

---

SUR LES TRANSFORMATIONS ET EXTENSIONS  
DE  
LA FORMULE DE STOKES

PAR M. A. BUHL

---

QUATRIÈME MÉMOIRE<sup>(1)</sup>

---

Ce nouveau Mémoire est divisé en trois Parties dont chacune prolonge une branche des recherches précédemment entreprises.

Dans la première, on ne trouvera point, à proprement parler, d'applications nouvelles de la formule de Stokes; mais j'ai tenu à élucider quelques questions nées à propos de ces applications, notamment celle de familles de surfaces sur lesquelles un même cône découpe des aires équivalentes. Le théorème le plus curieux, à cet égard, est celui (n° 5) qui montre qu'un angle solide, de sommet S, habituellement mesuré sur une sphère de centre S, pourrait l'être aussi bien sur d'autres surfaces de révolution ayant pour méridiens des lemniscates de Bernoulli. A coup sûr cela n'est pas plus pratique que de recourir à la sphère, mais c'est beaucoup plus intéressant et curieux. Ce théorème et quelques autres du même genre ont d'ailleurs un aspect élémentaire qui permettrait de les isoler et de les démontrer directement. J'ai préféré donner la méthode qui m'y a conduit et qui les rattache tous à l'équation

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 = \psi(x, y).$$

Dans la seconde Partie il s'agit surtout de combinaisons de la formule de Stokes avec des théorèmes abéliens plus ou moins spéciaux, combinaisons telles que des sommes abéliennes de volumes (coniques, tournants, etc.) soient indifféremment

---

(<sup>1</sup>) Ces quatre Mémoires ont été précédés par deux autres : *Sur les applications géométriques de la formule de Stokes* et *Sur la formule de Stokes dans l'hyperespace*, publiés aussi dans ce Recueil. Le présent travail est donc, en réalité, le sixième d'une série de publications consacrées au même sujet.

exprimées par des intégrales de surface étendues à des cloisons ou par des intégrales de ligne appartenant au contour de ces cloisons.

A cet égard, l'idée géométrique et fondamentale me paraît toujours appartenir à M. G. Humbert qui, à l'aide d'un cône quelconque, détermine sur la sphère des aires dont il exprime la différence des deux manières en question.

Parmi les résultats qui m'ont le plus intéressé, je me permets de citer le cas du volume déterminé dans la sphère par un cône quelconque. On peut trouver, par des opérations *algébriques*, une infinité de tels volumes ayant une valeur assignée, rationnelle, algébrique, etc.

Pour les volumes tournants engendrés par des contours fermés gauches, il me semble que les contours tracés sur l'ellipsoïde (ou, plus généralement sur une quadrique) donnent un théorème aussi remarquable (n° 36) que celui de M. G. Kœnigs se rapportant aux contours plans tournant autour d'un axe quelconque.

Les résultats de cette seconde Partie ont été très sommairement résumés dans une Note *Sur les applications géométriques du théorème d'Abel et de la formule de Stokes* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 27 mars 1916).

Dans la troisième Partie, j'ai repris sommairement les extensions du problème de Bäcklund. Il s'agit de certaines classes d'équations, analogues aux équations de Monge-Ampère, classes entre lesquelles certains liens familiaux me semblent pouvoir s'apercevoir, de manière particulièrement élégante, en faisant usage des déterminants symboliques que j'ai introduits — ou qui plutôt s'introduisent naturellement — dans les extensions de la formule de Stokes.

---

## PREMIÈRE PARTIE

### Arcs plans. — Compléments sur les aires cylindriques et sphériques.

[1] Nous allons d'abord voir rapidement ce que peuvent donner, quant à l'évaluation des arcs plans, les méthodes exposées, pour l'étude des aires gauches, dans le Mémoire précédent. Pour éviter d'incessants renvois à ce Mémoire, l'exposition qui suit est rédigée de manière à se suffire à elle-même autant que possible.

Bien que certaines comparaisons entre arcs et aires aient une fécondité qui va justement être mise à profit, il n'en reste pas moins que la question des arcs est, de beaucoup, la plus restreinte, la moins riche en cas simples. La remarque a déjà été faite dans la Préface du Mémoire précédent, et nous avons vu qu'on pouvait trouver, sur l'ellipsoïde, par des procédés très généraux et *élémentaires*, des aires rationnelles, ou à irrationalités données, ou liées par des relations données... Au contraire, on ne peut trouver de même, dans les mêmes conditions de généralité, des arcs d'ellipse présentant de telles propriétés.

Soit la courbe plane E d'équation

$$(1) \quad f(X, Y) = 1,$$

$f$  étant homogène d'ordre  $m$ . Hors de cette courbe, prenons deux points  $A'$ ,  $B'$  d'abord sans aucune relation avec elle, ces points pouvant être réunis par un arc  $A'B'$

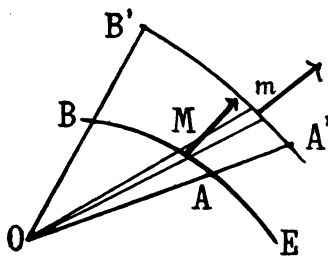


FIG. 1.

également sans relation avec E. Les deux rayons vecteurs  $OA'$ ,  $OB'$  déterminent sur E un arc  $AB$  que j'appellerai  $s_E$ . Deux rayons vecteurs infiniment voisins coupent  $A'B'$  en  $m(x, y)$ , déterminant un élément d'arc  $ds$  pour lequel la normale aura des cosinus directeurs  $\alpha, \beta$ . Ces mêmes rayons coupent  $AB$  en  $M(X, Y)$ , déterminant un élément d'arc  $ds_E$  pour lequel la normale aura pour cosinus directeurs :

$$\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}, \quad \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}.$$

Enfin j'appellerai  $\rho$  le rapport variable de  $Om$  à  $OM$ , ce qui permet d'écrire

$$r = f(X, Y) = f\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho^m} f(x, y)$$

et détermine  $\rho$  en fonction de  $x, y$ .

Ceci posé, si l'élément d'arc  $ds$ , situé en  $m$ , est projeté sur la circonférence de centre  $O$  et de rayon  $Om$ , la projection est

$$\frac{\alpha x + \beta y}{\sqrt{x^2 + y^2}} ds.$$

Si l'élément  $ds_E$ , situé en  $M$ , est projeté sur la circonférence de centre  $O$  et de rayon  $OM$ , la projection est

$$\frac{Xf_x + Yf_y}{\sqrt{X^2 + Y^2} \sqrt{f_x^2 + f_y^2}} ds_E = \frac{mf'(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{f_x^2 + f_y^2}} ds_E;$$

ceci en vertu du théorème d'Euler et de ce que le coefficient de  $ds_E$  est homogène d'ordre zéro, ce qui permet d'y remplacer  $X$  et  $Y$  par les quantités proportionnelles  $x, y$ . Si maintenant on observe que le rapport des projections précédentes doit être égal à  $\rho$ , on a l'égalité

$$(2) \quad ds_E = \frac{1}{m} [f(x, y)]^{-\frac{m+1}{m}} (f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}} (\alpha x + \beta y) ds$$

qui peut encore s'écrire

$$(3) \quad ds_E = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} f^{-\frac{1}{m}} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} f^{-\frac{1}{m}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} (\alpha x + \beta y) ds.$$

Une telle formule permet d'évaluer un arc  $s_E$ , tel que  $AB$ , au moyen d'une intégrale curviligne étendue non à l'arc à évaluer, mais à un arc  $s$  tel que  $A'B'$ .

Une première remarque s'impose. L'arc  $AB$  ne dépend pas de tout l'arc  $A'B'$ , mais seulement du choix des extrémités  $A'$  et  $B'$ ; cela fait pressentir que les expressions (2) ou (3) sont des différentielles exactes, chose facile à vérifier. On a

$$\alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \beta = -\frac{dx}{ds},$$

et, comme dans  $ds_E$  l'ensemble des termes dépendant de  $f$  est homogène d'ordre  $-2$ , on voit que  $ds_E$  est de la forme

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) d \cdot \text{arc tang} \frac{y}{x}.$$

L'intégration de la différentielle exacte dont il s'agit est ramenée à une seule quadrature tout comme l'évaluation directe d'un arc de courbe  $AB$ .

[2] Dans le Mémoire précédent, la courbe E était remplacée par une surface E, la courbe A'B' par une surface  $\sigma$ , le secteur élémentaire Om par un cône élémentaire. On avait

$$(4) \quad d\sigma_E = \frac{1}{m} [f(x, y, z)]^{-\frac{m+2}{m}} (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^{\frac{1}{2}} (xx + \beta y + \gamma z) d\sigma,$$

ou bien

$$(5) \quad d\sigma_E = -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} f^{-\frac{2}{m}} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} f^{-\frac{2}{m}} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial z} f^{-\frac{2}{m}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} (xx + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

On voit immédiatement la différence profonde qui va s'établir entre les expressions (2) et (3), d'une part, (4) et (5), d'autre part, suivant qu'il s'agira de coniques ou de quadriques, c'est-à-dire des variétés algébriques les plus simples pour lesquelles se posent des problèmes de rectification ou de planification. Dans les deux cas,  $m = 2$ , mais (4) ne comprend qu'un seul radical quadratique, d'où des propriétés d'intégration élémentaires dont nous avons déjà profité dans le cas de l'ellipsoïde, tandis que (2) comprend deux radicaux quadratiques distincts en général et ne se prête alors à aucune intégration élémentaire immédiate. Certes, on ne fait que constater ainsi un fait dont l'impossibilité est reconnue depuis longtemps; mais cette impossibilité, dans le cas des coniques, masquait peut-être un peu trop ce qui était possible dans le cas des quadriques.

[3] *Courbes différentes sur lesquelles deux mêmes rayons vecteurs découpent des arcs équivalents.* — D'après l'équation (3), en posant  $f^{-1} = \theta^m$ , on voit que  $d\sigma_E$  aura même expression toutes les fois que

$$(6) \quad \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2$$

aura même expression. Comme  $\theta$  est homogène d'ordre  $-1$ , la somme (6) sera homogène d'ordre  $-4$ . Si donc on l'appelle  $x^{-4}\psi(u)$ , en posant

$$\theta = \frac{1}{x} \varphi(u), \quad u = \frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} (\varphi + u\varphi'), \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \varphi',$$

on a l'équation différentielle

$$(7) \quad (\varphi + u\varphi')^2 + \varphi'^2 = \psi$$

qui, connaissant le second membre  $\psi(u)$ , doit pouvoir servir à déterminer  $\varphi(u)$ , puis  $\theta$  et  $f$ , d'où toute une famille de courbes  $f = 1$  pour lesquelles les arcs compris entre deux mêmes rayons vecteurs seront des arcs égaux.

L'équation (7) ne semble pas intégrable en général ou, du moins, elle ne l'est pas assez explicitement pour qu'on en puisse conclure des résultats géométriques. Mais, suivant les formes de  $\psi$ , il y a d'importants cas d'intégrabilité.

Si le second membre  $\psi$  est nul, le premier est le produit de deux facteurs linéaires et, en appliquant la méthode d'intégration des équations linéaires du premier ordre, on trouve aisément

$$\varphi = \frac{A + Bu}{1 + u^2}$$

si  $A^2 + B^2 = 0$ . Pour cette forme de  $\varphi$ , on a, en effet,

$$(\varphi + u\varphi')^2 + \varphi'^2 = \frac{A^2 + B^2}{(1 + u^2)^2}.$$

Mais, fait beaucoup plus important, ceci montre que, si

$$A = R \cos C, \quad B = R \sin C,$$

R étant une constante, l'équation

$$(\varphi + u\varphi')^2 + \varphi'^2 = \frac{R^2}{(1 + u^2)^2}$$

admet l'intégrale générale

$$(8) \quad \varphi = R \frac{\cos C + u \sin C}{1 + u^2}.$$

Si l'on élimine C entre celle-ci et sa dérivée par rapport à C, on trouve, de plus, l'intégrale singulière

$$(9) \quad \varphi = \frac{R}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Remplaçant, dans (8) et (9),  $u$  par  $\frac{y}{x}$ , puis formant  $\theta$ , on voit finalement que les équations, à premier membre homogène d'ordre  $-1$ ,

$$(10) \quad \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1, \quad R \frac{x \cos C + y \sin C}{x^2 + y^2} = 1,$$

sont celles des courbes qui doivent avoir des arcs égaux dans tout même angle ayant son sommet à l'origine. On tombe sur ce théorème : *Tous les cercles ayant pour diamètres les rayons d'un cercle fixe de centre O et ce cercle fixe ont des arcs équivalents dans tout angle de sommet O.*

Cet énoncé tout à fait élémentaire, et même évident d'après les propriétés des angles inscrits au cercle, serait inutile s'il ne présageait, de par la méthode employée, des extensions dans l'espace qui ne sont pas aussi évidentes.

[4] *Cylindres différents sur lesquels un cône découpe des aires équivalentes.* — Reprenons l'expression (5) qui permet d'évaluer l'aire  $\sigma_x$  découpée, par un cône de sommet O, sur une certaine surface d'équation  $f(x, y, z) = 1$  où  $f$  est homogène d'ordre  $m$ . Si cette surface est un cylindre de génératrices parallèles à Oz, son équation devient  $f(x, y) = 1$  et l'expression entre crochets, dans le second membre de (5), devient

$$(6) \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2$$

avec, cette fois,  $f^{-2} = \theta^m$ . Alors  $\theta$  est homogène d'ordre  $-2$  et la somme (6) homogène d'ordre  $-6$ . Si on l'appelle  $x^{-6}\psi(u)$ , en posant

$$\theta = \frac{1}{x^2} \varphi(u), \quad u = \frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{x^3} (2\varphi + u\varphi'), \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{x^3} \varphi',$$

on a l'équation différentielle

$$(11) \quad (2\varphi + u\varphi')^2 + \varphi'^2 = \psi$$

qui, connaissant  $\psi(u)$ , doit déterminer  $\varphi(u)$ , puis  $\theta$  et  $f$ , d'où une famille de cylindres  $f(x, y) = 1$ , et vraisemblablement aussi un cylindre enveloppe, sur lesquels cylindres un cône de sommet O devra découper des aires équivalentes.

L'équation (11) a des cas d'intégrabilité qu'on peut apercevoir en généralisant la méthode employée pour (7). Pour  $\psi$  nul on a ici

$$\varphi = \frac{A(1 - u^2) + 2Bu}{(1 + u^2)^2}$$

si  $A^2 + B^2 = 0$ . Pour cette forme de  $\varphi$  on a, en effet,

$$(2\varphi + u\varphi')^2 + \varphi'^2 = 4 \frac{A^2 + B^2}{(1 + u^2)^3}.$$

Ce qui est beaucoup plus important, c'est toujours de remarquer que, si

$$A = R^2 \cos 2C, \quad B = R^2 \sin 2C,$$

R étant une constante, l'équation

$$(2\varphi + u\varphi')^2 + \varphi'^2 = \frac{4R^4}{(1 + u^2)^3}$$

admet l'intégrale générale

$$(12) \quad \varphi = R^2 \frac{(1 - u^2) \cos 2C + 2u \sin 2C}{(1 + u^2)^2}.$$

Éliminant C entre celle-ci et sa dérivée par rapport à C, on a, de plus, l'intégrale singulière

$$(13) \quad \varphi = \frac{R^2}{1 + u^2}.$$

Remplaçant, dans (12) et (13),  $u$  par  $\frac{y}{x}$ , puis formant  $\theta$ , on voit que les équations, à premier membre homogène d'ordre  $-2$ ,

$$(14) \quad \frac{R^2}{x^2 + y^2} = 1, \quad R^2 \frac{(x^2 - y^2) \cos 2C + 2xy \sin 2C}{(x^2 + y^2)^2} = 1$$

sont celles de cylindres droits sur lesquels tout cône de sommet O doit découper des aires équivalentes. On reconnaît aisément les sections droites et on a ce théorème :

*Les lemniscates de Bernoulli  $r^2 = R^2 \cos 2(\theta - C)$  et leur cercle enveloppe  $r = R$  sont sections droites de cylindres droits sur lesquels tout cône de sommet O découpe des aires équivalentes.*

[5] *Surfaces de révolution, d'axe Oz, sur lesquelles un cône, de sommet O, découpe des aires équivalentes.* — Reprenons encore la formule (5), relative aux aires de l'espace, et supposons que la surface  $f(x, y, z) = 1$  soit une surface de révolution  $f(r, z) = 1$ . On a  $r^2 = x^2 + y^2$  et  $f$  est homogène, d'ordre  $m$ , par rapport à  $r$  et  $z$  aussi bien que par rapport à  $x, y, z$ .

