SUR LE

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE

AYANT

UNE CAVITÉ DE FORME ELLIPSOÏDALE REMPLIE PAR UN LIQUIDE INCOMPRESSIBLE

ET SUR LES

VARIATIONS DES LATITUDES,

PAR W. STEKLOFF,

A SAINT-PÉTERSBOURG.

I. — Les équations du mouvement du système, lorsque le liquide parfait est animé d'un mouvement de Dirichlet. — Les intégrales générales des équations du mouvement.

[**1**] Supposons qu'un corps solide ait une cavité, limitée par un ellipsoïde (S) à demi-axes

$$\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c}$$

et remplie par un liquide incompressible et parfait.

Supposons que le centre de l'ellipsoïde reste fixe dans l'espace et prenons ce point fixe pour l'origine des coordonnées ξ, η, ζ, invariablement liées au corps.

Prenons les axes de l'ellipsoïde (S) pour les axes ξ, η, ζ.

Si l'on applique certaines forces aux points du corps solide et du liquide contenu à son intérieur, le système considéré se mettra en mouvement.

Faisons l'hypothèse que les forces, agissant aux points du liquide, dérivent d'une fonction des forces et que le mouvement du liquide soit tel que les lignes de tourbillons restent toujours des droites parallèles ayant la même intensité.

Dans mon *Mémoire sur la théorie des tourbillons* (¹), j'ai établi les équations générales du problème, sans supposer que le centre de l'ellipsoïde (S) soit immobile.

Ici nous nous bornerons au cas de rotation du corps solide autour de centre fixe de l'ellipsoïde (S), en supposant, en particulier, que les axes d'inertie du corps solide (par rapport à l'origine des coordonnées) coïncident avec ceux de l'ellipsoïde (S).

[**2**] Introduisons maintenant les notations suivantes :

Désignons par

$$A, \; B, \; C$$

les moments principaux d'inertie du corps solide, par

$$p, \; q, \; r$$

les composantes de la vitesse angulaire Ω du corps suivant les axes ξ, η, ζ, par

$$u, \; v, \; w$$

les composantes du tourbillon du liquide suivant les mêmes axes, par M la masse du liquide, par

$$M_\xi, \; M_\eta, \; M_\zeta$$

les sommes des moments par rapport aux axes de l'ellipsoïde (S) des forces extérieures appliquées aux divers points du corps solide.

Supposons enfin que les parties du liquide s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton et qu'aux points du liquide n'agissent nulles autres forces extérieures.

Les composantes p, q, r déterminent le mouvement du corps solide, les fonctions u, v, w le mouvement du liquide contenu dans la cavité.

Désignons par

$$U, \; V, \; W$$

les projections de la vitesse absolue d'un point quelconque (ξ, η, ζ) du liquide sur les axes mobiles ξ, η, ζ.

Moyennant les équations (98) [p. 302] de mon Mémoire, cité plus haut, nous pouvons écrire, avec les notations ici adoptées :

$$(1) \qquad \begin{cases} U = \dfrac{r(a-b) - wa}{a+b}\eta + \dfrac{q(c-a) + va}{a+c}\zeta, \\[2mm] V = \dfrac{p(b-c) - ub}{b+c}\zeta + \dfrac{r(a-b) + wb}{a+b}\xi, \\[2mm] W = \dfrac{q(c-a) - vc}{c+a}\xi + \dfrac{p(b-c) + uc}{b+c}\eta. \end{cases}$$

(¹) M. Stekloff, *Sur la théorie des tourbillons* (Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, 2e série, t. X, p. 271). — Je profite de l'occasion pour faire une correction dans certaines lignes de ce Mémoire : aux mots « des lignes droites » (p. 299, ligne 22, p. 306, ligne 4 [en remontant], et p. 311, ligne 18) doit être ajoutée la phrase suivante : « parallèles, à la même intensité », omise par une inadvertance.

En introduisant, au lieu de

$$(2) \qquad p,\ q,\ r:\quad u,\ v,\ w,$$

les nouvelles variables

$$(3) \qquad x_1,\ x_2,\ x_3;\quad y_1,\ y_2,\ y_3,$$

liées avec les précédentes par les relations

$$(4) \qquad x_1 = \frac{p(b-c)+uc}{b+c},\qquad x_2 = \frac{q(c-a)+va}{c+a},\qquad x_3 = \frac{r(a-b)+wb}{a+b},$$

$$(5) \qquad y_1 = \frac{p(b-c)-ub}{b+c},\qquad y_2 = \frac{q(c-a)-vc}{c+a},\qquad y_3 = \frac{r(a-b)-wa}{a+b},$$

les équations (1) deviennent

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} U &= y_3\eta + x_2\zeta,\\ V &= y_1\zeta + x_3\xi,\\ W &= y_2\xi + x_1\eta. \end{aligned}\right.$$

Nous ferons l'usage de ces formules plus loin.

[3] Moyennant les notations adoptées et désignant par

$$u',\ v',\ w':\quad p',\ q',\ r'$$

les dérivées premières de

$$u,\ v,\ w;\quad p,\ q,\ r$$

par rapport à t (le temps), nous pouvons écrire les équations (97) de mouvement du liquide et les équations (113) [Voir aussi les équations (114)] de mouvement du corps solide, établies dans mon *Mémoire sur la théorie des tourbillons* (pp. 302 et 309), sous la forme suivante :

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned} (c+a)(a+b)u' &= a(b-c)vw + 2a[(a+c)rv - (a+b)qw],\\ (a+b)(b+c)v' &= b(c-a)uw + 2b[(b+a)pw - (b+c)ru],\\ (b+c)(c+a)w' &= c(a-b)vu + 2c[(c+b)qu - (c+a)pv], \end{aligned}\right.$$

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha p' &= (\beta-\gamma)qr + K(c-b)vw + \frac{2Ma(c-b)}{5}[c(a-b)rv - b(c-a)qw] + M_\xi,\\ \beta q' &= (\gamma-\alpha)rp + K(a-c)uw + \frac{2Mb(a-c)}{5}[a(b-c)pw - c(a-b)ru] + M_\eta,\\ \gamma r' &= (\alpha-\beta)pq + K(b-a)uv + \frac{2Mc(b-a)}{5}[b(c-a)qu - a(b-c)pv] + M_\zeta, \end{aligned}\right.$$

où l'on a posé, pour simplifier l'écriture,

$$(9)\qquad \begin{cases} \alpha = \delta A + \dfrac{M}{5}(b-c)^2(c+a)(a+b), \\ \beta = \delta B + \dfrac{M}{5}(c-a)^2(a+b)(b+c), \\ \gamma = \delta C + \dfrac{M}{5}(a-b)^2(b+c)(c+a), \end{cases}$$

$$(10)\qquad \delta = (b+c)(c+a)(a+b), \qquad K = \frac{2Mabc}{5}.$$

[**4**] Considérons d'abord le cas le plus simple, où le moment résultant des forces externes, par rapport au point fixe (centre de l'ellipsoïde), soit égal à zéro, c'est-à-dire

$$M_\xi = M_\eta = M_\zeta = 0.$$

Faisons quelques remarques générales relatives à l'intégration des équations (7) et (8) dans l'hypothèse que nous venons de faire.

Remarquons tout d'abord *que le principe du dernier multiplicateur de Jacobi s'applique à ces équations*, car la somme des dérivées, respectivement par rapport à $u, v, w; p, q$ et r, de seconds membres de ces équations, est égale à zéro.

Il s'ensuit qu'*il suffit de trouver quatre intégrales distinctes, ne dépendant pas de t, pour ramener la solution du problème aux quadratures.*

Or, quel que soit le corps solide, *les équations* (7) *et* (8) *admettent toujours trois intégrales* qu'on obtient comme il suit :

Multiplions les équations (7) respectivement par

$$\frac{(b+c)u}{a}, \qquad \frac{(c+a)v}{b}, \qquad \frac{(a+b)w}{c}$$

et additionnons les résultats.

On trouve, après l'intégration,

$$(11)\qquad bcu^2 + cav^2 + abw^2 = k^2,$$

k désignant une constante arbitraire.

L'équation (11) représente la première intégrale générale, ne dépendant pas de t, des équations du mouvement.

Multiplions maintenant les équations (7) respectivement par

$$a(b+c)u, \qquad b(c+a)v, \qquad c(a+b)w,$$

les équations (8) par

$$p,\ q,\ r$$

et additionnons les résultats.

On trouve, en effectuant l'intégration, une deuxième intégrale sous la forme

$$\frac{K}{2}(au^2 + bv^2 + cw^2) + \alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2 = h^2, \tag{12}$$

h désignant une nouvelle constante arbitraire.

Posons enfin

$$\xi = \frac{K(c+a)(a+b)}{a} u + \alpha p,$$

$$\eta = \frac{K(a+b)(b+c)}{b} v + \beta q,$$

$$\zeta = \frac{K(b+c)(c+a)}{c} w + \gamma r.$$

Il est aisé de s'assurer que les variables ξ, η, ζ satisfont aux équations

$$\xi' = r\eta - q\zeta, \qquad \eta' = p\zeta - r\xi, \qquad \zeta' = q\xi - p\eta.$$

Ces équations conduisent immédiatement à la troisième intégrale, ne dépendant pas de t, de la forme suivante

$$\left(\frac{K(c+a)(a+b)}{a} u + \alpha p\right)^2 + \left(\frac{K(a+b)(b+c)}{b} v + \beta q\right)^2 + \left(\frac{K(b+c)(c+a)}{c} w + \gamma r\right)^2 = l^2, \tag{13}$$

l désignant une troisième constante arbitraire.

