SUR LES SYSTÈMES PARTIELS LINÉAIRES

COMPOSÉS D'ÉQUATIONS EN NOMBRE ÉGAL A CELUI DE LEURS FONCTIONS INCONNUES

PAR CHARLES RIQUIER

Professeur à l'Université de Caen.

Si l'on considère un système d'équations aux dérivées partielles, composé d'équations en nombre égal à celui des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et présentant la forme linéaire par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées, on sait qu'il n'est pas toujours possible de le ramener, par le changement des variables indépendantes, à la forme kowaleskienne : ce fait, que l'on s'est borné jusqu'ici à constater à l'aide d'exemples, dépend, comme nous l'établissons, d'une condition simple, où intervient une certaine forme algébrique dont nous étudions les propriétés. Tel est l'objet de la première Partie du présent travail.

Dans la deuxième Partie, nous supposons essentiellement qu'il n'y ait que deux variables indépendantes, x, y, et nous faisons, de plus, les hypothèses suivantes :

Dans le système proposé, comprenant, pour fixer les idées, trois équations, impliquant trois fonctions inconnues, u, v, w, de x, y, et présentant par rapport à ces inconnues les ordres respectifs m, n, p, ne figurent, outre les termes indépendants de u, v, w et de leurs dérivées, que les dérivées d'ordre m de u, les dérivées d'ordre n de v et les dérivées d'ordre p de w, à l'exclusion des dérivées d'ordres respectivement inférieurs et des fonctions inconnues elles-mêmes; les dérivées de u, v, w d'ordres respectifs m, n, p y ont d'ailleurs pour coefficients des constantes données quelconques, telles cependant que, par un changement (linéaire) des variables indépendantes, le système soit réductible à la forme kowaleskienne.

Cela étant, l'intégration du système proposé se ramène, comme nous le faisons voir, à des quadratures.

Ces résultats ont été formulés dans une Note communiquée à l'Académie des Sciences le 19 avril 1915, et le lecteur en trouvera ci-après l'exposé complet.

PREMIÈRE PARTIE

Système partiel linéaire à un nombre quelconque de variables indépendantes et composé d'équations en nombre égal à celui des fonctions inconnues. — Déterminant caractéristique; ses propriétés. — Condition pour que le système soit réductible à la forme kowaleskienne.

[**1**] Considérons un système d'équations aux dérivées partielles, composé d'équations en nombre *égal* à celui des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et présentant la forme *linéaire* par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées : pour fixer les idées, nous supposerons qu'il comprenne trois équations, et qu'il implique trois fonctions inconnues, u, v, w, de variables indépendantes, $x, y, \ldots$, en nombre quelconque, les coefficients de ces inconnues et de leurs dérivées, ainsi que les termes indépendants, étant des fonctions données de $x, y, \ldots$. Désignant alors par m, n, p les ordres respectifs du système par rapport à u, v, w, nous mettrons en évidence, dans chaque équation, trois groupes de termes comprenant respectivement les dérivées d'ordre m de u, les dérivées d'ordre n de v, les dérivées d'ordre p de w; notre système se trouvera ainsi représenté à l'aide des formules

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\alpha+\beta+\ldots=m} U^{(i)}_{\alpha,\beta,\ldots}\frac{\partial^m u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \ldots} + \sum_{\alpha'+\beta'+\ldots=n} V^{(i)}_{\alpha',\beta',\ldots}\frac{\partial^n v}{\partial x^{\alpha'} \partial y^{\beta'} \ldots} \\ &+ \sum_{\alpha''+\beta''+\ldots=p} W^{(i)}_{\alpha'',\beta'',\ldots}\frac{\partial^p w}{\partial x^{\alpha''} \partial y^{\beta''} \ldots} + \ldots = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \end{aligned}\right.$$

où les lettres U, V, W, affectées d'indices, désignent, d'après ce qui a été dit plus haut, des fonctions données de $x, y, \ldots$. Nous en déduirons, à l'aide d'un mécanisme évident, le déterminant

$$(2)\quad \begin{vmatrix} \sum\limits_{\alpha+\beta+\ldots=m} U^{(1)}_{\alpha,\beta,\ldots} X^\alpha Y^\beta \ldots & \sum\limits_{\alpha'+\beta'+\ldots=n} V^{(1)}_{\alpha',\beta',\ldots} X^{\alpha'} Y^{\beta'} \ldots & \sum\limits_{\alpha''+\beta''+\ldots=p} W^{(1)}_{\alpha'',\beta'',\ldots} X^{\alpha''} Y^{\beta''} \ldots \\ \sum\limits_{\alpha+\beta+\ldots=m} U^{(2)}_{\alpha,\beta,\ldots} X^\alpha Y^\beta \ldots & \sum\limits_{\alpha'+\beta'+\ldots=n} V^{(2)}_{\alpha',\beta',\ldots} X^{\alpha'} Y^{\beta'} \ldots & \sum\limits_{\alpha''+\beta''+\ldots=p} W^{(2)}_{\alpha'',\beta'',\ldots} X^{\alpha''} Y^{\beta''} \ldots \\ \sum\limits_{\alpha+\beta+\ldots=m} U^{(3)}_{\alpha,\beta,\ldots} X^\alpha Y^\beta \ldots & \sum\limits_{\alpha'+\beta'+\ldots=n} V^{(3)}_{\alpha',\beta',\ldots} X^{\alpha'} Y^{\beta'} \ldots & \sum\limits_{\alpha''+\beta''+\ldots=p} W^{(3)}_{\alpha'',\beta'',\ldots} X^{\alpha''} Y^{\beta''} \ldots \end{vmatrix},$$

qui se trouve ainsi défini au signe près, et que nous nommerons *déterminant caractéristique* du système (1); c'est une forme algébrique de degré $m+n+p$, aux indéterminées X, Y, ..., ayant pour coefficients des fonctions connues de $x, y, \ldots$. Cette expression possède d'intéressantes propriétés que nous allons exposer.

Dans tout le cours de cette étude, il sera constamment sous-entendu que *les variables $x, y, \ldots$ sont assujetties à ne pas excéder les limites d'olotropie communes aux divers coefficients du système* (1).

[**2**] *Des valeurs initiales déterminées, $x_0, y_0 \ldots$ ayant été choisies pour les variables indépendantes $x, y, \ldots$, pour que le système* (1) *soit résoluble, conformément à l'algorithme de Cramer, par rapport aux dérivées*

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}, \quad \frac{\partial^n v}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^p w}{\partial x^p}, \tag{3}$$

d'ordres respectivement maxima pour ses diverses fonctions inconnues et n'intéressant que la seule variable x, il faut et il suffit que, dans le déterminant caractéristique (2), *l'hypothèse numérique initiale,*

$$x, y, \ldots = x_0, y_0, \ldots, \tag{4}$$

n'annule pas le coefficient de X^{m+n+p}.

Effectivement, l'hypothèse numérique (4) ayant été introduite dans les coefficients du système (1), pour que ce dernier soit résoluble par rapport aux quantités (3), il faut et il suffit que, dans cette même hypothèse numérique, le déterminant

$$\begin{vmatrix} U^{(1)}_{m,0,\ldots} & V^{(1)}_{n,0,\ldots} & W^{(1)}_{p,0,\ldots} \\ U^{(2)}_{m,0,\ldots} & V^{(2)}_{n,0,\ldots} & W^{(2)}_{p,0,\ldots} \\ U^{(3)}_{m,0,\ldots} & V^{(3)}_{n,0,\ldots} & W^{(3)}_{p,0,\ldots} \end{vmatrix} \tag{5}$$

soit différent de zéro.

D'autre part, le terme en X^{m+n+p} du déterminant caractéristique (2) s'obtient manifestement en y remplaçant par zéro les diverses indéterminées Y, ... sans toucher à X, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} U^{(1)}_{m,0,\ldots} X^m & V^{(1)}_{n,0,\ldots} X^n & W^{(1)}_{p,0,\ldots} X^p \\ U^{(2)}_{m,0,\ldots} X^m & V^{(2)}_{n,0,\ldots} X^n & W^{(2)}_{p,0,\ldots} X^p \\ U^{(3)}_{m,0,\ldots} X^m & V^{(3)}_{n,0,\ldots} X^n & W^{(3)}_{p,0,\ldots} X^p \end{vmatrix};$$

il a donc pour coefficient le déterminant (5).

Le simple rapprochement de ces deux points suffit à établir l'exactitude de notre énoncé.

[**3**] *Des valeurs initiales déterminées,* $x_0, y_0, \ldots,$ *ayant été choisies pour les variables indépendantes* $x, y, \ldots,$ *pour que le système* (1) *soit, par un changement des variables, réductible à la forme kowaleskienne, il faut et il suffit qu'en introduisant dans les fonctions* U, V, W *l'hypothèse numérique initiale* (4), *le déterminant caractéristique* (2) *ne devienne pas identiquement nul quels que soient* X, Y, ...

I. Considérons la transformation linéaire définie par les formules

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} s=a_1x+b_1y+\ldots, \\ t=a_2x+b_2y+\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

où $s, t, \ldots$ désignent des variables nouvelles substituées à $x, y, \ldots,$ et

$$\begin{array}{l} a_1, b_1, \ldots, \\ a_2, b_2, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

des constantes quelconques formant, comme de raison, un déterminant différent de zéro. Cela étant, *si l'on transforme à l'aide des formules* (6) *le système différentiel* (1), *le déterminant caractéristique du système transformé, forme algébrique aux indéterminées* S, T, ..., *se déduit du déterminant caractéristique de* (1) *en y effectuant, d'une part, sur les variables* $x, y, \ldots,$ *qui figurent dans les fonctions* U, V, W, *la transformation* (6), *et, d'autre part, sur les indéterminées* X, Y, ... *la transformation*

$$\begin{array}{l} X=a_1S+a_2T+\ldots, \\ Y=b_1S+b_2T+\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

On sait en effet qu'en désignant par f une fonction quelconque de $x, y, \ldots,$ et opérant sur elle la transformation (6), une dérivée ancienne de cette fonction s'exprime à l'aide des dérivées nouvelles du même ordre par la formule symbolique

$$(7)\qquad \frac{\partial^{h+k+\cdots} f}{\partial x^h\,\partial y^k\ldots}=\left(a_1\frac{\partial}{\partial s}+a_2\frac{\partial}{\partial t}+\ldots\right)^h\left(b_1\frac{\partial}{\partial s}+b_2\frac{\partial}{\partial t}+\ldots\right)^k\ldots f.$$

On en déduit immédiatement le point à démontrer.

II. *La proposition formulée au début du présent numéro* [3] *est exacte, si l'on considère exclusivement les changements linéaires des variables indépendantes.*

Soient

$$u^{(i)}_{\alpha,\beta,\dots},\quad v^{(i)}_{\alpha',\beta',\dots},\quad w^{(i)}_{\alpha'',\beta'',\dots}\qquad (i=1,2,3)$$

les valeurs numériques que prennent, par l'introduction de l'hypothèse initiale (4), les coefficients

$$U^{(i)}_{\alpha,\beta,\dots},\quad V^{(i)}_{\alpha',\beta',\dots},\quad W^{(i)}_{\alpha'',\beta'',\dots}$$

des termes mis en évidence dans l'écriture du système (1). Si l'on applique à ce dernier la transformation (6), où les lettres $a, b, \dots$, affectées d'indices, désignent des constantes provisoirement indéterminées, le déterminant caractéristique du système transformé aura, en vertu de I, sa ligne de rang i ($i=1, 2, 3$) formée des trois éléments

$$\sum_{\alpha+\beta+\dots=m} U^{(i)}_{\alpha,\beta,\dots}(a_1S+a_2T+\dots)^\alpha(b_1S+b_2T+\dots)^\beta\dots,$$

$$\sum_{\alpha'+\beta'+\dots=n} V^{(i)}_{\alpha',\beta',\dots}(a_1S+a_2T+\dots)^{\alpha'}(b_1S+b_2T+\dots)^{\beta'}\dots,$$

$$\sum_{\alpha''+\beta''+\dots=p} W^{(i)}_{\alpha'',\beta'',\dots}(a_1S+a_2T+\dots)^{\alpha''}(b_1S+b_2T+\dots)^{\beta''}\dots,$$

les U, V, W étant les mêmes que dans (1) et (2), à cela près que les anciennes variables $x, y, \dots$ y sont supposées remplacées par leurs valeurs en $s, t, \dots$ tirées des formules (6).

