfrak{e}_x,\ \mathfrak{R}_{y,u'}) \quad \text{ou} \quad (\mathfrak{e}_x,\ \mathfrak{P}_y,\ \mathfrak{Q}_{u'}),$$

puisque $\mathfrak{R}_{y,u'}$ ou $(\mathfrak{P}_y,\ \mathfrak{Q}_{u'})$ se trouve compris dans

$$\mathfrak{d}^{(1)}_{y,u'} + \mathfrak{d}^{(2)}_{y,u'} + \ldots + \mathfrak{d}^{(H)}_{y,u'}.$$

Finalement, comme la constante positive Q, valeur commune des k rayons de $\mathfrak{Q}_{u'}$, peut être choisie aussi grande qu'on le veut, la même conclusion s'applique à la région $\big(\mathfrak{e}_x,\ \mathfrak{P}_y,\ [(u')]\big)$, qui n'est autre que (10).

III. *En attribuant aux notations* $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$ *le même sens que dans notre énoncé général, désignant par* $(\xi_1, \ldots, \xi_h)$, comme à l'alinéa II, *un point pris à volonté dans la région* $\mathfrak{P}_x$, *et par*

$$\lambda_i(y_1, \ldots, y_p)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

des fonctions données, olotropes dans la région $\mathfrak{P}_y$, *les intégrales particulières de* (1) *qui répondent aux conditions initiales*

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_i = \lambda_i(y_1, \ldots, y_p) \quad \text{pour} \quad x_1, \ldots, x_h = \xi_1, \ldots, \xi_h \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \end{array} \right.$$

sont olotropes dans la région

$$\left(\begin{array}{c} \xi_j - \varepsilon < x_j < \xi_j + \varepsilon \\ (j = 1, 2, \ldots, h) \end{array},\ \mathfrak{P}_y \right),$$

où ε *désigne la constante positive spécifiée à l'alinéa* II.

Pour obtenir les intégrales dont il s'agit, il suffit, comme nous allons le voir, de former celles qui répondent aux conditions initiales (8), et d'y faire ensuite

$$(16) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u'_i = \lambda_i(y_1, \ldots, y_p) \\ (i = 1, 2, \ldots, k). \end{array} \right.$$

Considérons en effet les intégrales, $u_1, \ldots, u_k$, de (1) qui répondent aux conditions initiales (8), et soient (u_i), $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$ ce que deviennent respectivement u_i, $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ par la substitution (16) : de l'identité

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_{i,j}[x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, u_1, \ldots, u_k],$$

qui a lieu quels que soient les x, les y et les u', on tire immédiatement l'identité

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = F_{i,j}[x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, (u_1), \ldots, (u_k)],$$

qui a lieu quels que soient les x et les y. D'autre part, en développant u_i suivant les puissances de $x_1 - \xi_1, \ldots, x_h - \xi_h$, on aperçoit très facilement l'identité

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial (u_i)}{\partial x_j},$$

qui a lieu, comme la précédente, quels que soient les x et les y. En rapprochant ces deux identités, on en déduit

$$\frac{\partial (u_i)}{\partial x_j} = F_{i,j}[x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, (u_1), \ldots, (u_k)],$$

d'où résulte que $(u_1), \ldots, (u_k)$ sont bien des intégrales de (1). Enfin, comme, dans le développement de u_i formé ci-dessus, le terme indépendant des différences $x_1 - \xi_1, \ldots, x_h - \xi_h$ est u'_i, les intégrales $(u_1), \ldots, (u_k)$ satisfont manifestement aux conditions initiales (15).

Ainsi, les intégrales de (1) qui répondent aux conditions initiales (15) se déduisent bien, par la simple substitution (16), de celles qui répondent aux conditions initiales (8). Cela étant, le simple rapprochement de l'alinéa II avec le principe général des fonctions composées suffit à établir le point que nous avons actuellement en vue.

IV. Revenons à notre énoncé général.

De ce qui vient d'être établi à l'alinéa III résulte la conséquence suivante :

Si l'on désigne par $(\xi_1, \ldots, \xi_h)$ un point donné dans $\mathfrak{P}_x$, et qu'on assujettisse les intégrales de (1) à se réduire, pour

$$x_1, \ldots, x_h = \xi_1, \ldots, \xi_h,$$

à des fonctions données de $y_1, \ldots, y_p$, olotropes dans la région $\mathfrak{P}_y$, les intégrales dont il s'agit sont olotropes dans la région

$$\left(\begin{matrix} \xi_j - \varepsilon < x_j < \xi_j + \varepsilon \\ (j = 1, 2, \ldots, h) \end{matrix}, \; \mathfrak{P}_y \right),$$

où ε désigne une quantité positive suffisamment petite, qui reste la même, quels que soient, d'une part, le point $(\xi_1, \ldots, \xi_h)$ choisi dans $\mathfrak{P}_x$, d'autre part, les fonctions données de $y_1, \ldots, y_p$.

Considérant alors, en même temps que cette constante positive ε, le point

$$(17) \qquad (x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}),$$

de la région parfaite $\mathfrak{P}_x$, qui figure dans les conditions initiales (6), faisons-leur correspondre, conformément à la définition du n° **11**, une suite limitée de domaines (dont quelques-uns éventuellement répétés dans cette suite) ayant leurs h dimensions moindres que ε, formant par leur ensemble une région qui comprend toute la région $\mathfrak{P}_x$ (avec des points étrangers à cette dernière), et tels : que le premier des domaines de la suite contienne le point (17), que l'un quelconque d'entre eux ait avec le précédent quelque point commun situé dans $\mathfrak{P}_x$, enfin, que la région commune à l'un quelconque d'entre eux et à la région formée par l'ensemble de tous les précédents soit continue. Soit

$$(18) \qquad \mathfrak{d}_x^{(1)}, \quad \mathfrak{d}_x^{(2)}, \quad \ldots\ldots, \quad \mathfrak{d}_x^{(K)}$$

une semblable suite.

Le point (17) étant commun à $\mathfrak{P}_x$ et à $\mathfrak{d}_x^{(1)}$, il résulte de ce qui a été dit au début du présent alinéa IV que les intégrales de (1) répondant aux conditions initiales (6) sont olotropes dans la région

$$(\mathfrak{d}_x^{(1)}, \mathfrak{P}_y);$$

si l'on considère d'ailleurs, comme les propriétés de la suite (18) nous le permettent, un point de $\mathfrak{P}_x$ situé à la fois dans les deux domaines $\mathfrak{d}_x^{(1)}$, $\mathfrak{d}_x^{(2)}$, les intégrales dont il s'agit se réduisent, en un pareil point, à certaines fonctions déterminées de $y_1, \ldots, y_p$, olotropes dans la région $\mathfrak{P}_y$, et peuvent être considérées comme répondant à ces nouvelles conditions initiales.

Cela étant, et pour la même raison que ci-dessus, on voit qu'elles sont olotropes dans la région

$$(\mathfrak{d}_x^{(2)}, \mathfrak{P}_y),$$

d'où résulte (n° **5**), puisque, en vertu des propriétés de la suite (18), la région commune à $\mathfrak{d}_x^{(1)}$ et à $\mathfrak{d}_x^{(2)}$ est continue, qu'elles sont olotropes dans la région

$$(\mathfrak{d}_x^{(1)} + \mathfrak{d}_x^{(2)}, \mathfrak{P}_y);$$

si l'on considère d'ailleurs un point de $\mathfrak{P}_x$ situé à la fois dans les deux domaines $\mathfrak{d}_x^{(2)}$, $\mathfrak{d}_x^{(3)}$, les intégrales dont il s'agit se réduisent, en un pareil point, à certaines fonctions déterminées de $y_1, \ldots, y_p$, olotropes dans la région $\mathfrak{P}_y$, et peuvent être considérées comme répondant à ces nouvelles conditions initiales.

Cela étant, et toujours pour la même raison, elles sont olotropes dans la région

$$(\mathfrak{d}_x^{(3)}, \mathfrak{P}_y),$$

d'où résulte, puisque la région commune à $\mathfrak{d}_x^{(1)} + \mathfrak{d}_x^{(2)}$ et à $\mathfrak{d}_x^{(3)}$ est continue, qu'elles sont olotropes dans la région

$$(\mathfrak{d}_x^{(1)} + \mathfrak{d}_x^{(2)} + \mathfrak{d}_x^{(3)}, \mathfrak{P}_y);$$

si l'on considère d'ailleurs un point de $\mathfrak{P}_x$ situé à la fois dans les deux domaines $\mathfrak{d}_x^{(3)}$, $\mathfrak{d}_x^{(4)}$, les intégrales dont il s'agit se réduisent, en un pareil point, à certaines fonctions déterminées de $y_1, \ldots, y_p$, olotropes dans la région $\mathfrak{P}_y$, et peuvent être considérées comme répondant à ces nouvelles conditions initiales.