Dans ces conditions, on a

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 = \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2$$

et l'expression entre crochets dans (5) devient

$$(15) \quad \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2$$

avec  $f^{-2} = \theta^m$ . Trouver toutes les sommes (15) ayant une même expression en  $r$  et  $z$  est une question absolument identique à celle du paragraphe précédent. Les résultats en  $x, y$  déjà trouvés se conservent identiquement en remplaçant  $x$  et  $y$  respectivement par  $r$  et  $z$ . On obtient ainsi des surfaces de révolution d'axe Oz [dont le méridien, dans le plan Orz, a pour équation  $f(r, z) = 1$ ] sur lesquelles tout cône de sommet O découpe des aires équivalentes. En particulier :

*La lemniscate de Bernoulli de centre O et le cercle concentrique circonscrit, tournant autour d'une droite quelconque de leur plan et passant par O, engendrent respectivement une surface de révolution et une sphère sur lesquelles tout cône de sommet O découpe des aires équivalentes.*



Ce théorème doit être considéré comme l'extension à la sphère du théorème énoncé pour le cercle à la fin du paragraphe 3. Sa recherche s'imposait après l'étude des travaux, relatifs aux aires sphériques, dus à M. G. Humbert, car les résultats de l'éminent géomètre montraient que le théorème du paragraphe 3 ne se généralisait pas en remplaçant simplement les cercles par des sphères. Le Mémoire de M. Humbert, *Sur quelques propriétés des aires sphériques* (Journal de Mathématiques, 1888), contient précisément (notamment au paragraphe 8) d'intéressants théorèmes particuliers visant certains cônes qui, inscrits à la sphère, y découpent une aire de propriété comparable à celle de l'arc découpé sur un cercle par un angle inscrit; mais le rôle des surfaces de révolution à lemniscate méridienne restait à mettre en évidence.

Le théorème n'est pas seulement élégant dans sa généralité; il est susceptible de vérifications partielles élémentaires et fort remarquables que je vais indiquer brièvement.

[6] Ceci n'est d'ailleurs qu'un exercice d'un caractère extrêmement simple.

Soit la lemniscate

$$r^2 = R^2 \cos 2(\theta - C).$$

De  $y = r \sin \theta$ ,  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$  et de l'équation de la courbe, on tire immédiatement

$$y ds = R^2 \sin \theta d\theta = -R d(R \cos \theta) = -R d\overline{OP}.$$

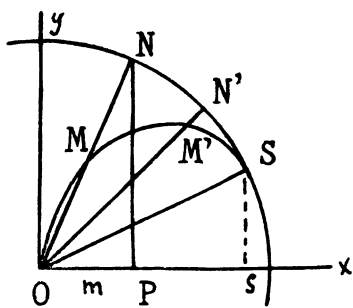


FIG. 2.

Par suite, pour l'aire engendrée par l'arc SM tournant autour de Ox, on a, avec les notations indiquées sur la figure,

$$2\pi \int_S^M y ds = -2\pi R (\overline{OP})_s^P = 2\pi R (\overline{Os} - \overline{OP}).$$

Ceci est bien l'aire du segment sphérique engendré par la rotation de SN autour de Ox.

Si simple que soit le théorème ainsi présenté, il n'en est pas moins fort curieux. Ainsi faisons varier la position initiale de la lemniscate méridienne par rotation dans le plan méridien; c'est faire varier  $C$ , c'est-à-dire l'angle  $SOx$ . Laissons immobiles, au contraire, les points  $N$  et  $N'$ . L'arc de lemniscate  $MM'$  variera, *mais son aire de révolution par rapport à  $Ox$  ne variera pas.*

Présenté ainsi, le théorème est d'un aspect si intéressant et si élémentaire que j'ai été fort étonné de n'y point voir un résultat connu et énoncé partout comme correspondant à une des propriétés les plus simples des arcs de lemniscate.

Les ouvrages de MM. H. Brocard (*Notes de Bibliographie des Courbes géométriques*, Bar-le-Duc, 1897), G. Loria (*Spezielle ebene Kurven*, Leipzig, 1902), F. Gomes Teixeira (*Traité des courbes spéciales remarquables*, Coïmbre, 1908), H. Wieleitner (*Spezielle ebene Kurven*, Leipzig, 1908) consacrent d'importantes monographies à la lemniscate de Bernoulli, mais sans mentionner la propriété de l'aire due à la rotation de l'arc.

Ceci est d'autant plus étonnant que, pour la courbe  $r^2 = R^2 \cos 2\theta$ , la rectification est partout basée sur l'égalité

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{R}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{R^2}{r}$$

qu'il suffisait d'écrire  $r \sin \theta ds = R^2 \sin \theta d\theta$  en remarquant que ceci se conservait pour  $\theta$  remplacé par  $\theta - C$ .

Il existe, par ailleurs, des relations déjà étudiées entre la lemniscate de Bernoulli et des courbes sphériques. Ainsi M. H. Brocard, consulté par moi, m'a signalé un théorème de H. D'Arrest et Delaire (*Sur un théorème de Géométrie sphérique*, Nouvelles Annales, 1856) qui réunit par projection stéréographique (donc conique) la lemniscate et la courbe de Viviani. Mais, si invraisemblable que cela puisse paraître, le théorème en litige n'est pas encore identifié. Je crois suffisamment faire comprendre qu'une réclamation de priorité, se produisant à son sujet, me semblerait la chose la plus naturelle du monde.

[7] *Cas où l'équation (7) est du type de Lagrange.* — Après le premier cas d'intégrabilité étudié au paragraphe 3, nous en aurons un second, pour l'équation (7), quand cette équation admettra pour solution particulière  $\varphi = a$ , si  $a$  désigne une constante. Elle devient alors

$$(16) \quad (\varphi + u\varphi')^2 + \varphi'^2 = a^2.$$

De  $\varphi = a$ , on déduit, toujours avec les notations du début du paragraphe 3.

$$\theta = \frac{a}{x}, \quad f = \frac{x}{a} = 1.$$

L'intégration de l'équation (16) correspond donc à ce problème : *Déterminer des courbes planes telles qu'un arc compris entre deux rayons vecteurs quelconques soit égal au segment déterminé sur une droite fixe par ces mêmes rayons.* Ici la droite fixe a pour équation  $x = a$ .

Si l'on cherche à traiter directement ledit problème, on a l'équation différentielle

$$ds = a d\left(\frac{y}{x}\right)$$

qui, en posant

$$(17) \quad x = \varphi(u), \quad y = u\varphi(u),$$

prend exactement la forme (16). En posant, pour simplifier l'écriture,  $\varphi' = p$ , on peut écrire l'équation (16)

$$(18) \quad \varphi + up = \sqrt{a^2 - p^2}$$

qui, linéaire en  $u$  et  $\varphi$ , est une de ces équations de Lagrange qu'on intègre par une dérivation préalable. Dérivant par rapport à  $u$ , on a, en effet,

$$2p + u \frac{dp}{du} + \frac{p}{\sqrt{a^2 - p^2}} \frac{dp}{du} = 0,$$

$$\frac{du}{dp} + \frac{u}{2p} + \frac{1}{2\sqrt{a^2 - p^2}} = 0.$$

C'est là une équation linéaire pour laquelle la méthode ordinaire donne

$$u = \frac{C}{\sqrt{p}} - \frac{1}{2\sqrt{p}} \int \sqrt{\frac{p}{a^2 - p^2}} dp,$$

Portant cette valeur de  $u$  dans (18), on aura  $\varphi$  en fonction de  $p$  d'où, de même,  $x$  et  $y$  par les formules (17). Les courbes cherchées ne sont obtenues ici que par l'intermédiaire d'une quadrature elliptique; il ne serait pas difficile de les construire d'une manière approchée, mais elles ne semblent point offrir de propriétés *finies* aussi exactes et élégantes que celles trouvées dans le premier cas d'intégrabilité.

Notons que l'équation

$$ds = a d\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{ou} \quad x^2 ds = a(x dy - y dx)$$

exprime encore qu'un arc quelconque d'une des courbes en litige a, par rapport à  $Oy$ , un moment d'inertie proportionnel à l'aire comprise entre l'arc et les rayons vecteurs de ses extrémités.

[8] Cas où l'équation (11) est du type de Lagrange. — Pour  $2\varphi = a$ , l'équation (11) prend la forme

$$(19) \quad (2\varphi + u\varphi')^2 + \varphi'^2 = a^2.$$

On a alors, d'après le paragraphe 4,

$$\theta = \frac{a}{2x^2}, \quad f = \frac{2x^2}{a} = 1.$$

L'intégration de l'équation (19) correspond donc à ce problème : *Déterminer des cylindres, à génératrices parallèles à un plan fixe, tels qu'un cône de sommet fixe découpe des aires équivalentes sur ces cylindres et sur le plan fixe.* Ici le plan fixe et son symétrique par rapport à Oyz ont pour équation  $2x^2 = a$ ; les génératrices des cylindres sont naturellement parallèles à Oz puisque nous cherchons, pour cette famille de cylindres, une équation  $f(x, y) = 1$  ne contenant que  $x$  et  $y$ .

En opérant comme précédemment, on tire de (19) :

$$\begin{aligned} 2\varphi + up &= \sqrt{a^2 - p^2}, \\ 3p + u \frac{dp}{du} + \frac{p}{\sqrt{a^2 - p^2}} \frac{dp}{du} &= 0, \\ \frac{du}{dp} + \frac{u}{3p} + \frac{1}{3\sqrt{a^2 - p^2}} &= 0, \\ u &= p^{-\frac{1}{3}} \left( C - \frac{1}{3} \int \frac{p^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a^2 - p^2}} dp \right). \end{aligned}$$

Les résultats ne sont pas plus explicites que dans le premier problème. Théoriquement on connaît maintenant  $p$  ou  $\varphi'$  en fonction de  $u$  et (19) doit donner  $\varphi(u)$ . D'où

$$\theta = \frac{1}{x^2} \varphi \left( \frac{y}{x} \right) \quad \text{et} \quad f = \theta^{-1} = 1$$

pour équation de la famille de cylindres cherchée.

Quelque imparfait qu'il soit, ce résultat a un intérêt multiple. Outre le problème souligné, il en résout d'autres.

Pour simplifier le langage appelons cylindre  $\Gamma$  l'un de ceux appartenant à la famille dont nous venons, tout au moins, de démontrer l'existence; soit  $\gamma$  son intersection avec le plan Oxy.

Soit, de même,  $\Pi$  le plan fixe, sur lequel le cône de sommet O découpe la même aire que sur l'un des cylindres  $\Gamma$ , et  $\omega$  l'intersection de  $\Pi$  avec Oxy.

Au point de vue analytique, nous venons d'étudier une famille de solutions  $\theta$  pour une équation de la forme

$$(20) \quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 = \psi(x, y).$$

Or cette forme se conserve pour toute rotation autour de O qui, dans le plan  $Oxy$ , change  $(x, y)$  en  $(x', y')$ . Il est d'ailleurs absolument évident, au point de vue géométrique, que les équivalences d'aires, étudiées sur les cylindres  $\Gamma$  et le plan  $\Pi$ , se conservent lorsque la figure tourne, d'un certain angle et tout d'un bloc, autour de  $Oz$ .

Si maintenant, conformément à la remarque déjà faite au paragraphe 5, on remplace dans (20),  $x$  et  $y$  respectivement par  $r$  et  $z$ , la droite  $\omega$  et les courbes  $\gamma$  deviennent des méridiens de surfaces de révolution autour de  $Oy$  devenu  $Oz$ . Nous associons ainsi *au cylindre circulaire* des surfaces de révolution ayant la même propriété que les cylindres, à section droite en forme de lemniscate, étudiés au paragraphe 4.

Prenons maintenant la transformée, en  $x' y'$ , de l'équation (20). La droite  $\omega$  peut prendre alors une inclinaison quelconque sur  $Oy'$  et, en remplaçant  $x'$  et  $y'$  par  $r$  et  $z$ , cette droite devient génératrice d'un *cône de révolution* d'axe  $Oz$  cependant que les courbes  $\gamma$  engendrent des surfaces de révolution autour du même axe, surfaces sur lesquelles un cône quelconque, de sommet O, découpe des aires équivalentes à celles qu'il découpe sur le cône de révolution.

En résumé, la solution donnée d'abord dans le cas du plan  $\Pi$  entraîne l'existence de solutions analogues, fournies pour les cylindres et cônes de révolution, par des surfaces de révolution.

[9] *Surfaces E ayant même surface  $\sigma$ .* — Dans le Mémoire précédent, considérant le cône, de sommet O, découpant une aire  $\sigma_E$  sur une surface E, nous l'avons fait couper en outre une certaine surface  $\sigma$ , suivant un contour dont la projection sur  $Oxy$  enfermait aussi une aire  $\sigma_E$ . Nous nous sommes posé, aux paragraphes 24 et 25 du dit Mémoire, la question de déterminer différentes surfaces E ayant une même surface  $\sigma$ ; c'est évidemment cette question que nous venons de traiter, en ce qui précède, sinon d'une manière générale, du moins dans des cas particulièrement élégants. Ainsi nous savons que la sphère admet comme surface  $\sigma$  simple et intéressante une surface de révolution ayant pour méridien une trisécante (*loc. cit.*, n° 10); c'est évidemment là une surface  $\sigma$  qui appartient aussi aux surfaces de révolution, à lemniscate méridienne, considérés ici au paragraphe 5.

Les résultats précédents ont tous été rattachés à l'étude de l'équation (20); ce n'était pas d'une nécessité absolue comme nous l'avons déjà vu (n° 7). De même le théorème souligné, à la fin du paragraphe 3, peut correspondre à la simple équation

différentielle  $ds = a d\theta$ ; le théorème analogue relatif à la sphère peut correspondre à une équation aux dérivées partielles qu'il est loisible de former directement. Mais l'usage de l'équation (20) me paraît bien préférable; c'est lier la question avec une équation qui intervient dans bien d'autres problèmes de Géométrie. En Mécanique, (20) est l'équation de Jacobi pour le mouvement plan d'un point matériel.

---

## DEUXIEME PARTIE

### Le théorème d'Abel pour intégrales doubles et la formule de Stokes.

[10] *Volumes coniques.* — Avant de faire véritablement intervenir le théorème d'Abel, nous allons étudier, sans lui, quelques volumes coniques. Nous verrons ensuite que ces premiers résultats peuvent être considérés comme des cas particuliers d'applications géométriques du célèbre théorème et qu'ils peuvent servir de vérifications à ces applications géométriques plus générales.

Soit toujours une surface E, d'équation  $f(X, Y, Z) = 1$ , avec  $f$  homogène d'ordre  $m$ . Sur E, en M(X, Y, Z), soit l'élément d'aire  $d\sigma_E$  dont le contour sert de directrice à un cône élémentaire déterminant, en  $m(x, y, z)$ , sur une surface  $\sigma$  indéterminée pour le moment, un élément  $d\sigma$  ayant une normale de cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Soit  $d\tau$  le volume conique compris entre O et  $d\sigma$ ;

»  $d\tau_E$  » » O »  $d\sigma_E$ .

On a

$$d\tau = \frac{1}{3} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma,$$

$$d\tau_E = \frac{1}{3\rho^3} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma,$$

si  $\rho$  désigne le rapport de Om à OM. Comme, de plus,

$$x = \rho X, \quad y = \rho Y, \quad z = \rho Z,$$

d'où

$$f\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho}\right) = 1, \quad \rho^m = f(x, y, z),$$

on a enfin

$$d\tau_E = \frac{1}{3} [f(x, y, z)]^{-\frac{3}{m}} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma$$

et

$$(1) \quad \tau_E = \frac{1}{3} \int_{\sigma} f^{-\frac{3}{m}} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

Ainsi le volume conique  $\tau_E$ , de sommet O, de base gauche  $\sigma_E$ , est déterminé par une intégrale double étendue à la cloison  $\sigma$  déterminée par le cône sur une surface complètement indépendante de  $\sigma_E$ .