Cela étant, pour que le système transformé soit résoluble par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial^m u}{\partial s^m},\quad \frac{\partial^n v}{\partial s^n},\quad \frac{\partial^p w}{\partial s^p},$$

il faut et il suffit, en vertu du numéro précédent [2], que le coefficient du terme en S^{m+n+p} dans son déterminant caractéristique ait une valeur initiale différente de zéro, c'est-à-dire que l'on ait :

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} \sum\limits_{\alpha+\beta+\dots=m} u^{(1)}_{\alpha,\beta,\dots}a_1^\alpha b_1^\beta\dots & \sum\limits_{\alpha'+\beta'+\dots=n} v^{(1)}_{\alpha',\beta',\dots}a_1^{\alpha'} b_1^{\beta'}\dots & \sum\limits_{\alpha''+\beta''+\dots=p} w^{(1)}_{\alpha'',\beta'',\dots}a_1^{\alpha''} b_1^{\beta''}\dots \\ \sum\limits_{\alpha+\beta+\dots=m} u^{(2)}_{\alpha,\beta,\dots}a_1^\alpha b_1^\beta\dots & \sum\limits_{\alpha'+\beta'+\dots=n} v^{(2)}_{\alpha',\beta',\dots}a_1^{\alpha'} b_1^{\beta'}\dots & \sum\limits_{\alpha''+\beta''+\dots=p} w^{(2)}_{\alpha'',\beta'',\dots}a_1^{\alpha''} b_1^{\beta''}\dots \\ \sum\limits_{\alpha+\beta+\dots=m} u^{(3)}_{\alpha,\beta,\dots}a_1^\alpha b_1^\beta\dots & \sum\limits_{\alpha'+\beta'+\dots=n} v^{(3)}_{\alpha',\beta',\dots}a_1^{\alpha'} b_1^{\beta'}\dots & \sum\limits_{\alpha''+\beta''+\dots=p} w^{(3)}_{\alpha'',\beta'',\dots}a_1^{\alpha''} b_1^{\beta''}\dots \end{vmatrix} \neq 0.$$

Semblablement, pour que le système transformé soit résoluble par rapport aux trois dérivées

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}, \quad \frac{\partial^n v}{\partial t^n}, \quad \frac{\partial^p w}{\partial t^p},$$

il faut et il suffit que le coefficient du terme en T^{m+n+p} dans son déterminant caractéristique ait une valeur initiale différente de zéro, ce qui conduit à une inégalité ne différant de la précédente que par le changement de $a_1, b_1, \ldots$ en $a_2, b_2, \ldots$. Et ainsi de suite. Nous avons donc à examiner si, pour des valeurs convenablement choisies des constantes $a, b, \ldots$, on peut satisfaire à l'une au moins des inégalités ainsi formées, en même temps qu'à l'inégalité

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots \\ a_2 & b_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \neq 0.$$

Or, pour que la chose soit possible, il faut et il suffit, comme il est dit dans l'énoncé, que le déterminant

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} \sum\limits_{\alpha+\beta+\ldots=m} u^{(1)}_{\alpha,\beta,\ldots} X^\alpha Y^\beta \ldots & \sum\limits_{\alpha'+\beta'+\ldots=n} v^{(1)}_{\alpha',\beta',\ldots} X^{\alpha'} Y^{\beta'} \ldots & \sum\limits_{\alpha''+\beta''+\ldots=p} w^{(1)}_{\alpha'',\beta'',\ldots} X^{\alpha''} Y^{\beta''} \ldots \\ \sum\limits_{\alpha+\beta+\ldots=m} u^{(2)}_{\alpha,\beta,\ldots} X^\alpha Y^\beta \ldots & \sum\limits_{\alpha'+\beta'+\ldots=n} v^{(2)}_{\alpha',\beta',\ldots} X^{\alpha'} Y^{\beta'} \ldots & \sum\limits_{\alpha''+\beta''+\ldots=p} w^{(2)}_{\alpha'',\beta'',\ldots} X^{\alpha''} Y^{\beta''} \ldots \\ \sum\limits_{\alpha+\beta+\ldots=m} u^{(3)}_{\alpha,\beta,\ldots} X^\alpha Y^\beta \ldots & \sum\limits_{\alpha'+\beta'+\ldots=n} v^{(3)}_{\alpha',\beta',\ldots} X^{\alpha'} Y^{\beta'} \ldots & \sum\limits_{\alpha''+\beta''+\ldots=p} w^{(3)}_{\alpha'',\beta'',\ldots} X^{\alpha''} Y^{\beta''} \ldots \end{vmatrix}$$

ne soit pas identiquement nul quels que soient $X, Y, \ldots$.

La condition est nécessaire : car, si le déterminant (10) est identiquement nul, il s'annulera, de quelque manière qu'on choisisse les constantes $a, b, \ldots$, dans chacune des hypothèses numériques

$$\begin{aligned} X, Y, \ldots &= a_1, b_1, \ldots, \\ X, Y, \ldots &= a_2, b_2, \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

aucune des inégalités telles que (8) ne pourra donc en pareil cas être vérifiée.

La condition est suffisante. En effet, si le déterminant (10) n'est pas identiquement nul, il existe quelque système de valeurs de $X, Y, \ldots$ ne l'annulant pas, et ces valeurs ne peuvent évidemment être nulles à la fois : on pourra donc trouver, pour telle ligne qu'on voudra du déterminant de la transformation (6), par exemple pour la première, des éléments, $a_1, b_1, \ldots$, non nuls à la fois, qui vérifient l'inégalité (8), après quoi on pourra déterminer les éléments des lignes restantes de telle façon que l'inégalité (9) soit elle-même satisfaite [1].

III. *Notre proposition est vraie, indépendamment de la restriction formulée dans l'alinéa* II *sur la nature linéaire du changement des variables.*

Supposons en effet qu'au lieu de la transformation linéaire définie par les formules (6), on effectue le changement de variables quelconque

$$(11)\qquad \begin{cases} s=\pi_1(x, y, \ldots), \\ t=\pi_2(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

La formule (7) se trouve alors remplacée par

$$\frac{\partial^{h+k+\ldots} f}{\partial x^h\, \partial y^k \ldots}=\left(\frac{\partial \pi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\partial \pi_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}+\ldots\right)^h\left(\frac{\partial \pi_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\partial \pi_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}+\ldots\right)^k \ldots f+\ldots$$

(les termes non écrits ne contenant que des dérivées de f d'ordre inférieur à $h+k+\ldots$), et le déterminant caractéristique du système transformé aura sa ligne de rang i ($i=1, 2, 3$) formée des trois éléments

$$\sum_{\alpha+\beta+\ldots=m} \mathrm{U}^{(i)}_{\alpha,\beta,\ldots\ldots}\left(\frac{\partial \pi_1}{\partial x}\mathrm{S}+\frac{\partial \pi_2}{\partial x}\mathrm{T}+\ldots\right)^\alpha\left(\frac{\partial \pi_1}{\partial y}\mathrm{S}+\frac{\partial \pi_2}{\partial y}\mathrm{T}+\ldots\right)^\beta\ldots,$$

$$\sum_{\alpha'+\beta'+\ldots=n} \mathrm{V}^{(i)}_{\alpha',\beta',\ldots}\left(\frac{\partial \pi_1}{\partial x}\mathrm{S}+\frac{\partial \pi_2}{\partial x}\mathrm{T}+\ldots\right)^{\alpha'}\left(\frac{\partial \pi_1}{\partial y}\mathrm{S}+\frac{\partial \pi_2}{\partial y}\mathrm{T}+\ldots\right)^{\beta'}\ldots,$$

$$\sum_{\alpha''+\beta''+\ldots=p} \mathrm{W}^{(i)}_{\alpha'',\beta'',\ldots}\left(\frac{\partial \pi_1}{\partial x}\mathrm{S}+\frac{\partial \pi_2}{\partial x}\mathrm{T}+\ldots\right)^{\alpha''}\left(\frac{\partial \pi_1}{\partial y}\mathrm{S}+\frac{\partial \pi_2}{\partial y}\mathrm{T}+\ldots\right)^{\beta''}\ldots,$$

où $x, y, \ldots$ sont supposés remplacés par leurs valeurs en $s, t, \ldots$ tirées de (11). Cela étant, désignons, comme ci-dessus (II), par

$$u^{(i)}_{\alpha,\beta,\ldots\ldots},\qquad v^{(i)}_{\alpha',\beta',\ldots\ldots},\qquad w^{(i)}_{\alpha'',\beta'',\ldots}\qquad (i=1, 2, 3)$$

les valeurs numériques que prennent, par l'introduction de l'hypothèse initiale (4), les coefficients

$$\mathrm{U}^{(i)}_{\alpha,\beta,\ldots},\quad \mathrm{V}^{(i)}_{\alpha',\beta',\ldots},\quad \mathrm{W}^{(i)}_{\alpha'',\beta'',\ldots}$$

---

[1] Il convient d'ajouter que les coefficients de cette transformation peuvent toujours être supposés *réels* : car, le déterminant (10) étant supposé non identiquement nul, l'inégalité (8) pourra toujours être vérifiée par quelque système de valeurs réelles de $a_1, b_1, \ldots$.

des termes mis en évidence dans l'écriture du système (1); désignons en outre par

$$\begin{array}{l} a_1,\ b_1,\ \ldots, \\ a_2,\ b_2,\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

les valeurs numériques initiales de

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial\pi_1}{\partial x},\ \dfrac{\partial\pi_1}{\partial y},\ \ldots, \\ \dfrac{\partial\pi_2}{\partial x},\ \dfrac{\partial\pi_2}{\partial y},\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

pour que le système déduit de (1) par la transformation (11) soit kowaleskien, il faut et il suffit que l'une au moins des inégalités telles que (8) se trouve satisfaite en même temps que l'inégalité (9). Or, pour qu'il en puisse être ainsi, il faut et il suffit, en vertu du raisonnement exposé dans II, que le déterminant (10) ne soit pas identiquement nul quels que soient X, Y, ...

[**4**] *Si, désignant par*

$$\Delta_1 = 0, \qquad \Delta_2 = 0, \qquad \Delta_3 = 0$$

les trois équations du système proposé (1), *et par*

$$\begin{array}{lll} \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, \\ \mu_1, & \mu_2, & \mu_3, \\ \nu_1, & \nu_2, & \nu_3 \end{array}$$

trois systèmes de multiplicateurs fonctions de $x, y, \ldots,$ *on considère le système*

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1\Delta_1 + \lambda_2\Delta_2 + \lambda_3\Delta_3 = 0, \\ \mu_1\Delta_1 + \mu_2\Delta_2 + \mu_3\Delta_3 = 0, \\ \nu_1\Delta_1 + \nu_2\Delta_2 + \nu_3\Delta_3 = 0, \end{array}\right.$$

de même nature que le proposé, le déterminant caractéristique de (12) *peut s'obtenir en multipliant celui du proposé par le déterminant des fonctions* λ, μ, ν.

Car, en adoptant pour les éléments du déterminant caractéristique (2), relatif au système proposé (1), l'écriture abrégée

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{lll} L_1, & M_1, & N_1, \\ L_2, & M_2, & N_2, \\ L_3, & M_3, & N_3, \end{array}\right.$$

celui du système (12) a pour expression

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 & \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 & \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 + \lambda_3 N_3 \\ \mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + \mu_3 L_3 & \mu_1 M_1 + \mu_2 M_2 + \mu_3 M_3 & \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 + \mu_3 N_3 \\ \nu_1 L_1 + \nu_2 L_2 + \nu_3 L_3 & \nu_1 M_1 + \nu_2 M_2 + \nu_3 M_3 & \nu_1 N_1 + \nu_2 N_2 + \nu_3 N_3 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire le produit du déterminant des quantités (13) par le déterminant des multiplicateurs λ, μ, ν.

En supposant, notamment, que le système (1), *composé de trois équations linéaires par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées, soit résoluble, conformément à l'algorithme de Cramer, par rapport à trois quantités déterminées de cet ensemble, le déterminant caractéristique du système obtenu par cette résolution ne diffère du déterminant caractéristique de* (1) *que par un facteur (fonction de x, y, ...) différent de zéro.*

[5] *Les ordres respectifs du système* (1) *par rapport aux diverses fonctions inconnues qu'il implique étant supposés égaux entre eux, si l'on effectue un changement linéaire de ces dernières, le déterminant caractéristique se reproduit, multiplié seulement par le déterminant de la transformation.*

Supposant, dans le système (1), $m = n = p$, effectuons sur lui la transformation linéaire

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 u' + \mu_1 v' + \nu_1 w' + \pi_1, \\ v &= \lambda_2 u' + \mu_2 v' + \nu_2 w' + \pi_2, \\ w &= \lambda_3 u' + \mu_3 v' + \nu_3 w' + \pi_3, \end{aligned}$$

où u', v', w' désignent trois inconnues nouvelles substituées à u, v, w, et les lettres λ, μ, ν, π, affectées d'indices, des fonctions données de $x, y, \ldots$. Le système transformé

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha+\beta+\ldots=m} U^{(i)}_{\alpha,\beta,\ldots\ldots} \left(\lambda_1 \frac{\partial^m u'}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \ldots} + \mu_1 \frac{\partial^m v'}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \ldots} + \nu_1 \frac{\partial^m w'}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \ldots}\right) \\ &+ \sum_{\alpha'+\beta'+\ldots=m} V^{(i)}_{\alpha',\beta',\ldots\ldots} \left(\lambda_2 \frac{\partial^m u'}{\partial x^{\alpha'} \partial y^{\beta'} \ldots} + \mu_2 \frac{\partial^m v'}{\partial x^{\alpha'} \partial y^{\beta'} \ldots} + \nu_2 \frac{\partial^m w'}{\partial x^{\alpha'} \partial y^{\beta'} \ldots}\right) \\ &+ \sum_{\alpha''+\beta''+\ldots=m} W^{(i)}_{\alpha'',\beta'',\ldots} \left(\lambda_3 \frac{\partial^m u'}{\partial x^{\alpha''} \partial y^{\beta''} \ldots} + \mu_3 \frac{\partial^m v'}{\partial x^{\alpha''} \partial y^{\beta''} \ldots} + \nu_3 \frac{\partial^m w'}{\partial x^{\alpha''} \partial y^{\beta''} \ldots}\right) + \ldots\ldots = 0 \end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, 3),$$

aura pour éléments de la ligne de rang i, dans son déterminant caractéristique, les expressions

$$\lambda_1 \sum_{\alpha+\beta+\ldots=m} U^{(i)}_{\alpha,\beta\ldots} X^\alpha Y^\beta \ldots + \lambda_2 \sum_{\alpha'+\beta'+\ldots=m} V^{(i)}_{\alpha',\beta'\ldots} X^{\alpha'} Y^{\beta'} \ldots + \lambda_3 \sum_{\alpha''+\beta''+\ldots=m} W^{(i)}_{\alpha'',\beta''\ldots} X^{\alpha''} Y^{\beta''} \ldots,$$

$$\mu_1 \sum_{\alpha+\beta+\ldots=m} U^{(i)}_{\alpha,\beta\ldots} X^\alpha Y^\beta \ldots + \mu_2 \sum_{\alpha'+\beta'+\ldots=m} V^{(i)}_{\alpha',\beta'\ldots} X^{\alpha'} Y^{\beta'} \ldots + \mu_3 \sum_{\alpha''+\beta''+\ldots=m} W^{(i)}_{\alpha'',\beta''\ldots} X^{\alpha''} Y^{\beta''} \ldots,$$

$$\nu_1 \sum_{\alpha+\beta+\ldots=m} U^{(i)}_{\alpha,\beta\ldots} X^\alpha Y^\beta \ldots + \nu_2 \sum_{\alpha'+\beta'+\ldots=m} V^{(i)}_{\alpha',\beta'\ldots} X^{\alpha'} Y^{\beta'} \ldots + \nu_3 \sum_{\alpha''+\beta''+\ldots=m} W^{(i)}_{\alpha'',\beta''\ldots} X^{\alpha''} Y^{\beta''} \ldots.$$

Ce déterminant caractéristique est donc le produit du déterminant (2) par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix},$$

ce qu'il s'agissait d'établir.