Et ainsi de suite.

En continuant jusqu'à épuisement des domaines de la suite (18), on voit que les intégrales considérées sont olotropes dans la région

$$(\mathfrak{d}_x^{(1)} + \mathfrak{d}_x^{(2)} + \ldots + \mathfrak{d}_x^{(K)},\ \mathfrak{P}_y);$$

elles le sont donc, à plus forte raison, dans la région

$$(\mathfrak{P}_x,\ \mathfrak{P}_y),$$

puisque $\mathfrak{P}_x$ se trouve compris dans

$$\mathfrak{d}_x^{(1)} + \mathfrak{d}_x^{(2)} + \ldots + \mathfrak{d}_x^{(K)}.$$

Ainsi se trouve établi notre lemme.

[**32**] Désignant actuellement par $\mathfrak{L}_x$ une région de l'espace $[(x_1, \ldots, x_h)]$ qui soit *limite de région parfaite* (nº **15**), par $\mathfrak{L}_y$ une région de l'espace $[(y_1, \ldots, y_p)]$ qui jouisse de la même propriété, et par $(x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)})$ un point particulier choisi comme on voudra dans $\mathfrak{L}_x$, considérons, dans le système passif des hk équations (1), les intégrales particulières répondant aux conditions initiales (6), que nous transcrivons ci-dessous :

$$u_i = \omega_i(y_1, \ldots, y_p) \quad \text{pour} \quad x_1, \ldots, x_h = x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

Si, d'une part, les seconds membres $F_{i,j}$ *du système passif* (1) *sont olotropes dans la région*

$$\big(\mathfrak{L}_x,\ \mathfrak{L}_y,\ [(u)]\big),$$

et que chacun d'eux admette, par rapport à chacune des k variables u, quelque période réelle; si, d'autre part, les fonctions données

$$\omega_i(y_1, \ldots, y_p)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k),$$

qui figurent dans les conditions initiales (6), *sont olotropes dans la région* $\mathfrak{L}_y$ *: les intégrales particulières répondant à ces conditions initiales le sont elles-mêmes dans la région* $(\mathfrak{L}_x, \mathfrak{L}_y)$.

(Cette proposition, ainsi qu'il résulte d'une remarque faite ci-après au nº **33**, ne s'applique pas au monde des quantités imaginaires.)

I. Soient

$\mathfrak{R}_{x,y}$ une région *normale* de l'espace $([(x)], [(y)])$;

$F(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, u_1, \ldots, u_k)$ une fonction des $h+p+k$ variables x, y, u, possédant la double propriété d'être olotrope dans la région $(\mathfrak{R}_{x,y}, [(u)])$, et d'admettre par rapport à chacune des k variables u quelque période réelle;

$\mathfrak{f}_{x,y}$ un fragment *limité et complet* de la région normale $\mathfrak{R}_{x,y}$.

Cela étant, nous noterons les deux points suivants :

1° *On peut assigner $h+p+k$ constantes positives,*

$$(19)\qquad \begin{cases} R'_{x_1}, \;\ldots\ldots,\; R'_{x_h}, \\ R'_{y_1}, \;\ldots\ldots,\; R'_{y_p}, \\ R'_{u_1}, \;\ldots\ldots,\; R'_{u_k}, \end{cases}$$

telles que, en un point variable de la région $(\mathfrak{f}_{x,y}, [(u)])$, la fonction F *admette un système d'olomètres (au moins) égaux respectivement aux constantes* (19).

Désignons en effet par $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ les k périodes (réelles) que la fonction F est supposée admettre par rapport aux k variables respectives $u_1, \ldots, u_k$, et qu'il est évidemment permis de supposer positives; désignons en outre par $\mathfrak{f}_u$ la région limitée et complète de l'espace $[(u)]$ que définit le système des relations

$$0 \leqq u_1 \leqq \Omega_1, \quad \ldots\ldots, \quad 0 \leqq u_k \leqq \Omega_k,$$

et considérons, dans la région $(\mathfrak{f}_{x,y}, [(u)])$, le fragment limité et complet $(\mathfrak{f}_{x,y}, \mathfrak{f}_u)$. En un point variable de ce dernier, la fonction F admet, d'après ce qui a été dit au n° **9**, un système d'olomètres (au moins) égaux à certaines constantes positives, (19), convenablement choisies. Tout point de la région $(\mathfrak{f}_{x,y}, [(u)])$ peut d'ailleurs se déduire de quelque point,

$$(20)\qquad (\xi_1, \ldots, \xi_h, \eta_1, \ldots, \eta_p, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_k),$$

de la région $(\mathfrak{f}_{x,y}, \mathfrak{f}_u)$ en ajoutant aux k dernières coordonnées, $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_k$, de celui-ci certains multiples entiers (positifs, nuls, ou négatifs) des constantes respectives $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$, et on pourra dès lors le représenter par la notation

$$(21)\qquad (\xi_1, \ldots, \xi_h, \eta_1, \ldots, \eta_p, \upsilon_1+n_1\Omega_1, \;\ldots,\; \upsilon_k+n_k\Omega_k),$$

où $n_1, \ldots, n_k$ désignent des entiers; comme la fonction F, en vertu de nos hypothèses, admet, par rapport aux k variables $u_1, \ldots, u_k$, les k périodes respectives $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$, ses développements tayloriens, construits à partir des deux points (20) et (21), ont leurs coefficients semblables respectivement égaux : la propriété constatée pour le fragment $(\mathfrak{f}_{x,y}, \mathfrak{f}_u)$ relativement aux olomètres de la fonction F subsiste donc pour toute l'étendue de la région $(\mathfrak{f}_{x,y}, [(u)])$.

2° Désignons maintenant par

$$(22)\qquad \begin{cases} R_{x_1}, \ldots\ldots, R_{x_h}, \\ R_{y_1}, \ldots\ldots, R_{y_p}, \\ R_{u_1}, \ldots\ldots, R_{u_k} \end{cases}$$

des quantités positives choisies comme on voudra, mais une fois pour toutes, au-dessous des quantités (19) respectivement, et, dans le développement taylorien de F, construit à partir d'un point quelconque,

$$(23)\qquad (x_1, \ldots, x_h,\ y_1, \ldots, y_p,\ u_1, \ldots, u_k),$$

de $\left(\mathfrak{f}_{x,y},\ [(u)]\right)$, remplaçons chaque coefficient par son module, et les accroissements des $h+p+k$ variables par les quantités positives (22). Cela étant, *la somme positive ainsi obtenue reste, quel que soit le point* (23) *choisi dans* $\left(\mathfrak{f}_{x,y},\ [(u)]\right)$, *constamment inférieure à une quantité positive fixe convenablement choisie.*

Effectivement, si, au lieu de $\left(\mathfrak{f}_{x,y},\ [(u)]\right)$, on considère $(\mathfrak{f}_{x,y},\ \mathfrak{f}_u)$, la propriété à établir résulte immédiatement du n° **9**; et, cela étant, elle ne peut manquer d'être vraie pour $\left(\mathfrak{f}_{x,y},\ [(u)]\right)$, à cause de la périodicité de F par rapport à chacune des variables $u_1, \ldots, u_k$.

II. Revenons aux intégrales du système (1) déterminées par les conditions initiales (6).

Aux valeurs fondamentales,

$$(24)\qquad x_1^{(0)},\ \ldots,\ x_h^{(0)},$$

choisies pour $x_1, \ldots, x_h$ dans la région $\mathfrak{L}_x$, adjoignons des valeurs fondamentales,

$$(25)\qquad y_1^{(0)},\ \ldots,\ y_p^{(0)},$$

choisies pour $y_1, \ldots, y_p$ dans la région $\mathfrak{L}_y$. De la définition des *limites de régions parfaites* résultent les conséquences suivantes :

Il existe, dans l'espace $[(x_1, \ldots, x_h)]$, quelque suite illimitée de régions parfaites,

$$\mathfrak{P}_x',\quad \mathfrak{P}_x'',\quad \ldots\ldots,\quad \mathfrak{P}_x^{(m)},\quad \ldots\ldots,$$

toutes extraites de $\mathfrak{L}_x$, comprenant toutes le point (24), et jouissant de la double propriété : 1° que tout point de $\mathfrak{L}_x$ finisse, à partir d'une valeur suffisamment grande de m, par être situé dans $\mathfrak{P}_x^{(m)}$; 2° que, pour toute valeur de m, la région (limitée et complète), $\mathfrak{f}_x^{(m)}$, obtenue par l'adjonction à $\mathfrak{P}_x^{(m)}$ des divers points semi-extérieurs à $\mathfrak{P}_x^{(m)}$ soit entièrement comprise dans $\mathfrak{P}_x^{(m+1)}$.