Les équations (11), (12) et (13) représentent précisément les trois intégrales générales des équations du mouvement ayant lieu quel que soit le corps solide et les valeurs de a, b et c.

On en conclut, en tenant compte de ce que nous avons dit plus haut, que *la solution du problème se ramène aux quadratures dans tous les cas où l'on connaît, outre les trois intégrales générales* (11), (12) *et* (13), *encore une quatrième intégrale des équations* (7) *et* (8).

II. — Application aux équations du mouvement de la méthode des approximations successives. — Solutions périodiques.

[**5**] Avant d'étudier les cas particuliers, où l'on peut résoudre complètement le problème, indiquons une méthode générale d'intégration des équations (7) et (8) qui s'applique avec succès, lorsque le rapport de la masse M du liquide à la masse M_1 du corps solide est un nombre assez petit.

Supposons, comme précédemment, que $M_\xi = M_\eta = M_\zeta = 0$ et posons

$$(\alpha) \qquad A = M_1\alpha_1, \qquad B = M_1\beta_1, \qquad C = M_1\gamma_1$$
$$\varepsilon = \frac{M}{5M_1}.$$

Les équations (8) peuvent s'écrire

$$(14) \qquad \begin{cases} \alpha_1 p' = (\beta_1 - \gamma_1)qr + \varepsilon X(b-c), \\ \beta_1 q' = (\gamma_1 - \alpha_1)rp + \varepsilon Y(c-a), \\ \gamma_1 r' = (\alpha_1 - \beta_1)pq + \varepsilon Z(a-b), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(15) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{\mu_1(b+c)}{\delta} qr - \dfrac{2abc}{\delta} vw - \dfrac{2a}{\delta}[c(a-b)rv - b(c-a)qw] - \dfrac{b-c}{b+c}p', \\ Y = \dfrac{\mu_2(c+a)}{\delta} rp - \dfrac{2abc}{\delta} uw - \dfrac{2b}{\delta}[a(b-c)pw - c(a-b)ru] - \dfrac{c-a}{c+a}q', \\ Z = \dfrac{\mu_3(a+b)}{\delta} pq - \dfrac{2abc}{\delta} vu - \dfrac{2c}{\delta}[b(c-a)qu - a(b-c)pv] - \dfrac{a-b}{a+b}r', \end{cases}$$

$$\mu_1 = 3a^2 - \omega, \qquad \mu_2 = 3b^2 - \omega, \qquad \mu_3 = 3c^2 - \omega,$$
$$\omega = bc + ca + ab.$$

Cherchons une solution des équations (7) et (14) sous la forme des séries infinies, disposées suivant les puissances entières et positives du paramètre ε.

Posons

$$(16) \qquad \begin{cases} u = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k, \qquad v = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k, \qquad w = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k, \\ p = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_k, \qquad q = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k q_k, \qquad r = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k r_k, \end{cases}$$

u_k, v_k, w; p_k, q_k, r_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ étant des fonctions de t.

Substituant ces expressions dans (7), on obtient

$$(17) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{(c+a)(a+b)}{a} u'_k = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \{ m_1 w_k + n_1 v_k + 2(a+c)v_0 r_k - 2(a+b)w_0 q_k + U'_k \} \lambda_k, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{(a+b)(b+c)}{b} v'_k = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \{ m_2 u_k + n_2 w_k + 2(b+a)w_0 p_k - 2(b+c)u_0 r_k + V'_k \} \lambda_k, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{(b+c)(c+a)}{c} w'_k = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \{ m_3 v_k + n_3 u_k + 2(c+b)u_0 q_k - 2(c+a)v_0 p_k + W'_k \} \lambda_k, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(18) \qquad m_1 = (b-c)v_0 - 2(a+b)q_0, \qquad n_1 = (b-c)w_0 + 2(a+c)r_0.$$

$$(18_1) \qquad \begin{cases} U'_0 = 0, \qquad U'_1 = 0, \\ U'_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (b-c)v_i w_{k-i} + 2(a+c)r_i v_{k-i} - 2(a+b)q_i w_{k-i} \right\} \quad \text{pour} \quad k = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}, \qquad \lambda_k = 1 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Quant à m_2, m_3, n_2, n_3, V_k et W_k, elles se déduisent des expressions écrites par la permutation circulaire des groupes de lettres

$$(a, b, c), \qquad (u, v, w), \qquad (p, q, r).$$

Les fonctions U_k, V_k, W_k ne dépendent pas de quantités

$$u_k, v_k, w_k; \quad p_k, q_k \text{ et } r_k.$$

Substituons maintenant les expressions (16) dans les équations (14).

On trouve, en tenant compte de (15),

$$(19) \qquad \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \alpha_1 p'_k = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left\{ (\beta_1 - \gamma_1)(q_0 r_k + r_0 q_k) + X_k \right\} \lambda_k, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \beta_1 q'_k = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left\{ (\gamma_1 - \alpha_1)(r_0 p_k + p_0 r_k) + Y_k \right\} \lambda_k, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \gamma_1 r'_k = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left\{ (\alpha_1 - \beta_1)(p_0 q_k + q_0 p_k) + Z_k \right\} \lambda_k, \end{cases}$$

où, comme il est aisé de s'assurer,

$$(20) \qquad X_0 = 0, \quad X_k = (\beta_1 - \gamma_1) \sum_{i=1}^{k-1} q_i r_{k-i}$$
$$+ \frac{b-c}{\delta} \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ \mu_1 (b+c) q_i r_{k-1-i} - 2abc\, v_i w_{k-1-i} + 2ab(c-a) q_i w_{k-1-i} - 2ac(a-b) r_i v_{k-1-i} \right\}$$
$$- \frac{(b-c)^2}{b+c} p'_{k-1},$$

et, comme précédemment, $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, $\lambda_k = 1$ pour toutes les valeurs de k, à partir de $k = 1$.

Les expressions de Y_k et Z_k se déduisent de X_k par la permutation circulaire des groupes de lettres

$$(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1), \qquad (a, b, c), \qquad (u, v, w), \qquad (p, q, r).$$

[**6**] Les équations (17) et (19) conduisent aux équations suivantes qui permettent de déterminer successivement toutes les inconnues

$$u_k, v_k, w_k; \quad p_k, q_k, r_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

On a, pour $k = 0$,

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{(c+a)(a+b)}{a} u'_0 &= (b-c) v_0 w_0 + 2(a+c) r_0 v_0 - 2(a+b) q_0 w_0, \\ \frac{(a+b)(b+c)}{b} v'_0 &= (c-a) u_0 w_0 + 2(b+a) p_0 w_0 - 2(b+c) r_0 u_0, \\ \frac{(b+c)(c+a)}{c} w'_0 &= (a-b) v_0 u_0 + 2(c+b) q_0 u_0 - 2(c+a) p_0 v_0. \end{aligned} \right.$$

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 p'_0 &= (\beta_1 - \gamma_1) q_0 r_0, \\ \beta_1 q'_0 &= (\gamma_1 - \alpha_1) r_0 p_0, \\ \gamma_1 r'_0 &= (\alpha_1 - \beta_1) p_0 q_0, \end{aligned} \right.$$

et, pour toutes les valeurs de k, à partir de $k = 1$,

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{(c+a)(a+b)}{a} u'_k &= m_1 w_k + n_1 v_k + 2(a+c) v_0 r_k - 2(a+b) w_0 q_k + U_k, \\ \frac{(a+b)(b+c)}{b} v'_k &= m_2 u_k + n_2 w_k + 2(b+a) w_0 p_k - 2(b+c) u_0 r_k + V'_k, \\ \frac{(b+c)(c+a)}{c} w'_k &= m_3 v_k + n_3 u_k + 2(c+b) u_0 q_k - 2(c+a) v_0 p_k + W'_k, \end{aligned} \right.$$

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 p'_k &= (\beta_1 - \gamma_1)(q_0 r_k + r_0 q_k) + X_k, \\ \beta_1 q'_k &= (\gamma_1 - \alpha_1)(r_0 p_k + p_0 r_k) + Y_k, \\ \gamma_1 r'_k &= (\alpha_1 - \beta_1)(p_0 q_k + q_0 p_k) + Z_k. \end{aligned} \right.$$

Le problème se ramène tout d'abord à l'intégration des équations (21) et (22) dont les trois dernières (22) représentent les équations connues d'Euler du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Elles donnent pour p_0, q_0, r_0 les expressions bien connues en fonctions elliptiques de t.

La détermination de u_0, v_0, w_0 se ramène à l'intégration de trois équations (21), où p_0, q_0, r_0 sont les fonctions connues de t.

Après avoir déterminé p_0, q_0, r_0; u_0, v_0, w_0, nous trouverons ensuite successivement toutes les fonctions

$$u_k,\ v_k,\ w_k;\quad p_k,\ q_k,\ r_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

moyennant les équations (23) et (24).

Supposons qu'on ait déjà trouvé les expressions de

$$u_k,\ v_k,\ w_k;\quad p_k,\ q_k,\ r_k$$

pour toutes les valeurs de l'indice k, à partir de $k = 0$ jusqu'à $k = m - 1$.