[**6**] *Des valeurs initiales déterminées, $x_0, y_0, \ldots$, ayant été choisies pour les variables indépendantes $x, y, \ldots$, et le système* (1) *étant, dans l'hypothèse numérique initiale,*

$$x, y, \ldots = x_0, y_0, \ldots,$$

supposé résoluble par rapport aux dérivées

$$(14) \qquad \frac{\partial^m u}{\partial x^m}, \quad \frac{\partial^n v}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^p w}{\partial x^p},$$

la recherche des intégrales de (1) *développables en séries tayloriennes à l'intérieur de quelque domaine ayant pour centre $(x_0, y_0, \ldots)$ se ramène à une semblable recherche effectuée dans un certain système, Ω, de même nature, mais du premier ordre.*

Le déterminant caractéristique du système Ω peut d'ailleurs s'obtenir (*au signe près*) *en multipliant celui de* (1) *par une certaine puissance entière de l'indéterminée* X.

Dans l'exposé de cette propriété, nous examinerons d'abord le cas le plus simple, celui de deux variables indépendantes, qui nous sera particulièrement utile dans la deuxième Partie du présent travail; nous dirons ensuite un mot du cas général.

I. Cas de deux variables indépendantes, x, y.

A. En désignant par m *un entier positif, et par* $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m$ *des coefficients indépendants de* X, Y, *on a l'identité*

$$\left\{\begin{aligned} & A_0X_m + A_1X^{m-1}Y + A_2X^{m-2}Y^2 + \ldots + A_{m-1}XY^{m-1} + A_mY^m \\ & = \begin{vmatrix} X & -Y & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & X & -Y & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & -Y & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & X & -Y \\ A_mY & A_{m-1}Y & A_{m-2}Y & A_{m-3}Y & \ldots & A_2Y & A_1Y+A_0X \end{vmatrix}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Pour $m=1$, le premier membre de (15) est A_0X+A_1Y, et le déterminant d'ordre 1 qui figure dans son second membre a pour élément unique A_0X+A_1Y : aucun calcul n'est donc nécessaire.

Pour $m=2$, la relation (15) devient

$$A_0X^2 + A_1XY + A_2Y^2 = \begin{vmatrix} X & -Y \\ A_2Y & A_1Y+A_0X \end{vmatrix},$$

et se vérifie par un calcul immédiat.

Pour $m=3$, elle devient

$$A_0X^3 + A_1X^2Y + A_2XY^2 + A_3Y^3 = \begin{vmatrix} X & -Y & 0 \\ 0 & X & -Y \\ A_3Y & A_2Y & A_1Y+A_0X \end{vmatrix};$$

or, si on développe le déterminant du troisième ordre qui y figure par rapport aux éléments de sa première colonne, le coefficient de l'élément X sera, en vertu du cas précédent ($m=2$), la forme algébrique $A_0X^2+A_1XY+A_2Y^2$, le coefficient de l'élément A_3Y sera Y^2, et on tombera sur l'expression

$$X(A_0X^2 + A_1XY + A_2Y^2) + A_3Y^3,$$

identique au premier membre.

D'une manière générale, supposons l'identité (15) établie pour la valeur actuelle de m, et proposons-nous de l'étendre à la valeur suivante $m+1$. Par le changement de m en $m+1$, son premier membre devient

$$A_0X^{m+1} + A_1X^mY + A_2X^{m-1}Y^2 + \ldots + A_mXY^m + A_{m+1}Y^{m+1}; \tag{16}$$

pour en former le second membre, il suffit de border le déterminant d'ordre m, qui figure au second membre de l'identité (15), provisoirement admise, avec une première ligne et une première colonne (de $m+1$ éléments chacune) qui sont les suivantes :

$$\begin{array}{llllll}
X & -Y & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \quad 0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
\vdots \\
0 \\
A_{m+1}Y
\end{array}$$

Ce déterminant d'ordre $m+1$ étant formé, développons-le par rapport aux éléments de sa première colonne : le coefficient de l'élément X sera, en vertu de l'identité provisoirement admise,

$$A_0X^m + A_1X^{m-1}Y + A_2X^{m-2}Y^2 + \ldots + A_mY^m;$$

d'autre part, le coefficient de l'élément $A_{m+1}Y$ sera le produit de $(-1)^m$ par un déterminant d'ordre m qui a sur sa diagonale principale des éléments tous égaux à $-Y$, et à droite de cette diagonale des éléments tous nuls : ce dernier étant évidemment égal à $(-Y)^m$, il vient finalement

$$X(A_0X^m + A_1X^{m-1}Y + A_2X^{m-2}Y^2 + \ldots + A_mY^m) + A_{m+1}Y^{m+1},$$

ce qui fait bien retomber sur la forme algébrique (16).

Ainsi se trouve établie l'identité (15).

B. Supposons que, relativement à u, l'ordre m du système (1) soit supérieur à l'unité, et, dans l'écriture de ce système, développons les expressions

$$\sum_{\alpha+\beta=m} U^{(i)}_{\alpha,\beta} \frac{\partial^m u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \qquad (i=1, 2, 3);$$

il viendra ainsi :

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l}
U^{(i)}_{m,0}\dfrac{\partial^m u}{\partial x^m} + U^{(i)}_{m-1,1}\dfrac{\partial^m u}{\partial x^{m-1}\partial y} + U^{(i)}_{m-2,2}\dfrac{\partial^m u}{\partial x^{m-2}\partial y^2} + \ldots + U^{(i)}_{0,m}\dfrac{\partial^m u}{\partial y^m} \\
\quad + \displaystyle\sum_{\alpha'+\beta'=n} V^{(i)}_{\alpha',\beta'}\frac{\partial^n v}{\partial x^{\alpha'}\partial y^{\beta'}} + \sum_{\alpha''+\beta''=p} W^{(i)}_{\alpha'',\beta''}\frac{\partial^p w}{\partial x^{\alpha''}\partial y^{\beta''}} + \ldots\ldots = 0 \\
\qquad\qquad (i=1, 2, 3).
\end{array}\right.$$

Adjoignons maintenant aux inconnues, u, v, w, de (17), comme inconnues auxiliaires, toutes les dérivées de u des ordres 1, 2, ..., $m-1$: en posant

$$\frac{\partial^{k'+k''}u}{\partial x^{k'}\partial y^{k''}} = u_{x^{k'}y^{k''}}$$

$$(k'+k''=1, 2, \ldots, m-1),$$

le système (17) aura pour conséquence évidente, au point de vue de l'intégration, le système formé des deux groupes suivants :

$$(18)\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u}{\partial x} - u_x = 0,\\[2mm]
\dfrac{\partial u_x}{\partial x} - u_{x^2} = 0, \quad \dfrac{\partial u_y}{\partial x} - \dfrac{\partial u_x}{\partial y} = 0,\\[2mm]
\dfrac{\partial u_{x^2}}{\partial x} - u_{x^3} = 0, \quad \dfrac{\partial u_{xy}}{\partial x} - \dfrac{\partial u_{x^2}}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial u_{y^2}}{\partial x} - \dfrac{\partial u_{xy}}{\partial y} = 0,\\[2mm]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\[2mm]
\dfrac{\partial u_{x^{m-2}}}{\partial x} - u_{x^{m-1}} = 0, \quad \dfrac{\partial u_{x^{m-3}y}}{\partial x} - \dfrac{\partial u_{x^{m-2}}}{\partial y} = 0, \quad \ldots\ldots, \quad \dfrac{\partial u_{y^{m-2}}}{\partial x} - \dfrac{\partial u_{xy^{m-3}}}{\partial y} = 0,\\[2mm]
\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial u_{x^{m-2}y}}{\partial x} - \dfrac{\partial u_{x^{m-1}}}{\partial y} = 0, \quad \ldots\ldots, \quad \dfrac{\partial u_{y^{m-1}}}{\partial x} - \dfrac{\partial u_{xy^{m-2}}}{\partial y} = 0;
\end{array}\right.$$

$$(19)\left\{\begin{array}{l}
U^{(i)}_{m,0}\dfrac{\partial u_{x^{m-1}}}{\partial x} + U^{(i)}_{m-1,1}\dfrac{\partial u_{x^{m-1}}}{\partial y} + U^{(i)}_{m-2,2}\dfrac{\partial u_{x^{m-2}y}}{\partial y} + \ldots\ldots + U^{(i)}_{0,m}\dfrac{\partial u_{y^{m-1}}}{\partial y}\\[2mm]
\qquad + \displaystyle\sum_{\alpha'+\beta'=n} V^{(i)}_{\alpha',\beta'}\frac{\partial^n v}{\partial x^{\alpha'}\partial y^{\beta'}} + \sum_{\alpha''+\beta''=p} W^{(i)}_{\alpha'',\beta''}\frac{\partial^p w}{\partial x^{\alpha''}\partial y^{\beta''}} + \ldots\ldots = 0\\[2mm]
\qquad\qquad\qquad\qquad (i=1, 2, 3),
\end{array}\right.$$

l'ensemble des termes non écrits dans chacune des trois équations du groupe (19) étant d'ordre zéro par rapport à u et à chacune des inconnues adjointes, d'ordre inférieur à n par rapport à v, d'ordre inférieur à p par rapport à w. Dans le système [(18), (19)], les équations sont d'ailleurs en nombre manifestement égal à celui des fonctions inconnues.

Je dis que *le déterminant caractéristique du système* [(18), (19)] *peut s'obtenir* (*au signe près*) *en multipliant celui du système* (17) *par une certaine puissance entière de l'indéterminée* X.

A cet effet, considérons tout d'abord le système obtenu en réduisant le groupe (18) à sa dernière ligne, et le groupe (19) aux termes mis en évidence dans l'écriture; il vient de cette façon

$$(20)\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u_{y^{m-1}}}{\partial x}-\dfrac{\partial u_{xy^{m-2}}}{\partial y}=0,\quad \dfrac{\partial u_{xy^{m-2}}}{\partial x}-\dfrac{\partial u_{x^2y^{m-3}}}{\partial y}=0,\quad \ldots\ldots,\quad \dfrac{\partial u_{x^{m-2}y}}{\partial x}-\dfrac{\partial u_{x^{m-1}}}{\partial y}=0;\\
\mathrm{U}^{(i)}_{m,0}\dfrac{\partial u_{x^{m-1}}}{\partial x}+\mathrm{U}^{(i)}_{m-1,1}\dfrac{\partial u_{x^{m-1}}}{\partial y}+\mathrm{U}^{(i)}_{m-2,2}\dfrac{\partial u_{x^{m-2}y}}{\partial y}+\ldots\ldots+\mathrm{U}^{(i)}_{0,m}\dfrac{\partial u_{y^{m-1}}}{\partial y}\\
\qquad+\displaystyle\sum_{\alpha'+\beta'=n}\mathrm{V}^{(i)}_{\alpha',\beta'}\dfrac{\partial^n v}{\partial x^{\alpha'}\partial y^{\beta'}}+\sum_{\alpha''+\beta''=p}\mathrm{W}^{(i)}_{\alpha'',\beta''}\dfrac{\partial^p w}{\partial x^{\alpha''}\partial y^{\beta''}}=0\\
\qquad\qquad(i=1,2,3)
\end{array}\right.$$

[les équations de la dernière ligne du groupe (18) se trouvent écrites ci-dessus dans l'ordre inverse].

Le système ainsi formé, (20), implique les fonctions inconnues

$$u_{x^{m-1}},\quad u_{x^{m-2}y},\quad \ldots\ldots,\quad u_{y^{m-1}},\quad v,\quad w,$$

se compose d'équations en nombre égal, et présente par rapport à ces inconnues les ordres respectifs

$$1,\quad 1,\quad \ldots\ldots,\quad 1,\quad n,\quad p.$$

Nous allons établir que *son déterminant caractéristique est identique (au signe près) à celui du système* (17).

Effectivement, si l'on suppose, pour fixer les idées, $m=4$, le système (20), impliquant les inconnues

$$u_{x^3},\quad u_{x^2y},\quad u_{xy^2},\quad u_{y^3},\quad v,\quad w,$$

est le suivant :

$$\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u_{y^3}}{\partial x}-\dfrac{\partial u_{xy^2}}{\partial y}=0,\quad \dfrac{\partial u_{xy^2}}{\partial x}-\dfrac{\partial u_{x^2y}}{\partial y}=0,\quad \dfrac{\partial u_{x^2y}}{\partial x}-\dfrac{\partial u_{x^3}}{\partial y}=0;\\
\mathrm{U}^{(i)}_{4,0}\dfrac{\partial u_{x^3}}{\partial x}+\mathrm{U}^{(i)}_{3,1}\dfrac{\partial u_{x^3}}{\partial y}+\mathrm{U}^{(i)}_{2,2}\dfrac{\partial u_{x^2y}}{\partial y}+\mathrm{U}^{(i)}_{1,3}\dfrac{\partial u_{xy^2}}{\partial y}+\mathrm{U}^{(i)}_{0,4}\dfrac{\partial u_{y^3}}{\partial y}\\
\qquad+\displaystyle\sum_{\alpha'+\beta'=n}\mathrm{V}^{(i)}_{\alpha',\beta'}\dfrac{\partial^n v}{\partial x^{\alpha'}\partial y^{\beta'}}+\sum_{\alpha''+\beta''=p}\mathrm{W}^{(i)}_{\alpha'',\beta''}\dfrac{\partial^p w}{\partial x^{\alpha''}\partial y^{\beta''}}=0\\
\qquad\qquad(i=1,2,3).
\end{array}$$

En prenant les inconnues dans l'ordre

$$u_{y^3},\quad u_{xy^2},\quad u_{x^2y},\quad u_{x^3},\quad v,\quad w,$$

on a, comme déterminant caractéristique,

$$(21)\quad \begin{vmatrix} X & -Y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & -Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & -Y & 0 & 0 \\ U^{(1)}_{0,4}Y & U^{(1)}_{1,3}Y & U^{(1)}_{2,2}Y & U^{(1)}_{3,1}Y + U^{(1)}_{4,0}X & \sum\limits_{\alpha'+\beta'=n} V^{(1)}_{\alpha',\beta'} X^{\alpha'}Y^{\beta'} & \sum\limits_{\alpha''+\beta''=p} W^{(1)}_{\alpha'',\beta''} X^{\alpha''}Y^{\beta''} \\ U^{(2)}_{0,4}Y & U^{(2)}_{1,3}Y & U^{(2)}_{2,2}Y & U^{(2)}_{3,1}Y + U^{(2)}_{4,0}X & \sum\limits_{\alpha'+\beta'=n} V^{(2)}_{\alpha',\beta'} X^{\alpha'}Y^{\beta'} & \sum\limits_{\alpha''+\beta''=p} W^{(2)}_{\alpha'',\beta''} X^{\alpha''}Y^{\beta''} \\ U^{(3)}_{0,4}Y & U^{(3)}_{1,3}Y & U^{(3)}_{2,2}Y & U^{(3)}_{3,1}Y + U^{(3)}_{4,0}X & \sum\limits_{\alpha'+\beta'=n} V^{(3)}_{\alpha',\beta'} X^{\alpha'}Y^{\beta'} & \sum\limits_{\alpha''+\beta''=p} W^{(3)}_{\alpha'',\beta''} X^{\alpha''}Y^{\beta''} \end{vmatrix} :$$

pour se convaincre de son identité avec le déterminant caractéristique de (17), il suffit de le développer par rapport aux déterminants du second ordre extraits de ses deux dernières colonnes, et de se reporter au lemme établi dans *A* sur les formes algébriques à deux variables (en y supposant $m = 4$).

