ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

SUR CERTAINES QUESTIONS QUI SE RATTACHENT AU PROBLÈME DES EFFORTS DANS LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ,

PAR A. KORN.

Dans mon Mémoire *Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, dans le cas où les efforts sont donnés à la surface* (¹), j'ai résolu le problème de trouver trois fonctions u, v, w de x, y, z continues avec leurs premières dérivées à l'intérieur τ d'une surface σ fermée et satisfaisant aux équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta u + k\frac{\partial\theta}{\partial x} &= 0, \\ \Delta v + k\frac{\partial\theta}{\partial y} &= 0, \\ \Delta w + k\frac{\partial\theta}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ dans } \tau;$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \frac{1-k}{2}\theta\cos(\nu x) - \frac{1}{2}[\mathfrak{w}\cos(\nu y) - \mathfrak{v}\cos(\nu z)] + f_1, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} &= \frac{1-k}{2}\theta\cos(\nu y) - \frac{1}{2}[\mathfrak{u}\cos(\nu z) - \mathfrak{w}\cos(\nu x)] + f_2, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} &= \frac{1-k}{2}\theta\cos(\nu z) - \frac{1}{2}[\mathfrak{v}\cos(\nu x) - \mathfrak{u}\cos(\nu y)] + f_3, \end{aligned} \right.$$

(¹) *Ann. de la Fac. des Sciences de Toulouse*, 1908, p. 165.

où (¹) k est un nombre donné $> \frac{1}{3}$, et f_1, f_2, f_3, trois fonctions données à la surface, continues de telle manière que l'on ait pour deux points (ξ_1, η_1, ζ_1) et (ξ_2, η_2, ζ_2) de σ quelconques dont nous désignons la distance par r_{12} :

$$
(3) \qquad \left.\begin{array}{l} |f_1(\xi_2\eta_2\zeta_3) - f_1(\xi_1\eta_1\xi_1)| \\ |f_2(\xi_2\eta_2\zeta_2) - f_2(\xi_1\eta_1\zeta_1)| \\ |f_3(\xi_2\eta_2\zeta_2) - f_3(\xi_1\eta_1\zeta_1)| \end{array}\right\} \overline{\overline{<}}\, \mathcal{A}\, r_{12}^{\lambda},
$$

$\mathcal{A}$ étant une constante finie, $\lambda > 0$. Quant à la surface σ, je l'ai supposée fermée et possédant en chacun de ses points un plan tangent unique et deux rayons de courbure principaux bien déterminés.

J'ai pu traiter le cas général d'un k quelconque $> \frac{1}{3}$, après avoir résolu le problème pour le cas spécial

$$k = 1.$$

Ce problème « préliminaire » :

$$
(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta u + \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \ldots, \text{ dans } \tau; \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -\dfrac{1}{2}[\mathfrak{w} \cos(\nu y) - \mathfrak{v} \cos(\nu z)] + f_1, \ldots, \text{ à la surface } \sigma, \end{array}\right.
$$

sera résolu, si l'on sait résoudre le problème transformé, de trouver trois fonctions harmoniques continues avec leurs premières dérivées dans τ, u', v', w', satisfaisant aux conditions

$$
(5) \qquad \frac{\partial u'}{\partial \nu} = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r} + \frac{\partial \mathcal{U}'}{\partial \nu} - \frac{1}{2}[(\mathfrak{w}' - \mathfrak{W}')\cos(\nu y) - (\mathfrak{v}' - \mathfrak{V}')\cos(\nu z)] + \frac{f_1}{4}, \ldots, \text{ à la surface } \sigma,
$$