Semblablement, il existe, dans l'espace $[(y_1, \ldots, y_p)]$, quelque suite illimitée de régions parfaites,

$$\mathfrak{P}_y',\quad \mathfrak{P}_y'',\quad \ldots\ldots,\quad \mathfrak{P}_y^{(m)},\quad \ldots\ldots,$$

toutes extraites de $\mathfrak{L}_y$, comprenant toutes le point (25), et telles : 1° que tout point de $\mathfrak{L}_y$ finisse, à partir d'une valeur suffisamment grande de m, par être situé dans $\mathfrak{P}_y^{(m)}$; 2° que, pour toute valeur de m, la région (limitée et complète), $\mathfrak{f}_y^{(m)}$, obtenue par l'adjonction à $\mathfrak{P}_y^{(m)}$ des divers points semi-extérieurs à $\mathfrak{P}_y^{(m)}$ soit entièrement comprise dans $\mathfrak{P}_y^{(m+1)}$.

Je dis qu'en attribuant à l'entier m une valeur particulière déterminée (quelconque), *les intégrales de* (1) *répondant aux conditions initiales* (6) *sont olotropes dans la région*

$$(\mathfrak{P}_x^{(m)}, \quad \mathfrak{P}_y^{(m)}). \tag{26}$$

Il résulte en effet de l'alinéa I que les seconds membres $F_{i,j}$ du système (1), olotropes, en vertu de notre hypothèse, dans la région

$$\left(\mathfrak{P}_x^{(m+1)}, \quad \mathfrak{P}_y^{(m+1)}, \quad [(u)]\right),$$

jouissent, dans toute la région

$$\left(\mathfrak{f}_x^{(m)}, \quad \mathfrak{f}_y^{(m)}, \quad [(u)]\right),$$

et, à plus forte raison, dans toute la région

$$\left(\mathfrak{P}_x^{(m)}, \quad \mathfrak{P}_y^{(m)}, \quad [(u)]\right), \tag{27}$$

qui fait partie de la précédente, de la double propriété spécifiée au début du n° **31**, savoir :

1° On peut assigner $h+p+k$ constantes positives,

$$\left\{\begin{array}{l} R'_{x_1}, \; \ldots\ldots, \; R'_{x_h}, \\ R'_{y_1}, \; \ldots\ldots, \; R'_{y_p}, \\ R'_{u_1}, \; \ldots\ldots, \; R'_{u_k}, \end{array}\right. \tag{28}$$

telles que, en un point variable de la région (27), chacune des fonctions $F_{i,j}$ admette un système d'olomètres (au moins) égaux respectivement aux constantes (28).

2° Si l'on désigne par

$$\left\{\begin{array}{l} R_{x_1}, \; \ldots\ldots, \; R_{x_h}, \\ R_{y_1}, \; \ldots\ldots, \; R_{y_p}, \\ R_{u_1}, \; \ldots\ldots, \; R_{u_k} \end{array}\right. \tag{29}$$

$h+p+k$ nouvelles constantes positives, choisies comme on voudra, mais une fois pour toutes, au-dessous des précédentes (28) respectivement, et si, dans le développement taylorien de l'un quelconque des $F_{i,j}$, construit à partir d'un point quelconque,

$$(x_1, \ldots, x_h, \; y_1, \ldots, y_p, \; u_1, \ldots, u_k), \tag{30}$$

de la région (27), on remplace chaque coefficient par son module, et les accroissements des $h+p+k$ variables x, y, u respectivement par les quantités (29), les

hk sommes positives ainsi obtenues restent, pour tout choix du point (30) dans la région (27), constamment inférieures à une quantité positive fixe convenablement choisie.

Cela étant, la conclusion du n° **31** est applicable, et assure l'olotropie, dans la région (26), des intégrales considérées du système (1).

III. *Les intégrales du système* (1) *répondant aux conditions initiales* (6) *sont*, comme le dit notre énoncé général, *olotropes dans la région* $(\mathfrak{L}_x, \mathfrak{L}_y)$.

Il suffit, pour s'en convaincre, d'observer qu'elles sont olotropes, quel que soit m, dans la région (26), et de se reporter à notre remarque du n° **6**.

[**33**] Il est essentiel d'observer ici que les remarques exposées dans l'alinéa I du numéro précédent ne peuvent s'étendre au monde des quantités imaginaires. Si l'on suppose en effet que

$$F(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_p, u_1, \ldots, u_k)$$

soit une fonction des variables imaginaires x, y, u, olotrope dans la région $\left(\mathfrak{R}_{x,y}, [(u)]\right)$, et que l'on désigne par $\mathfrak{f}_{x,y}$ un fragment limité et complet de la région normale $\mathfrak{R}_{x,y}$, la considération des développements tayloriens de F qui correspondent aux divers points de la région $\left(\mathfrak{f}_{x,y}, [(u)]\right)$ ne pourrait, comme dans l'alinéa cité, être restreinte à une région limitée et complète de l'espace

$$\left([(x)], [(y)], [(u)]\right)$$

qu'en supposant F *bipériodique* par rapport à chacune des variables u : or, on sait qu'une fonction bipériodique d'une variable imaginaire ne peut, à moins de se réduire à une constante, être indéfiniment olotrope, et la fonction F ne contiendrait dès lors aucune des variables u.

Revenant au système (1), on serait donc conduit à supposer que ses seconds membres ne contiennent pas les fonctions inconnues $u_1, \ldots, u_k$, ce qui ferait retomber sur un cas très particulier des systèmes linéaires considérés au Chapitre précédent.

[**34**] Dans les espaces respectifs

$$[(x_1, \ldots, x_h)], \quad [(y_1, \ldots, y_p)],$$

désignons, comme au n° **32**, par $\mathfrak{L}_x$, $\mathfrak{L}_y$ des régions qui soient *limites de régions parfaites*, et considérons, dans le système *passif* des hk équations (1), les inconnues $u_1, \ldots, u_k$ comme dépendant, *non seulement des* $h+p$ *variables*

$$x_1, \ldots, x_h,$$
$$y_1, \ldots, y_p,$$

mais encore des k variables

$$u'_1, \ldots, u'_k,$$

qui ne figurent pas explicitement dans le système.

Cela étant, *si les seconds membres* $F_{i,j}$ *du système passif* (1) *sont olotropes dans la région*

$$\left(\mathfrak{L}_x, \mathfrak{L}_y, [(u)]\right),$$

et que chacun d'eux admette, par rapport à chacune des k variables u, quelque période réelle; si, de plus, on désigne par $(x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)})$ *un point particulier choisi comme on voudra dans* $\mathfrak{L}_x$: *les intégrales particulières de* (1) *qui répondent aux conditions initiales*

$$u_i = u'_i \quad \text{pour} \quad x_1, \ldots, x_h = x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

jouissent, dans toute l'étendue de la région

$$\left(\mathfrak{L}_x, \mathfrak{L}_y, [(u')]\right),$$

de la double propriété suivante :

1° *Elles y sont olotropes.*

2° *Leur déterminant différentiel, pris par rapport à* $u'_1, \ldots, u'_k$, *y est constamment différent de zéro.*

Raisonnement analogue à celui du n° **28**.