Posons dans (24) $k = m$ et désignons par

$$P_j,\ Q_j \quad \text{et} \quad R_j \qquad (j = 1, 2, 3)$$

trois solutions indépendantes des équations linéaires

$$\text{(25)} \qquad \begin{cases} \alpha_1 P' = (\beta_1 - \gamma_1)(q_0 R + r_0 Q), \\ \beta_1 Q' = (\gamma_1 - \alpha_1)(r_0 P + p_0 R), \\ \gamma_1 R' = (\alpha_1 - \beta_1)(p_0 Q + q_0 P). \end{cases}$$

En se rappelant que

$$X_m,\ Y_m,\ Z_m$$

ne dépendent pas de u_m, v_m, w_m, p_m, q_m, r_m, nous trouverons p_m, q_m et r_m en appliquant aux équations (24), pour $k = m$, la méthode de variation des constantes arbitraires.

On aura

$$\text{(26)} \qquad \begin{cases} p_m = C_1^{(m)} P_1 + C_2^{(m)} P_2 + C_3^{(m)} P_3, \\ q_m = C_1^{(m)} Q_1 + C_2^{(m)} Q_2 + C_3^{(m)} Q_3, \\ r_m = C_1^{(m)} R_1 + C_2^{(m)} R_2 + C_3^{(m)} R_3, \end{cases}$$

où $C_j^{(m)}$ $(j = 1, 2, 3)$ sont les fonctions de t, définies par les quadratures

$$\text{(27)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dC_1^{(m)}}{dt} P_1 + \dfrac{dC_2^{(m)}}{dt} P_2 + \dfrac{dC_3^{(m)}}{dt} P_3 = X_m, \\ \dfrac{dC_1^{(m)}}{dt} Q_1 + \dfrac{dC_2^{(m)}}{dt} Q_2 + \dfrac{dC_3^{(m)}}{dt} Q_3 = Y_m, \\ \dfrac{dC_1^{(m)}}{dt} R_1 + \dfrac{dC_2^{(m)}}{dt} R_2 + \dfrac{dC_3^{(m)}}{dt} R_3 = Z_m, \end{cases}$$

car X_m, Y_m, Z_m sont les fonctions connues de t.

Les équations (25) et (27) sont précisément celles que j'ai étudiées dans mon *Mémoire sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini*, publié dans les *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse* en 1902 (2ᵉ série, t. IV, p. 203, etc.), auquel je renvoie le lecteur pour les détails.

[7] Les fonctions p_m, q_m, r_m étant déterminées à l'aide des équations (26), nous trouverons

$$u_m,\ v_m \quad \text{et} \quad w_m$$

en intégrant les équations linéaires

$$\begin{aligned}
u'_m &= m'_1 w_m + n'_1 v_m + \mathrm{U}_m,\\
v'_m &= m'_2 u_m + n'_2 w_m + \mathrm{W}_m,\\
w'_m &= m'_3 v_m + n'_3 u_m + \mathrm{V}_m.
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$m'_1 = \frac{m_1 a}{(c+a)(a+b)}, \qquad n'_1 = \frac{n_1 a}{(c+a)(a+b)}, \ \text{etc.,} \quad \text{pour} \quad m'_2,\ m'_3,\ n'_2,\ n'_3,$$

$$\mathrm{U}_m = \frac{a}{(c+a)(a+b)}\left\{\mathrm{U}'_m + 2(a+c)v_0 r_m - 2(a+b)w_0 q_m\right\} \ \text{etc.,} \quad \text{pour} \quad \mathrm{V}_m \ \text{et} \ \mathrm{W}_m;$$

U'_m, V'_m, W'_m étant maintenant les fonctions connues de t.

Le problème se ramène à l'intégration de trois équations linéaires de la forme

$$(28) \qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{U}' &= m'_1 \mathrm{W} + n'_1 \mathrm{V},\\
\mathrm{V}' &= m'_2 \mathrm{U} + n'_2 \mathrm{W},\\
\mathrm{W}' &= m'_3 \mathrm{V} + n'_3 \mathrm{U}.
\end{aligned}\right.$$

Désignons par

$$u^{(j)},\ v^{(j)},\ w^{(j)} \qquad (j = 1, 2, 3)$$

trois solutions indépendantes de ces équations.

La méthode de variation des constantes arbitraires conduit aux expressions suivantes pour u_m, v_m et w_m

$$(29) \qquad \left\{\begin{aligned}
u_m &= \mathrm{D}_1^{(m)} u^{(1)} + \mathrm{D}_2^{(m)} u^{(2)} + \mathrm{D}_3^{(m)} u^{(3)},\\
v_m &= \mathrm{D}_1^{(m)} v^{(1)} + \mathrm{D}_2^{(m)} v^{(2)} + \mathrm{D}_3^{(m)} v^{(3)},\\
w_m &= \mathrm{D}_1^{(m)} w^{(1)} + \mathrm{D}_2^{(m)} w^{(2)} + \mathrm{D}_3^{(m)} w^{(3)},
\end{aligned}\right.$$

où $\mathrm{D}_j^{(m)}$ $(j = 1, 2, 3)$ sont les fonctions de t, définies à l'aide des quadratures moyennant les équations suivantes :

$$(30) \qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{D}_1^{(m)}}{dt} u^{(1)} + \frac{d\mathrm{D}_2^{(m)}}{dt} u^{(2)} + \frac{d\mathrm{D}_3^{(m)}}{dt} u^{(3)} &= \mathrm{U}_m,\\
\frac{d\mathrm{D}_1^{(m)}}{dt} v^{(1)} + \frac{d\mathrm{D}_2^{(m)}}{dt} v^{(2)} + \frac{d\mathrm{D}_3^{(m)}}{dt} v^{(3)} &= \mathrm{V}_m,\\
\frac{d\mathrm{D}_1^{(m)}}{dt} w^{(1)} + \frac{d\mathrm{D}_2^{(m)}}{dt} w^{(2)} + \frac{d\mathrm{D}_3^{(m)}}{dt} w^{(3)} &= \mathrm{W}_m,
\end{aligned}\right.$$

U'_m, V'_m, W'_m étant les fonctions connues de t.

En entendant dans (29) par $D_j^{(m)}$ les fonctions définies par les équations (30), nous obtiendrons les expressions déterminées pour u_m, v_m et w_m.

Appliquant cette méthode successivement à $m = 1, 2, 3, \ldots$ etc., nous allons déterminer successivement toutes les fonctions u_k, v_k, w; p_k, q_k et r_k.

La solution du problème dépend, comme l'on voit, de l'intégration des équations (21) et des équations linéaires (25) et (28).

[**8**] Les fonctions

$$u_k,\ v_k,\ w_k;\quad p_k,\ q_k,\ r_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

étant déterminées de la manière tout à l'heure indiquée, nous trouverons la solution générale des équations du mouvement en substituant les valeurs trouvées de u_k, v_k, w_k; p_k, q_k, r_k dans les séries (16).

Nous obtiendrons ainsi u, v, w; p, q et r sous la forme des séries infinies ordonnées suivant les puissances entières et positives du paramètre ε.

Ces séries seront convergentes pour les valeurs de t ne surpassant pas une certaine limite T qui sera d'autant plus grande que ε sera plus petit. Il suffit seulement de choisir convenablement les constantes arbitraires qu'on introduit dans les expressions (26) et (29) de u_k, v_k, w_k; p_k, q_k, r_k $(k = 1, 2, \ldots)$ par les quadratures qui déterminent les fonctions

$$C_j^{(m)} \quad \text{et} \quad D_j^{(m)}.$$

Si nous posons, en particulier,

$$\left.\begin{array}{ccc} u_0 = \alpha, & v_0 = \beta, & w_0 = \gamma \\ p_0 = \alpha', & q_0 = \beta', & r_0 = \gamma' \\ \multicolumn{3}{c}{u_k = v_k = w_k = p_k = q_k = r_k = 0} \end{array}\right\} \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

α, β, γ; α' β' γ' étant des constantes données, nous trouverons les solutions des équations du mouvement se réduisant aux valeurs données α, β, γ; α', β', γ' pour $t = 0$.

A chaque solution

$$u_0,\ v_0,\ w_0;\quad p_0,\ q_0,\ r_0$$

des équations (21) et (22) correspond une solution déterminée des équations du mouvement (7) et (8) [ou (14)], dans laquelle u, v, w; p, q et r prennent les mêmes valeurs initiales (pour $t = 0$) que u_0, v_0, w_0; p_0, q_0 et r_0.

On peut en déduire une infinité d'autres solutions dont les valeurs initiales diffèrent assez peu de α, β, γ; α', β', γ', en choisissant les constantes arbitraires dans les expressions de

$$u_k,\ v_k,\ w_k;\quad p_k,\ q_k,\ r_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

d'une autre manière quelconque, sous la seule condition que les séries (16) soient convergentes.

[9] Le cas le plus intéressant est celui où les séries dont il s'agit convergent pour toutes les valeurs de t, pourvu que ε soit assez petit, ce qui peut avoir lieu quand toutes les fonctions

$$u_k,\ v_k,\ w_k;\quad p_k,\ q_k,\ r_k \qquad\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

deviennent périodiques en t avec la même période réelle ω.

Nous obtiendrons alors les solutions périodiques des équations du mouvement.

Cette circonstance peut se représenter dans le cas considéré, d'après les théorèmes connus de M. H. Poincaré, car les équations du mouvement (7) et (14) admettent les solutions périodiques pour $\varepsilon=0$.

Il est aisé de s'assurer, en effet, que les équations (21) admettent les solutions périodiques de la forme

$$u_0=\lambda_1 p_0, \qquad v_0=\lambda_2 q_0, \qquad w_0=\lambda_3 r_0,$$

où λ_1, λ_2, λ_3 désignent des constantes convenablement choisies.