(¹) Nous nous servirons toujours des abréviations :

$$
\mathfrak{u} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},
$$

$$
\mathfrak{v} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.
$$

$$
\mathfrak{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},
$$

par les fonctions

$$u = 4\left(u' - \mathcal{U}'\right) + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r}, \ldots, \tag{6}$$

si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{U}' &= -\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left[\frac{\partial \psi'}{\partial y}\cos(\nu z) - \frac{\partial \psi'}{\partial z}\cos(\nu y)\right]\frac{d\sigma}{r}, \\ \mathcal{V}' &= -\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left[\frac{\partial \psi'}{\partial z}\cos(\nu x) - \frac{\partial \psi'}{\partial x}\cos(\nu z)\right]\frac{d\sigma}{r}, \\ \mathcal{W}' &= -\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left[\frac{\partial \psi'}{\partial x}\cos(\nu y) - \frac{\partial \psi'}{\partial y}\cos(\nu x)\right]\frac{d\sigma}{r}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

et si nous définissons la fonction ψ' comme la fonction harmonique du domaine τ ayant les dérivées normales

$$\frac{\partial \psi'}{\partial \nu} = \mathfrak{u}'\cos(\nu x) + \mathfrak{v}'\cos(\nu y) + \mathfrak{w}'\cos(\nu z) \equiv \mathfrak{u}'_\nu, \ldots, \text{ à la surface } \sigma. \tag{8}$$

Pour résoudre le problème transformé (5), j'ai cherché à traiter le problème

$$\frac{\partial u'}{\partial \nu} = \lambda\left[-3\frac{\partial u'}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r} + 4\frac{\partial \mathcal{U}'}{\partial \nu} - 2\left\{(\mathfrak{w}' - \mathfrak{W})\cos(\nu y) - \mathfrak{v}' - \mathfrak{V})'\cos(\nu z)\right\}\right] + f_1, \ldots, \text{ à la surface } \sigma, \tag{9}$$

qui devient identique avec le problème (5) pour $\lambda = +1$, par la méthode des approximations successives. On construit successivement les fonctions harmoniques dans τ, u_j', v_j', w_j', satisfaisant aux conditions :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u_0'}{\partial \nu} = f_1, \ldots, \text{ à la surface } \sigma, \\ &\int_\tau u_0' d\tau = 0, \ldots; \end{aligned}\right. \tag{10^a}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u_j'}{\partial \nu} = -3\frac{\partial u_{j-1}'}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu}\int_\tau \theta_{j-1}' \frac{d\tau}{r} + 4\frac{\partial \mathcal{U}_{j-1}'}{\partial \nu} \\ &\quad -2[(\mathfrak{w}_{j-1}' - \mathfrak{W}_{j-1}')\cos(\nu y) - (\mathfrak{v}_{j-1}' - \mathfrak{V}_{j-1}')\cos(\nu z)], \ldots, \text{ à la surface } \sigma, \\ &\int_\tau u_j' d\tau = 0, \ldots, \qquad j = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right. \tag{10^b}$$

en posant

$$\mathcal{U}_j' = -\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left[\frac{\partial \psi_j'}{\partial y}\cos(\nu z) - \frac{\partial \psi_j'}{\partial z}\cos(\nu y)\right]\frac{d\sigma}{r}, \ldots, \qquad j = 0, 1, 2.... \tag{10^c}$$

et en définissant la fonction ψ_j' comme la fonction harmonique du domaine τ ayant les dérivées normales

$$(10^d) \qquad \frac{\partial \psi_j'}{\partial \nu} = \mathfrak{u}_{j\nu}', \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, \text{ à la surface } \sigma.$$

Alors les fonctions

$$(11) \qquad u = u_0' + \lambda u_1' + \lambda^2 u_2' + \ldots, \ldots$$

seront les solutions du problème (9), si ces séries convergent uniformément avec leurs dérivées premières dans tout le domaine τ.