[11] Reprenons maintenant la formule de Stokes sous la forme déjà utilisée

$$(2) \quad \int \int_{\sigma} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma = \int_{\Sigma} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ F & G & H \end{vmatrix}.$$

Réduisons-la à

$$(3) \quad \int \int_{\sigma} \frac{\partial H}{\partial z} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma = \int_{\Sigma} H(y dx - x dy),$$

en désignant par  $\Sigma$  le contour de la cloison  $\sigma$ . Dans cette formule,  $H$  doit être homogène d'ordre  $-2$  et, par suite,  $H_z$  homogène d'ordre  $-3$ ; les intégrales doubles de (1) et (3) peuvent donc être identifiées. On a

$$\tau_E = \int_{\Sigma} H(y dx - x dy),$$

si

$$H = -\frac{1}{2} \Omega(x, y) + \frac{1}{3} \int f^{-\frac{3}{m}} dz,$$

en désignant par  $\Omega$  une fonction homogène d'ordre  $-2$  qu'on peut faire disparaître.

Si l'on prend  $2H = \text{constante} = -h$ , on a l'équation

$$(4) \quad h = \Omega(x, y) - \frac{2}{3} \int f^{-\frac{3}{m}} dz.$$

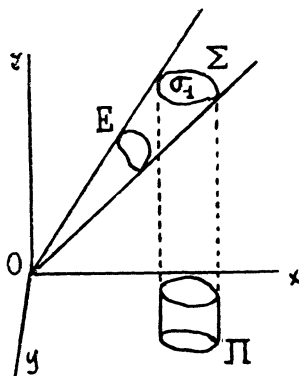


FIG. 3.

Cette équation (4) représente une surface  $\sigma$ , telle qu'un contour  $\Sigma$  y tracé donne, sur  $Oxy$ , une projection  $\Pi$  servant de base à un cylindre droit, de hauteur  $h$ , dont le volume est égal au volume conique compris, dans le cône  $O\Sigma$ , entre  $O$  et la surface  $E$ .



J'emploie la dénomination de « surface  $\sigma_1$  » par analogie avec celle de « surface  $\sigma$  » employée, dans le Mémoire précédent, lors de l'étude des aires. Et de même que l'étude des aires sur une surface E a été faite au moyen des surfaces  $\sigma$ , l'étude des volumes coniques OE peut être faite au moyen des surfaces  $\sigma_1$ . Si l'on connaît l'une d'elles, les propriétés attribuées arbitrairement au volume cylindrique  $h\Pi$  (expression rationnelle ou au moyen d'irrationnelles données, relations entre plusieurs de ces volumes cylindriques, etc.) appartiendront identiquement au volume conique OE.

Si le problème est l'évaluation du volume OE, il est ramené à la recherche de l'intersection  $\Sigma$  et à l'évaluation de l'aire plane  $\Pi$ .

Si la surface E est un plan, le volume conique OE est égal à l'aire  $\sigma_E$  de la base plane E multipliée par le tiers de la distance de O au plan E, c'est-à-dire multipliée par un facteur constant. Entre  $\sigma_E$  et  $\Pi$  il n'y a donc, à un facteur constant près, qu'une correspondance entre aires planes analogue à d'autres déjà étudiées.

Rien de nouveau non plus, en vertu d'une remarque tout à fait identique, pour le cas où E est une sphère de centre O.

[12] *Volumes coniques inscrits à la sphère.* — Considérons une sphère de rayon R tangente en O au plan  $Oxy$ . On peut la considérer comme une surface E, avec  $f$  homogène d'ordre 1, car son équation peut s'écrire

$$(5) \quad f = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2Rz} = 1.$$

L'équation (4) des surfaces  $\sigma_1$  est alors

$$h = \Omega(x, y) - \frac{2}{3} \int \left( \frac{2Rz}{x^2 + y^2 + z^2} \right)^3 dz$$

ou

$$(6) \quad h = \Omega(x, y) + \frac{4}{3} R^3 \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

Une telle surface n'est pas nécessairement de révolution, mais nous serons dans ce cas particulièrement simple pour  $\Omega = 0$ . Alors, en posant  $x^2 + y^2 = r^2$ , l'équation (6) devient

$$(7) \quad 3h(r^2 + z^2)^2 = 4R^3(r^2 + 2z^2).$$

Elle représente la podaire centrale d'une ellipse dont les axes de symétrie, de longueurs  $2a$  et  $2b$ , sont respectivement dirigés suivant  $Or$  et  $Oz$ . On a

$$(8) \quad a = 2R \sqrt{\frac{R}{3h}}, \quad b = 2R \sqrt{\frac{2R}{3h}}, \quad b = a\sqrt{2}.$$

La figure représente, en AB, le quart de la podaire méridienne; la forme est à peu près celle du quart de l'ellipse qui passerait aussi par les points A et B, mais qui n'a pas été tracée.

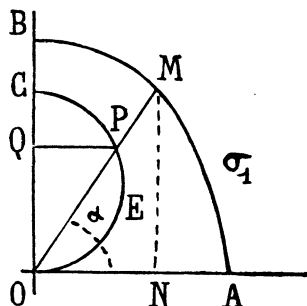


FIG. 4.

Faisons tourner la figure autour de  $Oz$  et, sur la surface de révolution  $\sigma_1$ , traçons un contour fermé  $\Sigma$ ; le cône  $O\Sigma$  doit, avec la sphère  $E$ , délimiter un volume sphéro-conique égal à  $h\Pi$ , si  $\Pi$  est l'aire contenue dans la projection de  $\Sigma$  sur  $Oxy$ .

Ce résultat général est susceptible d'une vérification partielle élémentaire. Évaluons directement le volume engendré par OPCO. Soit  $\alpha$  l'angle POA.

$$\begin{aligned} PQ &= 2R \sin \alpha \cos \alpha, & OQ &= 2R \sin^2 \alpha, & QC &= 2R \cos^2 \alpha, \\ \text{Vol}(\text{QPC}) &= \frac{\pi}{2} \overline{QC} \left( \overline{PQ}^2 + \frac{1}{3} \overline{QC}^2 \right) & &= \frac{4}{3} \pi R^3 \cos^4 \alpha (1 + 2 \sin^2 \alpha), \\ \text{Vol}(\text{OPQ}) &= \frac{\pi}{3} \overline{QP}^2 \cdot OQ & &= \frac{8}{3} \pi R^3 \cos^2 \alpha \sin^4 \alpha, \\ \text{Vol}(\text{OPC}) &= \text{Vol}(\text{QPC}) + \text{Vol}(\text{OPQ}) & &= \frac{4}{3} \pi R^3 \cos^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha). \end{aligned}$$

Ce dernier volume, d'après le théorème général, doit être égal à  $\pi h \overline{ON}^2$  et, partant de (7) et de l'équation  $z = r \tan \alpha$  du rayon vecteur OPM, on trouve, pour l'abscisse  $r$  de M,

$$r^2 = \overline{ON}^2 = \frac{4}{3} \frac{R^3}{h} \cos^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha).$$

Pour  $\pi h \overline{ON}^2$  on retrouve bien le résultat obtenu directement.

[13] *Première remarque.* — On sait que les points d'une courbe algébrique  $F(r, z) = 0$  où la tangente est parallèle à  $Oz$  jouent un rôle capital dans l'étude de ces courbes. Ici, pour les courbes méridiennes des surfaces  $\sigma_1$ , il y a à faire d'intéressantes remarques sur la situation possible de tels points. Ils ne peuvent se trouver sur un rayon tel que OPM, assimilable à un cône infiniment délié de sommet O, car

ce cône, en OP, contiendrait un volume infiniment petit *non nul* et il donnerait, en M, un élément de  $\sigma_1$  dont la projection sur Oxy serait *nulle*. Ce serait une contradiction avec le théorème général relatif à l'évaluation de nos volumes coniques.

Ainsi, sur la figure 4, nous pouvons affirmer que l'arc de podaire AB n'a, en dehors de A, aucun point de tangente parallèle à Oz; la propriété doit forcément avoir lieu pour la podaire en litige bien que ce ne soit pas du tout une propriété appartenant aux podaires centrales d'ellipses pour lesquelles  $a$  et  $b$  auraient des valeurs plus quelconques que celles mentionnées en (8).

La vérification directe est aisée. L'équation (7) étant mise sous la forme  $F = 0$ , l'équation  $F_z = 0$  peut s'écrire

$$z[3h(r^2 + z^2) - 4R^2] = 0.$$

Elle ne représente que la droite OA ou le cercle de centre O passant par A. Donc A est bien le seul point de tangente parallèle à Oz.

Pour des surfaces  $\sigma_1$  autres que des surfaces de révolution, il y aurait évidemment des remarques analogues à faire quant à l'existence ou à la non-existence de points à plans tangents parallèles à Oz.

[14] *Seconde remarque.* — En partant d'un raisonnement élémentaire tel que celui fait comme vérification sur la figure 4 on pourrait retrouver l'équation de  $\sigma_1$ . En effet, si l'on reprend l'expression de Vol (OPC), si on l'égalé à  $\pi r^2 h$  en admettant que  $r$  représente l'abscisse ON d'une courbe  $\sigma_1$  d'ordonnée  $z = r \tan \alpha$ , on retrouve aisément l'équation (7). Ensuite, en faisant varier infiniment peu  $\alpha$ , puis en faisant tourner la figure infiniment peu autour de Oz, on fera décrire à P, sur la sphère E, un quadrilatère infiniment petit  $\omega$ . Le cône O $\omega$  donnera, en M, un autre quadrilatère  $\mu$  qui en donnera un troisième  $\nu$  en N, et, ainsi, le volume sphéro-conique O $\omega$  sera bien égal à celui d'un cylindre droit de hauteur  $h$  et de base  $\nu$ . Finalement cette correspondance élémentaire s'étendra au cas d'un cône quelconque de sommet O.

Une telle remarque pourrait être faite, avec quelques variantes, pour d'autres exemples élémentaires traités ci-après. Elle aurait pu servir à passer du théorème élémentaire du paragraphe 6 au théorème général terminant le paragraphe 5.

Mais pour l'étendre à des surfaces E quelconques il faudrait des raisonnements spéciaux beaucoup moins simples et généraux que celui qui, dans ce Mémoire, joue le rôle fondamental.

[15] *Autre surface  $\sigma_1$  pour la sphère (5).* — Nous allons obtenir ici une autre surface  $\sigma_1$  qui peut paraître fort quelconque parmi toutes celles que l'on peut tirer de l'équation (6); son véritable rôle sera d'être retrouvée plus loin (n° 25) comme vérification de considérations plus générales.

Pour

$$\Omega = -\frac{8R^3}{3r^3},$$

l'équation (6) devient

$$3hr^2(r^2 + z^2)^2 + 4R^3(r^4 + 2r^2z^2 + z^4) = 0.$$

Si  $h$  et  $R$  sont positifs, comme on l'a toujours implicitement supposé jusqu'ici, cette surface est imaginaire, mais on peut la remplacer par une surface réelle en changeant  $R$  en  $-R$ . Cela revient à chercher une surface  $\sigma_1$  pour une sphère  $E'$  symétrique de  $E$  par rapport au plan  $Oxy$ , et, comme la surface obtenue est alors symétrique par rapport à ce plan, on peut évidemment revenir de  $E'$  à  $E$ . Pour la sphère (5), nous avons donc la nouvelle surface  $\sigma_1$

$$(9) \quad 3hr^2(r^2 + z^2)^2 = 4R^3[(r^2 + z^2)^2 + z^4].$$

Pour  $r = \rho \cos \omega$ ,  $z = \rho \sin \omega$ , on a pour équation polaire de la courbe méridienne

$$\rho^2 = \frac{4R^3}{3h} \frac{1 + \sin^4 \omega}{\cos^2 \omega}.$$

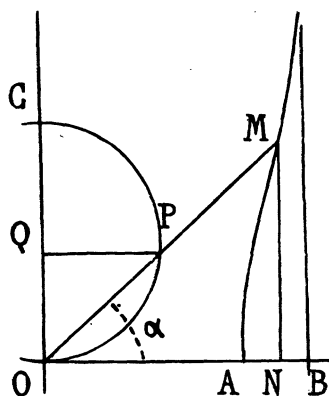


FIG. 5.

Cette courbe passe par un point  $A$  de  $Or$ , normalement à cet axe, et s'élève le long d'une asymptote d'abscisse  $OB$ . On a  $OA = a$ ,  $OB = b$ , si  $a$  et  $b$  sont les valeurs définies en (8).

Une vérification partielle du résultat peut être faite comme au paragraphe 12. Le volume sphéro-conique (OPC), déjà calculé directement, doit être égal à celui

d'un cylindre droit, de hauteur  $h$ , dont la base serait une couronne circulaire de centre  $O$  et de rayons  $ON$  et  $OB$ . Or

$$\overline{OB^2} = \frac{8R^3}{3h}, \quad \overline{ON^2} = \frac{4R^3}{3h} (1 + \sin^2 \alpha),$$

$$\overline{OB^2} - \overline{ON^2} = \frac{4R^3}{3h} \cos^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha).$$

Cette expression multipliée par  $\pi h$  donne le volume du cylindre à base en couronne; ce volume égale bien  $\text{Vol}(\text{OPC})$  déjà obtenu.

#### THÉORÈMES ABÉLIENS.

[16] Soit maintenant une surface algébrique  $E$  quelconque d'équation  $f(X, Y, Z) = 0$  ou

$$(10) \quad \varphi_m(X, Y, Z) + \varphi_{m-1}(X, Y, Z) + \dots + \varphi_0 = 0,$$

les  $\varphi$  étant des fonctions homogènes dont l'ordre est indiqué par l'indice.

Un cône élémentaire, issu de  $O$ , coupe les  $m$  nappes de la surface suivant des éléments superficiels  $d\sigma_i$ , si  $i$  prend les valeurs  $1, 2, \dots, m$ . Bien que cela ne soit pas nécessaire, on peut imaginer commodément la figure en supposant que les éléments  $d\sigma_i$  sont sur la même nappe conique élémentaire de sommet  $O$  et qu'en partant de ce point on les rencontre dans l'ordre où ils sont numérotés. Ensuite le cône découpe un élément  $d\sigma$  sur une surface  $\sigma$  supposée d'abord sans aucune relation avec  $E$ .

Soit  $d\tau_i$  le volume conique élémentaire compris entre  $O$  et  $d\sigma_i$ . On a

$$\tau_i = \frac{1}{3} \int_{\sigma} \int_{\rho_i} \frac{1}{\rho_i^3} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma,$$

$$\sum \tau_i = \frac{1}{3} \int_{\sigma} \left( \sum \frac{1}{\rho_i^3} \right) (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma,$$

l'aire d'intégration  $\sigma$  étant naturellement limitée, sur la surface  $\sigma$ , par un contour simplement connexe  $\Sigma$ . L'élément  $d\sigma$  est en un point  $m(x, y, z)$  et  $d\sigma_i$  en  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ , si bien que

$$\rho_i = \frac{Om}{OM_i}, \quad x_i = \frac{x}{\rho_i}, \quad y_i = \frac{y}{\rho_i}, \quad z_i = \frac{z}{\rho_i}.$$

Comme  $M_i$  appartient à la surface (10), l'équation de cette surface donne

$$\left( \frac{1}{\rho_i} \right)^m \varphi_m(x, y, z) + \left( \frac{1}{\rho_i} \right)^{m-1} \varphi_{m-1}(x, y, z) + \dots + \varphi_0 = 0$$

d'où, d'après des formules bien connues,

$$\frac{1}{3} \sum \left( \frac{1}{\varphi_i} \right)^3 = -\frac{\varphi_{m-1}^3}{3\varphi_m^3} + \frac{\varphi_{m-1}\varphi_{m-2}}{\varphi_m^2} - \frac{\varphi_{m-3}}{\varphi_m}.$$

Finalement,

$$(11) \quad \sum \tau_i = \int \int_{\sigma} \left( -\frac{\varphi_{m-1}^3}{3\varphi_m^3} + \frac{\varphi_{m-1}\varphi_{m-2}}{\varphi_m^2} - \frac{\varphi_{m-3}}{\varphi_m} \right) (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

On peut maintenant refaire ici un raisonnement déjà fait maintes fois.