[**35**] Si l'on suppose que le groupe des variables $y_1, \ldots, y_p$ n'existe pas, les propositions des n^{os} **32** et **34** deviennent les suivantes :

La région $\mathfrak{L}_x$ étant, dans l'espace $[(x_1, \ldots, x_h)]$, une *limite de région parfaite*, considérons le système *passif* des hk équations

$$(31) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_{i,j}(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) \\ (i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, h). \end{array}\right.$$

I. *Les inconnues* $u_1, \ldots, u_k$ *étant supposées dépendre uniquement des h variables* $x_1, \ldots, x_h$, *si les seconds membres* $F_{i,j}$ *du système* (31) *sont olotropes dans la région* $\left(\mathfrak{L}_x, [(u)]\right)$, *et que chacun d'eux admette, par rapport à chacune des k variables u, quelque période réelle, les intégrales particulières de* (31) *assujetties à prendre des valeurs numériques arbitrairement données quand les variables* $x_1, \ldots, x_h$ *prennent elles-mêmes des valeurs numériques arbitrairement données dans* $\mathfrak{L}_x$, *ne peuvent manquer d'être olotropes dans toute l'étendue de cette dernière région.*

II. *Considérons* actuellement *les inconnues* $u_1, \ldots, u_k$ *du système passif* (31) *comme dépendant, non seulement des h variables* $x_1, \ldots, x_h$, *mais encore des k variables* $u'_1, \ldots, u'_k$, qui ne figurent pas explicitement dans le système.

Cela étant, *si les seconds membres* $F_{i,j}$ *du système* (31) *sont olotropes dans la région* $\left(\mathfrak{L}_x, [(u)]\right)$, *et que chacun d'eux admette, par rapport à chacune des k variables u,* *quelque période réelle; si, de plus, on désigne par* $(x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)})$ *un point particulier choisi comme on voudra dans* $\mathfrak{L}_x$: *les intégrales particulières de* (31) *qui répondent aux conditions initiales*

$$u_i = u'_i \quad \text{pour} \quad x_1, \ldots, x_h = x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

sont données par des formules,

$$(32) \qquad \begin{cases} u_i = \mathrm{U}_i(x_1, \ldots, x_h, u'_1, \ldots, u'_k) \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \end{cases}$$

dont les seconds membres, U_i, *jouissent, dans toute l'étendue de la région* $\big(\mathfrak{L}_x, [(u')]\big)$, *de la double propriété suivante* : 1° *Ils y sont olotropes*. 2° *Leur déterminant différentiel, pris par rapport à* $u'_1, \ldots, u'_k$, *y est constamment différent de zéro.*

[**36**] Les mêmes choses étant posées et les mêmes notations étant adoptées que dans l'énoncé II du numéro précédent, considérons, outre les trois groupes de quantités

$$u_1, \ldots, u_k,$$
$$u'_1, \ldots, u'_k,$$
$$x_1, \ldots, x_h,$$

un quatrième groupe,

$$x'_1, \ldots, x'_h,$$

et adjoignons aux k formules (32) les h formules

$$(33) \qquad \begin{cases} x_j = x'_j \\ (j = 1, 2, \ldots, h); \end{cases}$$

puis, considérant la région $\mathfrak{L}_x$, de l'espace $[(x_1, \ldots, x_h)]$, désignons par $\mathfrak{L}_{x'}$ la région correspondante de l'espace $[(x'_1, \ldots, x'_h)]$ qui s'en déduit à l'aide des formules (33). En remplaçant, dans les formules (32), les quantités x par leurs valeurs x', tirées de (33), on aura, entre les $h+k$ quantités x et u, d'une part, et les $h+k$ quantités x' et u', d'autre part, le système, équivalent à [(32), (33)], des $h+k$ relations

$$(34) \qquad \begin{cases} x_j = x'_j \\ \quad (j = 1, 2, \ldots, h); \\ u_i = \mathrm{U}_i(x'_1, \ldots, x'_h, u'_1, \ldots, u'_k) \\ \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \end{cases}$$

Cela étant, *les* $h+k$ *formules* (34) *établissent une correspondance olotrope point par point entre les deux régions*

$$\mathfrak{L} = \big(\mathfrak{L}_x, [(u)]\big), \qquad \mathfrak{L}' = \big(\mathfrak{L}_{x'}, [(u')]\big).$$

Même raisonnement qu'au n° **30**.

CHAPITRE V

Systèmes partiels du premier ordre auxquels s'applique la méthode d'intégration de Jacobi; examen de divers cas où leurs intégrales peuvent être prolongées analytiquement.

[**37**] Nous commencerons par établir, sur les systèmes du premier ordre auxquels s'applique la méthode d'intégration de Jacobi, deux remarques relatives à la passivité. La première, comme on le verra ci-après (n° **38**), s'applique à des systèmes beaucoup plus généraux. La seconde, qui fait l'objet du n° **39**, nécessite au contraire une certaine hypothèse restrictive, que nous allons dès maintenant formuler.

Supposons, pour fixer les idées, que le système jacobien considéré implique les trois fonctions inconnues u, v, w des variables indépendantes x, y, z, s, t, et que dans son Tableau (n° **17**), dont les lignes doivent être, les unes entièrement pleines, les autres entièrement vides, les lignes (x), (y), (z) soient entièrement pleines, et les lignes (s), (t) entièrement vides; il est alors de la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{S}_x\dfrac{\partial u}{\partial s}+\mathrm{T}_x\dfrac{\partial u}{\partial t}+\mathrm{U}_x, & \dfrac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{S}_x\dfrac{\partial v}{\partial s}+\mathrm{T}_x\dfrac{\partial v}{\partial t}+\mathrm{V}_x, & \dfrac{\partial w}{\partial x}=\mathrm{S}_x\dfrac{\partial w}{\partial s}+\mathrm{T}_x\dfrac{\partial w}{\partial t}+\mathrm{W}_x,\\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{S}_y\dfrac{\partial u}{\partial s}+\mathrm{T}_y\dfrac{\partial u}{\partial t}+\mathrm{U}_y, & \dfrac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{S}_y\dfrac{\partial v}{\partial s}+\mathrm{T}_y\dfrac{\partial v}{\partial t}+\mathrm{V}_y, & \dfrac{\partial w}{\partial y}=\mathrm{S}_y\dfrac{\partial w}{\partial s}+\mathrm{T}_y\dfrac{\partial w}{\partial t}+\mathrm{W}_y,\\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial z}=\mathrm{S}_z\dfrac{\partial u}{\partial s}+\mathrm{T}_z\dfrac{\partial u}{\partial t}+\mathrm{U}_z, & \dfrac{\partial v}{\partial z}=\mathrm{S}_z\dfrac{\partial v}{\partial s}+\mathrm{T}_z\dfrac{\partial v}{\partial t}+\mathrm{V}_z, & \dfrac{\partial w}{\partial z}=\mathrm{S}_z\dfrac{\partial w}{\partial s}+\mathrm{T}_z\dfrac{\partial w}{\partial t}+\mathrm{W}_z,
\end{array}\right.$$

où S_x, S_y, S_z, T_x, T_y, T_z, U_x, U_y, U_z, V_x, V_y, V_z, W_x, W_y, W_z désignent des fonctions connues de x, y, z, s, t, u, v, w.

Cela étant, l'hypothèse restrictive à laquelle nous avons fait allusion plus haut, et que nous formulerons de nouveau en temps voulu, consiste à supposer que les coefficients des dérivées premières dans les seconds membres, c'est-à-dire les fonctions S, T, ne contiennent que x, y, z, s, t, à l'exclusion de u, v, w.

[**38**] Notre première remarque se formule ainsi :

Si deux systèmes orthonomes [1] *du premier ordre, Σ et Σ', linéaires par rapport aux dérivées (premières) de leurs fonctions inconnues, peuvent se déduire l'un de l'autre par un changement des variables indépendantes* (suivi de résolution), *et si, dans leurs Tableaux respectifs* (n° **17**), *les colonnes correspondant aux mêmes fonctions inconnues contiennent les mêmes nombres respectifs d'équations, les deux systèmes sont à la fois passifs ou non passifs.*

---

[1] Pour la théorie des systèmes *orthonomes*, voir l'ouvrage intitulé : *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, ch. VII.

I. Étant donné un système *orthonome du premier ordre*, Σ, si aux équations qui le composent on adjoint toutes celles qui peuvent s'en déduire par différentiation première, il résulte de la théorie générale des systèmes orthonomes que le groupe résultant, Γ (formé avec des relations du premier et du second ordre), comprend un nombre d'équations distinctes au moins égal au nombre des dérivées principales (1) premières et secondes des inconnues.

Cela étant, on peut formuler la condition suivante :

Pour que le système Σ soit passif, il faut et il suffit que le nombre des équations distinctes du groupe Γ soit précisément égal au nombre des dérivées principales premières et secondes des inconnues.