Quoique cette convergence ne puisse pas être démontrée pour un λ quelconque, on peut la démontrer toujours, si l'on remplace les fonctions f_1, f_2, f_3 par les fonctions

$$\alpha_0 f_1 + \alpha_1 \frac{\partial u_1'}{\partial \nu} + \alpha_2 \frac{\partial u_2'}{\partial \nu} + \ldots + \alpha_p \frac{\partial u_p'}{\partial \nu}, \ldots$$

en choisissant le nombre p assez grand et en choisissant convenablement les constantes

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p,$$

qui doivent encore satisfaire à l'équation

$$(12) \qquad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_p^2 = 1.$$

Après avoir résolu ainsi ce problème :

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u''}{\partial \nu} = \alpha_0 f_1 + \alpha_1 \dfrac{\partial u_1'}{\partial \nu} + \ldots + \alpha_p \dfrac{\partial u_p'}{\partial \nu} + \lambda \left\{ -3 \dfrac{\partial u''}{\partial \nu} - \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial \nu} \displaystyle\int_\tau \theta'' \frac{d\tau}{r} \right. \\ \qquad \left. + 4 \dfrac{\partial \mathfrak{U}''}{\partial \nu} - 2\left[(\mathfrak{w}'' - \mathfrak{W}'')\cos(\nu y) - (\mathfrak{v}'' - \mathfrak{V}'')\cos(\nu z)\right] \right\} \ldots \text{ à la surface } \sigma, \\ \displaystyle\int_\tau u''\, d\tau = 0, \ldots \end{cases}$$

on peut donner les solutions u', v', w' du problème (9) dans la forme suivante :

$$(14) \qquad \begin{cases} u' = \dfrac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{D}}, \\ v' = \dfrac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{D}}, \\ w' = \dfrac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{D}}, \end{cases}$$

en posant :

$$(15)\qquad \mathfrak{P} = \begin{vmatrix} u'' & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & . & \alpha_p \\ u_0' & -\lambda & 0 & \dots & . & 0 \\ u_1' & 1 & -\lambda & \dots & . & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ u_{p-1}' & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \dots;$$

$$(16)\qquad \mathfrak{D} = (-1)^p \left\{ \alpha_0 \lambda^p + \alpha_1 \lambda^{p-1} + \dots + \alpha_{p-1}\lambda + \alpha_p \right\}.$$

J'ai montré dans mon Mémoire cité ci-dessus que la valeur

$$\lambda = +1$$

ne peut pas être un pôle de cette solution, si les conditions

$$(17)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\sigma (yf_3 - zf_2)d\sigma = 0, \\ \displaystyle\int_\sigma (zf_1 - xf_3)d\sigma = 0, \\ \displaystyle\int_\sigma (xf_2 - yf_1)d\sigma = 0 \end{cases}$$

sont remplies; ces conditions sont nécessaires pour que le problème des efforts possède des solutions.

Je tiens à préciser dans les remarques qui vont suivre quelques points dans la démonstration que j'ai donnée dans le Mémoire cité.

§ 1.

La première remarque concerne la simplicité des pôles de la solution (14). Si l'on avait pour une valeur $\lambda = \lambda_j$

$$(18)\qquad u' = \frac{\hat{u}_j'(x, y, z)}{(\lambda - \lambda_j)^\alpha} + \Phi(\lambda, x, y, z), \dots, \qquad \alpha > 1,$$

où nous désignons par

$$\hat{u}_j', \ \hat{v}_j', \ \hat{w}_j'$$

des fonctions continues dans τ avec leurs premières dérivées et par

$$\Phi, \ X, \ \Psi$$

des fonctions continues dans τ avec leurs premières dérivées pour

$$\lambda = \lambda_j$$

dans le voisinage du point $\lambda = \lambda_j$, alors on trouverait

$$\hat{\mathfrak{u}}_j' \equiv 0, \ldots \tag{19}$$

(cp. le Mémoire cité pp. 207-210, formules 150); nous avions conclu de ces équations aussi

$$\hat{u}_j' \equiv 0, \ldots$$

Cette conclusion est rigoureuse, excepté dans deux cas, où il peut y avoir une exception, pour

$$\lambda_j = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \lambda_j = -1.$$