Cette somme de volumes coniques  $\tau_i$  est déterminée non pas précisément par le choix de la cloison  $\sigma$ , mais *uniquement* par le contour  $\Sigma$  de  $\sigma$ .

Donc l'intégrale double de la formule (11) doit être transformable, par la formule de Stokes, en une intégrale de ligne relative au contour  $\Sigma$ .

En fait, la formule de Stokes n'a pas à intervenir dans toute sa généralité; la réduction (2) suffit, car, dans l'intégrale double de (11), tous les termes en  $\varphi$  forment un ensemble homogène d'ordre  $-3$ . Dans les applications qui vont suivre et conformément à une remarque déjà faite, nous utiliserons tantôt (2), qui a l'avantage de la symétrie, tantôt la forme abrégée (3) qui a l'avantage de la brièveté.

Voici d'abord une application de (3). On a

$$\sum \tau_i = \int_{\Sigma} H(y dx - x dy)$$

si

$$H = -\frac{1}{2} \Omega(x, y) + \int \left( -\frac{\varphi_{m-1}^3}{3\varphi_m^3} + \frac{\varphi_{m-1}\varphi_{m-2}}{\varphi_m^2} - \frac{\varphi_{m-3}}{\varphi_m} \right) dz.$$

Par suite,  $h$  désignant une longueur constante, si l'on pose  $2H$  égal à  $-h$ , le contour  $\Sigma$  étant tracé sur la surface

$$(12) \quad h = \Omega(x, y) + 2 \int \left( \frac{\varphi_{m-1}^3}{3\varphi_m^3} - \frac{\varphi_{m-1}\varphi_{m-2}}{\varphi_m^2} + \frac{\varphi_{m-3}}{\varphi_m} \right) dz,$$

on a

$$(13) \quad \sum \tau_i = \frac{h}{2} \int_{\Sigma} (x dy - y dx).$$

Je dirai que la surface (12) est une surface  $\sigma_2$  attachée à  $E$ . Il y a, en réalité, une infinité de ces surfaces  $\sigma_2$ , puisque  $\Omega(x, y)$  est une fonction homogène, d'ordre  $-2$ , d'ailleurs quelconque. Elles sont algébriques ou algébrico-logarithmiques puisque l'intégrale indéfinie de (12) ne contient que des fractions rationnelles en  $z$ . En résumé :

*A toute surface algébrique  $E$ , on peut adjoindre une famille de surfaces algébrico-logarithmiques  $\sigma_2$ , telles qu'un contour  $\Sigma$  y tracé donne un cône  $O\Sigma$  pour lequel la*

somme des volumes coniques, compris entre O et les différentes cloisons qu'il découpe sur E, soit égale au volume d'un cylindre droit, de hauteur constante, ayant pour base, sur le plan Oxy, la projection du contour  $\Sigma$ .

La surface algébrique E ayant une équation

$$\varphi_m(X, Y, Z) + \varphi_{m-1}(X, Y, Z) + \dots + \varphi_0 = 0,$$

où les  $\varphi$  sont des groupes de termes homogènes, les surfaces  $\sigma_s$  ne dépendent que des quatre premiers termes de cette équation.

Dans les applications qui vont suivre, les surfaces algébrico-logarithmiques  $\sigma_s$  se réduiront à des surfaces algébriques. Quand les surfaces E sont des quadriques, ou des surfaces du troisième ordre, il est clair que tous les termes de leur équation influent sur la constitution des surfaces  $\sigma_s$ .

Enfin, quand je dis qu'une surface d'équation (12) est de nature algébrico-logarithmique, cela veut dire que cette surface n'a point *obligatoirement* d'autres singularités que les singularités algébrico-logarithmiques, mais il est clair qu'on pourrait, à volonté, en introduire d'autres en profitant du caractère arbitraire de  $\Omega(x, y)$ .

[17] Cas où E est une sphère quelconque. — Si la surface E est une sphère absolument quelconque, de centre  $(a, b, c)$  et de rayon R, l'équation aux inverses des  $\rho_i$  est

$$(14) \quad \frac{1}{\rho^2} (x^2 + y^2 + z^2) - \frac{2}{\rho} (ax + by + cz) + k^2 = 0$$

si, pour abrégier,  $k^2 = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$ . On a ensuite

$$\frac{1}{\rho_1^3} + \frac{1}{\rho_2^3} = 8 \frac{(ax + by + cz)^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} - 6k^2 \frac{ax + by + cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

et ce second membre peut s'écrire

$$\begin{aligned} & 2ax \left[ 4 \frac{3(by + cz)^2 - 4bcyz - a^2(y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + \frac{4a^2 - 3k^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right] \\ & + 2by \left[ 4 \frac{3(cz + ax)^2 - 4cazx - b^2(z^2 + x^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + \frac{4b^2 - 3k^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right] \\ & + 2cz \left[ 4 \frac{3(ax + by)^2 - 4abxy - c^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + \frac{4c^2 - 3k^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right], \end{aligned}$$

c'est-à-dire se mettre sous la forme

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}$$

si

$$\begin{aligned} F &= a \left[ 2 \frac{a^2(y^2 + z^2) - 3(by + cz)^2 + 4bcyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{3k^2 - 4a^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right], \\ G &= b \left[ 2 \frac{b^2(z^2 + x^2) - 3(cz + ax)^2 + 4cazx}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{3k^2 - 4b^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right], \\ H &= c \left[ 2 \frac{c^2(x^2 + y^2) - 3(ax + by)^2 + 4abxy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{3k^2 - 4c^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right]. \end{aligned}$$

Alors, avec ces valeurs de F, G, H, on a

$$(15) \quad \tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{3} \int_{\Sigma} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ F & G & H \end{vmatrix}.$$

On peut se représenter le cône  $O\Sigma$  comme réduit à une seule nappe qui transperce effectivement la sphère. En partant de  $O$ , on rencontre une première cloison sphérique d'aire  $\sigma_1$  et le volume conique  $\tau_1$  est celui compris entre  $O$  et cette cloison; même image pour  $\sigma_2$  et  $\tau_2$ .

Or, dans mon précédent Mémoire (n° 12), j'ai repris, après M. G. Humbert, l'étude de la différence d'aires  $\sigma_2 - \sigma_1$ ; la formule (15) vient d'être obtenue par un procédé exactement analogue. Elle correspond exactement à l'intégrale de ligne donnée par M. Humbert pour  $\sigma_2 - \sigma_1$  et j'ai d'ailleurs pu conserver les notations de l'éminent géomètre.

[18] *Surfaces  $\sigma_2$  attachées à la sphère.* — J'abandonne maintenant la parfaite symétrie des notations précédentes pour obtenir des résultats un peu plus maniables. La sphère aura son centre sur  $Oz$  avec la cote  $c$ . Il est clair que cette hypothèse ne diminue en rien la généralité de la figure formée par la sphère et par le cône. La sphère ayant pour équation

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 - R^2 = 0,$$

on a

$$\varphi_m = x^2 + y^2 + z^2, \quad \varphi_{m-1} = -2cz, \quad \varphi_{m-2} = c^2 - R^2, \quad \varphi_{m-3} = 0,$$

et l'équation (12) de la surface  $\sigma_2$  devient

$$h = \Omega(x, y) - 2 \int \left[ \frac{8c^3 z^3}{3(x^2 + y^2 + z^2)^3} - \frac{2cz(c^2 - R^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right] dz$$

ou

$$(16) \quad h = \Omega(x, y) - \frac{2c}{3} \left[ \frac{2c^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} - \frac{c^2 + 3R^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right].$$



Bien entendu, on pouvait déduire ce résultat des formules du paragraphe précédent, pour  $a$  et  $b$  nuls, sans faire une intégration partielle en  $z$  que je n'indique que pour être d'accord avec la formule générale (12).

En général, la surface d'équation (16) n'est pas de révolution; toutefois je ferai plus particulièrement appel à une surface de révolution pour obtenir facilement des vérifications simples.

Soit donc  $\Omega = 0$  et  $x^2 + y^2 = r^2$ ; l'équation (16) devient

$$(17) \quad F = (r^2 + z^2)^2 - \frac{2c}{3h} [(3R^2 - c^2)r^2 + (3R^2 + c^2)z^2] = 0.$$

Comme courbe méridienne de la surface  $\tau_2$  on reconnaît une podaire centrale de conique. Voyons les points, non situés sur  $Or$ , où la tangente est parallèle à  $Oz$  (n° 13).

Ces points sont déterminés par (17) et par  $F_z = 0$ ; ces deux équations reviennent à

$$(18) \quad 12hcr^2 = (3R^2 + c^2)^2, \quad 4hc z^2 = (3R^2 + c^2)(c^2 - R^2).$$

Pour que les points en question existent, il faut  $c > R$ .

Si  $c = R$ , l'équation (17) redonne (7). Le cas du paragraphe 12 est un cas limite. Descendre la sphère  $E$ , de manière à ce qu'elle soit coupée en deux points réels par  $Or$ , c'est modifier  $AB$  sans faire acquérir à cette courbe des tangentes parallèles à  $Oz$ , en dehors, bien entendu, du point  $A$ . Au contraire, relever la sphère ( $c > R$ ), c'est faire apparaître les tangentes en question.

[19] *Cas de  $R > c$ .* — Cette inégalité entraîne évidemment  $3R^2 > c^2$  et, par suite, la courbe (17) est une véritable podaire centrale d'ellipse. La sphère  $E$  étant coupée réellement par le plan  $Oxy$ , imaginons que le cône de sommet  $O$  s'ouvre de manière à se confondre avec ce plan; alors  $\tau_1 + \tau_2$  devient la différence des volumes des segments sphériques situés au-dessus et au-dessous du dit plan. Il est aisé de calculer directement que

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{2}{3} \pi c (3R^2 - c^2).$$

Mais cette expression doit être égale au volume du cylindre circulaire droit de hauteur  $h$  et de rayon de base  $OA$ , si  $A$  est l'intersection de la courbe (17) avec  $Or$ . Et l'on a

$$\overline{OA}^2 = \frac{2c}{3h} (3R^2 - c^2),$$

d'où l'égalité prévue.

[20] *Cas de  $3R^2 > c^2 > R^2$ .* — On a toujours une véritable podaire centrale d'ellipse, mais avec des points, tels que S, où la tangente est parallèle à Oz. La pente de OS est le rapport de  $z$  à  $r$  que l'on tire de (18). Dans le plan de la figure, menons une tangente OT à la sphère; si l'on compare les pentes de OS et OT, qui sont respectivement

$$\sqrt{\frac{3(c^2 - R^2)}{c^2 + 3R^2}}, \quad \frac{\sqrt{c^2 - R^2}}{R},$$

on voit que la première est toujours inférieure à la seconde, ce qui est conforme à la remarque générale du paragraphe 13.

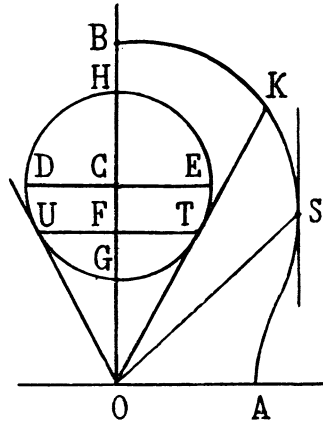


FIG. 6.

La tangente OT rencontre l'arc AB en un point K dont l'abscisse  $r$  est donnée par

$$hr^2 = \frac{2R^2}{3c} (R^2 + c^2).$$

Cette expression, multipliée par  $\pi$ , devient un volume cylindrique qui doit être égal à

$$\text{vol OTEH DUO} + \text{vol OTGUO} = 2 (\text{vol cône OTUO} + \text{vol seg TEDUT}),$$

c'est-à-dire à

$$\frac{2}{3} \pi \overline{FT}^2 \cdot \overline{OF} + \pi \overline{CF} \left( \overline{FT}^2 + \overline{CE}^2 + \frac{1}{3} \overline{CF}^2 \right).$$

Or,

$$\overline{FT}^2 = \frac{R^2}{c^2} (c^2 - R^2), \quad \overline{OF} = \frac{c^2 - R^2}{c}, \quad \overline{CF} = \frac{R^2}{c}, \quad \overline{CE} = R,$$

et, dans ces conditions, le volume précédent devient bien

$$\frac{2\pi}{3} \frac{R^2}{c} (R^2 + c^2).$$

De telles vérifications, partielles et élémentaires, peuvent paraître superflues; elles indiquent cependant que les formules générales précédemment établies sont affranchies de difficultés relatives aux signes.

[21] *Cas de  $3R^2 = c^2$ .* — Ici la podaire méridienne, d'équation (17), se décompose en deux cercles.

Par continuité, on peut dire que, sur la figure 6, le point A vient en O, l'arc AB devenant alors un demi-cercle ayant un diamètre tel que OB. On pourrait prendre texte de ce cas particulier pour énoncer un théorème sur la somme des volumes coniques,  $\tau_2$  et  $\tau_1$ , associés à une sphère, relativement à une autre sphère entourant la première et convenablement déterminée.

J'en laisse la rédaction précise aux soins du lecteur.

[22] *Cas de  $3R^2 < c^2$ .* — La courbe méridienne (17) est alors podaire centrale d'une hyperbole.

Cette hyperbole tend à devenir équilatère et, par suite, la podaire tend à devenir une lemniscate de Bernoulli quand  $c$  devient très grand et  $R$  très petit.

Des vérifications partielles pourraient encore être facilement tentées.

[23] *Étude de  $\tau_2 - \tau_1$  pour la sphère.* — Si nous considérons toujours une sphère, un point O (extérieur, pour fixer les idées) sommet d'un cône transperçant la sphère, et les volumes coniques  $\tau_1$  et  $\tau_2$  pris entre O et les cloisons sphériques découpées par le cône, il est clair qu'après l'étude de  $\tau_2 + \tau_1$ , il serait plus important encore d'étudier  $\tau_2 - \tau_1$ , car c'est là le noyau intérieur à la fois au cône et à la sphère.

En raisonnant comme au paragraphe 16, on écrira d'abord

$$(19) \quad \tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{3} \int \int_{\sigma} \left( \frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\rho_1^3} \right) (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

Je ne chercherai point ici à prendre une sphère de centre  $(a, b, c)$ ; cela serait cependant possible mais entraînerait des calculs par trop compliqués. L'équation de la sphère étant

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2cz + k^2 = 0, \quad (k^2 = c^2 - R^2)$$

l'équation aux inverses des  $\rho$  est

$$\frac{1}{\rho^2} (x^2 + y^2 + z^2) - \frac{2}{\rho} cz + k^2 = 0$$

et l'on trouve facilement que

$$\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\rho_1^3} = 2 \sqrt{R^2 z^2 - k^2 r^2} \left[ \frac{3c^2 + R^2}{(r^2 + z^2)^2} - \frac{4c^2 r^2}{(r^2 + z^2)^3} \right]$$

si  $r^2 = x^2 + y^2$ . Or, cette expression est homogène d'ordre  $-3$  en  $x, y, z$ , et, par suite, la formule de Stokes, sous la forme (3), permet de remplacer (19) par

$$(20) \quad \tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{3} \int_{\Sigma} H(ydx - xdy)$$

si

$$(21) \quad H = 2 \int \sqrt{R^2 z^2 - k^2 r^2} \left[ \frac{3c^2 + R^2}{(r^2 + z^2)^2} - \frac{4c^2 r^2}{(r^2 + z^2)^3} \right] dz.$$

On voit qu'ici on n'aboutit pas directement à des intégrales portant sur des fractions rationnelles: elles ne donnent pas, au premier abord, un théorème abélien exactement identique à celui du paragraphe 16, mais, au fond, il en sera tout de même ainsi, car les intégrales en litige ne contiennent que des irrationalités élémentaires équivalant à des fractions rationnelles, du moins quant aux procédés d'intégration.