La cote première de chaque variable indépendante étant, comme l'exige la définition de l'orthonomie, égale à l'unité, si la cote première de chaque fonction inconnue se trouve être en même temps égale à zéro, la cote première d'une dérivée quelconque est égale à son ordre même, et la condition formulée ci-dessus découle immédiatement de la règle de passivité des systèmes orthonomes quelconques (2).

Si, sans être nulles, les cotes premières des inconnues sont toutes égales entre elles, il est manifeste qu'en les remplaçant toutes par zéro, les conditions requises pour l'orthonomie ne cesseront pas d'être satisfaites; on se trouvera ainsi ramené au cas précédent.

Si, enfin, les cotes premières des inconnues ne sont pas toutes égales entre elles, on attribuera à chacune des variables indépendantes et des fonctions inconnues une cote supplémentaire, que l'on considérera comme *antérieure* à celles que possède déjà cette quantité : cette cote supplémentaire sera choisie, pour les diverses variables indépendantes, égale à l'unité, et, pour les diverses fonctions inconnues, égale à zéro; et il est bien facile de voir que la définition de l'orthonomie, satisfaite, par hypothèse, dans notre système du premier ordre, avec les anciennes cotes, ne cessera pas de l'être avec les nouvelles. On se trouve donc, cette fois encore, ramené au premier cas.

II. Revenant à notre énoncé général, supposons que le système Σ soit passif, et soient

$u, \ldots\ldots$ les fonctions inconnues;

$x, \ldots\ldots$ les anciennes variables;

$x', \ldots\ldots$ les nouvelles;

$\mathfrak{f}$ les formules qui lient $x, \ldots$ à $x', \ldots$;

$\mathfrak{F}$ celles qui expriment les anciennes dérivées premières et secondes de $u, \ldots$ en fonctions de leurs nouvelles dérivées des mêmes ordres, ou inversement;

---

(1) Voir l'ouvrage cité, n° **90**.

(2) *Ibid.*, n° **112**.

Γ le groupe obtenu en adjoignant aux équations de Σ toutes celles qui peuvent s'en déduire par différentiation première (relative à l'une quelconque des variables x, ...);

Γ' le groupe obtenu en adjoignant aux équations de Σ' toutes celles qui peuvent s'en déduire par différentiation première (relative à l'une quelconque des variables x', ...);

$\mathfrak{G}$ le groupe transformé de Γ à l'aide des formules $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{F}$.

Puisque, dans l'un et l'autre des deux systèmes Σ, Σ', les colonnes correspondant aux mêmes fonctions inconnues comprennent les mêmes nombres respectifs d'équations, les fonctions inconnues ont, de part et d'autre, les mêmes nombres respectifs de dérivées principales dans chaque ordre : nous désignerons par N le nombre total des dérivées principales premières et secondes, soit du système Σ, soit du système Σ'. En raison de la passivité supposée du système Σ, le groupe Γ contient exactement N relations distinctes; il en est de même du groupe $\mathfrak{G}$, déduit de Γ par transformation. Quant au groupe Γ', relatif à Σ', il en contient au moins N (voir le début de l'alinéa I).

Cela posé, si l'on considère l'une quelconque des relations Γ', nécessairement vérifiée pour toutes les intégrales du système Σ', et qu'on la transforme à l'aide des formules $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{F}$, la relation résultante, nécessairement vérifiée pour toutes les intégrales du système Σ, est une conséquence algébrique de Γ, car autrement la solution générale de Σ ne posséderait pas le degré d'indétermination qui résulte de la nature passive de ce système; on en conclut qu'avant sa transformation, la relation considérée du groupe Γ' est une conséquence algébrique de $\mathfrak{G}$. Donc le groupe Γ' ne peut contenir plus de N relations distinctes, et, comme il en contient au moins N, il en contient un nombre exactement égal à N. Le système Σ' est donc passif, en vertu de I.

Ainsi, la passivité de Σ entraîne celle de Σ'; et, de même, la passivité de Σ' entraîne celle de Σ.

[**39**] Notre deuxième remarque se formule comme il suit :

Si, dans les seconds membres du système (1), *les fonctions* S, T, *coefficients des dérivées premières, ne contiennent que les variables indépendantes* x, y, z, s, t, *à l'exclusion des inconnues* u, v, w, *la passivité du système* (1) *entraîne comme conséquence nécessaire celle du système*

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial x} = S_x \dfrac{\partial\omega}{\partial s} + T_x \dfrac{\partial\omega}{\partial t}, \\[2mm] \dfrac{\partial\omega}{\partial y} = S_y \dfrac{\partial\omega}{\partial s} + T_y \dfrac{\partial\omega}{\partial t}, \\[2mm] \dfrac{\partial\omega}{\partial z} = S_z \dfrac{\partial\omega}{\partial s} + T_z \dfrac{\partial\omega}{\partial t}, \end{cases}$$

impliquant la fonction inconnue ω *des variables indépendantes* x, y, z, s, t.

Faisons tout d'abord abstraction de l'hypothèse restrictive spécifiée par l'énoncé sur les fonctions S, T.

Pour former les conditions de passivité du système (1), dont on aperçoit aisément la nature orthonome [1], il suffit d'adjoindre aux équations qui le composent celles qui s'en déduisent par toutes les différentiations premières possibles, et d'éliminer entre les équations du système résultant toutes les dérivées principales du premier et du second ordre (n° **38**, I). Aux diverses dérivées cardinales [2],

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}, & \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}, & \dfrac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, & \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}, & \dfrac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}, \end{matrix}$$

correspondent respectivement, comme il est facile de s'en rendre compte, les diverses conditions de passivité; si l'on considère, par exemple, celle qui correspond à $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, on trouve, tout calcul fait,

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(S_x \frac{\partial S_y}{\partial s} + T_x \frac{\partial S_y}{\partial t} + \frac{\partial S_x}{\partial y} + \frac{\partial S_x}{\partial u} U_y + \frac{\partial S_x}{\partial v} V_y + \frac{\partial S_x}{\partial w} W_y\right) \frac{\partial u}{\partial s} \\ &+ \left(S_x \frac{\partial T_y}{\partial s} + T_x \frac{\partial T_y}{\partial t} + \frac{\partial T_x}{\partial y} + \frac{\partial T_x}{\partial u} U_y + \frac{\partial T_x}{\partial v} V_y + \frac{\partial T_x}{\partial w} W_y\right) \frac{\partial u}{\partial t} \\ &+ \quad S_x \frac{\partial U_y}{\partial s} + T_x \frac{\partial U_y}{\partial t} + \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_x}{\partial u} U_y + \frac{\partial U_x}{\partial v} V_y + \frac{\partial U_x}{\partial w} W_y \quad = \\ = &\left(S_y \frac{\partial S_x}{\partial s} + T_y \frac{\partial S_x}{\partial t} + \frac{\partial S_y}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial u} U_x + \frac{\partial S_y}{\partial v} V_x + \frac{\partial S_y}{\partial w} W_x\right) \frac{\partial u}{\partial s} \\ &+ \left(S_y \frac{\partial T_x}{\partial s} + T_y \frac{\partial T_x}{\partial t} + \frac{\partial T_y}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial u} U_x + \frac{\partial T_y}{\partial v} V_x + \frac{\partial T_y}{\partial w} W_x\right) \frac{\partial u}{\partial t} \\ &+ \quad S_y \frac{\partial U_x}{\partial s} + T_y \frac{\partial U_x}{\partial t} + \frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial u} U_x + \frac{\partial U_y}{\partial v} V_x + \frac{\partial U_y}{\partial w} W_x, \end{aligned} \right.$$

---

[1] En attribuant à x, y, z, s, t, u, v, w les cotes suivantes :

	x	y	z	s	t	u	v	w
cotes premières	1	1	1	1	1	0	0	0
cotes secondes	1	1	1	0	0	0	0	0

[2] Voir l'ouvrage cité, n° **92**.

relation qui doit être satisfaite quels que soient $x, y, z, s, t, u, v, w, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial t}$, considérés comme autant de variables indépendantes distinctes.