Dans le premier cas, on aurait

$$\hat{\Theta}_j' \equiv 0.$$

donc

$$\hat{u}_j' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ldots, \tag{20}$$

où φ est une fonction harmonique dans τ; dans le second cas, on aurait :

$$\left\{ \begin{aligned} &\hat{\Theta}_j' = \text{const.} = c, \\ &\hat{u}_j' = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \frac{d\tau}{r}, \ldots \end{aligned} \right. \tag{21}$$

Ces deux valeurs singulières de λ, que je n'ai pas indiquées dans mon Mémoire, ne sont jamais des pôles pour $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$; pour ces fonctions il n'y a rien à ajouter à ce qui a été dit dans mon Mémoire, mais elles peuvent être des pôles pour les solutions u', v', w', et il n'est même pas sûr d'abord que ces pôles soient simples.

Pour ne pas omettre ces deux valeurs singulières, il faut remplacer dans le théorème 1 (p. 205) de mon Mémoire les formules (138) par les formules suivantes :

$$u' = \frac{1}{(3\lambda+1)^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{c}{4\pi(\lambda+1)^\beta} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \frac{d\tau}{r} + \frac{\mathfrak{P}(\lambda, x, y, z)}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)}, \tag{22}$$

où φ est une fonction harmonique du domaine τ et c une constante, α et β des nombres entiers et positifs, finis $\gtreqless 1$.

Quoique cette remarque ne touche en rien aux résultats obtenus concernant les fonctions

$$\mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \mathfrak{w}'$$

et quoique les fonctions (20) et (21) ne doivent pas être ajoutées aux triplets « préliminaires »

$$\hat{u}_k', \hat{v}_k', \hat{w}_k'$$

définis par les équations 139-141 de mon Mémoire, nous devons nous occuper de plus près de ces deux valeurs singulières de λ; nous allons démontrer que ces valeurs ne peuvent être que des pôles simples pour u', v', w', et nous allons voir comment nous pourrons, — en séparant des fonctions données f_1, f_2, f_3, trois fonctions F_1, F_2, F_3, que nous pourrons trouver, — nous affranchir de ces singularités supplémentaires des solutions u', v, w', de manière que l'on puisse procéder, comme je l'ai fait dans mon Mémoire, sans égard à ces singularités supplémentaires pour u', v', w'.

On remarquera du reste que les fonctions (20) et (21) sont des solutions des équations

$$\Delta u + k\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \ldots$$

pour un k quelconque, et pour $k = 1$ la séparation des fonctions F_1, F_2, F_3 des f_1, f_2, f_3 ne sera pas autre chose que la séparation de pressions de la forme

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial\nu}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial\nu}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial\nu},$$

ψ étant une fonction satisfaisant à la condition

$$\Delta\psi = \text{const.}$$

§ 2.

Comme les singularités supplémentaires pour

$$u',\ v',\ w'$$

ne touchent en rien à la manière dont se comportent les fonctions $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$, les séries

$$\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}_0' + \lambda\mathfrak{u}_1' + \lambda^2\mathfrak{u}_2' + \ldots, \ldots \tag{23}$$

seront absolument et uniformément convergentes dans τ, si l'on a

$$|\lambda| \lesseqqgtr \frac{1}{3}.$$

A défaut de triplets préliminaires possédant des nombres correspondants négatifs

$$-1 \lesseqqgtr \lambda_j < -\frac{1}{3},$$

les séries (23) garderont cette convergence aussi pour

$$|\lambda| \lesseqqgtr 1;$$

dans le cas qu'il y ait des triplets préliminaires possédant des nombres correspondants négatifs

$$-1 \leqq \lambda_j < -\frac{1}{3},$$

les séries resteront aussi convergentes pour

$$|\lambda| \leqq 1,$$

si on forme ces séries en partant au lieu des fonctions f_1, f_2, f_3 des fonctions