Revenons maintenant (en supposant, ici encore, pour fixer les idées, $m = 4$) au système [(18), (19)], qui implique six inconnues de plus que le système (20), savoir :

$$u;\quad u_x,\ u_y;\quad u_{x^2},\ u_{xy},\ u_{y^2}.$$

Parmi les équations du groupe (18), celles qui ne figurent pas dans le système (20) sont également au nombre de six, savoir :

$$\frac{\partial u}{\partial x} - u_x = 0;$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0,\qquad \frac{\partial u_x}{\partial x} - u_{x^2} = 0;$$

$$\frac{\partial u_{y^2}}{\partial x} - \frac{\partial u_{xy}}{\partial y} = 0,\qquad \frac{\partial u_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial u_{x^2}}{\partial y} = 0,\qquad \frac{\partial u_{x^2}}{\partial x} - u_{x^3} = 0.$$

En prenant les inconnues du système [(18), (19)] dans l'ordre

$$u;\quad u_y,\ u_x;\quad u_{y^2},\ u_{xy},\ u_{x^2};\quad u_{y^3},\ u_{xy^2},\ u_{x^2y},\ u_{x^3};\quad v;\quad w,$$

son déterminant caractéristique se déduira de celui de (20) en bordant ce dernier avec six colonnes et six lignes conformément aux indications du Tableau suivant :

$$\left|\begin{array}{cccccc|c}
X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & X & -Y & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & \text{Éléments tous nuls.} \\
0 & 0 & 0 & X & -Y & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & X & -Y & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & \\
\hline
\multicolumn{6}{c|}{\text{Éléments tous nuls.}} & \text{Déterminant (21).}
\end{array}\right|$$

On voit immédiatement que le déterminant ainsi obtenu est égal au produit du déterminant (21) par le mineur extrait des six premières lignes et des six premières colonnes : or, ce dernier, dont la diagonale principale a tous ses éléments égaux à X, tandis que les éléments situés à gauche sont tous nuls, est manifestement égal à une certaine puissance de X.

On raisonnera de la même façon pour toute valeur de $m\ (> 1)$.

C. Les opérations qui viennent d'être effectuées sur le système (17) relativement à l'inconnue u dans l'hypothèse $m > 1$, nous les effectuerons ensuite, si n est > 1, sur le système [(18), (19)] relativement à l'inconnue v, et enfin, si p est > 1, sur le système résultant relativement à l'inconnue w : de cette manière, nous aurons finalement déduit du système (17) un système du premier ordre, Ω, dont le déterminant caractéristique, à une puissance entière de X près (et au signe près), est identique à celui de (17), et où se trouvent engagées, outre les inconnues primitives u, v, w, leurs dérivées d'ordres respectivement inférieurs à m, n, p à titre d'inconnues adjointes.

Cela étant, supposons qu'il s'agisse de rechercher dans le système (1) ou (17), résoluble, comme le dit notre énoncé, par rapport aux trois dérivées (14), le groupe (unique) d'intégrales, u, v, w, développables (en séries tayloriennes) à l'intérieur de quelque domaine ayant pour centre (x_0, y_0), et telles qu'en adjoignant à u, v, w respectivement leurs $m-1$, $n-1$, $p-1$ premières dérivées relatives à x, ces $m+n+p$ fonctions se réduisent, pour $x = x_0$, à des fonctions données de y (développables elles-mêmes à partir de y_0).

Le système Ω, en vertu même de son mode de formation, est, au point de vue de l'intégration, une conséquence évidente du système (17), en sorte qu'à la solution considérée de (17) en correspond une de Ω. D'ailleurs, le système (17) étant supposé résoluble par rapport aux dérivées (14), le coefficient du terme de degré le plus élevé en X est forcément différent de zéro dans son déterminant caractéristique (n° 2), par suite aussi dans le déterminant caractéristique du système Ω : le système Ω est donc résoluble par rapport aux dérivées (premières) relatives à x de ses diverses inconnues. Cette résolution étant effectuée, les déterminations initiales des intégrales considérées de Ω, c'est-à-dire les fonctions de y auxquelles elles se réduisent pour $x = x_0$, coïncideront respectivement, les unes avec les fonctions données (de y) qui figurent dans les conditions initiales imposées aux intégrales de (17), les autres avec certaines dérivées (relatives à y) de ces fonctions données; et il suffira, pour avoir u, v, w, d'intégrer le système Ω en imposant à ses diverses fonctions inconnues les déterminations initiales dont il s'agit.

II. Cas d'un nombre quelconque de variables indépendantes $x, y, \ldots$.

Dans le cas de deux variables indépendantes, on constate sans difficulté, comme nous venons de le faire, l'existence de la relation entre le déterminant caractéristique du système (17) et celui du système Ω. Dans le cas général, une pareille constatation serait notablement moins simple, et nous nous bornerons à établir, de proche en proche, l'existence de quelque système du premier ordre jouissant des propriétés énoncées.

A. *L'ordre m, relatif à u, du système (1) étant supposé plus grand que 1, on peut de ce système en déduire un autre de même nature, impliquant les inconnues*

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \quad \ldots\ldots, \quad v, \ w,$$

présentant par rapport à ces dernières les ordres respectifs

$$1, \quad m-1, \quad m-1, \quad \ldots\ldots, \quad n, \ p,$$

et tel que son déterminant caractéristique puisse s'obtenir (au signe près) en multipliant celui de (1) par une certaine puissance de X.

Supposons, pour fixer les idées, que les fonctions inconnues, u, v, w, et les coefficients du système (1) dépendent de quatre variables x, y, z, t. Il est clair que toute dérivée d'ordre k de u ($k > 0$) coïncide avec quelque dérivée d'ordre $k-1$ de quelque dérivée première de u, et qu'une pareille coïncidence a lieu d'une seule manière ou de plusieurs suivant que la dérivée considérée d'ordre k intéresse une seule variable ou plusieurs. En conséquence, après avoir posé

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = u_z, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_t,$$

nous introduirons dans les équations (1) les changements de notations suivants :

Considérant une dérivée d'ordre k de u,

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma \partial t^\delta}$$

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta = k = 1, 2, \ldots, m),$$

nous la remplacerons,

si $\alpha > 0$, par $\dfrac{\partial^{k-1} u_x}{\partial x^{\alpha-1} \partial y^\beta \partial z^\gamma \partial t^\delta}$;

si $\alpha = 0$ et $\beta > 0$, par $\dfrac{\partial^{k-1} u_y}{\partial y^{\beta-1} \partial z^\gamma \partial t^\delta}$;

si $\alpha = \beta = 0$ et $\gamma > 0$, par $\dfrac{\partial^{k-1} u_z}{\partial z^{\gamma-1} \partial t^\delta}$;

enfin, si $\alpha = \beta = \gamma = 0$, d'où $\delta = k$, par $\dfrac{\partial^{k-1} u_t}{\partial t^{k-1}}$.

Considérant ensuite les trois dérivées d'ordre m

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-1} \partial y}, \quad \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-1} \partial z}, \quad \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-1} \partial t}$$

(que nous prendrons ci-après dans l'ordre inverse), nous observerons que chacune d'elles coïncide de deux manières différentes avec une dérivée d'ordre $m-1$ de quelqu'une des quantités u_x, u_y, u_z, u_t; nous égalerons entre elles ces deux dérivées d'ordre $m-1$, et nous écrirons en outre la relation $\dfrac{\partial u}{\partial x} = u_x$, ce qui donnera le groupe

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} - u_x = 0, \quad \dfrac{\partial^{m-1} u_t}{\partial x^{m-1}} - \dfrac{\partial^{m-1} u_x}{\partial x^{m-2} \partial t} = 0, \quad \dfrac{\partial^{m-1} u_z}{\partial x^{m-1}} - \dfrac{\partial^{m-1} u_x}{\partial x^{m-2} \partial z} = 0, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial^{m-1} u_y}{\partial x^{m-1}} - \dfrac{\partial^{m-1} u_x}{\partial x^{m-2} \partial y} = 0. \end{array} \right.$$

En adjoignant le groupe (22) à celui qui résulte des modifications d'écriture introduites dans le système (1), nous aurons bien, comme le dit notre énoncé (A), un système de même nature que (1), composé d'équations en nombre égal à celui de ses inconnues

$$u, \quad u_x, \quad u_y, \quad u_z, \quad u_t, \quad v, \quad w,$$

et présentant par rapport à celles-ci les ordres respectifs

$$1, \quad m-1, \quad m-1, \quad m-1, \quad m-1, \quad n, \quad p.$$

Il reste à faire voir que le déterminant caractéristique du système Ψ, ainsi formé, peut s'obtenir (au signe près) en multipliant celui de (1) par une certaine puissance de X.

Or, le système (1), en groupant convenablement les termes dans chaque équation, peut s'écrire :

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=m}^{\alpha>0} U^{(i)}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\frac{\partial^m u}{\partial x^\alpha\partial y^\beta\partial z^\gamma\partial t^\delta}+\sum_{\beta+\gamma+\delta=m}^{\beta>0} U^{(i)}_{0,\beta,\gamma,\delta}\frac{\partial^m u}{\partial y^\beta\partial z^\gamma\partial t^\delta}\\ &+\sum_{\gamma+\delta=m}^{\gamma>0} U^{(i)}_{0,0,\gamma,\delta}\frac{\partial^m u}{\partial z^\gamma\partial t^\delta}+U^{(i)}_{0,0,0,m}\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\\ &+\sum_{\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'=n} V^{(i)}_{\alpha',\beta',\gamma',\delta'}\frac{\partial^n v}{\partial x^{\alpha'}\partial y^{\beta'}\partial z^{\gamma'}\partial t^{\delta'}}+\sum_{\alpha''+\beta''+\gamma''+\delta''=p} W^{(i)}_{\alpha'',\beta'',\gamma'',\delta''}\frac{\partial^p w}{\partial x^{\alpha''}\partial y^{\beta''}\partial z^{\gamma''}\partial t^{\delta''}}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots=0 \qquad (i=1,2,3).\end{aligned}\right.$$

Il devient donc, après les changements de notations indiqués,

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=m}^{\alpha>0} U^{(i)}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\frac{\partial^{m-1} u_x}{\partial x^{\alpha-1}\partial y^\beta\partial z^\gamma\partial t^\delta}+\sum_{\beta+\gamma+\delta=m}^{\beta>0} U^{(i)}_{0,\beta,\gamma,\delta}\frac{\partial^{m-1} u_y}{\partial y^{\beta-1}\partial z^\gamma\partial t^\delta}\\ &+\sum_{\gamma+\delta=m}^{\gamma>0} U^{(i)}_{0,0,\gamma,\delta}\frac{\partial^{m-1} u_z}{\partial z^{\gamma-1}\partial t^\delta}+U^{(i)}_{0,0,0,m}\frac{\partial^{m-1} u_t}{\partial t^{m-1}}\\ &+\sum_{\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'=n} V^{(i)}_{\alpha',\beta',\gamma',\delta'}\frac{\partial^n v}{\partial x^{\alpha'}\partial y^{\beta'}\partial z^{\gamma'}\partial t^{\delta'}}+\sum_{\alpha''+\beta''+\gamma''+\delta''=p} W^{(i)}_{\alpha'',\beta'',\gamma'',\delta''}\frac{\partial^p w}{\partial x^{\alpha''}\partial y^{\beta''}\partial z^{\gamma''}\partial t^{\delta''}}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots=0 \qquad (i=1,2,3).\end{aligned}\right.$$

En prenant les inconnues dans l'ordre

$$u,\quad u_t,\quad u_z,\quad u_y,\quad u_x,\quad v,\quad w,$$

et les équations du système [(22), (24)] dans l'ordre même où elles sont écrites, formant d'après cela son déterminant caractéristique, et observant que la première équation, $\frac{\partial u}{\partial x}-u_x=0$, nous fournit, comme première ligne,

$$X\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0,$$

il est clair que le déterminant dont il s'agit est le produit de X par un déterminant du sixième ordre ayant pour cinquième et sixième colonnes

$$\begin{array}{cc}
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
\sum\limits_{\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'=n} V^{(1)}_{\alpha',\beta',\gamma',\delta'} X^{\alpha'} Y^{\beta'} Z^{\gamma'} T^{\delta'} & \sum\limits_{\alpha''+\beta''+\gamma''+\delta''=p} W^{(1)}_{\alpha'',\beta'',\gamma'',\delta''} X^{\alpha''} Y^{\beta''} Z^{\gamma''} T^{\delta''} \\
\sum\limits_{\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'=n} V^{(2)}_{\alpha',\beta',\gamma',\delta'} X^{\alpha'} Y^{\beta'} Z^{\gamma'} T^{\delta'} & \sum\limits_{\alpha''+\beta''+\gamma''+\delta''=p} W^{(2)}_{\alpha'',\beta'',\gamma'',\delta''} X^{\alpha''} Y^{\beta''} Z^{\gamma''} T^{\delta''} \\
\sum\limits_{\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'=n} V^{(3)}_{\alpha',\beta',\gamma',\delta'} X^{\alpha'} Y^{\beta'} Z^{\gamma'} T^{\delta'} & \sum\limits_{\alpha''+\beta''+\gamma''+\delta''=p} W^{(3)}_{\alpha'',\beta'',\gamma'',\delta''} X^{\alpha''} Y^{\beta''} Z^{\gamma''} T^{\delta''}
\end{array}$$

Or, ce dernier déterminant lui-même est le produit du déterminant caractéristique de (23) par X^{3m-4} : pour s'en convaincre, il suffit d'en compléter l'écriture et de le développer par rapport aux déterminants du second ordre extraits de ses cinquième et sixième colonnes.