Pour calculer le second membre de (21), posons

$$\begin{aligned} R^2 z^2 - k^2 r^2 &= u^2, & Rz + u &= t, & Rz - u &= \frac{k^2 r^2}{t}, \\ 2Rz &= t + \frac{k^2 r^2}{t}, & 2R dz &= \left( 1 - \frac{k^2 r^2}{t^2} \right) dt. \end{aligned}$$

La variable  $z$  étant partout exprimée en  $t$ , on reconnaît qu'on obtient une nouvelle simplification en posant  $t^2 = v$ ; alors  $H$  est égal à

$$2R^2 \int (v - k^2 r^2)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2R(3c^2 + R^2)}{[4R^2 r^2 v + (v + k^2 r^2)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{3 \cdot 2R^2 c^2 r^2 v}{[4R^2 r^2 v + (v + k^2 r^2)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} dv.$$

Si l'on observe que

$$4R^2 r^2 v + (v + k^2 r^2)^2 = [v + r^2(c - R)^2][v + r^2(c + R)^2],$$

toute l'expression contenue entre le signe d'intégration et  $dv$  se décompose en

$$\frac{(c + R)^3}{[v + r^2(c + R)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{(c - R)^3}{[v + r^2(c - R)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{2cr^2(c + R)^4}{[v + r^2(c + R)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{2cr^2(c - R)^4}{[v + r^2(c - R)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

L'intégration est alors immédiate et l'on obtient

$$\frac{H}{2R^2} = - \frac{(c + R)^3}{v + r^2(c + R)^2} + \frac{(c - R)^3}{v + r^2(c - R)^2} + \frac{cr^2(c + R)^4}{[v + r^2(c + R)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{cr^2(c - R)^4}{[v + r^2(c - R)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Si maintenant on pose

$$\frac{H}{3} = - \frac{h}{2}$$

et si, d'après les définitions de  $v$ ,  $t$ ,  $u$ , on écrit

$$v = \left[ Rz + \sqrt{R^2 z^2 - (c^2 - R^2) r^2} \right]^2$$

on a l'équation

$$\frac{3h}{4R^2} = \frac{(c+R)^3}{v+r^2(c+R)^2} - \frac{(c-R)^3}{v+r^2(c-R)^2} - \frac{cr^2(c+R)^4}{[v+r^2(c+R)^2]^2} + \frac{cr^2(c-R)^4}{[v+r^2(c-R)^2]^2}$$

d'une surface de révolution que je dirai être une surface  $\sigma_3$ .

*Un contour fermé  $\Sigma$ , tracé sur la surface  $\sigma_3$ , détermine un cône  $O\Sigma$  tel que le volume, commun à ce cône et à la sphère*

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = R^2,$$

*soit égal au volume d'un cylindre droit, de hauteur  $h$ , ayant pour base la projection de  $\Sigma$  sur  $Oxy$ .*

L'équation de la surface  $\sigma_3$  qui vient d'être obtenue n'est pas sous une forme définitive et aussi simple que possible; cependant sa symétrie est déjà remarquable.

[24] Rendue rationnelle par des calculs un peu touffus, mais tendant toujours à s'arranger élégamment, l'équation de la surface  $\sigma_3$  devient

$$(22) \quad (r^2 + z^2)^4 (3hr^2 - 4R^2)^2 = 16z^2 (R^2 z^2 - k^2 r^2)^2.$$

Elle semble être du douzième degré, mais n'est, en réalité, que du dixième, car les deux membres contiennent le même terme  $16R^6 z^8$  après suppression duquel on peut tout diviser par  $r^2$ . Mais cet abaissement, loin de simplifier, complique beaucoup l'équation; de plus, les différents facteurs qui figurent dans (22) ont, comme nous allons le voir, des interprétations géométriques fort remarquables. Conservons donc la forme (22).

Avec les coordonnées polaires définies par  $r = \rho \cos \omega$ ,  $z = \rho \sin \omega$ , l'équation (22) devient

$$(23) \quad 3h\rho^2 \cos^2 \omega = 4 \left[ R^2 \pm \sin \omega (R^2 - c^2 \cos^2 \omega)^{\frac{3}{2}} \right].$$

Elle est alors explicite en  $\rho$ ; le méridien de  $\sigma_3$ , ainsi représenté, est d'une construction géométrique assez simple. Je distinguerai les trois cas  $c < R$ ,  $c = R$ ,  $c > R$ , en commençant par le cas médian  $c = R$  qui fera retrouver des résultats connus et donnera de précieuses indications intuitives pour l'étude des deux autres cas.

[25] *Cas de  $c = R$ .* — Ici on a  $k = 0$  et l'équation (22) se décompose en

$$(7) \quad 3h(r^2 + z^2)^2 - 4R^3(r^2 + 2z^2) = 0,$$

$$(9) \quad 3hr^2(r^2 + z^2)^2 - 4R^3[(r^2 + z^2)^2 + z^4] = 0,$$

c'est-à-dire en les équations des surfaces de révolution obtenues plus haut en étudiant directement les sphères pour lesquelles on avait  $c = R$ .

Les courbes méridiennes (7) et (9) sont représentées ensemble sur la figure 7 qui n'est ainsi qu'une juxtaposition des figures 4 et 5. Les segments OB, sur Or ou Oz (fig. 7) sont égaux aux segments OB des figures précitées. Même remarque pour OA. Bien entendu, toutes ces figures et les suivantes doivent être symétriquement complétées dans les trois autres angles des axes coordonnés.

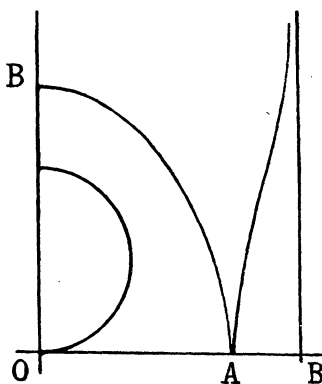


FIG. 7.

[26] *Cas de  $c < R$ .* — En faisant  $\omega = 0$  dans l'équation (23) on voit que la courbe possède un point double en A sur Or lequel a même abscisse que dans le cas précédent; il est à tangentes distinctes. Pour  $2\omega = \pi$  on a  $3hr^2 = 4R^3(1 \pm 1)$ , ce qui, avec le signe moins, correspond au point B' d'abscisse nulle et, avec le signe plus, à un rayon vecteur infini se projetant suivant OB, B ayant aussi même abscisse que précédemment. Quant au rayon vecteur OB', l'équation (23) le présente sous une forme indéterminée facile à transformer, mais il est encore plus simple de le déduire, pour  $r = 0$ , de (22) ramenée au dixième degré.

On trouve ainsi

$$(24) \quad \overline{OB'} = \sqrt{\frac{2R(R^2 + 3c^2)}{3h}},$$

ce qui, comme on le vérifie aisément, est toujours plus petit que OB, en vertu de l'hypothèse  $c < R$ . Bref, le centre de la sphère se rapprochant de O, A et B restent invariables mais B' se rapproche aussi de O.

Pour  $c = 0$ , on a  $h^2 = -R^2$ , et l'équation (22) devient

$$(25) \quad 3hz^2(8R^3 - 3hr^2) = (4R^3 - 3hr^2)^2.$$

La courbe méridienne qu'elle représente est une trisécante déjà rencontrée dans le Mémoire précédent (n° 10). Alors nous avons bien une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  et, si l'on traçait un contour fermé  $\Sigma$  sur la surface de révolution à trisécante méridienne, le cône  $O\Sigma$  découpait sur la sphère une cloison d'aire  $\sigma_r$  égale à l'aire  $\Pi$  enfermée dans la projection de  $\Sigma$  sur le plan  $Oxy$ . Ici nous avons  $2R\sigma_r = 3h\Pi$ , ce qui se réduit à  $\sigma_r = \Pi$ , si l'on prend  $3h = 2R$ , et, dans ces conditions, l'équation (25) devient

$$z = \frac{2R^2 - r^2}{\sqrt{4R^2 - r^2}}.$$

C'est exactement la forme donnée à l'endroit précité. Il y a là une nouvelle garantie quant à une exactitude suffisante du tracé indiqué sur la figure 8. Enfin

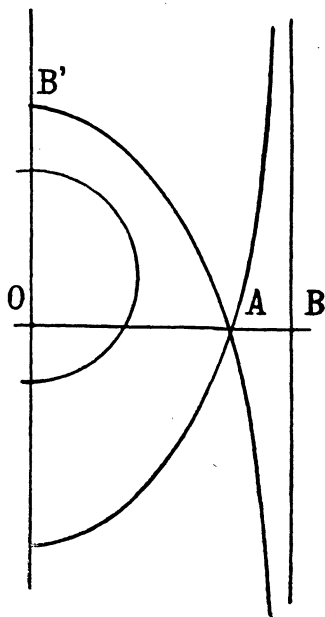


FIG. 8.

remarquons que si, sur cette figure, le cône de sommet  $O$  s'ouvre de manière à venir se confondre avec le plan  $Oxy$ , le volume sphéro-conique devient le volume total de la sphère lequel doit être égal au volume cylindrique droit de hauteur  $h$  et de rayon de base  $OA$ . Or  $OA$  est la valeur de  $r$  donnée par (22) pour  $z = 0$ , c'est-à-dire donnée par

$$3hr^2 - 4R^3 = 0.$$

Ceci permet de vérifier immédiatement l'égalité des volumes indiqués, mais l'important est qu'on a ainsi une explication géométrique quant à l'existence du facteur  $3hr^2 - 4R^3$  dans le premier membre de l'équation (22).

[27] *Cas de  $c > R$ .* — On voit, comme dans le cas précédent, que OB garde une valeur constante quel que soit  $c$ . De même OB' garde la forme (24) mais est toujours alors plus grand que OB, en vertu de  $c > R$ .

Pour  $\omega = 0$  on ne trouve plus d'intersections réelles avec Or; la plus petite valeur de  $\omega$ , à laquelle corresponde un rayon vecteur réel, est donnée par  $c \cos \omega = R$ . La projection de ce rayon vecteur OK, sur Or, donne OA, segment qui est encore le même que sur les deux figures précédentes.

OK est aussi tangent à la sphère.

Si le cône de sommet O devient circonscrit à la sphère et a précisément OTK pour génératrice, le volume sphéro-conique devient le volume de la sphère complète, volume qui doit être égal à  $\pi hr^2$  si  $r = OA$ ; c'est facile à vérifier, mais cette valeur de  $r$  doit pouvoir se tirer de (22) et de l'équation des tangentes telles que OTK

$$R^2 z^2 - k^2 r^2 = 0.$$

On a ainsi une explication géométrique quant à l'existence du facteur  $R^2 z^2 - k^2 r^2$  dans le second membre de l'équation (22).

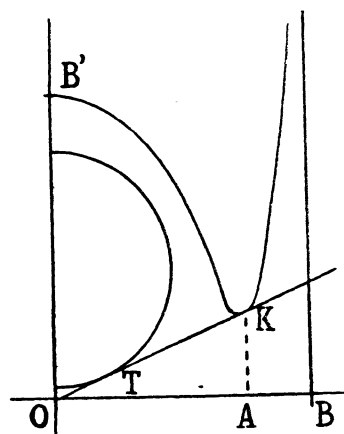


FIG. 9.

[28] *Surfaces  $\sigma_3$  dépendant d'une fonction arbitraire.* — Dans H, donné par l'égalité (21), une fonction arbitraire  $\Omega(x, y)$  peut évidemment s'introduire comme dans toutes les questions analogues et précédemment traitées. Cette fonction, purement additive, vient s'ajouter à l'un des membres de l'équation de la surface  $\sigma_3$  donnée à la fin du paragraphe 23. Cela revient à l'ajouter à  $h$  et, comme  $\Omega$  doit être



homogène d'ordre  $-2$ ,  $hr^2$  peut s'augmenter d'une fonction homogène d'ordre zéro en  $x, y$ . En respectant, autant que possible, la symétrie déjà acquise et l'homogénéité, l'équation (22) peut être remplacée par

$$(26) \quad (r^2+z^2)^4 [3hr^2 - 4R^3 \Psi(\theta)]^2 = 16z^2 (R^2 z^2 - k^2 r^2)^3,$$

$r, \theta, z$  étant des coordonnées semi-polaires et  $\Psi(\theta)$  désignant la fonction arbitraire.

Les surfaces  $\sigma_3$ , définies par (26), ne sont pas, en général, des surfaces de révolution. Elles ne le deviennent que lorsque  $\Psi(\theta)$  se réduit à une constante; si celle-ci est égale à 1, on retrouve les résultats déjà traités en détail.

Je vais examiner, brièvement cette fois, le cas où  $\Psi(\theta) = 0$ ; l'équation (26) devient alors

$$(27) \quad 9h^2 r^4 (r^2+z^2)^4 = 16z^2 (R^2 z^2 - k^2 r^2)^3.$$

Elle peut sembler plus simple que (22); elle est cependant du douzième degré alors que (22) est du dixième.

[29] Cas de  $\Psi = 0$  et  $c = R$ . — Alors  $k = 0$  et l'équation (27) se décompose. En ne s'attachant qu'aux courbes réelles ainsi obtenues, on a la *cissoïde*

$$r(r^2+z^2) = 2R \sqrt{\frac{R}{3h}} z^2,$$

et naturellement sa symétrique par rapport à Oz.

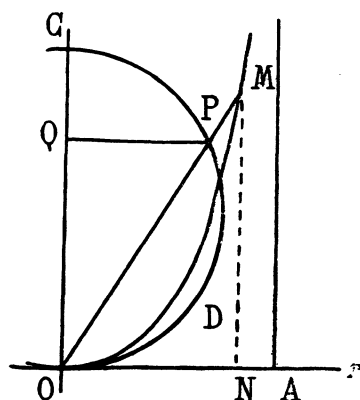


FIG. 10.

On peut encore faire une vérification partielle très simple en reprenant l'expression du volume sphéro-conique (OPC) donnée au paragraphe 12; on en conclut que le volume engendré par la rotation autour de Oz du segment de cercle ODP est

$$\frac{4}{3} \pi R^3 - \text{Vol (OPC)} = \frac{4}{3} \pi R^3 \sin^4 \alpha.$$

Or, ce volume doit être égal à celui du cylindre droit de hauteur  $h$  et de rayon de base  $ON$ .

L'angle  $MON$  étant toujours désigné par  $\alpha$ , on trouve sans peine

$$3h \overline{ON}^2 = 4R^3 \sin^4 \alpha,$$

d'où, immédiatement, la vérification indiquée.

Ce rôle de la cissoïde dans l'évaluation des volumes coniques inscrits à la sphère constitue probablement une propriété de la courbe non remarquée jusqu'ici. On pourrait s'étonner de ne pas avoir rencontré la cissoïde, comme courbe méridienne d'une surface  $\sigma_1$ , dans l'étude directe des volumes coniques inscrits, faite par la méthode du paragraphe 12. Mais il faut observer que l'on disposait alors d'une fonction  $\Omega$  qui se combinait avec l'équation de la sphère mise sous la forme très spéciale (5); ici la fonction  $\Psi$  se combine avec une tout autre forme de la même équation. Et ceci suffit amplement à expliquer qu'on ne puisse parvenir, par les deux méthodes, aux mêmes résultats.

[30] *Cas de  $\Psi = 0$  et  $c < R$ .* — En reprenant des coordonnées polaires  $\rho$  et  $\omega$  dans le plan  $zOr$ , l'équation (27) devient

$$3h \rho^2 \cos^2 \omega = \pm 4 \sin \omega (R^2 - c^2 \cos^2 \omega)^{\frac{3}{2}}$$

Comme forme générale, la courbe n'est pas essentiellement différente de la double cissoïde précédente.

Pour  $2\omega = \pi$ , rayon  $\rho$  infini mais avec projection finie  $OA$ ; on retrouve donc, sans modifications, l'asymptote en  $A$ .

Si  $c = 0$ , on a la courbe

$$3h \rho^2 \cos^2 \omega = \pm 4R^3 \sin \omega$$

déjà étudiée au paragraphe 11 du Mémoire précédent. Pour  $3h = 2R$ , il y a même identité absolue entre les deux courbes, ceci en vertu d'un raisonnement déjà fait ici (n° 26).

[31] *Cas de  $\Psi = 0$  et  $c > R$ .* — L'asymptote en  $A$  subsiste toujours sans modifications, mais la courbe admet, à l'origine, les tangentes

$$R^2 z^2 - k^2 r^2 = 0.$$

Ce sont les droites  $OTK$  tangentes à la sphère et déjà placées sur la figure 9.

[32] *Nature arithmétique des volumes sphéro-coniques.* — Ce qui précède nous permet de déterminer des volumes sphéro-coniques d'une nature arithmétique déterminée. Ils peuvent être rationnels, présenter des irrationalités imposées, dépendre ou ne pas dépendre de  $\pi$ , etc.