$$f_1 - \sum_{-1 \leqq \lambda_j < -\frac{1}{3}}^{j} \mathfrak{C}_j \frac{\partial \hat{u}_j'}{\partial \nu}, \ldots,$$

où

$$\mathfrak{C}_j = \int_i \left\{ \mathbf{u}_0' \hat{\mathbf{u}}_j' + \ldots \right\} d\tau - \int_{i+e} \left\{ \frac{\partial \chi_0'}{\partial x} \frac{\partial \hat{\chi}_j'}{\partial x} + \ldots \right\} d\tau, \ldots$$

si nous définissons les fonctions χ_0' et $\hat{\chi}_j'$ comme les fonctions harmoniques de l'intérieur et de l'extérieur de σ ayant les propriétés

$$\chi_0' = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \psi_0' \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\sigma, \quad \frac{\partial \psi_0'}{\partial \nu} = \mathbf{u}_{0\nu}';$$

$$\hat{\chi}_j' = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \hat{\psi}_j' \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\sigma, \quad \frac{\partial \hat{\psi}_j'}{\partial \nu} = \hat{\mathbf{u}}_{j\nu}';$$

Tout cela s'ensuit tout à fait rigoureusement des déductions de mon Mémoire; ce qui demande une déduction spéciale en raison des singularités supplémentaires de u', v', w' pour

$$\lambda = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \lambda = -1,$$

c'est de savoir si nous pouvons tirer de la convergence des séries (23) aussi la convergence des séries

(24) $$u' = u_0' + \lambda u_1' + \lambda^2 u_2' + \ldots, \ldots$$

La convergence des séries (23) pour $|\lambda| \leqq 1$ [1] est telle que l'on a

(25) $$|\mathbf{u}_j'| \leqq \text{const. fin. } \mathfrak{L}^j, \ldots$$

---

(1) Après l'élimination des triplets préliminaires possédant des nombres correspondants négatifs

$$-1 \leqq \lambda_j < -\frac{1}{3}.$$

où $\mathfrak{L}$ est un nombre satisfaisant à l'inégalité

$$0 \overline{\gtrless} \mathfrak{L} < 1;$$

quant à la continuité des fonctions $\mathfrak{u}_j'$, $\mathfrak{v}_j'$, $\mathfrak{w}_j'$, on sait que l'on a, pour deux points (ξ_1, η_1, ζ_1) et (ξ_2, η_2, ζ_2) de σ quelconques dont nous désignons la distance par r_{12} :

(26) $$|\mathfrak{u}_j'(\xi_2\eta_2\zeta_2) - \mathfrak{u}_j'(\xi_1\eta_1\zeta_1)| \overline{\gtrless} \text{const. fin. } \mathfrak{L}^j r_{12}^\lambda, \quad (0 < \lambda < 1).$$

Les équations (10^b) nous permettent donc aussi de conclure (cp. p. 193 de mon Mémoire) :

(27) $$|\theta_j' + \theta_{j-1}'| \overline{\gtrless} \text{const. fin. } \mathfrak{L}^j,$$

(28) $$|\theta_j'(\xi_2\eta_2\zeta_2) + \theta_{j-1}'(\xi_2\eta_2\zeta_2) - \theta_j'(\xi_1\eta_1\zeta_1) - \theta_{j-1}'(\xi_1\eta_1\zeta_1)| \overline{\gtrless} \text{const. fin. } \mathfrak{L}^j r_{12}^\lambda.$$

Nous aurons donc en tout le résultat :

(29) $$\lim_{j=\infty} (-1)^j \theta_j' = +\theta_0' - (\theta_1' + \theta_0') + (\theta_2' + \theta_1') - \ldots = c\,{}^{(1)},$$

où c est une constante bien définie.