Si maintenant, au lieu du système (1), on considère le système

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = S_x \frac{\partial u}{\partial s} + T_x \frac{\partial u}{\partial t}, && \frac{\partial v}{\partial x} = S_x \frac{\partial v}{\partial s} + T_x \frac{\partial v}{\partial t}, && \frac{\partial w}{\partial x} = S_x \frac{\partial w}{\partial s} + T_x \frac{\partial w}{\partial t},\\
&\frac{\partial u}{\partial y} = S_y \frac{\partial u}{\partial s} + T_y \frac{\partial u}{\partial t}, && \frac{\partial v}{\partial y} = S_y \frac{\partial v}{\partial s} + T_y \frac{\partial v}{\partial t}, && \frac{\partial w}{\partial y} = S_y \frac{\partial w}{\partial s} + T_y \frac{\partial w}{\partial t},\\
&\frac{\partial u}{\partial z} = S_z \frac{\partial u}{\partial s} + T_z \frac{\partial u}{\partial t}, && \frac{\partial v}{\partial z} = S_z \frac{\partial v}{\partial s} + T_z \frac{\partial v}{\partial t}, && \frac{\partial w}{\partial z} = S_z \frac{\partial w}{\partial s} + T_z \frac{\partial w}{\partial t},
\end{aligned}\right.$$

qui s'en déduit par la simple suppression des termes indépendants des dérivées, la condition de passivité correspondant à la dérivée cardinale $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ se déduira de (3) en supposant identiquement nulles les diverses fonctions U, V, W; il vient ainsi :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left(S_x \frac{\partial S_y}{\partial s} + T_x \frac{\partial S_y}{\partial t} + \frac{\partial S_x}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial s} + \left(S_x \frac{\partial T_y}{\partial s} + T_x \frac{\partial T_y}{\partial t} + \frac{\partial T_x}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\\
&= \left(S_y \frac{\partial S_x}{\partial s} + T_y \frac{\partial S_x}{\partial t} + \frac{\partial S_y}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial s} + \left(S_y \frac{\partial T_x}{\partial s} + T_y \frac{\partial T_x}{\partial t} + \frac{\partial T_y}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}.
\end{aligned}\right.$$

Enfin, si, dans les systèmes (1) et (4), on suppose, comme le spécifie notre énoncé, que les diverses fonctions S, T dépendent exclusivement de x, y, z, s, t, à l'exclusion de u, v, w, la relation (3), obtenue par la considération de (1), prend la forme

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left(S_x \frac{\partial S_y}{\partial s} + T_x \frac{\partial S_y}{\partial t} + \frac{\partial S_x}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial s} + \left(S_x \frac{\partial T_y}{\partial s} + T_x \frac{\partial T_y}{\partial t} + \frac{\partial T_x}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\\
&\quad + S_x \frac{\partial U_y}{\partial s} + T_x \frac{\partial U_y}{\partial t} + \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_x}{\partial u} U_y + \frac{\partial U_x}{\partial v} V_y + \frac{\partial U_x}{\partial w} W_y =\\
&= \left(S_y \frac{\partial S_x}{\partial s} + T_y \frac{\partial S_x}{\partial t} + \frac{\partial S_y}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial s} + \left(S_y \frac{\partial T_x}{\partial s} + T_y \frac{\partial T_x}{\partial t} + \frac{\partial T_y}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\\
&\quad + S_y \frac{\partial U_x}{\partial s} + T_y \frac{\partial U_x}{\partial t} + \frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial u} U_x + \frac{\partial U_y}{\partial v} V_x + \frac{\partial U_y}{\partial w} W_x,
\end{aligned}\right.$$

et la relation (5), obtenue par la considération de (4), ne change pas de forme. Or, les conditions de passivité (6) et (5) devant être vérifiées identiquement, c'est-à-dire *pour toutes valeurs numériques des quantités qui y figurent*, $x, y, z, s, t, u, v, w, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial t}$, l'identité (6) entraîne manifestement l'identité (5). En d'autres termes, les diverses fonctions S, T étant supposées ne pas contenir

u, v, w, si la condition de passivité correspondant à $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$ est *identiquement* vérifiée dans le système (1), elle ne peut manquer de l'être aussi dans le système (4); en vertu d'un calcul semblable, la même chose a lieu pour les conditions de passivité correspondant aux autres dérivées cardinales : la passivité du système (1) entraîne donc celle du système (4).

Cela étant, observons qu'en vertu de l'hypothèse restrictive faite sur les S, T, le système (4) se compose de trois systèmes distincts n'impliquant respectivement, le premier que la seule inconnue u, le deuxième que la seule inconnue v, le dernier que la seule inconnue w. Le système (4) étant passif, ces trois derniers ne peuvent manquer de l'être séparément, ce qui revient à dire que le système (2), impliquant l'inconnue ω, est passif. C'est ce que nous nous proposions d'établir.

[**40**] Nous rappellerons maintenant une remarque bien connue sur laquelle nous aurons plus loin à nous appuyer.

Les fonctions S, T *étant supposées dépendre uniquement de* x, y, z, s, t (à l'exclusion de u, v, w), et le système (1) étant supposé *passif*, la recherche des intégrales ordinaires de (1) qui répondent aux conditions initiales données

$$(7)\qquad \left.\begin{aligned} u &= \upsilon(s, t) \\ v &= \varphi(s, t) \\ w &= \psi(s, t) \end{aligned}\right\} \text{pour } x, y, z = x_0, y_0, z_0$$

se ramène, à l'aide d'un changement de variables que nous allons définir, à la même recherche, effectuée dans un système d'équations différentielles totales.

Observons tout d'abord que la passivité du système (1) entraîne celle du système (2) [n° **39**], et que cette dernière entraîne à son tour (n° **24**, I) celle du système différentiel total

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} &= -S_x, & \frac{\partial t}{\partial x} &= -T_x, \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= -S_y, & \frac{\partial t}{\partial y} &= -T_y, \\ \frac{\partial s}{\partial z} &= -S_z, & \frac{\partial t}{\partial z} &= -T_z; \end{aligned}\right.$$

dans le système passif (8), considérons les inconnues s, t comme dépendant, non seulement de x, y, z, mais encore de deux autres variables, s', t', qui n'y figurent pas explicitement, et soient

$$\begin{aligned} s &= A(x, y, z, s', t'), \\ t &= B(x, y, z, s', t') \end{aligned}$$

les intégrales particulières de (8) qui répondent aux conditions initiales

$$\left.\begin{aligned} s &= s' \\ t &= t' \end{aligned}\right\} \text{ pour } x, y, z = x_0, y_0, z_0.$$

Cela étant, si, dans le système (1), on effectue le changement de variables

$$\left\{\begin{aligned} x &= x', \\ y &= y', \\ z &= z', \\ s &= \mathrm{A}(x', y', z', s', t'), \\ t &= \mathrm{B}(x', y', z', s', t'), \end{aligned}\right. \tag{9}$$

où x', y', z', s', t' désignent de nouvelles variables substituées à x, y, z, s, t, *le système qui résulte de cette transformation jouit de la double propriété suivante :*

1° *C'est un système d'équations différentielles totales du premier ordre, dans le Tableau duquel* (n° **17**) *les lignes* (x'), (y'), (z') *sont entièrement pleines et les lignes* (s'), (t') *entièrement vides;* ce système est d'ailleurs nécessairement *passif*, en vertu de notre remarque du n° **38**.

2° *La recherche, dans le système* (1), *des intégrales ordinaires répondant aux conditions initiales données* (7), *se ramène à la recherche, dans le système transformé, des intégrales répondant aux conditions initiales toutes semblables*

$$\left.\begin{aligned} u &= \upsilon(s', t') \\ v &= \varphi(s', t') \\ w &= \psi(s', t') \end{aligned}\right\} \text{ pour } x', y', z' = x_0, y_0, z_0. \tag{10}$$

Effectivement, si, résolvant les formules (9) par rapport aux variables nouvelles x', y', z', s', t', on les met sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ s' &= \mathrm{F}(x, y, z, s, t), \\ t' &= \mathrm{H}(x, y, z, s, t), \end{aligned}\right. \tag{11}$$

il résulte de ce qui a été vu au n° **24** que les seconds membres,

$$\mathrm{F}(x, y, z, s, t), \qquad \mathrm{H}(x, y, z, s, t),$$

des deux dernières formules (11) vérifient le système passif (2) avec les conditions initiales

$$\left.\begin{aligned} F &= s \\ H &= t \end{aligned}\right\} \text{pour } x, y, z = x_0, y_0, z_0,$$

et que l'on a dès lors, quels que soient x, y, z, s, t,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} - S_x \frac{\partial F}{\partial s} - T_x \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial x} - S_x \frac{\partial H}{\partial s} - T_x \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial y} - S_y \frac{\partial F}{\partial s} - T_y \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial y} - S_y \frac{\partial H}{\partial s} - T_y \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial z} - S_z \frac{\partial F}{\partial s} - T_z \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial z} - S_z \frac{\partial H}{\partial s} - T_z \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \end{aligned}\right.$$