Ces équations admettent aussi une solution périodique très simple qu'on obtient en posant

$$p_0=q_0=0, \qquad r_0=\text{const.},$$

ou, encore plus simplement,

$$p_0=q_0=r_0=0.$$

Dans ce cas, que nous allons étudier, les équations (21) deviennent

$$u_0'=\mathrm{A}v_0w_0, \qquad v_0'=\mathrm{B}u_0w_0, \qquad w_0'=\mathrm{C}v_0u_0 \tag{31}$$

où l'on a posé

$$\mathrm{A}=\frac{a(b-c)}{(c+a)(a+b)}, \qquad \mathrm{B}=\frac{b(c-a)}{(a+b)(b+c)}, \qquad \mathrm{C}=\frac{c(a-b)}{(b+c)(c+a)}. \tag{32}$$

Les équations (31) déterminent u_0, v_0, w_0 en fonctions elliptiques de t. Appliquons la théorie générale, exposée plus haut, à ce dernier cas.

On a :

$$\begin{aligned} m_1&=(b-c)v_0, \qquad & m_2&=(c-a)w_0, \qquad & m_3&=(a-b)u_0,\\ n_1&=(b-c)w_0, \qquad & n_2&=(c-a)u_0, \qquad & n_3&=(a-b)v_0. \end{aligned}$$

Les équations (23) et (24) prennent alors cette forme simple :

$$\left\{\begin{aligned} u_k'&=\mathrm{A}(v_0w_k+w_0v_k)+\mathrm{U}_k,\\ v_k'&=\mathrm{B}(w_0u_k+u_0w_k)+\mathrm{V}_k,\\ w_k'&=\mathrm{C}(u_0v_k+v_0u_k)+\mathrm{W}_k, \end{aligned}\right. \tag{33}$$

$$p_k'=\mathrm{X}_k, \qquad q_k'=\mathrm{Y}_k, \qquad r_k'=\mathrm{Z}_k, \tag{34}$$

où U_k, V_k, W_k; X_k, Y_k, Z_k sont les fonctions ne dépendant pas de u_k, v_k, w_k; p_k, q_k et r_k (1).

Supposons qu'on ait déjà trouvé les expressions de ces dernières fonctions pour toutes les valeurs de k, à partir de $k = 0$ jusqu'à $k = m - 1$.

X_k, Y_k et Z_k seront les fonctions connues de t et les équations (34) donneront les valeurs de p_m, q_m, r_m par les quadratures.

On aura

$$(35) \qquad p_m = \delta_1^{(m)} + \int X_m\,dt, \qquad q_m = \delta_2^{(m)} + \int Y_m\,dt, \qquad r_m = \delta_3^{(m)} + \int Z_m\,dt,$$

où $\delta_j^{(m)}$ $(j = 1, 2, 3)$ désignent les constantes arbitraires.

Supposons maintenant que nous ayons déterminé les fonctions

$$u_k, \; v_k, \; w_k$$

pour toutes les valeurs de k, à partir de $k = 0$ jusqu'à $k = m - 1$, et les fonctions

$$p_k, \; q_k, \; r_k,$$

pour toutes les valeurs de k, à partir de $k = 1$ jusqu'à $k = m$, en fonctions périodiques de t avec la même période ω.

Dans ce cas, U_m, V_m et W_m seront les fonctions connues de t, périodiques avec la période ω.

La détermination de u_m, v_m et w_m se ramène à l'intégration des équations linéaires de la forme

$$(36) \qquad \begin{cases} u'_m = A(v_0 w_m + w_0 v_m) + U_m, \\ v'_m = B(w_0 u_m + u_0 w_m) + V_m, \\ w'_m = C(u_0 v_m + v_0 u_m) + W_m. \end{cases}$$

Les équations linéaires homogènes, qu'on obtient en posant dans (36)

$$U_m = V_m = W_m = 0$$

ont précisément la forme des équations (25).

Ces équations admettent les solutions particulières

$$(37) \qquad \begin{cases} u^{(1)} = A v_0 w_0, & v^{(1)} = B u_0 w_0, & w^{(1)} = C v_0 u_0, \\ u^{(2)} = u_0 + t u^{(1)}, & v^{(2)} = v_0 + t v^{(1)}, & w^{(2)} = w_0 + t w^{(1)}, \\ u^{(3)} = K u^{(1)}, & v^{(3)} = K v^{(1)}, & w^{(3)} = K w^{(1)} + \dfrac{1}{w_0}, \end{cases}$$

$$K = \int \frac{dt}{w_0^2},$$

comme je l'ai montré dans mon *Mémoire sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini*, cité plus haut.

---

(1) Nous avons remplacé, pour simplifier l'écriture, $\dfrac{X_k}{\alpha_1}$, $\dfrac{Y_k}{\beta_1}$, $\dfrac{Z_k}{\gamma_1}$ simplement par X_k, Y_k et Z_k.

Le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} u^{(1)}, & v^{(1)}, & w^{(1)} \\ u^{(2)}, & v^{(2)}, & w^{(2)} \\ u^{(3)}, & v^{(3)}, & w^{(3)} \end{vmatrix} = \mathrm{A}v_0^2 - \mathrm{B}u_0^2 = \text{const.}$$

est différent de zéro.

Les équations (30), appliquées au cas considéré, donnent

$$(38)\qquad \frac{d\mathrm{D}_1^{(m)}}{dt} = \mathrm{KS}_m + t\mathrm{R}_m + \frac{v_0\mathrm{U}_m - u_0\mathrm{V}_m}{w_0\Delta}, \qquad \frac{d\mathrm{D}_2^{(m)}}{dt} = -\mathrm{R}_m, \qquad \frac{d\mathrm{D}_3^{(m)}}{dt} = -\mathrm{S}_m,$$

où l'on a posé

$$(39)\qquad \mathrm{R}_m = \frac{v^{(1)}\mathrm{U}_m - u^{(1)}\mathrm{V}_m}{w_0\Delta},$$

$$(40)\qquad \mathrm{S}_m = \frac{1}{\Delta}[\mathrm{U}_m(v_0 w^{(1)} - w_0 v^{(1)}) + \mathrm{V}_m(w_0 u^{(1)} - u_0 w^{(1)}) + \mathrm{W}_m(u_0 v^{(1)} - v_0 u^{(1)})].$$

L'intégration des équations (38) conduit aux expressions suivantes pour $\mathrm{D}_j^{(m)}$ $(j = 1, 2, 3)$:

$$\mathrm{D}_1^{(m)} = c_1^{(m)} + \int \mathrm{KS}_m\,dt + \int t\mathrm{R}_m\,dt + \int \frac{v_0\mathrm{U}_m - u_0\mathrm{V}_m}{w_0\Delta}\,dt,$$

$$\mathrm{D}_2^{(m)} = c_2^{(m)} - \int \mathrm{R}_m\,dt,$$

$$\mathrm{D}_3^{(m)} = c_3^{(m)} - \int \mathrm{S}_m\,dt,$$

où $c_j^{(m)}$ désignent des nouvelles constantes arbitraires.

Substituant ces expressions de $\mathrm{D}_j^{(m)}$ dans (29), on trouve

$$(41)\qquad \begin{cases} u_m = c_1^{(m)} u^{(1)} + \mathrm{M}_m u_0 + \mathrm{N}_m u^{(1)}, \\ v_m = c_1^{(m)} v^{(1)} + \mathrm{M}_m v_0 + \mathrm{N}_m v^{(1)}, \\ w_m = c_1^{(m)} w^{(1)} + \mathrm{M}_m w_0 + \mathrm{N}_m w^{(1)} + \dfrac{c_3^{(m)}}{w_0} - \dfrac{1}{w_0}\displaystyle\int \mathrm{S}_m\,dt, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\mathrm{M}_m = c_2^{(m)} - \int \mathrm{R}_m\,dt,$$

$$(42)\qquad \mathrm{N}_m = \int t\mathrm{R}_m\,dt - t\int \mathrm{R}_m\,dt + tc_2^{(m)} + c_3^{(m)}\mathrm{K} - \mathrm{K}\int \mathrm{S}_m\,dt + \int \mathrm{KS}_m\,dt + \int \frac{v_0\mathrm{U}_m - u_0\mathrm{V}_m}{w_0\Delta}\,dt.$$

En introduisant ensuite, comme dans mon Mémoire, cité plus haut (p. 205), les notations

$$\text{(43)} \qquad R'_m = \int R_m\,dt, \qquad S'_m = \int S_m\,dt,$$

on obtient

$$\text{(44)} \qquad \begin{cases} M_m = c_2^{(m)} - R'_m, \\ N_m = tc_2^{(m)} + Kc_3^{(m)} - \int R'_m\,dt - \int \frac{S'_m}{w_0^2}\,dt + \int \frac{v_0 U_m - u_0 V_m}{w_0 \Delta}\,dt. \end{cases}$$

[**11**] Démontrons maintenant que R'_m *et* S'_m *sont fonctions périodiques en t avec la période* ω.

Nous avons vu (n° 4) que les équations du mouvement admettent toujours trois intégrales générales (11), (12) et (13).

En adoptant les notations (α) du n° 5, nous pouvons représenter l'intégrale (12) sous la forme

$$\frac{\varepsilon}{2} abc(au^2 + bv^2 + cw^2) + \alpha_1 p^2 + \beta_1 q^2 + \gamma_1 r^2 = \text{const.}$$

Substituant dans cette égalité, au lieu de u, v, w; p, q et r, les séries (16), on en déduit, en se rappelant que, dans le cas considéré, p_0, q_0 et r_0 sont égales à zéro,

$$\text{(45)} \qquad au_0 u_m + bv_0 v_m + cw_0 w_m = F_m(t),$$

où $F_m(t)$ est une fonction connue, périodique en t avec la période ω.