B. La méthode que nous venons d'indiquer (*A*), appliquée un certain nombre de fois en prenant pour point de départ le système (1), permet évidemment d'en déduire un système du premier ordre, Ω, dont le déterminant caractéristique, à une puissance entière de X près (et au signe près), est identique à celui du système (1), et où se trouvent engagées, outre les inconnues primitives, leurs dérivées d'ordres respectivement inférieurs à m, n, p à titre d'inconnues adjointes.

Cela étant, supposons qu'il s'agisse de rechercher dans le système (1), résoluble, comme le dit notre énoncé, par rapport aux trois dérivées (14), le groupe (unique) d'intégrales, u, v, w, développables (en séries tayloriennes) à partir de $x_0, y_0, \ldots$, et telles qu'en adjoignant à u, v, w respectivement leurs $m-1$, $n-1$, $p-1$ premières dérivées relatives à x, ces $m+n+p$ fonctions se réduisent, pour $x=x_0$, à des fonctions données de y (développables elles-mêmes à partir de $y_0, \ldots$) : en raisonnant comme nous l'avons fait ci-dessus (I, *C*), on verra que le système Ω est résoluble par rapport aux dérivées (premières) relatives à x de ses diverses fonctions inconnues, et on se trouvera ramené à l'intégrer en imposant à ces dernières des déterminations initiales données.

DEUXIÈME PARTIE

Étude d'un système partiel linéaire à deux variables indépendantes, dont l'intégration se ramène à des quadratures.

[7] Supposons actuellement que les coefficients du système (1) et les fonctions inconnues, u, v, w, qui s'y trouvent engagées, ne dépendent que de deux variables, x, y; supposons, de plus, que les équations (1) ne contiennent, outre les termes indépendants de u, v, w et de leurs dérivées, que les dérivées d'ordre m de u, les dérivées d'ordre n de v et les dérivées d'ordre p de w, à l'exclusion des dérivées d'ordres respectivement inférieurs et des fonctions inconnues elles-mêmes; supposons enfin que les dérivées de u, v, w d'ordres respectifs m, n, p y aient pour coefficients des constantes données. Le système (1) est alors de la forme

$$(25) \qquad \sum_{\mu=0}^{\mu=m} a_{i,\mu} \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-\mu} \partial y^\mu} + \sum_{\nu=0}^{\nu=n} b_{i,\nu} \frac{\partial^n v}{\partial x^{n-\nu} \partial y^\nu} + \sum_{\pi=0}^{\pi=p} c_{i,\pi} \frac{\partial^p w}{\partial x^{p-\pi} \partial y^\pi} = G_i(x, y)$$
$$(i = 1, 2, 3),$$

où $G_i(x, y)$ désigne une fonction donnée de x, y, et les lettres a, b, c, affectées d'indices, des constantes données; il en résulte pour la forme algébrique (2), dont les coefficients, en pareil cas, se réduisent eux-mêmes à des constantes, l'expression

$$(26) \qquad \begin{vmatrix} \sum_{\mu=0}^{\mu=m} a_{1,\mu} X^{m-\mu} Y^\mu & \sum_{\nu=0}^{\nu=n} b_{1,\nu} X^{n-\nu} Y^\nu & \sum_{\pi=0}^{\pi=p} c_{1,\pi} X^{p-\pi} Y^\pi \\ \sum_{\mu=0}^{\mu=m} a_{2,\mu} X^{m-\mu} Y^\mu & \sum_{\nu=0}^{\nu=n} b_{2,\nu} X^{n-\nu} Y^\nu & \sum_{\pi=0}^{\pi=p} c_{2,\pi} X^{p-\pi} Y^\pi \\ \sum_{\mu=0}^{\mu=m} a_{3,\mu} X^{m-\mu} Y^\mu & \sum_{\nu=0}^{\nu=n} b_{3,\nu} X^{n-\nu} Y^\nu & \sum_{\pi=0}^{\pi=p} c_{3,\pi} X^{p-\pi} Y^\pi \end{vmatrix}.$$

Cela étant, proposons-nous le problème suivant :

La forme algébrique (26) *étant supposée non identiquement nulle, et des valeurs initiales déterminées,* x_0, y_0, *ayant été choisies pour les variables indépendantes* x, y *dans une région d'olotropie commune aux divers seconds membres du système* (25), *rechercher toutes les intégrales de ce système développables en séries tayloriennes à l'intérieur de quelque domaine ayant pour centre* (x_0, y_0).

Il est clair que par la transformation

$$x = x_0 + x', \qquad y = y_0 + y',$$

où $x' y'$ désignent de nouvelles variables substituées à x, y, on se trouve toujours ramené au cas où les valeurs initiales des variables sont nulles. Il résulte d'ailleurs de l'hypothèse relative à la forme algébrique (26) que le système (25) peut, par un changement linéaire des variables indépendantes (n° 3, II), se ramener à la forme kowaleskienne. Le problème posé se ramène donc immédiatement au suivant :

Le système (25) *étant supposé résoluble par rapport aux trois dérivées*

$$(27) \qquad \frac{\partial^m u}{\partial x^m}, \quad \frac{\partial^n v}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^p w}{\partial x^p},$$

et ses seconds membres,

$$G_1(x, y), \qquad G_2(x, y), \qquad G_3(x, y),$$

étant supposés développables (à l'intérieur de quelque domaine) par la formule de Maclaurin, en rechercher toutes les intégrales développables par cette même formule; ou, ce qui revient au même, *rechercher les intégrales, u, v, w, du système* (25) *développables par la formule dont il s'agit, et telles qu'en adjoignant à u, v, w respectivement leurs $m-1, n-1, p-1$ premières dérivées relatives à x, ces $m+n+p$ fonctions se réduisent, pour $x=0$, à des fonctions données de y (développables par la formule de Maclaurin).*

Or, cette dernière recherche se ramène tout d'abord, comme nous allons le voir, à une semblable recherche effectuée dans le cas du *premier ordre*.

[**8**] Effectivement, si, pour les quantités

$$\begin{array}{cccc}
\dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}}, & \dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-2}\partial y}, & \ldots\ldots, & \dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial y^{m-1}}, \\
\dfrac{\partial^{n-1} v}{\partial x^{n-1}}, & \dfrac{\partial^{n-1} v}{\partial x^{n-2}\partial y}, & \ldots\ldots, & \dfrac{\partial^{n-1} v}{\partial y^{n-1}}, \\
\dfrac{\partial^{p-1} w}{\partial x^{p-1}}, & \dfrac{\partial^{p-1} w}{\partial x^{p-2}\partial y}, & \ldots\ldots, & \dfrac{\partial^{p-1} w}{\partial y^{p-1}},
\end{array}$$

dérivées de u, v, w d'ordres totaux respectifs $m-1$, $n-1$, $p-1$, on adopte les notations

$$(28)\qquad \left\{\begin{array}{llll} u_{x^{m-1}}, & u_{x^{m-2}y}, & \ldots\ldots, & u_{y^{m-1}}, \\ v_{x^{n-1}}, & v_{x^{n-2}y}, & \ldots\ldots, & v_{y^{n-1}}, \\ w_{x^{p-1}}, & w_{x^{p-2}y}, & \ldots\ldots, & w_{y^{p-1}}, \end{array}\right.$$

on peut, du système (25), déduire le suivant :

$$(29)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_{y^{m-1}}}{\partial x} - \dfrac{\partial u_{xy^{m-2}}}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial u_{xy^{m-2}}}{\partial x} - \dfrac{\partial u_{x^2y^{m-3}}}{\partial y} = 0, \ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots, \dfrac{\partial u_{x^{m-3}y^2}}{\partial x} - \dfrac{\partial u_{x^{m-2}y}}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial u_{x^{m-2}y}}{\partial x} - \dfrac{\partial u_{x^{m-1}}}{\partial y} = 0; \\ \dfrac{\partial v_{y^{n-1}}}{\partial x} - \dfrac{\partial v_{xy^{n-2}}}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial v_{xy^{n-2}}}{\partial x} - \dfrac{\partial v_{x^2y^{n-3}}}{\partial y} = 0, \ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots, \dfrac{\partial v_{x^{n-3}y^2}}{\partial x} - \dfrac{\partial v_{x^{n-2}y}}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial v_{x^{n-2}y}}{\partial x} - \dfrac{\partial v_{x^{n-1}}}{\partial y} = 0; \\ \dfrac{\partial w_{y^{p-1}}}{\partial x} - \dfrac{\partial w_{xy^{p-2}}}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial w_{xy^{p-2}}}{\partial x} - \dfrac{\partial w_{x^2y^{p-3}}}{\partial y} = 0, \ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots, \dfrac{\partial w_{x^{p-3}y^2}}{\partial x} - \dfrac{\partial w_{x^{p-2}y}}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial w_{x^{p-2}y}}{\partial x} - \dfrac{\partial w_{x^{p-1}}}{\partial y} = 0; \\ \qquad a_{i,0}\dfrac{\partial u_{x^{m-1}}}{\partial x} + \displaystyle\sum_{\mu=1}^{\mu=m} a_{i,\mu}\dfrac{\partial u_{x^{m-\mu}y^{\mu-1}}}{\partial y} \\ \qquad + b_{i,0}\dfrac{\partial v_{x^{n-1}}}{\partial x} + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu=n} b_{i,\nu}\dfrac{\partial v_{x^{n-\nu}y^{\nu-1}}}{\partial y} \\ \qquad + c_{i,0}\dfrac{\partial w_{x^{p-1}}}{\partial x} + \displaystyle\sum_{\pi=1}^{\pi=p} c_{i,\pi}\dfrac{\partial w_{x^{p-\pi}y^{\pi-1}}}{\partial y} = G_i(x, y) \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, 3). \end{array}\right.$$

Le système (29), de même nature que (25), comprend $m+n+p$ équations, implique $m+n+p$ inconnues désignées par les notations (28), et est *du premier ordre* par rapport à chacune de ces dernières; il jouit d'ailleurs des propriétés suivantes :

1° *Son déterminant caractéristique est identique (au signe près) au déterminant caractéristique du système* (25).

Il suffit, pour s'en convaincre, d'observer que le déterminant caractéristique de (29), indépendant des seconds membres, $G_1(x, y)$ $G_2(x, y)$, $G_3(x, y)$, de ses trois dernières équations, est le même que si ces seconds membres étaient identiquement nuls, et de se reporter à une démonstration antérieure [n° 6, I, *B*, comparaison entre les déterminants caractéristiques des systèmes (17) et (20)].

2° *Le système* (29) *est résoluble par rapport aux dérivées* (*premières*) *relatives à x de ses diverses fonctions inconnues, et la recherche des intégrales de* (25) *répondant à des conditions initiales données, de même forme que plus haut* (n° 7, in fine), *se ramène à une semblable recherche effectuée dans le système* (29), *et à des quadratures.*

Effectivement, en vertu même de son mode de formation, le système (29) est, au point de vue de l'intégration, une conséquence évidente du système (25), en sorte qu'à la solution considérée de (25) en correspond une de (29). D'ailleurs, le système (25) étant supposé résoluble par rapport aux dérivées (27), le coefficient du terme de degré le plus élevé en X est forcément différent de zéro dans son déterminant caractéristique (n° 2), par suite aussi dans le déterminant caractéristique du système (29) : le système (29) est donc résoluble par rapport aux dérivées (premières) relatives à x de ses diverses inconnues. Cette résolution étant effectuée, les déterminations initiales des intégrales considérées de (29), c'est-à-dire les fonctions de y auxquelles elles se réduisent pour $x=0$, coïncideront respectivement, les unes avec certaines des fonctions données (de y) qui figurent dans les conditions initiales imposées aux intégrales de (25), les autres avec certaines dérivées (relatives à y) de ces fonctions données. Si l'on intègre alors le système (29) en imposant à ses inconnues les déterminations initiales dont il s'agit, on obtiendra, sinon les intégrales cherchées, u, v, w, du système (25), du moins leurs diverses dérivées d'ordres totaux respectifs $m-1$, $n-1$, $p-1$. Finalement, si l'on désigne par $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$ les trois fonctions ainsi obtenues pour les inconnues respectives $u_{x^{m-1}}$, $v_{x^{n-1}}$, $w_{x^{p-1}}$, il ne restera plus qu'à intégrer les trois équations

$$\frac{\partial^{m-1}u}{\partial x^{m-1}}=f_1(x, y), \qquad \frac{\partial^{n-1}v}{\partial x^{n-1}}=f_2(x, y), \qquad \frac{\partial^{p-1}w}{\partial x^{p-1}}=f_3(x, y) \tag{30}$$

avec les conditions initiales déduites de celles que l'on a imposées aux intégrales de (25), c'est-à-dire à effectuer $(m-1)+(n-1)+(p-1)$ quadratures relatives à x [1].

Ainsi se trouvent établies les propriétés énoncées.