La détermination de tels volumes se fera toujours par des opérations algébriques. Il suffira de choisir un cylindre droit algébrique dont la base, de forme quelconque, peut avoir une aire arbitraire, dont la hauteur sera également arbitraire, et d'installer la base de ce cylindre dans le plan  $Oxy$ . Ses génératrices couperont une surface *algébrique*, telle que  $\sigma_1$  ou  $\sigma_2$  ou  $\sigma_3$ , suivant un contour  $\Sigma$ , d'où un cône  $O\Sigma$  qui, en transperçant la sphère considérée, déterminera différents volumes sphéro-coniques tels que ceux qui viennent d'être étudiés, volumes qui seront égaux à celui du cylindre. Il est clair que tout déplacement de la base de ce cylindre dans le plan  $Oxy$ , toute déformation en un autre cylindre droit, de même volume et placé de même manière, changent le volume sphéro-conique en un volume sphéro-conique équivalent.

Tous ces résultats sont analogues à ceux obtenus, dans le Mémoire précédent, pour les aires définies sur des surfaces quelconques.

LA FORMULE DE STOKES SUR LES SURFACES ALGÈBRIQUES. — GÉNÉRALITÉS.

[33] Nous allons voir maintenant que l'étude des volumes coniques, développée, dans ce qui précède, d'une manière aussi élémentaire que possible, peut conduire, dans des circonstances très générales, à une substitution toujours possible d'une intégrale de contour fermé à une intégrale de cloison, quand cette cloison  $\sigma_E$  appartient à une surface algébrique  $E$  d'équation  $F(X, Y, Z) = 0$ .

Soit l'intégrale de cloison, tout à fait quelconque,

$$(28) \quad \int \int_{\sigma_E} \Phi(X, Y, Z) d\sigma_E.$$

Admettons toujours que l'élément  $d\sigma_E$ , situé en  $M(X, Y, Z)$ , serve de directrice à un cône infiniment délié, de sommet  $O$ , qui, en  $m(x, y, z)$ , détermine  $d\sigma$  sur une surface  $\sigma$ .

Soit  $\rho$  le rapport de  $Om$  à  $OM$  et, toujours de même,  $\alpha, \beta, \gamma$  les cosinus directeurs de la normale à  $d\sigma$ . L'intégrale double (28) peut être remplacée par

$$(29) \quad \int \int_{\sigma} \frac{\Phi(X, Y, Z)}{\rho^3} \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{XF_x + YF_y + ZF_z} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma$$

où il faut poser

$$(30) \quad X = \frac{x}{\rho}, \quad Y = \frac{y}{\rho}, \quad Z = \frac{z}{\rho}.$$

De plus,  $\rho$  est défini par l'équation, *algébrique* par hypothèse,

$$(31) \quad F\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho}\right) = 0.$$

Elle donne  $\rho$  sous forme d'une fonction homogène du premier ordre, d'où il suit que, d'après (30),  $X, Y, Z$  sont homogènes d'ordre zéro. Alors, dans l'intégrale double (29), l'ensemble des deux facteurs fractionnaires en  $X, Y, Z$  est homogène d'ordre  $-3$  et cette intégrale double est transformable en une intégrale de ligne, étendue au contour  $\Sigma$  de  $\sigma$ , par la formule (2) proprement dite ou par la forme particularisée (3). Certes cette transformation exigera, pour l'obtention réelle de  $F, G$  ou  $H$ , des intégrations indéfinies qui, au point de vue absolument général, sont aussi quelconques que n'importe quelle quadrature permettant de passer d'une intégrale double à une intégrale simple; mais il semble que de nombreux problèmes géométriques s'accrochent tout naturellement d'intégrations élémentaires pour la détermination de  $F, G, H$ . C'est ce qui arrivait pour les volumes coniques et ce qui va arriver bientôt pour les volumes tournants engendrés par des contours tracés sur surfaces algébriques. D'autres exemples pourraient être joints à ces deux là.

De plus, le cône  $O\Sigma$  coupe la surface  $F(X, Y, Z) = 0$ , supposée d'ordre  $m$ , en  $y$  déterminant  $m$  cloisons pour lesquelles il faut distinguer des  $X_i, Y_i, Z_i, \rho_i$  dont les indices diffèrent d'une cloison à l'autre. Or il arrive encore fréquemment que les intégrales doubles (29), compliquées pour une seule valeur de  $i$ , donnent, par leur somme, un intéressant théorème abélien.

[34] *Cas où E est une surface de direction.* — M. G. Humbert, en poursuivant une idée de Laguerre relative aux *courbes de direction*, a appelé *surfaces de direction* des surfaces algébriques  $E$  pour lesquelles

$$(32) \quad \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \Psi(X, Y, Z),$$

$\Psi$  étant une fonction rationnelle. Imaginons que  $\Phi$  soit également une fonction rationnelle.

Dans ces conditions, la somme des intégrales doubles (29), pour toutes les valeurs de  $i$ , est une intégrale double où le coefficient de  $(\alpha x + \beta y + \gamma z)d\sigma$  est rationnel en  $x, y, z$ .

Égalons ce coefficient à  $H_z$ , déterminons  $H$  par une intégration partielle en  $z$ , dont le résultat sera de nature algébrico-logarithmique, et, en vertu de la formule (3), l'intégrale de cloison sera remplacée par l'intégrale de contour

$$\int_{\Sigma} H(y dx - x dy).$$

Si le contour  $\Sigma$  est tracé sur la surface  $H = \text{const}$  ou, de manière plus précise, sur la surface  $2H = -1$ , on a ce théorème :

Si  $\Phi(X, Y, Z)$  est une fonction rationnelle et si l'on considère la somme des intégrales telles que

$$\iint \Phi(X, Y, Z) d\sigma_E,$$

dont chacune est étendue à l'une des cloisons découpées par un cône  $O\Sigma$  sur une surface de direction  $E$ , on peut tracer  $\Sigma$  sur une surface algébrico-logarithmique associée à  $E$  de telle manière que la somme d'intégrales considérée s'exprime par l'aire incluse dans la projection de  $\Sigma$  sur le plan  $Oxy$ .

Un tel théorème admet quelques variantes faciles à apercevoir. Il subsisterait pour  $\Phi$  et  $\Psi$  non rationnels, à condition que le produit  $\Phi\Psi$  le soit. Ceci pourrait même conduire à rechercher des généralisations des surfaces de direction, généralisations pour lesquelles le second membre de (32) serait un produit de facteurs rationnels et irrationnels. On était dans un cas de ce genre (vraisemblablement le plus simple de tous) dans l'étude des volumes coniques, car,  $\delta$  étant la distance de l'origine au plan tangent, en  $M$ , à  $E$ , on avait

$$\Phi(X, Y, Z) = \frac{\delta}{3} = \frac{1}{3} \frac{XF_x + YF_y + ZF_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}.$$

Il en serait encore de même si  $\Phi$  contenait  $\delta$  à une puissance impaire.

#### VOLUMES TOURNANTS.

[35] L'étude des volumes tournants rentre, comme cas particulier, dans celle des volumes engendrés par un contour en mouvement quelconque, étude reposant sur le Mémoire fondamental de M. G. Kœnigs (Journal de Mathématiques, 1889). Si l'on s'astreint à considérer des contours tracés sur des surfaces algébriques simples, la généralité peut se restreindre de manière intéressante; c'est ainsi que M. Kœnigs a pu donner un élégant théorème pour le cas d'un contour *plan* tournant autour d'un axe *quelconque*; on trouvera plus loin (n° 39) un théorème du même genre pour le cas d'un contour *sphérique*. Les contours tracés sur les quadriques peuvent aussi conduire à de remarquables résultats. Dans une Note *Sur les volumes dus à la rotation d'un contour* (Bulletin des Sciences mathématiques, août 1915) j'ai récrit des formules, relatives à l'évaluation des volumes tournants, d'une manière peu originale, au fond, mais sous un aspect particulièrement symétrique et commode.

Reprenons d'abord, comme au paragraphe 33, l'élément de cloison  $d\sigma_E$  en  $M(X, Y, Z)$  et supposons que cet élément tourne autour d'un axe de coefficients directeurs  $\lambda, \mu, \nu$  passant par un point  $P(a, b, c)$ . Dans cette rotation,  $d\sigma_E$  engendre un anneau élémentaire, de volume  $\Phi(X, Y, Z) d\sigma_E$ , où

$$\Phi(X, Y, Z) = \frac{2\pi}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \lambda & \mu & \nu \\ X-a & Y-b & Z-c \end{vmatrix}$$

et l'intégrale (29) de la théorie générale devient ici

$$(33) \quad V = 2\pi \int \int_{\sigma} \frac{1}{\rho^3} \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \lambda & \mu & \nu \\ X-a & Y-b & Z-c \end{vmatrix} \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{X F_x + Y F_y + Z F_z} d\sigma.$$

Il faut naturellement y supposer  $X, Y, Z, \rho$  déterminés par les équations (30) et (31).

Si le point  $P(a, b, c)$  est à l'origine, le volume tournant  $V$  devient

$$(34) \quad V_0 = 2\pi \int \int_{\sigma} \frac{1}{\rho^3} \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \lambda & \mu & \nu \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{X F_x + Y F_y + Z F_z} d\sigma$$

et, par suite,

$$(35) \quad V - V_0 = 2\pi \int \int_{\sigma} \frac{1}{\rho^3} \frac{a' F_x + b' F_y + c' F_z}{X F_x + Y F_y + Z F_z} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma$$

si

$$a' = \nu b - \mu c, \quad b' = \lambda c - \nu a, \quad c' = \mu a - \lambda b.$$

Il est indiqué, on le voit, d'étudier séparément  $V_0$  et  $V - V_0$ , mais l'expression générale de  $V$  donne, sans aller plus loin, un théorème relatif aux volumes tournants et absolument analogue à celui obtenu, au paragraphe 16, pour les volumes coniques.

*A toute surface algébrique E, on peut adjoindre une famille de surfaces algébro-logarithmiques  $\rho$  telles qu'un contour  $\Sigma$  y tracé donne un cône  $O\Sigma$  découpant sur E des cloisons  $\sigma_i$  engendrant, par rotation autour d'un axe quelconque, des volumes dont la somme est égale au volume d'un cylindre droit, de hauteur constante, ayant pour base, sur le plan  $Oxy$ , la projection du contour  $\Sigma$ .*

[36] *Étude de  $V_0$ . Ellipsoïde.* — Cette étude comprend elle-même des cas particuliers intéressants. Supposons notamment que l'équation  $F=0$ , de la surface algébrique E, prenne la forme  $f-1=0$  où  $f$  est homogène d'ordre  $m$ . Alors la formule (34) donne

$$(36) \quad V_0 = \frac{2\pi}{m} \int \int_{\sigma} f^{-\frac{m+3}{m}} \begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ \lambda & \mu & \nu \\ x & y & z \end{vmatrix} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma,$$

ce que (2) transforme en

$$V_0 = \frac{2\pi}{3} \int_{\Sigma} f^{-\frac{3}{m}} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ \nu y - \mu z & \lambda z - \nu x & \mu x - \lambda y \end{vmatrix}.$$

Mais ce n'est pas cette parfaite symétrie qui semble donner les résultats les plus intéressants. Reprenons (34) pour un contour tracé sur l'ellipsoïde E

$$(37) \quad AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1$$

et tournant autour de  $Ox$ . Soit  $V_x$  le volume ainsi obtenu. On a  $\lambda = 1$ ,  $\mu = \nu = 0$ . D'où

$$V_x = 2\pi(C - B) \int_{\sigma} \int_{\sigma} (Ax^2 + By^2 + Cz^2)^{-\frac{5}{2}} yz(\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

La formule (3) permet de transformer cette égalité en

$$(38) \quad V_x = \frac{2}{3} \pi \frac{C - B}{C} \int_{\Sigma} (Ax^2 + By^2 + Cz^2)^{-\frac{3}{2}} y(x dy - y dx).$$

On peut faire différents usages de cette formule. Le plus remarquable, contrairement à ce qui se passait dans le cas des aires ellipsoïdales, correspond au cas où le contour  $\Sigma$  est tracé sur l'ellipsoïde E lui-même. On a

$$y(x dy - y dx) = \frac{1}{2} d(y^2 x) - \frac{3}{2} y^2 dx$$

et, dans l'hypothèse en question,

$$(39) \quad V_x = -\pi \frac{C - B}{C} \int_{\Sigma} y^2 dx = \frac{C - B}{C} v_x,$$

si  $v_x$  désigne le volume engendré par rotation, autour de  $Ox$ , de la projection du contour  $\Sigma$  sur le plan  $Oxy$ . Donc :

*Un contour fermé tracé sur un ellipsoïde et sa projection sur un plan principal engendrent, par rotation autour d'un axe principal situé dans le plan principal considéré, des volumes tournants de rapport constant.*

Ce théorème me paraît absolument analogue, à tous les points de vue, au théorème de la projection des aires planes. On pourrait énoncer ce dernier en disant qu'à un contour, tracé dans le plan quelconque P

$$(40) \quad AX + BY + CZ = 1,$$

et à sa projection sur OXY sont attachées des aires planes de rapport constant. Or, la comparaison immédiate des équations (37) et (40) montre que l'ellipsoïde E et le plan P sont des êtres géométriques analogues, ayant notamment le même degré de généralité.

J'ai donné plus de détails, sur ces points, de manière plus particulièrement géométrique, dans une Seconde Note *Sur les volumes dus à la rotation d'un contour* (Bulletin des Sciences mathématiques, 1916).

Le remarquable théorème obtenu porte à penser qu'ici on ne trouvera pas mieux en traçant le contour  $\Sigma$  sur d'autres surfaces que l'ellipsoïde E. Notons cependant que, d'après (38), si  $\Sigma$  était tracé sur la surface

$$h^2(Ax^2 + By^2 + Cz^2) = y^2,$$

on aurait

$$V_x = \frac{2}{3} \pi h \frac{C-B}{C} \int_{\Sigma} (x dy - y dx),$$

c'est-à-dire  $V_x$  proportionnel au volume d'un cylindre droit, de hauteur constante, ayant pour base la projection du contour  $\Sigma$  sur  $Oxy$ .

Revenons au théorème souligné pour remarquer qu'il comporte une vérification partielle très simple.

Soient D, E, F les sommets de l'ellipsoïde respectivement situés sur les demi-droites  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

Le contour DEFD, formé de trois quadrants d'ellipse, engendre, en tournant autour de  $Ox$ , un volume qu'on évalue immédiatement comme différence de deux volumes ellipsoïdaux de révolution; ce volume est

$$V_x = \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\sqrt{A}} \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right).$$

Or, dans ce cas,

$$v_x = \frac{2\pi}{3} \frac{1}{B\sqrt{A}}$$

et l'équation (39), entre  $V_x$  et  $v_x$  est bien vérifiée.