Le même procédé, appliqué à l'intégrale (11), conduit à la relation

$$\text{(46)} \qquad bcu_0 u_m + cav_0 v_m + abw_0 w_m = \Phi_m(t),$$

où $\Phi_m(t)$ est une fonction périodique en t avec la même période ω.

L'expression de R_m (39) se représente, en vertu de (37), comme il suit :

$$R_m = \frac{Bu_0 U_m - Av_0 V_m}{\Delta}.$$

Multiplions la première des équations (37) par Bu_0, la seconde par Av_0, et retranchons les résultats.

On trouve, en tenant compte des équations (31),

$$Bu_0 U_m - Av_0 V_m = \frac{d}{dt}(Bu_0 u_m - Av_0 v_m),$$

d'où l'on tire

$$R'_m = \int R_m\,dt = \frac{Bu_0 u_m - Av_0 v_m}{\Delta}.$$

Or les équations (45) et (46) donnent, eu égard à (32),

$$b(a^2-c^2)u_0u_m + a(b^2-c^2)v_0v_m = ab\,F_m(t) - c\,\Phi_m(t) = \delta(Av_0v_m - Bu_0u_m).$$

Il s'ensuit que

$$\frac{Bu_0u_m - Av_0v_m}{\Delta}$$

est une fonction périodique en t avec la période ω.

Donc R'_m *et, par conséquent,* M_m [les égalités (44)], *est une fonction périodique.*

[**12**] Considérons maintenant l'expression

$$S_m\Delta = U_m(v_0w^{(1)} - w_0v^{(1)}) + V_m(w_0u^{(1)} - u_0w^{(1)}) + W_m(u_0v^{(1)} - v_0u^{(1)})$$

qui peut s'écrire, en vertu de (37),

$$S_m\Delta = U_mu_0(Cv_0^2 - Bw_0^2) + V_mv_0(Aw_0^2 - Cu_0^2) + W_mw_0(Bu_0^2 - Av_0^2).$$

Or, les équations (31) admettent les intégrales suivantes :

$$(46_1)\qquad \begin{cases} au_0^2 + bv_0^2 + cw_0^2 = l^2, \\ bcu_0^2 + cav_0^2 + abw_0^2 = h^2, \end{cases}$$

l et h désignant des constantes arbitraires.

De ces équations on tire, eu égard à (32),

$$Cv_0^2 - Bw_0^2 = \frac{h^2a - l^2bc}{\delta},\qquad Aw_0^2 - Cu_0^2 = \frac{h^2b - l^2ca}{\delta},\qquad Bu_0^2 - Av_0^2 = \frac{h^2c - l^2ab}{\delta}.$$

On peut donc écrire

$$(47)\qquad S_m\Delta = \frac{h^2}{\delta}(au_0U_m + bv_0V_m + cw_0W_m) - \frac{l^2}{\delta}(bcu_0U_m + cav_0V_m + abw_0W_m).$$

Multiplions maintenant les équations (36) respectivement par

$$au_0,\quad bv_0,\quad cw_0$$

et additionnons les résultats.

On trouve aisément, en tenant compte de (31), (32) et (45),

$$(48)\qquad au_0U_m + bv_0V_m + cw_0V_m = \frac{dF_m(t)}{dt}.$$

D'autre part, multipliant les mêmes équations (36) respectivement par

$$bcu_0,\quad cav_0,\quad abw_0$$

et additionnant les résultats, on aura, eu égard à (31), (32) et (46),

$$(49)\qquad bcu_0U_m + cav_0V_m + abw_0W_m = \frac{d\Phi_m(t)}{dt}.$$

Les équations (47), (48) et (49) donnent

$$S_m = \frac{d}{dt}\left\{\frac{h^2}{\delta\Delta} F_m(t) - \frac{l^2}{\delta\Delta} \Phi_m(t)\right\},$$

d'où l'on tire

$$S'_m = \int S_m dt = \frac{h^2 F_m(t) - l^2 \Phi_m(t)}{\delta\Delta}.$$

Il s'ensuit que S'_m *est une fonction périodique de t avec la période* ω.

[**13**] Considérant maintenant les expressions (41) de u_m, v_m et w_m, on en conclut, en tenant compte de résultats obtenus aux n^{os} 11 et 12, que u_m, v_m et w_m deviendront périodiques, s'il en sera de même de la fonction N_m.

Or, cette fonction peut être représentée sous la forme

$$N_m = t\left\{c_2^{(m)} + c_3^{(m)}\int_0^\omega \frac{dt}{w_0^2} - \int_0^\omega R'_m dt - \int_0^\omega \frac{S'_m}{w_0^2} dt + \int_0^\omega \frac{v_0 U_m - u_0 V_m}{w_0 \Delta} dt\right\} + N'_m,$$

où N'_m est une fonction périodique de t.

Pour que N_m soit une fonction périodique, il faut et il suffit que l'on ait

$$c_2^{(m)} + c_3^{(m)}\int_0^\omega \frac{dt}{w_0^2} - \int_0^\omega R'_m dt - \int_0^\omega \frac{S'_m}{w_0^2} dt + \int_0^\omega \frac{v_0 U_m - u_0 V_m}{w_0 \Delta} dt = 0. \tag{50}$$

Remarquons que

$$R'_m, \quad S'_m \quad U_m \quad \text{et} \quad V_m$$

dépendent de quantités p_m, q_m, r_m, c'est-à-dire de constantes $\delta_1^{(m)}$, $\delta_2^{(m)}$ et $\delta_3^{(m)}$ qui figurent dans les expressions (35) et qui restent indéterminées. Le premier terme de l'équation (50) est une fonction linéaire de cinq constantes arbitraires.

$$c_2^{(m)}, \quad c_3^{(m)}, \quad \delta_j^{(m)} \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{β}$$

Il suffit d'assujettir ces inconnues à une seule relation (50) pour rendre N_m périodique en t avec la période ω, ce qui est toujours possible. Supposant donc que les constantes (β) satisfassent à la relation (50), on obtient pour N_m une fonction périodique de t.

Cette condition (50) *étant remplie, les fonctions*

$$u_m, \quad v_m, \quad w_m$$

deviennent périodiques avec la période ω.

[**14**] Après avoir trouvé, de la manière indiquée, les fonctions

$$u_k, v_k, w_k; \quad p_k, q_k, r_k$$

pour toutes les valeurs de k, à partir de $k=0$ jusqu'à $k=m$, sous la forme des fonctions périodiques de t, formons les expressions de p_{m+1}, q_{m+1} et r_{m+1}.

Remplaçant dans (35) m par $m+1$, on trouve

$$
(51) \qquad \begin{cases} p_{m+1} = \delta_1^{(m+1)} + \int X_{m+1}\, dt, \\ q_{m+1} = \delta_2^{(m+1)} + \int Y_{m+1}\, dt, \\ r_{m+1} = \delta_3^{(m+1)} + \int Z_{m+1}\, dt. \end{cases}
$$

Démontrons qu'*on peut toujours choisir les constantes* $\delta_j^{(m)}$ $(j=1, 2, 3)$, *qui restent indéterminées jusqu'à présent, de façon que*

$$p_{m+1}, \quad q_{m+1} \quad \text{et} \quad r_{m+1}$$

deviennent périodiques en t avec la période ω.

Montrons tout d'abord que p_1, q_1 et r_1 *sont les fonctions périodiques de t.*

Posant dans (20) $k=1$, on trouve, en vertu de (31) et (32),

$$
\begin{aligned}
X_1 &= -\frac{2abc(b-c)}{\delta\alpha_1} v_0 w_0 = -\frac{2bc}{\alpha_1(b+c)} u_0', \\
Y_1 &= -\frac{2abc(c-a)}{\delta\beta_1} u_0 w_0 = -\frac{2ca}{\beta_1(c+a)} v_0', \\
Z_1 &= -\frac{2abc(a-b)}{\delta\gamma_1} v_0 v_0 = -\frac{2ab}{\gamma_1(a+b)} w_0'.
\end{aligned}
$$

On obtient donc, en posant dans (35) $m=1$,

$$
(52) \qquad \begin{cases} p_1 = \delta_1^{(1)} - \dfrac{2bc}{\alpha_1(b+c)} u_0, \\ q_1 = \delta_2^{(1)} - \dfrac{2ca}{\beta_1(c+a)} v_0, \\ r_1 = \delta_3^{(1)} - \dfrac{2ab}{\gamma_1(a+b)} w_0, \end{cases}
$$

$\delta_j^{(1)}$ $(j=1, 2, 3)$ étant des constantes arbitraires.

Donc, p_1, q_1, r_1 *sont périodiques en t ayant la même période que les fonctions elliptiques* u_0, v_0, w_0.

[**15**] Quant à ces dernières fonctions, nous allons les déterminer comme il suit.

Supposons, pour fixer les idées, que

$$(53) \qquad a > b > c$$

et que les constantes h et l [voir les égalités (46_1)] satisfassent à la condition

$$l^2 ac - bh^2 < 0.$$

Posons

$$\frac{bh^2 - l^2ac}{a(b^2 - c^2)} = \alpha^2, \qquad \frac{h^2a - l^2bc}{b(b^2 - c^2)} = \beta^2,$$

ce qui est possible, car on a toujours

$$h^2a - l^2bc > 0.$$

On a, eu égard à (53),

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{h^2(a^2 - b^2)}{ab(b^2 - c^2)} > 0.$$

Posons maintenant

$$k^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2} < 1,$$

$$M^2 = \frac{a(b^2 - c^2)(\beta^2 - \alpha^2)}{c(a^2 - b^2)}, \qquad N^2 = \frac{b(b^2 - c^2)(\beta^2 - \alpha^2)}{c(a^2 - b^2)},$$

$$u = \mu(t + \tau), \qquad \mu = \frac{(h^2a - l^2bc)\sqrt{a}}{\delta\sqrt{b}},$$

où τ désigne une constante arbitraire.