---

[1] Les diverses dérivées de u, v, w d'ordres totaux respectifs $m-1$, $n-1$, $p-1$ une fois obtenues par l'intégration du système (29), on pourrait, au lieu de considérer les équations (30), observer que les valeurs numériques initiales des diverses dérivées d'ordres respectivement inférieurs font partie des données initiales imposées pour la recherche de u, v, w, et qu'il suffit dès lors, pour obtenir l'une de ces trois dernières fonctions, d'inté-

[**9**] Considérant donc, au lieu du système primitif, défini au n° 7, le système du premier ordre auquel nous ramène la réduction opérée ci-dessus (n° 8), désignons désormais par $u, v, \ldots, t$ les diverses fonctions inconnues engagées dans ce dernier système, par g leur nombre (égal à $m+n+p$), et résolvons-le par rapport aux g dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\partial t}{\partial x},$$

ce qui, à un facteur constant près différent de zéro, laisse encore identique à lui-même le déterminant caractéristique (il suffit, pour s'en convaincre, de raisonner comme nous l'avons fait au n° 4). En désignant par

$$\begin{array}{cccc} a_1, & b_1, & \ldots, & h_1, \\ a_2, & b_2, & \ldots, & h_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ a_g, & b_g, & \ldots, & h_g \end{array}$$

des constantes connues, et par

$$F_1(x, y), \quad F_2(x, y), \quad \ldots\ldots, \quad F_g(x, y)$$

des fonctions connues de x, y, le système, une fois résolu, sera de la forme

$$(31)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = a_1 \dfrac{\partial u}{\partial y} + b_1 \dfrac{\partial v}{\partial y} + \ldots + h_1 \dfrac{\partial t}{\partial y} + F_1(x, y), \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = a_2 \dfrac{\partial u}{\partial y} + b_2 \dfrac{\partial v}{\partial y} + \ldots + h_2 \dfrac{\partial t}{\partial y} + F_2(x, y), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial t}{\partial x} = a_g \dfrac{\partial u}{\partial y} + b_g \dfrac{\partial v}{\partial y} + \ldots + h_g \dfrac{\partial t}{\partial y} + F_g(x, y), \end{array}\right.$$

et nous nous trouverons ramené au problème suivant :

Les fonctions

$$F_1(x, y), \quad F_2(x, y), \quad \ldots\ldots, \quad F_g(x, y),$$

qui figurent dans les seconds membres du système (31), *étant supposées développables* (*à l'intérieur de quelque domaine*) *par la formule de Maclaurin, rechercher les inté-*

---

grer successivement, chaque fois avec la condition initiale voulue, $m-1$, $n-1$ ou $p-1$ différentielles totales du premier ordre, suivant qu'il s'agit de u, v ou w.

Il en résulte immédiatement la conséquence suivante :

Pour que les intégrales considérées du système (25) *puissent être prolongées analytiquement dans une région déterminée, il faut et il suffit que cela ait lieu pour les intégrales correspondantes du système* (29).

grales de (31) *développables par cette même formule, et se réduisant, pour* $x=0$, *à des fonctions données de* y (*développables par la formule de Maclaurin*).

Or, la considération du déterminant caractéristique permet, comme nous allons l'exposer, de remplacer le système (31) par divers systèmes, de forme plus simple encore, et dont chacun peut se traiter indépendamment des autres. Ce déterminant, qui a pour expression

$$\begin{vmatrix} a_1 Y - X & b_1 Y & \dots & h_1 Y \\ a_2 Y & b_2 Y - X & \dots & h_2 Y \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_g Y & b_g Y & \dots & h_g Y - X \end{vmatrix},$$

devient, si on le divise par Y^g, une fonction entière de degré (effectif) g par rapport au quotient $\frac{X}{Y}$; en posant $\frac{X}{Y}=r$, et égalant à zéro la fonction dont il s'agit, on tombera sur l'équation

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} a_1 - r & b_1 & \dots & h_1 \\ a_2 & b_2 - r & \dots & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_g & b_g & \dots & h_g - r \end{vmatrix} = 0,$$

que nous nommerons *équation caractéristique*. Pour que le mécanisme des transformations à effectuer sur le système (31) puisse être plus facilement saisi, nous commencerons par les exposer dans le cas le plus simple, celui où l'équation caractéristique n'a pas de racine multiple.

[**10**] Supposons donc actuellement *que l'équation caractéristique* (32), à l'inconnue r, *ait ses* g *racines distinctes*.

En multipliant les équations (31) respectivement par les constantes (provisoirement indéterminées) $p_1, p_2, \dots, p_g$, non nulles à la fois, et ajoutant membre à membre, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(p_1 u + p_2 v + \dots + p_g t) = {} & (p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_g a_g)\frac{\partial u}{\partial y} \\ & + (p_1 b_1 + p_2 b_2 + \dots + p_g b_g)\frac{\partial v}{\partial y} \\ & + \dots\dots\dots\dots \\ & + (p_1 h_1 + p_2 h_2 + \dots + p_g h_g)\frac{\partial t}{\partial y} \\ & + p_1 F_1 + p_2 F_2 + \dots + p_g F_g. \end{aligned}$$

En exprimant ensuite que, dans le second membre de cette équation, l'ensemble des termes du premier ordre est identiquement égal au produit de

$$\frac{\partial}{\partial y}(p_1 u + p_2 v + \ldots + p_g t)$$

par un facteur constant r (provisoirement indéterminé), on obtient les g conditions

$$(33) \qquad \left\{\begin{array}{l} (a_1 - r)p_1 + a_2 p_2 \qquad + \ldots + a_g p_g = 0, \\ \quad b_1 p_1 + (b_2 - r)p_2 + \ldots + b_g p_g = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \quad h_1 p_1 + h_2 p_2 \qquad + \ldots + (h_g - r)p_g = 0, \end{array}\right.$$

qui entraînent, puisque $p_1, p_2, \ldots, p_g$ ne doivent pas être nuls à la fois, l'équation caractéristique (32).

Désignant par $r', r'', \ldots, r^{(g)}$ les g racines (distinctes, par hypothèse) de cette équation, considérons l'une d'elles, r', et soit

$$(34) \qquad p'_1, \quad p'_2, \quad \ldots, \quad p'_g$$

une solution correspondante du système (33) formée de valeurs non nulles à la fois : si, pour fixer les idées, on suppose $p'_1 \neq 0$, on pourra, dans le système (31), remplacer la première équation par la combinaison linéaire que fournissent les multiplicateurs (34), et le système résultant, que nous désignerons par

(31 *bis*),

sera algébriquement équivalent à (31). Cela étant, on effectuera dans (31 *bis*) la substitution

$$p'_1 u + p'_2 v + \ldots + p'_g t = u',$$

où u' désigne une nouvelle inconnue destinée à remplacer u, et il viendra

$$(35) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u'}{\partial x} = r'\dfrac{\partial u'}{\partial y} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + F'_1(x, y), \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = a'_2 \dfrac{\partial u'}{\partial y} + b'_2 \dfrac{\partial v}{\partial y} + \ldots + h'_2 \dfrac{\partial t}{\partial y} + F_2(x, y), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial t}{\partial x} = a'_g \dfrac{\partial u'}{\partial y} + b'_g \dfrac{\partial v}{\partial y} + \ldots + h'_g \dfrac{\partial t}{\partial y} + F_g(x, y) \end{array}\right.$$

[où $F'_1(x, y)$ désigne une fonction connue de x, y, et les lettres $a, b, \ldots, h$, accentuées et affectées d'indices, des constantes connues]. En vertu de propriétés établies plus haut (n^{os} 4 et 5), lorsqu'on passe, soit du système (31) à celui que nous avons appelé (31 *bis*), soit de ce dernier au système (35), les racines de l'équation caractéristique ne changent pas.

Opérons maintenant sur le système (35) comme nous l'avons fait sur (31), c'est-à-dire multiplions-en les équations respectivement par les constantes (provisoirement indéterminées) $p_1, p_2, \ldots, p_g$, non nulles à la fois, et ajoutons membre à membre; il vient ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(p_1 u' + p_2 v + \ldots + p_g t) = &(p_1 r' + p_2 a'_2 + \ldots + p_g a'_g)\frac{\partial u'}{\partial y}\\ &+(\qquad p_2 b'_2 + \ldots + p_g b'_g)\frac{\partial v}{\partial y}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+(\qquad p_2 h'_2 + \ldots + p_g h'_g)\frac{\partial t}{\partial y}\\ &+ p_1 F'_1 + p_2 F_2 + \ldots + p_g F_g.\end{aligned}$$

En exprimant que, dans le second membre de cette équation, l'ensemble des termes du premier ordre est identiquement égal au produit de

$$\frac{\partial}{\partial y}(p_1 u' + p_2 v + \ldots + p_g t)$$

par un facteur constant r (provisoirement indéterminé), on obtient les g conditions

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned}(r'-r)p_1 + a'_2 p_2 + \ldots + a'_g p_g &= 0,\\ (b'_2 - r)p_2 + \ldots + b'_g p_g &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&,\\ h'_2 p_2 + \ldots + (h'_g - r)p_g &= 0,\end{aligned}\right.$$

qui entraînent, puisque $p_1, p_2, \ldots, p_g$ ne doivent pas être nuls à la fois, l'équation (caractéristique)

$$(37)\qquad \begin{vmatrix} r'-r & a'_2 & \ldots\ldots & a'_g \\ 0 & b'_2 - r & \ldots\ldots & b'_g \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & h'_2 & \ldots\ldots & h'_g - r \end{vmatrix} = 0.$$

Dans cette dernière, considérons la racine r'', et soit

$$(38)\qquad p''_1,\quad p''_2,\quad \ldots,\quad p''_g$$

une solution correspondante du système (36) formée de valeurs non nulles à la fois. Je dis que les $g-1$ dernières, $p''_2, \ldots, p''_g$, ne peuvent être nulles à la fois : car, si elles l'étaient, la première équation (36) donnerait

$$p''_1(r' - r'') = 0,$$

c'est-à-dire, puisque $r'-r''$ n'est pas nul, $p''_1=0$, en sorte que les g multiplicateurs (38) seraient tous nuls, contrairement à ce qui précède. Cela étant, si, pour fixer les idées, on suppose $p''_2 \neq 0$, on pourra, dans le système (35), remplacer la deuxième équation par la combinaison linéaire que fournissent les multiplicateurs (38), et le système résultant, que nous désignerons par

(35 *bis*),

sera algébriquement équivalent à (35). On effectuera alors dans (35 *bis*) la substitution

$$p''_1 u' + p''_2 v + \ldots + p''_g t = v',$$

où v' désigne une nouvelle inconnue destinée à remplacer v, et il viendra :

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u'}{\partial x} = r' \dfrac{\partial u'}{\partial y} + F'_1(x, y), \\[2mm] \dfrac{\partial v'}{\partial x} = r'' \dfrac{\partial v'}{\partial y} + F''_2(x, y), \\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial x} = a''_3 \dfrac{\partial u'}{\partial y} + b''_3 \dfrac{\partial v'}{\partial y} + c''_3 \dfrac{\partial w}{\partial y} + \ldots + h''_3 \dfrac{\partial t}{\partial y} + F_3(x, y), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial t}{\partial x} = a''_g \dfrac{\partial u'}{\partial y} + b''_g \dfrac{\partial v'}{\partial y} + c''_g \dfrac{\partial w}{\partial y} + \ldots + h''_g \dfrac{\partial t}{\partial y} + F_g(x, y). \end{cases}$$

Comme précédemment, lorsqu'on passe, soit du système (35) à celui que nous avons appelé (35 *bis*), soit de ce dernier au système (39), les racines de l'équation caractéristique ne changent pas.

Multiplions à présent les équations du système (39) respectivement par les constantes (provisoirement indéterminées) $p_1, p_2, \ldots, p_g$, non nulles à la fois, et ajoutons membre à membre; il vient ainsi :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}(p_1 u' + p_2 v' + p_3 w + \ldots + p_g t) \\ &= (p_1 r' + p_3 a''_3 + \ldots + p_g a''_g)\frac{\partial u'}{\partial y} \\ &+ (p_2 r'' + p_3 b''_3 + \ldots + p_g b''_g)\frac{\partial v'}{\partial y} \\ &+ (p_3 c''_3 + \ldots + p_g c''_g)\frac{\partial w}{\partial y} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (p_3 h''_3 + \ldots + p_g h''_g)\frac{\partial t}{\partial y} \\ &+ p_1 F'_1 + p_2 F''_2 + p_3 F_3 + \ldots + p_g F_g. \end{aligned}$$

En exprimant que, dans le second membre de cette équation, l'ensemble des termes du premier ordre est identiquement égal au produit de

$$\frac{\partial}{\partial y}(p_1 u' + p_2 v' + p_3 w + \ldots + p_g t)$$

par un facteur constant r (provisoirement indéterminé), on obtient les g conditions

$$(40)\qquad \begin{cases} (r'-r)p_1 \qquad\qquad + a''_3 p_3 \qquad + \ldots + \qquad a''_g p_g = 0, \\ \qquad (r''-r)p_2 + b''_3 p_3 \qquad + \ldots + \qquad b''_g p_g = 0, \\ \qquad\qquad (c''_3 - r)p_3 + \ldots + \qquad c''_g p_g = 0, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad\qquad h''_3 p_3 \qquad + \ldots + (h''_g - r)p_g = 0, \end{cases}$$

qui entraînent l'équation caractéristique. Dans cette dernière, considérons la racine r''', et soit

$$(41)\qquad p_1''', \quad p_2''', \quad p_3''', \quad \ldots, \quad p_g''$$

une solution correspondante du système (40) formée de valeurs non nulles à la fois. Je dis que les $g-2$ dernières, p_3''', ..., p_g''', ne peuvent être nulles à la fois : car, si elles l'étaient, les deux premières équations (40) donneraient

$$(r'-r''')p_1''' = 0, \qquad (r''-r''')p_2''' = 0,$$

c'est-à-dire, puisque $r'-r'''$ et $r''-r'''$ sont différents de zéro, $p_1'''=0$, $p_2'''=0$, en sorte que les g multiplicateurs (41) seraient tous nuls, contrairement à ce qui précède. Cela étant, si, pour fixer les idées, on suppose $p_3''' \neq 0$, on pourra, dans le système (39), remplacer la troisième équation par la combinaison linéaire que fournissent les multiplicateurs (41), et le système résultant, que nous désignerons par