[37] *Exemple d'un théorème abélien pour volumes  $V_x$ .* — L'expression de  $V_x$ , tirée de l'expression (34) de  $V_o$ , est

$$V_x = 2\pi \int_{\sigma} \int_{\sigma} \frac{1}{\rho^3} \frac{YF_z - ZF_y}{XF_x + YF_y + ZF_z} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

Bien que le théorème terminant le paragraphe 35 permette, en principe, un nombre indéfini de résultats élémentaires, l'obtention effective de ceux-ci semble conduire, le plus souvent, à des calculs peu maniables. Un cas assez simple sera fourni par le cylindre parabolique

$$F = Z^2 - 2p(Y - a) = 0.$$

Alors, dans l'intégrale double précédente, les deux premiers facteurs sont à remplacer par

$$\frac{Z}{\rho^3} \frac{Y + p}{Z^2 - pY}.$$



Conformément au raisonnement général, remplaçons  $X, Y, Z$  par leurs valeurs (30). L'expression devient

$$(41) \quad \frac{z}{\rho^3} \frac{y + p\rho}{z^3 - py\rho} = \frac{y}{z\rho^3} + \frac{p}{z^3} (y^3 + z^3) \left[ \frac{1}{\rho^3} + \frac{py}{z^2\rho} + \frac{p^2 y^3}{z^3(z^3 - py\rho)} \right],$$

$\rho$  étant racine de l'équation (31) qui, dans le présent cas, est

$$2pa\rho^3 - 2py\rho + z^2 = 0.$$

On trouve aisément, si  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont les racines de cette équation,

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{y}{a}, \quad \rho_1 \rho_2 = \frac{z^2}{2pa}, \quad \rho_1^2 + \rho_2^2 = \frac{1}{a} \left( \frac{y^3}{a} - \frac{z^2}{p} \right), \quad \rho_1^3 + \rho_2^3 = \frac{y}{a^2} \left( \frac{y^2}{a} - \frac{3z^2}{2p} \right).$$

Si l'on porte  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , à la place de  $\rho$ , dans le second membre de (41) et si l'on fait la somme, on a, après de nombreuses réductions,

$$4p^2 \left[ \frac{4py^4}{z^7} + \frac{2(p-2a)y^2}{z^5} - \frac{a}{z^3} \right].$$

Ainsi

$$V_x = 8\pi p^2 \int_{\sigma} \int_{\sigma} \left[ 4p \frac{y^4}{z^7} + 2(p-2a) \frac{y^2}{z^5} - \frac{a}{z^3} \right] (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma,$$

ce que l'on peut écrire, d'après (3),

$$V_x = 4\pi p^2 \int_{\Sigma} \left[ \frac{4p}{3} \frac{y^4}{z^6} + (p-2a) \frac{y^2}{z^4} - \frac{a}{z^2} + \Omega(x, y) \right] (x dy - y dx).$$

Le cône  $O\Sigma$  transperce le cylindre parabolique en y déterminant deux contours qui, tournant autour de  $Ox$ , donnent des volumes de révolution dont la somme est le  $V_x$  qui vient d'être obtenu.

Ceci ne suppose rien sur la position du contour fermé  $\Sigma$  qui, pour la formule d'avant, porte la cloison  $\sigma$ , également indéterminée par ailleurs.

Par suite, d'après le raisonnement fait maintes fois, si l'on imagine que le contour  $\Sigma$  est tracé sur la surface

$$(42) \quad 4\pi p^2 \left[ \frac{4p}{3} \frac{y^4}{z^6} + (p-2a) \frac{y^2}{z^4} - \frac{a}{z^2} + \Omega(x, y) \right] = \frac{h}{2},$$

le volume  $V_x$  est égal au volume d'un cylindre droit, de hauteur  $h$ , ayant pour base la projection de  $\Sigma$  sur le plan  $Oxy$ .

Comme toujours  $\Omega(x, y)$  est une fonction homogène, d'ordre  $-2$ , quelconque. Elle peut être nulle et, dans ce cas, la surface (42) est un cylindre ayant même direction de génératrices que le cylindre parabolique donné. La section droite est une courbe du sixième degré dont l'étude serait facile.

[38] *Étude de  $V - V_0$ . Surfaces  $f_m = 1$ . Ellipsoïde.* — Reprenons maintenant l'étude de la différence (35) et supposons, ce qui est particulièrement important, qu'il s'agisse de surfaces  $f = 1$ , où  $f$  est homogène d'ordre  $m$ . Alors  $F = f - 1$  et la formule (35) devient

$$V - V_0 = \frac{2\pi}{m} \int \int_{\sigma} \frac{1}{\varphi^3 f} (a'f_x + b'f_y + c'f_z) (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

Si l'on remplace  $X, Y, Z$  par leurs valeurs (30), on a

$$V - V_0 = \frac{2\pi}{m} \int \int_{\sigma} \frac{1}{\varphi^3 f} (a'f_x + b'f_y + c'f_z) (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma.$$

Tenant compte de  $\varphi^m = f$  et appliquant la formule (3), on a

$$(43) \quad V - V_0 = -\pi \int_{\Sigma} f^{-\frac{2}{m}} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}.$$

Si le contour  $\Sigma$  est tracé sur la surface  $f = 1$  elle-même, cette formule n'est autre chose que le résultat général bien connu

$$V - V_0 = 2\pi(a'A_1 + b'A_2 + c'A_3)$$

où  $A_1, A_2, A_3$  définissent le vecteur aréolaire de  $\Sigma$ .

Si l'on reprend, par exemple, le cas de l'ellipsoïde (37), on voit que, par différentes méthodes, on arrivera toujours et avec une simplicité semblant assez inattendue, à évaluer le volume engendré par un contour pris de manière quelconque sur cet ellipsoïde et tournant autour d'une droite quelconque de l'espace. Par le théorème du paragraphe 36, on évaluera d'abord les volumes tournants engendrés par rotation autour des axes principaux; on passera de là au cas de l'axe de direction quelconque passant par le centre, puis au cas de l'axe parallèle tout à fait quelconque.

M. G. Kœnigs, dans son Mémoire fondamental souvent cité, a donné un théorème particulièrement important pour le contour *plan* tournant autour d'un axe *quelconque*; on voit qu'il y avait quelque chose d'analogue à faire pour le contour tracé sur une quadrique.

[39] *Sphère.* — La formule (43) donne un résultat particulièrement remarquable dans le cas de la sphère

$$f = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^2} = 1.$$

Alors  $V_0$  est algébriquement nul, puisque c'est le volume engendré par un contour sphérique tournant autour d'un diamètre, et, par suite, (43) devient

$$V = \pi R^2 \int_{\Sigma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ a' & b' & c' \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Le contour  $\Sigma$  n'est point tracé ici sur la sphère considérée; c'est la directrice tout à fait quelconque d'un cône  $O\Sigma$ . L'intégrale curviligne est la même que celle qui donne la différence des aires  $\sigma_2$  et  $\sigma_1$ , déterminées par un tel cône sur une sphère de centre  $D(a', b', c')$  et de rayon  $R$ . Elle a été formée par M. G. Humbert et réintroduite dans mon précédent Mémoire (n° 12). D'une manière précise, on a

$$2V = \pi R(\sigma_2 - \sigma_1).$$

Si  $\Delta$  est l'axe de rotation et  $\delta$  la distance de  $O$  à cet axe, on calcule très élémentairement que  $OD$  est perpendiculaire au plan  $\delta\Delta$  et égal à  $\delta$ . Bref on a ce théorème :

*Soit une sphère  $S$ , de centre  $O$ , de rayon  $R$ , portant une cloison  $\sigma_0$  de contour  $\Sigma_0$ . Soit un axe quelconque  $\Delta$ , à une distance  $\delta$  de  $O$ , et  $V$  le volume engendré par  $\sigma_0$  tournant autour de  $\Delta$ . Si l'on prend  $OD = \delta$ , normal au plan  $\delta\Delta$ , et si, sur une sphère de centre  $D$  égale à  $S$ , le cône  $O\Sigma_0$  découpe deux cloisons, d'aires  $\sigma_2$  et  $\sigma_1$ , on a*

$$2V = \pi R(\sigma_2 - \sigma_1).$$

On peut donner une vérification élémentaire de cet énoncé. Supposons que l'angle droit  $DOP$  vienne coïncider avec  $\gamma O\alpha$  et prenons pour  $O\Sigma$  un cône de révolution, d'axe  $Oy$ , et de demi-angle au sommet  $\alpha$ . Un calcul élémentaire de zones sphériques donne

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 4\pi R\delta \sin^2 \alpha.$$

Quant à la cloison  $\sigma_0$ , on peut la remplacer par une cloison circulaire plane, de même contour, ayant pour rayon  $R \sin \alpha$ . Cette cloison, tournant autour de  $\Delta$ , engendre le même volume que si  $\Delta$ , parallèle au plan de la cloison, était projeté sur ce plan. Ce volume est donc

$$V = 2\pi^2 \delta R^2 \sin^2 \alpha$$

et le théorème est vérifié.

[40] *Remarque.* — Il ne faut point perdre de vue qu'un contour en mouvement engendre un volume qu'on peut exprimer par une intégrale double étendue à une cloison jetée sur ce contour, mais que ce volume est indépendant du choix de cette cloison. C'est la remarque fondamentale de M. G. Kœnigs. Remplacer le premier contour par un autre situé sur un même cône de sommet  $O$  et, sur cet autre, tendre

une cloison qui est encore arbitraire, c'est disposer d'un degré d'arbitraire plus grand que celui dont on disposait dans l'étude des aires gauches ou des volumes coniques. Il va de soi que cette généralité ne sera pas toujours nécessaire; c'est ainsi qu'on a pu trouver d'élégants théorèmes pour volumes tournants engendrés par contours ellipsoïdaux en définissant ces contours par tracé effectué directement sur l'ellipsoïde. On se rappelle que ce n'était pas du tout le cas des aires ellipsoïdales.

---

## TROISIÈME PARTIE

### Sur certaines extensions du problème de Bäcklund.

[41] Je désire ajouter ici quelques compléments particulièrement symétriques à des points qui peuvent concerner les équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque et à un nombre quelconque de variables; ces points ont déjà été amorcés dans mes Mémoires précédents, notamment dans la Troisième partie du Second.

Reprenons d'abord les équations de Monge-Ampère. On peut définir de telles équations en donnant les relations différentielles

$$(1) \quad \begin{cases} Idx + Jdy + Ldz + Mdp + Ndq = 0, \\ Pdx + Qdy + Rdz + Sdp + Tdq = 0, \end{cases}$$

qui définissent les caractéristiques d'un système. C'est chercher des surfaces sur lesquelles on aurait partout les égalités (1) et, naturellement, les relations identiques

$$(2) \quad \begin{cases} sdx + tdy & -dq = 0, \\ rdx + sdy & -dp = 0, \\ pdx + qdy - dz & = 0. \end{cases}$$

Ces cinq équations ne peuvent justement avoir lieu à la fois que sur les surfaces intégrales de l'équation de Monge-Ampère.

$$(3) \quad \begin{vmatrix} s & t & 0 & 0 & -1 \\ r & s & 0 & -1 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 \\ I & J & L & M & N \\ P & Q & R & S & T \end{vmatrix} = 0.$$

On reconnaît immédiatement ici le procédé de construction d'une telle équation tel qu'il résulte de la théorie de S. Lie (E. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, p. 51). M. Goursat présente les choses avec des formules (1) plus simples, mais ce qui importe, pour pouvoir aborder les extensions qui vont suivre, ce n'est pas la plus ou moins grande simplicité de telle ou telle formule développée, c'est la symétrie sans laquelle les moindres généralisations prennent un aspect inextricable.

[42] Je propose maintenant de *définir* une classe d'équations de Monge-Ampère en remplaçant, dans (3), l'avant-dernière ligne du déterminant par la ligne d'opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \quad \frac{\partial}{\partial p} \quad \frac{\partial}{\partial q}.$$

On a ainsi les équations du type

$$(4) \quad \Delta = \begin{vmatrix} s & t & 0 & 0 & -1 \\ r & s & 0 & -1 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \\ P & Q & R & S & T \end{vmatrix} = 0.$$

Naturellement une telle définition peut paraître tout à fait artificielle et même absolument sans objet si l'on ne peut indiquer immédiatement une remarquable propriété des équations (4).

Or la formule de Stokes généralisée, déjà longuement étudiée dans mes précédents Mémoires, où elle a été désignée par (D),

$$(5) \quad \int \int_{\Gamma} \Delta dx dy = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz + S dp + T dq,$$

montre que, sur les surfaces intégrales de (4), le second membre de (5) sera nul pour tout contour fermé  $\gamma$  tracé sur ces surfaces  $\Gamma$ .

Comme je l'ai encore remarqué, et de par le Mémoire antérieur et capital de M. E. Goursat *Sur quelques transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1902), la définition proposée vient donc coïncider exactement avec celle des équations de Monge-Ampère issues du « problème de Bäcklund » tel qu'il est réexposé, sous forme particulièrement féconde, par M. Goursat.

En résumé, pour les équations de Monge-Ampère, on passe du problème de Lie au problème de Bäcklund en remplaçant, dans (3), l'avant-dernière ligne du déterminant par la ligne symbolique

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \quad \frac{\partial}{\partial p} \quad \frac{\partial}{\partial q}.$$

C'est ce mode de passage qui peut se conserver pour des équations aux dérivées partielles d'un ordre quelconque et à un nombre quelconque de variables.

Les extensions de la formule de Stokes sont les instruments naturellement indiqués pour la démonstration d'une telle assertion. Il ne faudrait cependant point

exagérer et n'y voir que cela. Ainsi la formule (5) joue un rôle très important dans l'étude des équations de Monge-Ampère, mais elle peut servir à d'autres fins; elle intervient par exemple dans l'étude de la courbure des surfaces, ce que j'ai montré dans la Seconde partie de mon Second Mémoire.

Il reste bien entendu aussi que les extensions de la formule de Stokes peuvent se présenter avec des notations diverses et que l'emploi des déterminants symboliques ne s'impose point nécessairement. Mais dans des questions telles que la précédente, ces déterminants semblent jouer un rôle particulièrement immédiat et symétrique; la Géométrie vectorielle générale, la Mécanique, la Physique profitent, de plus en plus fréquemment, de symétries et d'analogies de ce genre dont la plus simple consiste à tirer des moments de la matrice

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ X & Y & Z \end{array}$$

et des tourbillons de celle qui s'en déduit en remplaçant la première ligne par

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z}.$$

Ici je ne fais rien d'autre, en somme, que d'étudier de telles symétries dans la théorie des équations de Monge-Ampère à un nombre quelconque de variables.

[43] *Équations du troisième ordre à deux variables.* — Pour faire ici un exposé homogène, je rappelle brièvement ce cas déjà indiqué, sous une forme un peu différente, au paragraphe 47 du Second Mémoire.

Sur une surface quelconque  $z = z(x, y)$ , en prenant les dérivées partielles de  $z$  jusqu'au troisième ordre, on a évidemment

$$\begin{array}{llll} t_x dx + t_y dy & & - dt & = 0, \\ s_x dx + s_y dy & & - ds & = 0, \\ r_x dx + r_y dy & & - dr & = 0, \\ s dx + t dy & & - dq & = 0, \\ r dx + s dy & & - dp & = 0, \\ p dx + q dy - dz & & & = 0. \end{array}$$

Soit maintenant à déterminer des surfaces sur lesquelles on ait, à la fois,

$$\begin{array}{l} P_0 dx + Q_0 dy + R_0 dz + S_0 dp + T_0 dq + U_0 dr + V_0 ds + W_0 dt = 0, \\ P dx + Q dy + R dz + S dp + T dq + U dr + V ds + W dt = 0, \end{array}$$

les seize coefficients des différentielles représentant des fonctions données quel-

conques de  $x, y, z, p, q, r, s, t$ . Ces surfaces ne peuvent évidemment être que les surfaces intégrales de l'équation du troisième ordre

$$(6) \quad \begin{vmatrix} t_x & t_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ s_x & s_y & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ r_x & r_y & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ s & t & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ r & s & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_0 & Q_0 & R_0 & S_0 & T_0 & U_0 & V_0 & W_0 \\ P & Q & R & S & T & U & V & W \end{vmatrix} = 0.$$

Considérons le déterminant  $\Delta'$ , déduit du premier membre de cette égalité, en y remplaçant l'avant-dernière ligne par la ligne d'opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \quad \frac{\partial}{\partial p} \quad \frac{\partial}{\partial q} \quad \frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{\partial}{\partial s} \quad \frac{\partial}{\partial t}.$$

L'équation  $\Delta' = 0$  sera, par rapport au type (6), exactement comparable à l'équation (4) par rapport au type (3). Ceci, en vertu de la formule de Stokes généralisée (D')

$$- \int \int_{\Gamma} \Delta' dx dy = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz + S dp + T dq + U dr + V ds + W dt$$

écrite au paragraphe 45 du Second Mémoire.

Sur les surfaces intégrales de  $\Delta' = 0$ , le second membre de la formule est évidemment nul, quel que soit le contour  $\gamma$  y tracé. En d'autres termes, l'expression

$$P dx + Q dy + R dz + S dp + T dq + U dr + V ds + W dt$$

est une différentielle exacte sur ces surfaces.

Les équations  $\Delta' = 0$  sont plus particulières que (6); elles sont encore liées au type (6) par une règle symbolique d'une remarquable simplicité.

[44] *Équations du second ordre à trois variables.* — Nous pénétrons ici dans un cas nouveau plus complexe que le précédent. Pour le traiter d'une manière analogue, il faut avoir recours à une extension de la formule de Stokes qui figure en puissance dans les modes d'extension étudiés dans mes précédents travaux, mais qu'il faut d'abord établir de manière plus explicite.