On trouve

(54) $$u_0 = \varepsilon_1 M cnu, \qquad v_0 = \varepsilon_2 N snu, \qquad w_0 = \varepsilon_3 \beta dnu,$$

où ε_1, ε_2, ε_3 sont égaux à ± 1.

Dans ce cas

$$\omega = \frac{4K}{\mu},$$

K désignant l'intégrale elliptique complète de la première espèce.

[**16**] Cela posé, considérons l'expression de X_{m+1} en posant dans (20) $k = m + 1$.

On peut écrire

$$\alpha_1 X_{m+1} = q_m\left\{(\beta_1 - \gamma_1)r_1 + \frac{2ab(b-c)(c-a)}{\delta}w_0\right\} + r_m\left\{(\beta_1 - \gamma_1)q_1 - \frac{2ac(b-c)(a-b)}{\delta}v_0\right\}$$
$$- \frac{2abc(b-c)}{\delta}(v_0 w_m + w_0 v_m) - \frac{(b-c)^2}{b+c}p'_m + K'_m,$$

où K'_m est une fonction ne dépendant pas de u_m, v_m, w_m; p_m, q_m et r_m.

On en tire, en tenant compte de (33),

$$\alpha_1 X_{m+1} = q_m\left\{(\beta_1 - \gamma_1)r_1 + \frac{2ab(b-c)(c-a)}{\delta}w_0\right\} + r_m\left\{(\beta_1 - \gamma_1)q_1 - \frac{2ac(b-c)(a-b)}{\delta}v_0\right\}$$
$$- \frac{2bc}{b+c}u'_m - \frac{(b-c)^2}{b+c}p'_m + \alpha_1 K_m,$$

où l'on a posé

$$\alpha_1 K_m = K'_m + \frac{2bc}{b+c} U_m.$$

Il est évident que K_m est une fonction périodique en t avec la période ω.

La même transformation nous conduira aux expressions analogues pour Y_{m+1} et Z_{m+1}.

Posons, pour abréger,

$$(54_1)\quad \left\{\begin{aligned}
\alpha_1 A_1 &= (\gamma_1 - \gamma_1)p_1 + \frac{2bc(c-a)(a-b)}{\delta} u_0, & \alpha_1 B_1 &= (\alpha_1 - \beta_1)p_1 - \frac{2bc(a-b)(c-a)}{\delta} u_0,\\
\beta_1 A_2 &= (\alpha_1 - \beta_1)q_1 + \frac{2ca(a-b)(b-c)}{\delta} v_0, & \beta_1 B_2 &= (\beta_1 - \gamma_1)q_1 - \frac{2ca(b-c)(a-b)}{\delta} v_0,\\
\gamma_1 A_3 &= (\beta_1 - \gamma_1)r_1 + \frac{2ab(b-c)(c-a)}{\delta} w_0, & \gamma_1 B_3 &= (\gamma_1 - \alpha_1)r_1 - \frac{2ab(c-a)(b-c)}{\delta} w_0.
\end{aligned}\right.$$

On aura

$$\begin{aligned}
X_{m+1} &= -\frac{2bc}{\alpha_1(b+c)} u'_m - \frac{(b-c)^2}{\alpha_1(b+c)} p'_m + q_m A_3 + r_m B_2 + K_m,\\
Y_{m+1} &= -\frac{2ca}{\beta_1(c+a)} v'_m - \frac{(c-a)^2}{\beta_1(c+a)} q'_m + r_m A_1 + p_m B_3 + L_m,\\
Z_{m+1} &= -\frac{2ab}{\gamma_1(a+b)} w'_m - \frac{(a-b)^2}{\gamma_1(a+b)} r'_m + p_m A_2 + q_m B_1 + M_m,
\end{aligned}$$

où K_m, L_m, M_m sont les fonctions connues ne dépendant pas de

$$u_m,\ v_m,\ w_m;\quad p_m,\ q_m,\ r_m.$$

Substituant ces expressions de X_{m+1}, Y_{m+1}, Z_{m+1} dans (51), on trouve

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned}
p_{m+1} &= \delta_1^{(m+1)} - \frac{2bc}{\alpha_1(b+c)} u_m - \frac{(b-c)^2}{\alpha_1(b+c)} p_m + \int_0^t (q_m A_3 + r_m B_2 + K_m)\,dt,\\
q_{m+1} &= \delta_2^{(m+1)} - \frac{2ca}{\beta_1(c+a)} v_m - \frac{(c-a)^2}{\beta_1(c+a)} q_m + \int_0^t (r_m A_1 + p_m B_3 + L_m)\,dt,\\
r_{m+1} &= \delta_3^{(m+1)} - \frac{2ab}{\gamma_1(a+b)} w_m - \frac{(a-b)^2}{\gamma_1(a+b)} r_m + \int_0^t (p_m A_2 + q_m B_1 + M_m)\,dt,
\end{aligned}\right.$$

$\delta_j^{(m+1)}$ désignant des constantes arbitraires.

On voit que p_{m+1}, q_{m+1}, r_{m+1} *deviennent périodiques en t, s'il en sera de même des intégrales, qui figurent dans les seconds membres des équations* (55).

[**17**] Revenons maintenant aux intégrales générales des équations du mouvement.

Substituant les séries (16) dans l'équation (13), on trouve

$$\sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \Big\{ 4b^2c^2(c+a)^2(a+b)^2 \sum_{i=0}^{k-2} u_i u_{k-i-2} + 4c^2a^2(a+b)^2(b+c)^2 \sum_{i=0}^{k-2} v_i v_{k-i-2} + 4a^2b^2(b+c)^2(c+a)^2 \sum_{i=0}^{k-2} w_i w_{k-i-2} \Big\}$$
$$+ 2 \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \Big\{ \alpha_1 bc(c+a)(a+b) \sum_{i=1}^{k-1} p_i u_{k-i-1} + \beta_1 ca(a+b)(b+c) \sum_{i=1}^{k-1} q_i v_{k-i-1} + \gamma_1 ab(b+c)(c+a) \sum_{i=1}^{k-1} r_i w_{k-i-1} \Big\}$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_1^2 p_i p_{k-i} + \beta_1^2 q_i q_{k-i} + \gamma_1^2 r_i r_{k-i}) = \varepsilon^2 \mathrm{H},$$

H désignant une constante.

De cette égalité on tire, pour les valeurs de m, plus grandes que 1,

$$\begin{aligned}(56)\qquad & \alpha_1 p_{m+1} \{ \alpha_1 p_1 + bc(c+a)(a+b) u_1 \} + \beta_1 q_{m+1} \{ \beta_1 q_1 + ca(a+b)(b+c) v_0 \} \\ & + \gamma_1 r_{m+1} \{ \gamma_1 r_1 + ab(b+c)(c+a) w_0 \} = \mathrm{H}_m,\end{aligned}$$

où H_m est une fonction ne dépendant que de

$$p_k,\ q_k,\ r_k;\quad u_k,\ v_k,\ w_k \qquad \text{pour} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

c'est-à-dire une fonction périodique de t avec la période ω, car, d'après la supposition faite, tous les p_k, q_k, r_k; u_k, v_k, w_k pour toutes les valeurs de k à partir de $k = 0$ jusqu'à $k = m$ sont les fonctions périodiques de t avec la période ω.

L'équation (56) montre qu'*il suffit de rendre deux de trois fonctions*

$$p_{m+1},\quad q_{m+1},\quad r_{m+1}$$

périodiques en t pour qu'il en soit de même de la troisième de ces fonctions.

[**18**] Envisageons maintenant les expressions (55).

Les constantes $\delta_j^{(m)}$ dans les expressions de p_m, q_m, r_m restent jusqu'à présent indéterminées.

Montrons qu'*on peut les choisir de façon que* p_{m+1} *et* q_{m+1}, ou, ce qui revient au même, *les intégrales*

$$(57)\qquad \int_0^t (q_m \mathrm{A}_3 + r_m \mathrm{B}_2 + \mathrm{K}_m)\,dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^t (r_m \mathrm{A}_1 + p_m \mathrm{B}_3 + \mathrm{L}_m)\,dt$$

deviennent les fonctions périodiques de t avec la période ω.

Cette condition étant remplie, la troisième intégrale, qui figure dans l'expression de r_{m+1}, *représentera nécessairement une fonction périodique de t*, d'après la proposition établie au n° précédent. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les intégrales (57) soient les fonctions périodiques de t s'expriment comme il suit :

$$\int_0^\omega (q_m A_3 + r_m B_2 + K_m) dt = 0,$$
$$\int_0^\omega (r_m A_1 + p_m B_3 + L_m) dt = 0.$$

Substituant dans ces équations les expressions (35) de p_m, q_m et r_m, on trouve

$$(58)\qquad \begin{cases} \delta_2^{(m)} G_3 + \delta_3^{(m)} H_2 = P_m, \\ \delta_3^{(m)} G_1 + \delta_1^{(m)} H_3 = Q_m, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$-P_m = \int_0^\omega K_m dt + \int_0^\omega \left\{ A_3 \int_0^t Y_m dt + B_2 \int_0^t Z_m dt \right\} dt,$$
$$-Q_m = \int_0^\omega L_m dt + \int_0^\omega \left\{ A_1 \int_0^t Z_m dt + B_3 \int_0^t X_m dt \right\} dt,$$

$$(59)\qquad \begin{cases} G_1 = \int_0^\omega A_1 dt, \qquad G_3 = \int_0^\omega A_3 dt, \\ H_2 = \int_0^\omega B_2 dt, \qquad H_3 = \int_0^\omega B_3 dt. \end{cases}$$

[**19**] Les constantes P_m, Q_m, G_1, G_3, H_2, H_3 dépendent évidemment des constantes $\delta_j^{(1)}$ ($j = 1, 2, 3$) qui entrent dans les expressions (52) de p_1, q_1 et r_1.