(39 *bis*),

sera algébriquement équivalent à (39). On effectuera alors sur (39 *bis*) la substitution

$$p_1'''u' + p_2'''v' + p_3'''w + \ldots + p_g'''t = w',$$

où w' désigne une nouvelle inconnue destinée à remplacer w, et on tombera sur un système où les trois premières équations auront la forme réduite

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = r' \frac{\partial u'}{\partial y} + \mathrm{F}'_1(x, y),$$

$$\frac{\partial v'}{\partial x} = r'' \frac{\partial v'}{\partial y} + \mathrm{F}''_2(x, y),$$

$$\frac{\partial w'}{\partial x} = r''' \frac{\partial w'}{\partial y} + \mathrm{F}_3'''(x, y).$$

On continuera ainsi jusqu'à épuisement des racines de l'équation caractéristique. Finalement, par le changement successif de toutes les fonctions inconnues, le système proposé aura pris la forme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial x} &= r' \frac{\partial u'}{\partial y} + F'_1(x, y), \\
\frac{\partial v'}{\partial x} &= r'' \frac{\partial v'}{\partial y} + F''_2(x, y), \\
&\dots\dots\dots\dots, \\
\frac{\partial t'}{\partial x} &= r^{(g)} \frac{\partial t'}{\partial y} + F_g^{(g)}(x, y).
\end{aligned}$$

[**11**] Examinons maintenant le cas où *l'équation caractéristique présente des racines multiples;* pour fixer les idées, soit r' une racine triple de cette équation. En raisonnant comme au début du numéro précédent (n° 10), on remplacera le système (31) par le système (35), dont l'équation caractéristique est (37). Faisant alors abstraction, dans le système (35), de la première équation,

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = r' \frac{\partial u'}{\partial y} + F'_1(x, y),$$

on multipliera les $g - 1$ équations suivantes respectivement par les constantes (provisoirement indéterminées) $p_2, \dots, p_g$, non nulles à la fois, et on ajoutera membre à membre; il viendra :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(p_2 v + p_3 w + \dots + p_g t) = (p_2 a'_2 + p_3 a'_3 + \dots + p_g a'_g) &\frac{\partial u'}{\partial y} \\
+ (p_2 b'_2 + p_3 b'_3 + \dots + p_g b'_g) &\frac{\partial v}{\partial y} \\
+ (p_2 c'_2 + p_3 c'_3 + \dots + p_g c'_g) &\frac{\partial w}{\partial y} \\
+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
+ (p_2 h'_2 + p_3 h'_3 + \dots + p_g h'_g) &\frac{\partial t}{\partial y} \\
+ p_2 F_2 + p_3 F_3 + \dots + p_g F_g). &
\end{aligned}$$

En exprimant que, dans le second membre de cette équation, l'ensemble des termes du premier ordre par rapport aux $g - 1$ inconnues autres que u' est identiquement égal au produit de

$$\frac{\partial}{\partial y}(p_2 v + p_3 w + \dots + p_g t)$$

par un facteur constant r (provisoirement indéterminé), on obtient les $g-1$ conditions

$$(42)\quad \left\{\begin{array}{l} (b'_2 - r)p_2 + b'_3 p_3 + \ldots + b'_g p_g = 0, \\ c'_2 p_2 + (c'_3 - r)p_3 + \ldots + c'_g p_g = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \quad h'_2 p_2 + h'_3 p_3 + \ldots + (h'_g - r)p_g = 0, \end{array}\right.$$

qui entraînent l'équation

$$\left|\begin{array}{cccc} b'_2 - r & b'_3 & \ldots\ldots & b'_g \\ c'_2 & c'_3 - r & \ldots\ldots & c'_g \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h'_2 & h'_3 & \ldots\ldots & h'_g - r \end{array}\right| = 0.$$

En la comparant à l'équation (37), on voit qu'elle n'est autre chose que l'équation caractéristique du système (31), où le degré de multiplicité de la racine r' a simplement diminué d'une unité : elle admet donc r' comme racine double. Soit alors

$$(43)\qquad (p'_2),\quad (p'_3),\quad \ldots,\quad (p'_g)$$

une solution correspondante du système (42) formée de valeurs non nulles à la fois : si, pour fixer les idées, on suppose $(p'_2) \neq 0$, on pourra, dans le système (35), remplacer la deuxième équation par la combinaison linéaire que fournissent les $g-1$ multiplicateurs (43), et le système résultant, que nous désignerons par

(35 *ter*)

sera algébriquement équivalent à (35). Cela étant, on effectuera sur (35 *ter*) la substitution

$$(p'_2)v + (p'_3)w + \ldots + (p'_g)t = v',$$

où v' désigne une nouvelle inconnue destinée à remplacer v, et il viendra :

$$(44)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u'}{\partial x} = r'\dfrac{\partial u'}{\partial y} \hfill + F'_1(x,y), \\ \dfrac{\partial v'}{\partial x} = (a'_2)\dfrac{\partial u'}{\partial y} + r'\dfrac{\partial v'}{\partial y} \hfill + F'_2(x,y), \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = a'_3\dfrac{\partial u'}{\partial y} + (b'_3)\dfrac{\partial v'}{\partial y} + (c'_3)\dfrac{\partial w}{\partial y} + \ldots + (h'_3)\dfrac{\partial t}{\partial y} + F_3(x,y), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial t}{\partial x} = a'_g\dfrac{\partial u'}{\partial y} + (b'_g)\dfrac{\partial v'}{\partial y} + (c'_g)\dfrac{\partial w}{\partial y} + \ldots + (h'_g)\dfrac{\partial t}{\partial y} + F_g(x,y). \end{array}\right.$$

Comme dans toutes les transformations précédentes, lorsqu'on passe, soit du système (35) à celui que nous avons appelé (35 *ter*), soit de ce dernier au système (44), les racines de l'équation caractéristique ne changent pas. En formant cette dernière dans le système (44), il vient :

$$(45)\qquad \begin{vmatrix} r'-r & (a'_2) & a'_3 & \dots & a'_g \\ 0 & r'-r & (b'_3) & \dots & (b'_g) \\ 0 & 0 & (c'_3)-r & \dots & (c'_g) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & (h'_3) & \dots & (h'_g)-r \end{vmatrix} = 0.$$

Cela étant, faisons abstraction, dans le système (44), des deux premières équations, multiplions les $g-2$ suivantes par les constantes (provisoirement indéterminées) $p_3, \dots, p_g$, non nulles à la fois, et ajoutons membre à membre; il viendra :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}(p_3 w + p_4 z + \dots + p_g t) \\ &= [p_3 a'_3 \; + p_4 a'_4 \; + \dots + p_g a'_g] \frac{\partial u'}{\partial y} \\ &+ [p_3(b'_3) + p_4(b'_4) + \dots + p_g(b'_g)] \frac{\partial v'}{\partial y} \\ &+ [p_3(c'_3) + p_4(c'_4) + \dots + p_g(c'_g)] \frac{\partial w}{\partial y} \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ [p_3(h'_3) + p_4(h'_4) + \dots + p_g(h'_g)] \frac{\partial t}{\partial y} \\ &+ p_3 F_3 \; + p_4 F_4 \; + \dots + p_g F_g. \end{aligned}$$

En exprimant que, dans le second membre de cette équation, l'ensemble des termes du premier ordre par rapport aux $g-2$ inconnues autres que u' et v' est identiquement égal au produit de

$$\frac{\partial}{\partial y}(p_3 w + p_4 z + \dots + p_g t)$$

par un facteur constant r (provisoirement indéterminé), on obtient les $g-2$ conditions

$$(46)\qquad \left\{ \begin{aligned} &[(c'_3)-r]p_3 + \dots + (c'_g)p_g = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &(h'_3)p_3 + \dots + [(h'_g)-r]p_g = 0, \end{aligned} \right.$$

qui entraînent l'équation

$$\begin{vmatrix} (c'_3)-r & \dots\dots\dots & (c'_g) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ (h'_3) & \dots\dots\dots & (h'_g)-r \end{vmatrix} = 0.$$

En la comparant à l'équation (45), on voit qu'elle n'est autre chose que l'équation caractéristique du système (31) où le degré de multiplicité de la racine r' a seulement diminué de deux unités : elle admet donc r' comme racine simple. Soit alors

$$(47) \qquad ((p'_3)), \quad ((p'_4)), \quad \dots\dots, \quad ((p'_g))$$

une solution correspondante du système (46) formée de valeurs non nulles à la fois : si, pour fixer les idées, on suppose $((p'_3)) \neq 0$, on pourra, dans le système (44), remplacer la troisième équation par la combinaison linéaire que fournissent les multiplicateurs (47), et le système résultant, que nous désignerons par

(44 *bis*),

sera algébriquement équivalent à (44). Cela étant, on effectuera sur (44 *bis*) la transformation

$$((p'_3))w + ((p'_4))z + \dots + ((p'_g))t = w',$$

où w' désigne une nouvelle inconnue destinée à remplacer w, et il viendra :

$$(48) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x} &= r' \frac{\partial u'}{\partial y} + F'_1(x, y), \\ \frac{\partial v'}{\partial x} &= (a'_2)\frac{\partial u'}{\partial y} + r' \frac{\partial v'}{\partial y} + F'_2(x, y), \\ \frac{\partial w'}{\partial x} &= (a'_3)\frac{\partial u'}{\partial y} + ((b'_3))\frac{\partial v'}{\partial y} + r' \frac{\partial w'}{\partial y} + F'_3(x, y), \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= a'_4 \frac{\partial u'}{\partial y} + (b'_4)\frac{\partial v'}{\partial y} + ((c'_4))\frac{\partial w'}{\partial y} + ((f'_4))\frac{\partial z}{\partial y} + \dots + ((h'_4))\frac{\partial t}{\partial y} + F_4(x, y), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{\partial t}{\partial x} &= a'_g \frac{\partial u'}{\partial y} + (b'_g)\frac{\partial v'}{\partial y} + ((c'_g))\frac{\partial w'}{\partial y} + ((f'_g))\frac{\partial z}{\partial y} + \dots + ((h'_g))\frac{\partial t}{\partial y} + F_g(x, y). \end{aligned} \right.$$

Nous allons maintenant effectuer sur le système (48) la suite des opérations que nous avons effectuées jusqu'ici sur le système proposé (31), mais en considérant, au lieu de r', une autre racine, r'', de l'équation caractéristique. En multipliant les équations (48) respectivement par les constantes (provisoirement indéterminées) p_1, p_2, ..., p_g, non nulles à la fois, et ajoutant membre à membre, il viendra :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}[p_1 u' + p_2 v' + p_3 w' + p_4 z + \ldots\ldots + p_g t] \\
&= [p_1 r' + p_2(a'_2) + p_3(a'_3) + p_4 a'_4 + \ldots\ldots + p_g a'_g] \frac{\partial u'}{\partial y} \\
&+ [\qquad p_2 r' + p_3((b'_3)) + p_4(b'_4) + \ldots\ldots + p_g(b'_g)] \frac{\partial v'}{\partial y} \\
&+ [\qquad\qquad p_3 r' + p_4((c'_4)) + \ldots\ldots + p_g((c'_g))] \frac{\partial w'}{\partial y} \\
&+ [\qquad\qquad\qquad p_4((f'_4)) + \ldots\ldots + p_g((f'_g))] \frac{\partial z}{\partial y} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ [\qquad\qquad\qquad p_4((h'_4)) + \ldots\ldots + p_g((h'_g))] \frac{\partial t}{\partial y} \\
&+ p_1 F'_1 + p_2 F'_2 + p_3 F'_3 + p_4 F_4 + \ldots\ldots + p_g F_g.
\end{aligned}$$

En exprimant que, dans le second membre de cette équation, l'ensemble des termes du premier ordre est identiquement égal au produit de

$$\frac{\partial}{\partial y}[p_1 u' + p_2 v' + p_3 w' + p_4 z + \ldots + p_g t]$$

par un facteur constant r (provisoirement indéterminé), on obtient les g conditions

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned}
&(r' - r)p_1 + (a'_2)p_2 + (a'_3)p_3 + a'_4 p_4 + \ldots\ldots + a'_g p_g = 0, \\
&\qquad (r' - r)p_2 + ((b'_3))p_3 + (b'_4)p_4 + \ldots\ldots + (b'_g)p_g = 0, \\
&\qquad\qquad (r' - r)p_3 + ((c'_4))p_4 + \ldots\ldots + ((c'_g))p_g = 0, \\
&\qquad\qquad\qquad [((f'_4)) - r]p_4 + \ldots\ldots + ((f'_g))p_g = 0, \\
&\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\qquad\qquad\qquad ((h'_4))p_4 + \ldots\ldots + [((h'_g)) - r]p_g = 0,
\end{aligned}\right.$$

qui entraînent l'équation caractéristique. Dans cette dernière, considérons la racine r'', et soit

$$(50)\qquad p''_1,\quad p''_2,\quad p''_3,\quad p''_4,\quad \ldots\ldots,\quad p''_g$$

une solution correspondante du système (49) formée de valeurs non nulles à la fois.