Or, dans le changement de variables (9) ou (11), les formules de transformation relatives aux dérivées premières sont, en désignant par λ une fonction quelconque de x, y, z, s, t,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial x} &= \frac{\partial\lambda}{\partial x'} + \frac{\partial\lambda}{\partial s'}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial t'}\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{\partial\lambda}{\partial y} &= \frac{\partial\lambda}{\partial y'} + \frac{\partial\lambda}{\partial s'}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial t'}\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \frac{\partial\lambda}{\partial z} &= \frac{\partial\lambda}{\partial z'} + \frac{\partial\lambda}{\partial s'}\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial\lambda}{\partial t'}\frac{\partial H}{\partial z}, \\ \frac{\partial\lambda}{\partial s} &= \frac{\partial\lambda}{\partial s'}\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial\lambda}{\partial t'}\frac{\partial H}{\partial s}, \\ \frac{\partial\lambda}{\partial t} &= \frac{\partial\lambda}{\partial s'}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial t'}\frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned}$$

On en déduit, pour

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\lambda}{\partial x} - S_x \frac{\partial\lambda}{\partial s} - T_x \frac{\partial\lambda}{\partial t}, \\ &\frac{\partial\lambda}{\partial y} - S_y \frac{\partial\lambda}{\partial s} - T_y \frac{\partial\lambda}{\partial t}, \\ &\frac{\partial\lambda}{\partial z} - S_z \frac{\partial\lambda}{\partial s} - T_z \frac{\partial\lambda}{\partial t}, \end{aligned}$$

les expressions respectives

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\lambda}{\partial x'} + \frac{\partial\lambda}{\partial s'}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - S_x \frac{\partial F}{\partial s} - T_x \frac{\partial F}{\partial t}\right) + \frac{\partial\lambda}{\partial t'}\left(\frac{\partial H}{\partial x} - S_x \frac{\partial H}{\partial s} - T_x \frac{\partial H}{\partial t}\right), \\ &\frac{\partial\lambda}{\partial y'} + \frac{\partial\lambda}{\partial s'}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - S_y \frac{\partial F}{\partial s} - T_y \frac{\partial F}{\partial t}\right) + \frac{\partial\lambda}{\partial t'}\left(\frac{\partial H}{\partial y} - S_y \frac{\partial H}{\partial s} - T_y \frac{\partial H}{\partial t}\right), \\ &\frac{\partial\lambda}{\partial z'} + \frac{\partial\lambda}{\partial s'}\left(\frac{\partial F}{\partial z} - S_z \frac{\partial F}{\partial s} - T_z \frac{\partial F}{\partial t}\right) + \frac{\partial\lambda}{\partial t'}\left(\frac{\partial H}{\partial z} - S_z \frac{\partial H}{\partial s} - T_z \frac{\partial H}{\partial t}\right), \end{aligned}$$

d'où résulte que l'on a, en tenant compte des formules (12),

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}-S_x\frac{\partial\lambda}{\partial s}-T_x\frac{\partial\lambda}{\partial t}=\frac{\partial\lambda}{\partial x'},$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}-S_y\frac{\partial\lambda}{\partial s}-T_y\frac{\partial\lambda}{\partial t}=\frac{\partial\lambda}{\partial y'},$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial z}-S_z\frac{\partial\lambda}{\partial s}-T_z\frac{\partial\lambda}{\partial t}=\frac{\partial\lambda}{\partial z'}.$$

Le système (1) devient donc

$$(13)\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x'}=U_x, &&\frac{\partial v}{\partial x'}=V_x, &&\frac{\partial w}{\partial x'}=W_x,\\&\frac{\partial u}{\partial y'}=U_y, &&\frac{\partial v}{\partial y'}=V_y, &&\frac{\partial w}{\partial y'}=W_y,\\&\frac{\partial u}{\partial z'}=U_z, &&\frac{\partial v}{\partial z'}=V_z, &&\frac{\partial w}{\partial z'}=W_z,\end{aligned}\right.$$

où les diverses fonctions U, V, W sont respectivement les mêmes que dans le système (1), sauf le remplacement de x, y, z, s, t par leurs valeurs en x', y', z', s', t' tirées des formules (9); comme nous l'avons d'ailleurs fait observer dans l'énoncé, la passivité supposée du système (1) entraîne comme conséquence nécessaire celle du système (13) [n° **38**].

Cela posé, désignons par

$$\Upsilon(x, y, z, s, t),\qquad \Phi(x, y, z, s, t),\qquad \Psi(x, y, z, s, t)$$

les intégrales particulières du système (1) visées par notre énoncé, c'est-à-dire celles qui répondent aux conditions initiales (7) : on a, d'après cela, les identités

$$\Upsilon(x_0, y_0, z_0, s, t)=\upsilon(s, t),$$
$$\Phi(x_0, y_0, z_0, s, t)=\varphi(s, t),$$
$$\Psi(x_0, y_0, z_0, s, t)=\psi(s, t).$$

Par le changement de variables (9) ou (11), ces intégrales deviennent

$$(14)\qquad\left\{\begin{aligned}&\Upsilon[x', y', z',\ A(x', y', z', s', t'),\ B(x', y', z', s', t')],\\&\Phi[x', y', z',\ A(x', y', z', s', t'),\ B(x', y', z', s', t')],\\&\Psi[x', y', z',\ A(x', y', z', s', t'),\ B(x', y', z', s', t')];\end{aligned}\right.$$

en outre, puisque $A(x', y', z', s', t')$, $B(x', y', z', s', t')$ se réduisent respectivement à s', t' pour $x', y', z'=x_0, y_0, z_0$, les expressions (14) se réduisent, dans cette même hypothèse numérique, à

$$\Upsilon(x_0, y_0, z_0, s', t'),\qquad \Phi(x_0, y_0, z_0, s', t'),\qquad \Psi(x_0, y_0, z_0, s', t'),$$

c'est-à-dire à

$$\upsilon(s', t'), \qquad \varphi(s', t'), \qquad \psi(s', t').$$

On voit donc que la recherche, dans le système (1), du groupe d'intégrales particulières répondant aux conditions initiales (7) se ramène à la recherche, dans le système (13), du groupe d'intégrales particulières répondant aux conditions initiales toutes semblables (10).

[**41**] Nous allons établir maintenant, sur le prolongement analytique des intégrales du système (1), les divers énoncés qui constituent l'objet direct du présent Mémoire. Ces énoncés, au nombre de quatre, se déduisent, comme on va le voir, de propositions exposées dans les Chapitres III et IV sur les systèmes passifs d'équations différentielles totales, propositions dont les unes, celles du Chapitre III, s'appliquent indifféremment au monde des quantités réelles ou à celui des quantités imaginaires, tandis que les autres, celles du Chapitre IV, s'appliquent exclusivement au monde des quantités réelles; ces dernières n'interviendront d'ailleurs que dans nos deuxième, troisième et quatrième énoncés relatifs au système (1). En conséquence, le premier des quatre énoncés qui vont suivre s'appliquera, indifféremment, au monde des quantités réelles ou à celui des quantités imaginaires, et les trois autres, exclusivement, au monde des quantités réelles.

[**42**] *Le système* (1) *étant linéaire par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées premières, et les fonctions* S, T (indépendantes de u, v, w) *étant, de plus, linéaires en* s, t, *supposons, d'une part, que les coefficients des expressions linéaires* S, T *soient olotropes dans une région*, $\mathfrak{R}_{x,y,z}$, *qui soit limite de région parfaite; supposons, d'autre part, que les coefficients des expressions* U, V, W, *linéaires en* u, v, w, *soient olotropes dans la région* $\big(\mathfrak{R}_{x,y,z}, [(s, t)]\big)$. *Supposons enfin que tous ces coefficients satisfassent aux conditions requises pour la passivité du système* (1).

Cela étant, *si l'on désigne par* (x_0, y_0, z_0) *un point pris à volonté dans la région* $\mathfrak{R}_{x,y,z}$, *et par* $\upsilon(s, t)$, $\varphi(s, t)$, $\psi(s, t)$ *des fonctions données, olotropes dans toute l'étendue de l'espace* $[(s, t)]$, *les intégrales particulières du système* (1) *qui répondent aux conditions initiales*

$$(15) \qquad \left.\begin{aligned} u &= \upsilon(s, t) \\ v &= \varphi(s, t) \\ w &= \psi(s, t) \end{aligned}\right\} \text{pour } x, y, z = x_0, y_0, z_0$$

sont olotropes dans la région $\big(\mathfrak{R}_{x,y,z}, [(s, t)]\big)$.