Il est aisé de comprendre que ces constantes ne peuvent pas être considérées comme arbitraires, car elles doivent être choisies de façon que les fonctions u_1, v_1, w_1 et p_2, q_2, r_2 soient périodiques en t. Nous avons déjà trouvé les fonctions

$$u_0, v_0, w_0; \quad p_1, q_1 \text{ et } r_1.$$

Passons à la détermination des fonctions u_1, v_1 et w_1.

Appliquant les résultats du n° 10 au cas de $k = 1$, on trouve

$$(60)\qquad \begin{cases} u_1 = c_1^{(1)} u^{(1)} + M_1 u_0 + N_1 u^{(1)}, \\ v_1 = c_1^{(1)} v^{(1)} + M_1 v_0 + N_1 v^{(1)}, \\ w_1 = c_1^{(1)} w^{(1)} + M_1 w_0 + N_1 w^{(1)} + \dfrac{c_3^{(1)}}{w_0} - \dfrac{1}{w_0} S_1', \end{cases}$$

où

$$M_1 = c_2^{(1)} - R'_1,$$

$$N_1 = tc_2^{(1)} + c_3^{(1)} \int \frac{dt}{w_0^2} - \int R'_1 \, dt - \int \frac{S'_1}{w_0^2} \, dt + \int \frac{v_0 U_1 - u_0 V_1}{w_0 \Delta} \, dt,$$

$$R'_1 = \int R_1 \, dt, \qquad S'_1 = \int S_1 \, dt,$$

$$R_1 = \frac{v^{(1)} U_1 - u^{(1)} V_1}{w_0 \Delta},$$

$$S_1 \Delta = U_1(v_0 w^{(1)} - w_0 v^{(1)}) + V_1(w_0 u^{(1)} - u_0 w^{(1)}) + W_1(u_0 v^{(1)} - v_0 u^{(1)})$$

et

$$U_1 = \frac{2a}{(c+a)(a+b)} \left\{ (a+c) v_0 r_1 - (a+b) w_0 q_1 \right\},$$

$$V_1 = \frac{2b}{(a+b)(b+c)} \left\{ (b+a) w_0 p_1 - (b+c) u_0 r_1 \right\},$$

$$W_1 = \frac{2c}{(b+c)(c+a)} \left\{ (c+b) u_0 q_1 - (c+a) v_0 p_1 \right\}.$$

On peut affirmer, d'après ce que nous avons dit au n° 13, que u_1, v_1, w_1, définies par les équations (60), seront périodiques en t, si nous allons assujettir les constantes $c_j^{(1)}$ et $\delta_j^{(1)}$ ($j = 1, 2, 3$) à la seule condition

$$(60_1) \qquad c_2^{(1)} + c_3^{(1)} \int_0^\omega \frac{dt}{w_0^2} = \int_0^\omega R'_1 \, dt - \int_0^\omega \frac{S'_1}{w_0^2} \, dt + \int_0^\omega \frac{v_0 U_1 - u_0 V_1}{w_0 \Delta} \, dt = D_1,$$

où D_1 est une fonction linéaire des constantes $\delta_j^{(1)}$ ($j = 1, 2, 3$) qui restent encore indéterminées.

[**20**] Après avoir déterminé u_1, v_1, w_1 de la manière tout à l'heure indiquée en fonctions périodiques de t, cherchons les expressions de p_2, q_2 et r_2.

Posant dans (24) $k = 2$ et

$$p_0 = q_0 = r_0 = 0,$$

on trouve, eu égard à (20) et (33),

$$\alpha_1 p'_2 = (\beta_1 - \gamma_1) q_1 r_1 + 2a \left(c r_1 \frac{v_0}{c+a} - b q_1 \frac{w_0}{a+b} \right) - \frac{2bc}{b+c} u'_1 - \frac{(b-c)^2}{b+c} p'_1,$$

$$\beta_1 q'_2 = (\gamma_1 - \alpha_1) r_1 p_1 + 2b \left(a p_1 \frac{w_0}{a+b} - c r_1 \frac{u_0}{b+c} \right) - \frac{2ca}{c+a} v'_1 - \frac{(c-a)^2}{c+a} q'_1,$$

$$\gamma_1 r'_2 = (\alpha_1 - \beta_1) p_1 q_1 + 2c \left(b q_1 \frac{u_0}{b+c} - a p_1 \frac{v_0}{c+a} \right) - \frac{2ab}{a+b} w'_1 - \frac{(a-b)^2}{a+b} r'_1.$$

On en tire, en tenant compte de (52),

$$\alpha_1 p'_2 = (\beta_1 - \gamma_1)\delta_2^{(1)}\delta_3^{(1)} + 2a\left\{\delta_3^{(1)} c\gamma_1 \frac{v_0}{\beta_1(c+a)} - \delta_2^{(1)} b\beta_1 \frac{w_0}{\gamma_1(a+b)}\right\} - \frac{2bc}{b+c}u'_1 - \frac{(b-c)^2}{b+c}p'_1,$$

$$\beta_1 q'_2 = (\gamma_1 - \alpha_1)\delta_3^{(1)}\delta_1^{(1)} + 2b\left\{\delta_1^{(1)} a\alpha_1 \frac{w_0}{\gamma_1(a+b)} - \delta_3^{(1)} c\gamma_1 \frac{u_0}{\alpha_1(b+c)}\right\} - \frac{2ca}{c+a}v'_1 - \frac{(c-a)^2}{c+a}q'_1,$$

$$\gamma_1 r'_2 = (\alpha_1 - \beta_1)\delta_1^{(1)}\delta_2^{(1)} + 2c\left\{\delta_2^{(1)} b\beta_1 \frac{u_0}{\alpha_1(b+c)} - \delta_1^{(1)} b\beta_1 \frac{v_0}{c+a}\right\} - \frac{2ab}{a+b}w'_1 - \frac{(a-b)^2}{c+a}r'_1.$$

L'intégration de ces équations conduit aux expressions suivantes pour p_2, q_2 et r_2 :

$$p_2 = \delta_1^{(2)} - \frac{2bc}{\alpha_1(b+c)}u_1 - \frac{(b-c)^2}{\alpha_1(b+c)}p_1 + t\frac{\beta_1-\gamma_1}{bc\,\alpha_1\beta_1\gamma_1}yz + \frac{a}{\alpha_1}\left\{z\mathrm{H}_2(t) - y\mathrm{H}_3(t)\right\},$$

$$q_2 = \delta_2^{(2)} - \frac{2ca}{\beta_1(c+a)}v_1 - \frac{(c-a)^2}{\beta_1(c+a)}q_1 + t\frac{\gamma_1-\alpha_1}{ac\,\alpha_1\beta_1\gamma_1}zx + \frac{b}{\beta_1}\left\{x\mathrm{H}_3(t) - z\mathrm{H}_1(t)\right\},$$

$$r_2 = \delta_3^{(2)} - \frac{2ab}{\gamma_1(a+b)}w_1 - \frac{(a-b)^2}{\gamma_1(a+b)}r_1 + t\frac{\alpha_1-\beta_1}{ba\,\alpha_1\beta_1\gamma_1}xy + \frac{c}{\gamma_1}\left\{y\mathrm{H}_1(t) - x\mathrm{H}_2(t)\right\},$$

où l'on a posé

$$\frac{2}{\alpha_1(b+c)}\int_0^t u_0\,dt = \mathrm{H}_1(t), \qquad \frac{2}{\beta_1(c+a)}\int_0^t v_0\,dt = \mathrm{H}_2(t), \qquad \frac{2}{\gamma_1(a+b)}\int_0^t w_0\,dt = \mathrm{H}_3(t),$$

$$(61) \qquad \delta_1^{(1)} = \frac{x}{a\alpha_1}, \qquad \delta_2^{(1)} = \frac{y}{b\beta_1}, \qquad \delta_3^{(1)} = \frac{z}{c\gamma_1}.$$

En se rappelant que

$$u_1,\ v_1,\ w_1;\quad p_1,\ q_1,\ r_1$$

sont les fonctions périodiques de t, on en conclut que p_2, q_2 et r_2 seront aussi périodiques, si nous choisissons les constantes x, y, z de façon que l'on ait

$$(62) \qquad \begin{cases} g_1 yz + zh_2 - yh_3 = 0, \\ g_1 zx + xh_3 - zh_1 = 0, \\ g_1 xy + yh_1 - xh_2 = 0, \end{cases}$$

où l'on a introduit les notations suivantes :

$$(62_1) \qquad \begin{cases} g_1 = \dfrac{\beta_1-\gamma_1}{abc\,\beta_1\gamma_1}, \qquad g_2 = \dfrac{\gamma_1-\alpha_1}{abc\,\gamma_1\alpha_1}, \qquad g_3 = \dfrac{\alpha_1-\beta_1}{abc\,\alpha_1\beta_1}. \\ h_1 = \dfrac{2}{\alpha_1(b+c)}\displaystyle\int_0^\omega u_0\,dt, \qquad h_2 = \dfrac{2}{\beta_1(c+a)}\displaystyle\int_0^\omega v_0\,dt, \qquad h_3 = \dfrac{2}{\gamma_1(a+b)}\displaystyle\int_0^\omega w_0\,dt. \end{cases}$$

Or, on sait que

$$h_1 = h_2 = 0, \qquad h_3 = \varepsilon_3\frac{8\pi\beta}{\mu\gamma_1(a+b)}.$$

Les équations (62) deviennent

$$(63)\qquad y(g_1 z - h_3) = 0, \qquad x(g_2 z + h_3) = 0, \qquad g_3 xy = 0.$$

Nous allons supposer que g_3 soit différent de zéro, c'est-à-dire que l'ellipsoïde d'inertie du corps solide, par rapport au point fixe, soit un ellipsoïde à trois axes inégaux.