Je dis que les $g-3$ dernières, $p''_4, \ldots, p''_g$, ne peuvent être nulles à la fois : car, si elles l'étaient, les trois premières équations (49) donneraient

$$
\begin{aligned}
(r'-r'')p''_1 + (a'_2)p''_2 + (a'_3)p''_3 &= 0,\\
(r'-r'')p''_2 + ((b'_3))p''_3 &= 0,\\
(r'-r'')p''_3 &= 0;
\end{aligned}
$$

en les considérant dans l'ordre inverse et tenant compte de ce que $r'-r''$ n'est pas nul, on en tirerait successivement

$$p''_3=0, \quad p''_2=0, \quad p''_1=0,$$

en sorte que les g multiplicateurs (50) seraient tous nuls, contrairement à ce qui précède. Cela étant, si, pour fixer les idées, on suppose $p''_4 \neq 0$, on pourra, dans le système (48), remplacer la quatrième équation par la combinaison linéaire que fournissent les multiplicateurs (50), et le système résultant, que nous désignerons par

(48 *bis*),

sera algébriquement équivalent à (48). On effectuera alors sur (48 *bis*) la substitution

$$p''_1 u' + p''_2 v' + p''_3 w' + p''_4 z + \ldots + p''_g t = z',$$

où z' désigne une nouvelle inconnue destinée à remplacer z, et on tombera sur un système où les quatre premières équations auront la forme réduite

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial x} &= r'\frac{\partial u'}{\partial y} + F'_1(x,y),\\
\frac{\partial v'}{\partial x} &= (a'_2)\frac{\partial u'}{\partial y} + r'\frac{\partial v'}{\partial y} + F'_2(x,y),\\
\frac{\partial w'}{\partial x} &= (a'_3)\frac{\partial u'}{\partial y} + ((b'_3))\frac{\partial v'}{\partial y} + r'\frac{\partial w'}{\partial y} + F'_3(x,y);\\
\frac{\partial z'}{\partial x} &= r''\frac{\partial z'}{\partial y} + F''_4(x,y).
\end{aligned}
$$

Et ainsi de suite.

Finalement, *le système primitif* (31) *se trouvera remplacé par un certain nombre de groupes, correspondant respectivement aux diverses racines distinctes de l'équation caractéristique* (32). *Si l'on désigne par r l'une de ces racines, et par α son degré de multiplicité, le groupe correspondant, impliquant un nombre égal d'inconnues,*

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots\ldots, \quad u_\alpha,$$

aura la forme

$$(51)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = r\,\dfrac{\partial u_1}{\partial y} & + \mathrm{K}_1(x, y), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = a_{1,2}\,\dfrac{\partial u_1}{\partial y} + r\,\dfrac{\partial u_2}{\partial y} & + \mathrm{K}_2(x, y), \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x} = a_{1,3}\,\dfrac{\partial u_1}{\partial y} + a_{2,3}\,\dfrac{\partial u_2}{\partial y} + r\,\dfrac{\partial u_3}{\partial y} & + \mathrm{K}_3(x, y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial u_\alpha}{\partial x} = a_{1,\alpha}\,\dfrac{\partial u_1}{\partial y} + a_{2,\alpha}\,\dfrac{\partial u_2}{\partial y} + a_{3,\alpha}\,\dfrac{\partial u_3}{\partial y} + \dots + a_{\alpha-1,\alpha}\dfrac{\partial u_{\alpha-1}}{\partial y} + r\,\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial y} & + \mathrm{K}_\alpha(x, y), \end{cases}$$

où les a sont des constantes connues, et

$$\mathrm{K}_1(x, y), \quad \mathrm{K}_2(x, y), \quad \mathrm{K}_3(x, y), \quad \dots\dots, \quad \mathrm{K}_\alpha(x, y)$$

des fonctions connues de x, y, développables (à l'intérieur de quelque domaine) par la formule de Maclaurin.

[**12**] Pour passer du système (31) au système final, il suffit, comme on l'a vu par l'exposition qui précède (nos 10 et 11), d'exécuter sur un certain nombre de systèmes successifs la double opération consistant :

1° A remplacer chaque fois le système d'où l'on part par un système algébriquement équivalent, formé de combinaisons linéaires à multiplicateurs constants;

2° A remplacer ensuite ce deuxième système par un troisième, à l'aide d'une transformation linéaire, à coefficients constants, des fonctions inconnues.

Il va sans dire que, si l'on considère ces trois systèmes, les relations linéaires existant entre les inconnues du premier et celles du dernier relient également leurs déterminations initiales, c'est-à-dire les fonctions de y auxquelles ces inconnues se réduisent respectivement pour $x = 0$. Il est manifeste, d'autre part, qu'après l'achèvement complet des calculs, chacun des groupes, de forme (51), qui composent le système final, peut être traité indépendamment des autres. En conséquence, *la recherche*, à laquelle nous avons été ramené en dernier lieu (n° 9), *des intégrales de* (31) *développables en séries de Maclaurin, et se réduisant, pour* $x = 0$, *à des fonctions données de* y, *se ramène, de proche en proche, à une semblable recherche effectuée dans divers systèmes dont chacun a la forme* (51).

Or, nous allons actuellement démontrer ce qui suit :

Les fonctions

$$\mathrm{K}_1(x, y), \quad \mathrm{K}_2(x, y), \quad \dots\dots, \quad \mathrm{K}_\alpha(x, y),$$

qui figurent dans les seconds membres du système (51), *étant supposées développables (à l'intérieur de quelque domaine) par la formule de Maclaurin, la recherche des inté-*

grales de (51) *développables par cette même formule, et se réduisant, pour* $x=0$, *à des fonctions données de* y (*développables par la formule dont il s'agit*), *se ramène à des quadratures.*

I. *Étant donnée une fonction* $f(x, y)$, *développable en série taylorienne à l'intérieur de quelque domaine ayant pour centre* (x_0, y_0), *si l'on effectue successivement sur cette fonction* m *quadratures relatives à* x, *en ayant soin que le résultat de chacune s'annule pour* $x=x_0$, *et* n *dérivations premières relatives à* y, *le résultat final est indépendant de l'ordre dans lequel ces* $m+n$ *opérations ont pu être exécutées.*

Si l'on désigne en effet par

$$(52) \qquad \sum_{a,b} A_{a,b} \frac{(x-x_0)^a}{1.2\ldots a} \frac{(y-y_0)^b}{1.2\ldots b}$$

le développement de $f(x, y)$ construit à partir des valeurs initiales x_0, y_0, il suffit, pour effectuer sur $f(x, y)$ les $m+n$ opérations dont il s'agit, de les effectuer séparément sur chacun des termes de la série (52) : or, quel que soit l'ordre choisi, le terme mis en évidence sous le signe Σ donnera,

si b est $<n$, un résultat nul;

si $b=n$, le résultat $A_{a,b} \dfrac{(x-x_0)^{a+m}}{1.2\ldots(a+m)}$;

et si b est $>n$, le résultat

$$A_{a,b} \frac{(x-x_0)^{a+m}}{1.2\ldots(a+m)} \frac{(y-y_0)^{b-n}}{1.2\ldots(b-n)}.$$

On pourra, notamment, exécuter sur $f(x, y)$, *d'abord* les n dérivations premières relatives à y, et *ensuite* les m quadratures relatives à x; le résultat final se présentera alors sous la forme

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n} dx,$$

où le nombre des signes $\int$ est égal à m.

II. *Si l'on désigne par* u *une fonction inconnue des deux variables indépendantes* x *et* y, *et par*

$$f(x, y), \qquad \upsilon(y)$$

deux fonctions données, développables l'une et l'autre (à l'intérieur de quelque domaine) par la formule de Maclaurin, l'intégrale de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y),$$

développable par cette même formule, et satisfaisant à la condition initiale

$$u = \upsilon(y) \quad \text{pour} \quad x = 0,$$

est

$$u = \upsilon(y) + \int_0^x f(x, y)\, dx.$$

III. Revenons à notre énoncé.

Si l'on opère sur le système (51) la transformation

$$\left\{\begin{aligned} x &= \mathrm{X}, \\ y &= \mathrm{Y} - r\mathrm{X}, \end{aligned}\right. \tag{53}$$

où X, Y désignent de nouvelles variables substituées à x, y, les anciennes dérivées premières d'une fonction quelconque u s'expriment à l'aide des dérivées nouvelles du même ordre par les formules

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \mathrm{X}} + r\frac{\partial u}{\partial \mathrm{Y}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \mathrm{Y}},$$

et le système (51) devient

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{X}} &= && \mathrm{K}_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y} - r\mathrm{X}), \\ \frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{X}} &= a_{1,2}\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{Y}} && + \mathrm{K}_2(\mathrm{X}, \mathrm{Y} - r\mathrm{X}), \\ \frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{X}} &= a_{1,3}\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{Y}} + a_{2,3}\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{Y}} && + \mathrm{K}_3(\mathrm{X}, \mathrm{Y} - r\mathrm{X}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial \mathrm{X}} &= a_{1,\alpha}\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{Y}} + a_{2,\alpha}\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{Y}} + \ldots + a_{\alpha-1,\alpha}\frac{\partial u_{\alpha-1}}{\partial \mathrm{Y}} && + \mathrm{K}_\alpha(\mathrm{X}, \mathrm{Y} - r\mathrm{X}), \end{aligned}\right. \tag{54}$$

ou, en posant $\mathrm{K}_j(\mathrm{X}, \mathrm{Y} - r\mathrm{X}) = \mathrm{P}_j(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, $j = 1, 2, \ldots, \alpha$,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{X}} &= && \mathrm{P}_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \\ \frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{X}} &= a_{1,2}\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{Y}} && + \mathrm{P}_2(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \\ \frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{X}} &= a_{1,3}\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{Y}} + a_{2,3}\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{Y}} && + \mathrm{P}_3(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial \mathrm{X}} &= a_{1,\alpha}\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{Y}} + a_{2,\alpha}\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{Y}} + \ldots + a_{\alpha-1,\alpha}\frac{\partial u_{\alpha-1}}{\partial \mathrm{Y}} && + \mathrm{P}_\alpha(\mathrm{X}, \mathrm{Y}). \end{aligned}\right. \tag{55}$$

Si l'on désigne maintenant par $\upsilon_j(y)$ $[j=1, 2, \ldots, \alpha]$ une fonction arbitraire de y (développable en série de Maclaurin), par $\upsilon'_j(y)$, $\upsilon''_j(y)$, ... ses dérivées successives, et par

$$(56) \qquad \Upsilon_1(x, y), \quad \Upsilon_2(x, y), \quad \ldots\ldots, \quad \Upsilon_\alpha(x, y)$$

les intégrales de (51) répondant à la condition initiale

$$(57) \qquad \left.\begin{array}{l} u_1 = \upsilon_1(y) \\ u_2 = \upsilon_2(y) \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_\alpha = \upsilon_\alpha(y) \end{array}\right\} \text{pour } x = 0,$$

on a les identités

$$(58) \qquad \left\{\begin{array}{l} \Upsilon_1(0, y) = \upsilon_1(y), \\ \Upsilon_2(0, y) = \upsilon_2(y), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Upsilon_\alpha(0, y) = \upsilon_\alpha(y). \end{array}\right.$$

D'autre part, les intégrales (56), soumises à la transformation (53), deviennent

$$(59) \qquad \Upsilon_1(X, Y - rX), \quad \Upsilon_2(X, Y - rX), \quad \ldots\ldots, \quad \Upsilon_\alpha(X, Y - rX),$$

et se réduisent, pour $X = 0$, à

$$\Upsilon_1(0, Y), \quad \Upsilon_2(0, Y), \quad \ldots\ldots, \quad \Upsilon_\alpha(0, Y),$$

c'est-à-dire, en vertu de (58), à

$$\upsilon_1(Y), \quad \upsilon_2(Y), \quad \ldots\ldots, \quad \upsilon_\alpha(Y).$$

Il suffit donc, pour avoir les fonctions (59), transformées des intégrales (56), d'intégrer le système (54) ou (55) avec la condition initiale

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = \upsilon_1(Y) \\ u_2 = \upsilon_2(Y) \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_\alpha = \upsilon_\alpha(Y) \end{array}\right\} \text{pour } X = 0,$$

toute semblable à (57).

Or, cette intégration peut s'effectuer de proche en proche de la première équation du système (55) à la dernière, et il vient successivement, en appliquant les alinéas I et II,

$$u_1 = \upsilon_1(\mathrm{Y}) + \int_0^{\mathrm{X}} \mathrm{P}_1 d\mathrm{X},$$

$$u_2 = \upsilon_2(\mathrm{Y}) + a_{1,2}\left[\frac{\mathrm{X}}{1}\upsilon'_1(\mathrm{Y}) + \int_0^{\mathrm{X}} d\mathrm{X}\int_0^{\mathrm{X}}\frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial \mathrm{Y}}d\mathrm{X}\right] + \int_0^{\mathrm{X}} \mathrm{P}_2 d\mathrm{X},$$

$$u_3 = \upsilon_3(\mathrm{Y}) + a_{1,3}\left[\frac{\mathrm{X}}{1}\upsilon'_1(\mathrm{Y}) + \int_0^{\mathrm{X}} d\mathrm{X}\int_0^{\mathrm{X}}\frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial \mathrm{Y}}d\mathrm{X}\right]$$

$$+ a_{2,3}\left[\frac{\mathrm{X}}{1}\upsilon'_2(\mathrm{Y}) + a_{1,2}\frac{\mathrm{X}^2}{1.2}\upsilon''_1(\mathrm{Y}) + a_{1,2}\int_0^{\mathrm{X}} d\mathrm{X}\int_0^{\mathrm{X}} d\mathrm{X}\int_0^{\mathrm{X}}\frac{\partial^2 \mathrm{P}_1}{\partial \mathrm{Y}^2}d\mathrm{X} + \int_0^{\mathrm{X}} d\mathrm{X}\int_0^{\mathrm{X}}\frac{\partial \mathrm{P}_2}{\partial \mathrm{Y}}d\mathrm{X}\right]$$

$$+ \int_0^{\mathrm{X}} \mathrm{P}_3 d\mathrm{X},$$

. . . . ,

. . . .

Ce calcul, qui ne comporte, comme on le voit, que des quadratures, donnera pour $u_1, u_2, \ldots, u_\alpha$ certaines fonctions de X, Y; dans ces dernières, on opérera le changement de variables inverse de (53),

$$\mathrm{X} = x,$$
$$\mathrm{Y} = y + rx,$$

et l'on aura ainsi les intégrales de (51) répondant à la condition initiale (57).

[**13**] *La forme algébrique* (26) *étant supposée non identiquement nulle, et des valeurs initiales déterminées, x_0, y_0, ayant été choisies pour les variables indépendantes x, y dans une région d'olotropie commune aux divers seconds membres du système* (25), *la recherche des intégrales de ce système développables en séries tayloriennes à l'intérieur de quelque domaine ayant pour centre (x_0, y_0) se ramène à des quadratures.*

C'est ce qui résulte du simple rapprochement des nos 7, 8, 9 et 12.