Les équations (10^b) nous montrent que l'on aura

$$\lim_{j=\infty} \theta_j' = 0,$$

si l'on part au lieu des fonctions f_1, f_2, f_3, des fonctions

$$f_1 - \frac{c}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu} \int_\tau \frac{d\tau}{r}, \ldots$$

où c est la constante définie par (29). Donc en séparant ces fonctions de f_1, f_2, f_3, nous aurons

$$\lim_{j=\infty} \theta_j' = 0,$$

(30) $$|\theta_j'| \overline{\gtrless} \text{const. fin. } \mathfrak{L}^j; \quad |\theta_j'(\xi_2\eta_2\zeta_2) - \theta_j'(\xi_1\eta_1\zeta_1)| \overline{\gtrless} \text{const. fin. } \mathfrak{L}^j r_{12}^\lambda,$$

et nous serons assurés de la convergence de la série

(31) $$\theta' = \theta_0' + \lambda\theta_1' + \lambda^2\theta_2' + \ldots$$

pour

$$|\lambda| \overline{\gtrless} 1.$$

---

(1) La constance de $\lim (-1)^j \theta_j'$ est une conséquence des inégalités (25) (26).

Il s'agit maintenant de la convergence des séries (24). Nous pouvons tirer des équations (10^b) la convergence des séries

$$(32)\qquad u_0' + \lambda(u_1' + 3u_0') + \lambda^2(u_2' + 3u_1') + \dots, \dots$$

pour $|\lambda| \overline{\gtrless} 1$.

Les fonctions

$$(33)\qquad \lim_{j=\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^j u_j = u_0' - \frac{1}{3}(u_1' + 3u_0') + \frac{1}{9}(u_2' + 3u_1') - \dots = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \dots$$

seront donc des fonctions bien définies, elles seront du reste les dérivées premières d'une fonction φ harmonique à l'intérieur de σ en raison des inégalités (25), (26) et (30).

Les équations (10^b) nous montrent que l'on aura

$$\lim_{j=\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^j u_j = 0, \dots$$

si l'on part au lieu des fonctions f_1, f_2, f_3 des fonctions

$$(35)\qquad f_1 - \frac{c}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu}\int_\tau \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial \nu}, \dots,$$

où c est la constante définie par (29) et φ la fonction harmonique définie à une constante additive près par les équations (33). Donc en séparant ces fonctions de f_1, f_2, f_3, nous aurons

$$(36)\qquad \begin{cases} |u_j'| \overline{\gtrless} \text{const. fin.}\, \mathfrak{L}^j, \dots, \\ \left|\mathfrak{D}_1 u_j'\right| \overline{\gtrless} \text{const. fin.}\, \mathfrak{L}^j, \dots, \end{cases}$$

et nous serons assurés de la convergence des séries

$$(37)\qquad u' = u_0' + \lambda u_1' + \lambda^2 u_2' + \dots, \dots$$

et de leurs dérivées premières pour

$$|\lambda| \overline{\gtrless} 1.$$

Si nous rajoutons de nouveau les fonctions séparées, nous rajoutons aux solutions ne possédant pas de singularités pour

$$|\lambda| \overline{\gtrless} 1$$

les fonctions

$$\frac{1}{3\lambda + 1}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{c}{4\pi(\lambda + 1)}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \frac{d\tau}{r}, \dots,$$

comme on tire directement des équations (10^b). Nous voyons donc en effet que les valeurs

$$\lambda = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \lambda = -1$$

ne peuvent être que des pôles simples pour les solutions u', v', w', et nous savons maintenant nous débarrasser de ces singularités supplémentaires.

§ 3.