[Le présent énoncé, comme nous venons de l'expliquer (n° **41**), s'applique indifféremment au monde des quantités réelles ou à celui des quantités imaginaires.]

Les fonctions S, T étant indépendantes de u, v, w, la passivité supposée du système (1) entraîne, comme nous l'avons vu (nº **39**), celle du système (2), et cette dernière entraîne à son tour (nº **24**, I) celle du système (8). Dans (8), considérons les inconnues s, t comme dépendant, non seulement de x, y, z, mais encore de deux autres variables, s', t', qui ne figurent pas explicitement dans le système, et soient

$$\begin{cases} s = \mathrm{A}(x, y, z, s', t'), \\ t = \mathrm{B}(x, y, z, s', t') \end{cases}$$

les intégrales de (8) qui répondent aux conditions initiales

$$\left.\begin{aligned} s &= s' \\ t &= t' \end{aligned}\right\} \text{pour } x, y, z = x_0, y_0, z_0.$$

En opérant, dans le système passif (1), le changement de variables

$$(16) \qquad \begin{cases} x = x', \\ y = y', \\ z = z', \\ s = \mathrm{A}(x', y', z', s', t'), \\ t = \mathrm{B}(x', y', z', s', t'), \end{cases}$$

on obtient (nº **40**) le système, également passif, (13), où les expressions linéaires U, V, W sont les mêmes que dans (1), à cela près que, dans leurs coefficients, les variables x, y, z, s, t se trouvent remplacées par leurs expressions en x', y', z', s', t' tirées de (16); la recherche, dans le système (1), des intégrales répondant aux conditions initiales (15) se ramène d'ailleurs à la recherche, dans le système (13), des intégrales répondant aux conditions initiales toutes semblables

$$(17) \qquad \left.\begin{aligned} u &= \upsilon(s', t') \\ v &= \varphi(s', t') \\ w &= \psi(s', t') \end{aligned}\right\} \text{pour } x', y', z' = x_0, y_0, z_0.$$

Or, si l'on désigne par $\mathfrak{E}_{x', y', z'}$ la région transformée de $\mathfrak{E}_{x, y, z}$ à l'aide des formules

$$x = x', \qquad y = y', \qquad z = z',$$

il résulte du nº **30** que les formules (16) établissent une correspondance olotrope point par point entre les deux régions

$$\mathfrak{E} = \left(\mathfrak{E}_{x, y, z}, [(s, t)]\right), \qquad \mathfrak{E}' = \left(\mathfrak{E}_{x', y', z'}, [(s', t')]\right),$$

respectivement extraites des espaces

$$[(x, y, z, s, t)], \qquad [(x', y', z', s', t')].$$

Les coefficients du système (13) étant dès lors olotropes dans la région $\mathfrak{L}'$, et les seconds membres des conditions initiales (17) l'étant d'ailleurs, par hypothèse, dans la région $[(s', t')]$, il résulte du n° **27** que les intégrales particulières de (13) répondant à ces conditions initiales sont olotropes dans la région $\mathfrak{L}'$. Si donc on y remplace x', y', z', s', t' par leurs valeurs en x, y, z, s, t tirées des formules de transformation, les fonctions ainsi obtenues, c'est-à-dire les intégrales de (1) répondant aux conditions initiales (15), seront olotropes dans la région $\mathfrak{L}$.

[**43**] *Le système* (1) *étant* (comme au n° **42**) *linéaire par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées premières* (mais les fonctions S, T n'étant pas linéaires en s, t, contrairement à ce qui avait lieu dans **42**), *supposons que les divers coefficients du système* (les S, T et les coefficients des expressions linéaires U, V, W) *soient olotropes dans la région* $\left(\mathfrak{L}_{x,y,z}, [(s, t)]\right)$, *où* $\mathfrak{L}_{x,y,z}$ *désigne une limite de région parfaite, et qu'ils remplissent les conditions requises pour la passivité du système; supposons, de plus, que chacune des fonctions* S, T *admette, par rapport à chacune des variables s, t, quelque période réelle.*

Cela étant, *la conclusion de l'énoncé précédent* (n° **42**) *reste applicable.*

(Le présent énoncé, comme il est dit au n° **41**, s'applique exclusivement au monde des quantités réelles.)

Les mêmes notations étant adoptées que dans la démonstration précédente (n° **42**), la recherche, dans le système (1), des intégrales répondant aux conditions initiales (15) se ramène, par le changement de variables (16), à la recherche, dans le système (13), des intégrales répondant aux conditions initiales (17). Or, il résulte du n° **36** que les formules (16) établissent une correspondance olotrope point par point entre les deux régions $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$. Les coefficients du système (13) étant dès lors olotropes dans la région $\mathfrak{L}'$, et les seconds membres des conditions initiales (17) l'étant d'ailleurs, par hypothèse, dans la région $[(s', t')]$, il résulte du n° **27** que les intégrales de (13) répondant à ces conditions initiales sont olotropes dans la région $\mathfrak{L}'$. Si donc on y remplace x', y', z', s', t' par leurs valeurs en x, y, z, s, t tirées des formules de transformation, les fonctions ainsi obtenues, c'est-à-dire les intégrales de (1) répondant aux conditions initiales (15), seront olotropes dans la région $\mathfrak{L}$.

[**44**] *Les fonctions* S, T *étant indépendantes de u, v, w et linéaires en s, t, supposons* (comme au n° **42**) *que leurs coefficients soient olotropes dans une région,* $\mathfrak{L}_{x,y,z}$, *qui soit limite de région parfaite. Supposons, d'autre part, que les fonctions* U, V, W (non linéaires en u, v, w, contrairement à ce qui avait lieu dans les n°s **42** et **43**) *soient olotropes dans la région*

$$\left(\mathfrak{L}_{x,y,z}, [(s, t)], [(u, v, w)]\right),$$

et que chacune d'elles admette, par rapport à chacune des variables u, v, w, quelque *période réelle. Supposons enfin que toutes ces fonctions*, S, T, U, V, W, *satisfassent aux conditions requises pour la passivité du système* (1).

Cela étant, *la conclusion de notre énoncé du* n° **42** *reste applicable.*

(Le présent énoncé, comme il est dit au n° **41**, s'applique exclusivement au monde des quantités réelles.)

On observera qu'en vertu du n° **30**, les formules (16) établissent une correspondance olotrope point par point entre les deux régions $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$; que, dès lors, les seconds membres de (13) sont olotropes dans la région $\big(\mathfrak{L}', [(u, v, w)]\big)$; qu'ils sont d'ailleurs périodiques, comme ceux de (1), par rapport à chacune des variables u, v, w; et enfin, qu'en vertu du n° **32**, les intégrales de (13) répondant aux conditions initiales (17) sont olotropes dans la région $\mathfrak{L}'$. Il en résulte immédiatement que les intégrales de (1) répondant aux conditions initiales (15) sont olotropes dans la région $\mathfrak{L}$.

[**45**] *Supposons* (comme au n° **43**) *que les fonctions* S, T, *indépendantes de* u, v, w (mais non linéaires en s, t), *soient olotropes dans la région* $\big(\mathfrak{L}_{x,y,z}, [(s, t)]\big)$, *où* $\mathfrak{L}_{x,y,z}$ *désigne une limite de région parfaite, et que chacune d'elles admette, par rapport à chacune des variables* s, t, *quelque période réelle. Supposons, d'autre part* (comme au n° **44**), *que les fonctions* U, V, W (non linéaires en u, v, w) *soient olotropes dans la région*

$$\big(\mathfrak{L}_{x,y,z}, [(s, t)], [(u, v, w)]\big),$$

et que chacune d'elles admette, par rapport à chacune des variables u, v, w, *quelque période réelle. Supposons enfin que toutes ces fonctions*, S, T, U, V, W, *satisfassent aux conditions requises pour la passivité du système* (1).

Cela étant, *la conclusion de notre énoncé du* n° **42** *reste applicable.*

(Le présent énoncé, comme il est dit au n° **41**, s'applique exclusivement au monde des quantités réelles.)

On observera qu'en vertu du n° **36**, les formules (16) établissent une correspondance olotrope point par point entre les deux régions $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$, et on raisonnera comme au numéro précédent.