Dans l'espace à quatre dimensions  $(x, y, z, u)$ , soit la variété à trois dimensions

$$(7) \quad u = f(x, y, z).$$



Je pose

$$(8) \quad p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial u}{\partial z}$$

et je désigne les dérivées du second ordre de  $u$  par  $p_x, p_y, p_z, q_x, \dots$ , notations qui sont suffisamment claires par elles-mêmes.

Les formules

$$X = X(x, y, z, u, p, q, r), \quad Y = Y(x, y, z, u, p, q, r), \quad Z = Z(x, y, z, u, p, q, r),$$

où  $u, p, q, r$  sont exprimés en  $x, y, z$ , permettent de passer de la variété (7) à l'espace ordinaire à trois dimensions  $(X, Y, Z)$ . Dans ce dernier espace, considérons l'identité

$$(9) \quad \int \int \int_V dX dY dZ = \int \int_S X dY dZ,$$

relative à une surface fermée  $S$  enfermant un volume  $V$ , et voyons ce qu'elle devient sur la variété (7). Dans l'intégrale triple, il faut écrire le produit de  $dx dy dz$  et du déterminant

$$\begin{vmatrix} X_x + X_u p + X_p p_x + X_q q_x + X_r r_x & X_y + X_u q + X_p p_y + X_q q_y + X_r r_y & X_z + X_u r + X_p p_z + X_q q_z + X_r r_z \\ Y_x + Y_u p + Y_p p_x + Y_q q_x + Y_r r_x & Y_y + Y_u q + Y_p p_y + Y_q q_y + Y_r r_y & Y_z + Y_u r + Y_p p_z + Y_q q_z + Y_r r_z \\ Z_x + Z_u p + Z_p p_x + Z_q q_x + Z_r r_x & Z_y + Z_u q + Z_p p_y + Z_q q_y + Z_r r_y & Z_z + Z_u r + Z_p p_z + Z_q q_z + Z_r r_z \end{vmatrix},$$

lequel peut aussi bien s'écrire

$$(10) \quad \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z & 0 & 0 & 0 & -1 \\ q_x & q_y & q_z & 0 & 0 & -1 & 0 \\ p_x & p_y & p_z & 0 & -1 & 0 & 0 \\ p & q & r & -1 & 0 & 0 & 0 \\ X_x & X_y & X_z & X_u & X_p & X_q & X_r \\ Y_x & Y_y & Y_z & Y_u & Y_p & Y_q & Y_r \\ Z_x & Z_y & Z_z & Z_u & Z_p & Z_q & Z_r \end{vmatrix}.$$

Les trois dernières lignes peuvent être remplacées par

$$(11) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} & \frac{\partial}{\partial r} \\ XY_x & XY_y & XY_z & XY_u & XY_p & XY_q & XY_r \\ Z_x & Z_y & Z_z & Z_u & Z_p & Z_q & Z_r \end{vmatrix}.$$

[45] Transformons maintenant l'intégrale double de (9). La variété à deux dimensions qui va correspondre à  $S$  se déduira de (7) parce que  $z$ , par exemple, de-

viendra une fonction de  $x$  et  $y$ , soit  $z = \varphi(x, y)$ . Il en sera de même pour  $p, q, r$ , exprimés en (8); ce sont là fonctions de  $x, y, z$  qu'il faudra continuer à définir par les formules (8), mais en y faisant immédiatement  $z = \varphi(x, y)$ . Ces précisions sont indispensables pour éviter des confusions. Alors l'intégrale double en litige se transforme en une autre qui contient  $dx dy$  multiplié par

$$X \begin{vmatrix} Y_x + Y_z z_x + Y_u u_x + Y_p p_x + Y_q q_x + Y_r r_x & Y_y + Y_z z_y + Y_u u_y + Y_p p_y + Y_q q_y + Y_r r_y \\ Z_x + Z_z z_x + Z_u u_x + Z_p p_x + Z_q q_x + Z_r r_x & Z_y + Z_z z_y + Z_u u_y + Z_p p_y + Z_q q_y + Z_r r_y \end{vmatrix}$$

Ce facteur peut aussi bien s'écrire

$$(12) \quad -X \begin{vmatrix} r_x & r_y & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ q_x & q_y & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ p_x & p_y & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ u_x & u_y & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ z_x & z_y & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_x & Y_y & Y_z & Y_u & Y_p & Y_q & Y_r \\ Z_x & Z_y & Z_z & Z_u & Z_p & Z_q & Z_r \end{vmatrix}.$$

Si l'on tient compte du coefficient  $X$  en l'affectant à tous les termes de l'avant-dernière ligne de ce déterminant, on a alors deux déterminants, (10) et (12), qui sont terminés, au bas, par les deux mêmes lignes, ceci d'après la forme donnée, en (11), aux trois dernières lignes de (10). Et ces deux dernières lignes communes peuvent s'écrire

$$(13) \quad \begin{vmatrix} UY_x & UY_y & UY_z & UY_u & UY_p & UY_q & UY_r \\ VZ_x & VZ_y & VZ_z & VZ_u & VZ_p & VZ_q & VZ_r \end{vmatrix},$$

si  $U$  et  $V$  désignent deux nouvelles fonctions, tout à fait quelconques, de  $x, y, z, u, p, q, r$ . Introduire ces deux nouvelles fonctions revient, en effet, à poser

$$X = UV.$$

Partons maintenant de nos deux déterminants du septième ordre avec leurs deux dernières lignes sous la forme (13), ces deux déterminants étant introduits dans l'égalité (9). Récrivons cette égalité sept fois pour  $Y$  successivement réduit à  $x, y, z, u, p, q, r$  et en prenant chaque fois pour  $U$  une fonction différente. L'addition des sept formules ainsi obtenues donne une formule où les déterminants ont pour avant-dernière ligne

$$U_1 U_2 U_3 U_4 U_5 U_6 U_7.$$

De la même manière on peut remplacer les dernières lignes par

$$V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4 \ V_5 \ V_6 \ V_7$$

et l'on a finalement la formule, dont le numéro (14) est sous-entendu en marge,

$$\iiint_V \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z & 0 & 0 & 0 & -1 \\ q_x & q_y & q_z & 0 & 0 & -1 & 0 \\ p_x & p_y & p_z & 0 & -1 & 0 & 0 \\ p & q & r & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} & \frac{\partial}{\partial r} \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 \end{vmatrix} d\tau = \iint_S \begin{vmatrix} r_x & r_y & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ q_x & q_y & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ p_x & p_y & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ u_x & u_y & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ z_x & z_y & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 \end{vmatrix} dx dy$$

en laquelle on a posé  $d\tau = -dx dy dz$ .

Telle est l'extension de la formule de Stokes que je me proposais d'obtenir. Les variétés d'intégration V et S sont évidemment des transformées de celles de l'identité (9), mais il n'est pas utile de changer la notation, car, dans les deux formules, V est une étendue *quelconque* d'espace à trois dimensions incluse dans une surface fermée S à deux dimensions.

Dans la formule finalement obtenue, la variété à trois dimensions V est déformable, dans l'espace à quatre, sans jamais cesser d'avoir la frontière fixe et fermée S et, de plus, V, malgré ses déformations, a toujours, en un même point quelconque de S, mêmes valeurs non seulement pour  $z$  et  $u$ , mais aussi pour leurs dérivées partielles qui, sous l'intégrale double, n'ont pas la même signification que sous l'intégrale triple, conformément à la remarque déjà faite au début du paragraphe.

Bref, nous avons là une formule complètement comparable à (D) où  $\Gamma$ , cloison à deux dimensions, se déformait dans l'espace à trois sans cesser d'avoir pour frontière un contour  $\gamma$ , à une dimension, et alors que toutes les cloisons  $\Gamma$  étaient toujours tangentes entre elles le long de  $\gamma$ .

La formule relative à V et S peut sembler d'une symétrie imparfaite, l'intégrale double ne contenant pas  $z$  comme elle contient  $x$  et  $y$ . Cela tient simplement à ce que nous avons attribué à S une équation  $z = \varphi(x, y)$  alors qu'on aurait pu prendre tout aussi bien  $x = \psi(y, z)$  ou  $y = \chi(z, x)$ . L'intégrale triple pourrait ainsi être égalée à trois intégrales doubles, d'où une triple égalité qui, dans son ensemble, serait parfaitement symétrique.

[46] Revenons maintenant à notre objet relatif aux équations du second ordre à trois variables.

Sur la variété  $u=f(x, y, z)$ , en utilisant toujours les notations indiquées au début du paragraphe 44, on a

$$\begin{aligned} r_x dx + r_y dy + r_z dz & - dr = 0, \\ q_x dx + q_y dy + q_z dz & - dq = 0, \\ p_x dx + p_y dy + p_z dz & - dp = 0, \\ p dx + q dy + r dz - du & = 0. \end{aligned}$$

Soit maintenant à déterminer des variétés sur lesquelles on ait, à la fois,

$$\begin{aligned} T_1 dx + T_2 dy + T_3 dz + T_4 du + T_5 dp + T_6 dq + T_7 dr & = 0, \\ U_1 dx + U_2 dy + U_3 dz + U_4 du + U_5 dp + U_6 dq + U_7 dr & = 0, \\ V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz + V_4 du + V_5 dp + V_6 dq + V_7 dr & = 0, \end{aligned}$$

les vingt et un coefficients des différentielles représentant des fonctions données quelconques de  $x, y, z, u, p, q, r$ . Ces variétés ne peuvent évidemment être que les variétés intégrales de l'équation du second ordre

$$(15) \quad \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z & 0 & 0 & 0 & -1 \\ q_x & q_y & q_z & 0 & 0 & -1 & 0 \\ p_x & p_y & p_z & 0 & -1 & 0 & 0 \\ p & q & r & -1 & 0 & 0 & 0 \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & T_7 \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 \end{vmatrix} = 0.$$

Soit  $\Delta_1$  le déterminant déduit du premier membre de cette égalité en y remplaçant la cinquième ligne par

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \quad \frac{\partial}{\partial u} \quad \frac{\partial}{\partial p} \quad \frac{\partial}{\partial q} \quad \frac{\partial}{\partial r}.$$

L'équation  $\Delta_1 = 0$ , d'après la formule (14), est une équation (15) particularisée de telle sorte que, sur les variétés intégrales, on ait

$$(16) \quad \iint_S \begin{vmatrix} r_x & r_y & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ q_x & q_y & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ p_x & p_y & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ u_x & u_y & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ z_x & z_y & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 \end{vmatrix} dx dy = 0.$$

D'une manière plus précise, on doit se représenter les variétés intégrales comme des espaces à trois dimensions (dans l'espace à quatre) dans lesquelles on peut tracer des surfaces fermées  $S$  à deux dimensions. Pour toutes ces surfaces  $S$ , on aura (16) de même qu'on a des intégrales de contours fermés à une dimension qui sont nulles quand elles portent sur des différentielles exactes.

On sait que ce sont les travaux dus à Henri Poincaré, à M. Émile Picard, et concernant d'abord les fonctions analytiques de deux variables qui ont mis en évidence ces théorèmes de nullité identique concernant des intégrales multiples portant sur des généralisations de « différentielles exactes ». Il importe de citer également M. V. Volterra et particulièrement ses admirables *Leçons* (de Stockholm), ce que j'ai déjà fait aux paragraphes 12 et 30 de mon Premier Mémoire publié sous le même titre que celui-ci.

La notion générale de « différentielle exacte », telle que je viens de l'invoquer, est préparée autrement par la notion et par la notation élémentaires. Ainsi, sur les surfaces intégrales des équations de Monge-Ampère issues du problème de Bäcklund, l'expression

$$Pdx + Qdy + Rdz + Sdp + Tdq$$

est une différentielle exacte; l'analogie parfaite avec le cas général se manifesterait mieux si cette expression était écrite (\*)

$$- \begin{vmatrix} q_x & 0 & 0 & 0 & -1 \\ p_x & 0 & 0 & -1 & 0 \\ z_x & 0 & -1 & 0 & 0 \\ y_x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ P & Q & R & S & T \end{vmatrix} dx,$$

ce que l'on ne fera point, bien entendu, dans une étude des équations à deux variables. C'est cependant cet usage de déterminants qui, dans le cas général, paraît avoir une symétrie remarquable.

[47] *Retour sur la formule (M) du Second Mémoire.* — On pourrait dire de la formule de Stokes généralisée (14) ce que j'ai dit plus haut pour (5). Elle a une importance propre indépendante du rôle, immédiat il est vrai, qu'elle peut jouer dans la théorie des équations de Monge-Ampère généralisées.

---

(\*) Dans la première colonne de ce déterminant,  $y_x, \dots, q_x$  sont des dérivées ordinaires et non des dérivées partielles, car, le long du contour  $\gamma$ , les quantités  $y, z, p, q$  ne dépendent plus que de  $x$ . C'est ainsi que, dans le déterminant de la formule (16), les quantités  $z_x, z_y, \dots, r_x, r_y$  sont des dérivées partielles à deux variables et non à trois, conformément à la remarque faite au début du paragraphe 45.

D'ailleurs ce n'est pas une absolue nouveauté. Supposons que les quatorze fonctions  $U, V$ , figurant dans (14), viennent à ne dépendre que de  $x, y, z, u$  et que  $U_5, U_6, U_7, V_5, V_6, V_7$  soient identiquement réduites à zéro. Alors cette formule (14) se réduit à

$$\iiint_V \begin{vmatrix} p & q & r & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial u} \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{vmatrix} dx dy dz = - \iint_S \begin{vmatrix} u_x & u_y & 0 & -1 \\ z_x & z_y & -1 & 0 \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{vmatrix} dx dy.$$

La variété  $V$  est toujours déformable, dans l'espace à quatre dimensions, en admettant la frontière fermée invariable  $S$ , mais il n'y a plus aucune condition de contact le long de celle-ci. Nous venons ainsi de retrouver la formule (M) du Second Mémoire, laquelle contenait, comme cas particulier, le théorème de Poynting.

[48] *Remarques bibliographiques.* — Il est à peine besoin de dire que ce qui vient d'être exposé laisse en suspens une foule de questions quant à des rapprochements possibles avec de nombreux domaines connexes. Les équations (15), contenant ou non la ligne d'opérateurs sous-indiquée, sont évidemment de ces équations aux dérivées partielles qui contiennent linéairement un déterminant fonctionnel et ses mineurs, équations étudiées par M. E. Goursat dans un Mémoire *Sur les équations du second ordre à  $n$  variables analogues à l'équation de Monge-Ampère* (Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXVII, 1899).

L'importante question des intégrales intermédiaires est immédiatement résolue pour les équations de Monge-Ampère (4) tirées du problème de Bäcklund. Il y a intégrale intermédiaire pour (4) quand la dernière ligne du déterminant prend la forme

$$uv_x \quad uv_y \quad uv_z \quad uv_p \quad uv_q,$$

comme je l'ai déjà indiqué dans le premier Mémoire publié sous le même titre que celui-ci.

L'extension est immédiate pour les équations du troisième ordre (6) avec septième ligne symbolisée. Il n'en va point aussi simplement pour les équations (15), car, après la ligne symbolique qu'on y peut introduire, il reste deux lignes dont on peut diminuer la généralité de diverses manières.

Parmi beaucoup d'autres problèmes, on pourrait aussi tenter d'étendre au cas de trois variables les résultats obtenus par M. Goursat dans son Mémoire de 1902 déjà invoqué ici au paragraphe 42. L'idée essentielle était la réduction pfaffienne de formes différentielles du premier ordre en  $x, y, z, p, q$ . Ici le même problème se poserait pour des formes du second ordre telles que celle située dans l'intégrale-

double de l'équation (16); il est beaucoup plus difficile encore, mais non sans précédents permettant d'espérer de nouveaux développements. Les extensions de la formule de Stokes que j'ai étudiées ne livrent, en somme, que des catégories d'invariants intégraux sous des formes particulièrement symétriques.

Or M. Goursat a déjà publié, dans le *Journal de Mathématiques* (1908 et 1915), des travaux non encore terminés, comme le montre une Note récente aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (28 février 1916), travaux où sont associés les invariants intégraux et la réduction pfaffienne de formes différentielles d'ordre quelconque. C'est vraisemblablement de ce côté qu'il faut chercher appui pour prolonger tout ce qui précède.