Après avoir précisé ainsi les résultats obtenus dans le Mémoire cité ci-dessus, je me suis demandé, si les singularités supplémentaires pour

$$\lambda = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \lambda = -1$$

ne pourraient pas avoir une influence sur la démonstration de l'inégalité

$$(38) \qquad \frac{1}{2}\int_\tau (\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2)d\tau \overline{\gtrless} (1-\varepsilon)\int_\tau \mathcal{S}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\tau$$

que j'ai donnée (¹) pour trois fonctions u, v, w quelconques continues dans τ avec leurs premières dérivées, de manière que l'on ait pour deux points (ξ_1, η_1, ζ_1) et (ξ_2, η_2, ζ_2) de σ quelconques dont nous désignons la distance par r_{12} :

$$(39) \qquad \left|\mathfrak{D}_1 u(\xi_2\eta_2\zeta_2) - \mathfrak{D}_1 u(\xi_1\eta_1\zeta_1)\right| \overline{\gtrless} \text{const. fin. } r_{12}^\lambda, \ldots \quad (\lambda > 0),$$

ε étant un nombre positif et différent de zéro, ne dépendant que de la surface σ.

J'ai obtenu cette inégalité en supposant d'abord que les fonctions u, v, w satisfassent aux équations

$$(40) \qquad \Delta u + \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \ldots$$

et que leur développement d'après les triplets préliminaires soit possible (²). Après avoir donné la démonstration pour ce cas, j'ai pu m'affranchir de ces conditions.

(¹) *Bull. de Cracovie*, 1909, p. 705.

(²) Ou plutôt d'après les fonctions

$$u_k = 4(\hat{u}_k' - \hat{\mathfrak{U}}_k') + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \hat{\theta}_k' \frac{d\tau}{r}, \ldots$$

Les formules (38) de ce Mémoire doivent être écrites ainsi; par une erreur typographique, elles avaient dans ce Mémoire la forme suivante :

$$\hat{u}_k = 4(u_k' - \hat{\mathfrak{U}}_k') + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \hat{\theta}_k' \frac{d\tau}{r}, \ldots$$

Pour ne pas négliger les deux singularités possibles indiquées en haut, le développement d'après les triplets préliminaires ne doit pas avoir la forme

$$u = \mathcal{C}_1 u_1 + \mathcal{C}_2 u_2 + \ldots, \ldots$$

mais la forme suivante :

$$u = u_0 + \bar{u}_0 + \mathcal{C}_1 u_1 + \mathcal{C}_2 u_2 + \ldots, \ldots \tag{41}$$

en posant

$$u_0 = 4 \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ldots \tag{42}$$

$$\bar{u}_0 = -\frac{2c}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \frac{d\tau}{r}, \ldots \tag{43}$$

où je désigne par φ une fonction harmonique de τ, par c une constante.

Pour démontrer que la démonstration que j'ai donnée pour l'inégalité (38) reste néanmoins vraie, je n'ai qu'à démontrer que les relations (41) du Mémoire en question sont aussi remplies pour les valeurs singulières

$$\lambda_0 = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \bar{\lambda}_0 = -1. \tag{44}$$

On trouve en effet facilement en reprenant les notations du Mémoire en question :

$$\left\{\begin{aligned} \int_i \left[\mathcal{S} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_k}{\partial x} - \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k} \mathcal{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \hat{u}_k'}{\partial x} \right] d\tau &= \int_i \mathcal{S} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial x} d\tau, \\ &= 0, \end{aligned}\right. \tag{45}$$

$$\left\{\begin{aligned} \int_i \left[\mathcal{S} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} \frac{\partial u_k}{\partial x} - \frac{\bar{\lambda}_0 - 1}{\bar{\lambda}_0} \cdot \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k} \mathcal{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{c}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \frac{d\tau}{r} \right) \cdot \frac{\partial \hat{u}_k'}{\partial x} \right] d\tau &= \int_i \mathcal{S} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}_k'}{\partial x} d\tau, \\ &= 0, \end{aligned}\right. \tag{46}$$

$$\int_i \left[\mathcal{S} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} - \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} \cdot \frac{\bar{\lambda}_0 - 1}{\bar{\lambda}_0} \mathcal{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{c}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \frac{d\tau}{r} \right) \right] d\tau = 0. \tag{47}$$

A part cela, il n'y a rien à changer à la démonstration donnée auparavant.