Dans ce cas, nous devons avoir

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0.$$

Si $x = 0$, y reste indéterminé, et la première des équations (63) donne

$$z = \frac{h_3}{g_1}.$$

Si $y = 0$, x reste indéterminé, et la seconde de ces équations donne

$$z = -\frac{h_3}{g_2}.$$

Outre ces solutions, les équations (63) admettent encore la solution

$$x = y = z = 0.$$

On voit donc qu'il suffit de prendre pour $\delta_j^{(1)}$ l'un de ces trois groupes de valeurs

$$(64)\qquad \begin{cases} 1) & \delta_1^{(1)} = 0, & \delta_2^{(1)}, & \delta_3^{(1)} = \dfrac{h_3}{c\gamma_1 g_1}, \\ 2) & \delta_1^{(1)}, & \delta_2^{(1)} = 0, & \delta_3^{(1)} = -\dfrac{h_3}{c\gamma_1 g_2}, \\ 3) & \delta_1^{(1)} = 0, & \delta_2^{(1)} = 0, & \delta_3^{(1)} = 0 \end{cases}$$

pour déterminer p_2, q_2, r_2 en fonctions périodiques de t avec la période ω.

Substituant ces valeurs de $\delta_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, 3)$ dans le second membre de l'équation (60_1), nous obtiendrons pour D_1 une expression bien déterminée. Cette équation conduira alors à une relation entre les constantes $c_2^{(1)}$ et $c_3^{(1)}$.

Cette relation étant remplie, les fonctions u_1, v_1, w_1 deviennent périodiques, quelles que soient les constantes $c_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, 3)$ assujetties à une seule condition (60_1).

Deux de ces trois constantes peuvent être considérées comme arbitraires.

[**21**] Après avoir trouvé

$$u_0,\ v_0,\ w_0,\ u_1,\ v_1,\ w_1,$$
$$p_1,\ q_1,\ r_1,\ p_2,\ q_2,\ r_2$$

en fonctions périodiques de t, nous déterminerons ensuite

$$u_2,\ v_2,\ w_2$$

en fonctions périodiques de t, en appliquant les raisonnements du n° 16 au cas de $k=2$.

Ces fonctions étant trouvées, nous déterminerons ensuite p_3, q_3 et r_3 à l'aide de quadratures (51) en y posant $m=2$.

D'après ce que nous avons démontré au n° 18, ces fonctions deviendront périodiques en t, si nous choisissons les constantes $\delta_j^{(2)}(j=1, 2, 3)$, qui entrent dans les expressions de p_2, q_2, r_2, de façon que l'on ait

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\delta_2^{(2)} G_3 + \delta_3^{(2)} H_2 = P_2,\\
&\delta_3^{(2)} G_1 + \delta_1^{(2)} H_3 = Q_2,
\end{aligned}
\right.
\tag{65}
$$

ce qui est toujours possible, comme nous le verrons tout de suite. Pour s'en assurer, il suffit de montrer que G_3 et H_3 sont différents de zéro.

On trouve, eu égard à (52) et (54_1),

$$
\gamma_1 A_3 = (\beta_1 - \gamma_1)\delta_3^{(1)} + ab\left\{\frac{c(a+b)}{(b+c)(c+a)} - \frac{\beta_1}{\gamma_1}\right\}\frac{2w_0}{(a+b)},
$$
$$
\gamma_1 B_3 = (\gamma_1 - \alpha_1)\delta_3^{(1)} + ab\left\{\frac{c(a+b)}{(b+c)(c+a)} - \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right\}\frac{2w_0}{(a+b)},
$$

d'où l'on tire, en intégrant et en tenant compte de (62_1) et (59),

$$
G_3 = \delta_3^{(1)}\frac{\beta_1-\gamma_1}{\gamma_1}\omega + \varepsilon_3 h_3 ab\left\{\frac{c(a+b)}{(b+c)(c+a)} - \frac{\beta_1}{\gamma_1}\right\},
$$
$$
H_3 = \delta_3^{(1)}\frac{\gamma_1-\alpha_1}{\gamma_1}\omega - \varepsilon_3 h_3 ab\left\{\frac{c(a+b)}{(b+c)(c+a)} - \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right\}.
$$

On aura de même, en vertu de (62_1) et (59),

$$
H_2 = \frac{\beta_1-\gamma_1}{\beta_1}\delta_2^{(1)}\omega, \qquad G_1 = \frac{\gamma_1-\alpha_1}{\alpha_1}\delta_1^{(1)}\omega,
$$

car

$$
\int_0^\omega u_0\,dt = \int_0^\omega v_0\,dt = 0.
$$

Supposant que $\delta_j^{(1)}(j=1, 2, 3)$ se définissent par la première des conditions (64), on trouve

$$
G_1 = 0,
$$
$$
G_3 = h_3 ab\left\{\frac{\beta_1}{\gamma_1}(\omega - \varepsilon_3) + \varepsilon_3\frac{c(a+b)}{(b+c)(c+a)}\right\},
$$
$$
H_3 = h_3 ab\left\{\frac{\beta_1(\gamma_1-\alpha_1)}{\gamma_1(\beta_1-\gamma_1)}\omega + \varepsilon_3\frac{\alpha_1}{\gamma_1} - \varepsilon_3\frac{c(a+b)}{(b+c)(c+a)}\right\},
$$

H_2 reste arbitraire, car il en est de même de la constante $\delta_2^{(1)}$.

Si $\delta_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, 3)$ satisfont à la seconde des conditions (64), on aura

$$G_3 = h_3 ab \left\{ \varepsilon_3 \left[\frac{c(a+b)}{(b+c)(c+a)} - \frac{\beta_1}{\gamma_1} \right] - \frac{\alpha_1(\beta_1 - \gamma_1)}{\gamma_1(\gamma_1 - \alpha_1)} \omega \right\},$$

$$H_3 = -h_3 ab \left\{ \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \omega + \varepsilon_3 \left[\frac{c(a+b)}{(b+c)(a+c)} - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \right] \right\},$$

$$H_2 = 0,$$

G_1 reste arbitraire, car il en est de même de la constante $\delta_1^{(1)}$.

Enfin, si

$$\delta_1^{(1)} = \delta_2^{(1)} = \delta_3^{(1)} = 0,$$

on a

$$H_2 = G_1 = 0,$$

$$G_3 = \varepsilon_3 h_3 ab \left\{ \frac{c(a+b)}{(b+c)(c+a)} - \frac{\beta_1}{\gamma_1} \right\},$$

$$H_3 = -\varepsilon_3 h_3 ab \left\{ \frac{c(a+b)}{(b+c)(c+a)} - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \right\}.$$

Dans le premier cas, les équations (65) deviennent

$$(66_1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\delta_1^{(2)} = \frac{Q_2}{H_3}, \\ &\delta_2^{(2)} G_3 + \delta_3^{(2)} H_2 = P_2. \end{aligned} \right.$$

L'une des deux constantes $\delta_2^{(1)}$ et $\delta_3^{(1)}$ peut être considérée comme arbitraire.

Dans le second cas, on a

$$(66_2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\delta_2^{(2)} = \frac{P_2}{G_3}, \\ &\delta_3^{(2)} G_1 + \delta_1^{(2)} H_3 = Q_2, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire, l'une des constantes $\delta_3^{(2)}$ et $\delta_1^{(2)}$ reste arbitraire.

Enfin, dans le dernier cas, les équations (65) donnent

$$(66_3) \qquad \delta_2^{(2)} = \frac{P_2}{G_3}, \qquad \delta_1^{(2)} = \frac{Q_2}{H_3}.$$

Quant à la troisième constante $\delta_3^{(2)}$, elle reste indéterminée.

Donc, *on peut toujours choisir les constantes* $\delta_j^{(2)}$, *qui entrent dans les expressions de* p_2, q_2 *et* r_2, *de telle façon que les fonctions*

$$p_3, \; q_3, \; r_3$$

deviennent périodiques en t *avec la période* ω.

L'une des trois constantes $\delta_j^{(2)}$ reste toujours arbitraire, les deux autres se déterminent à l'aide des équations (66_1), ou (66_2), ou (66_3).

Dans tous les cas, on suppose, sans doute, qu'entre les constantes

$$h,\ l,\ a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \tau$$

il n'existe pas des relations exprimées par les équations

$$G_3 = H_3 = 0.$$

[**22**] Après avoir déterminé, de la manière tout à l'heure indiquée, u_k, v_k, w_k ($k = 0, 1, 2$) et p_k, q_k, r_k ($k = 0, 1, 2, 3$) en fonctions périodiques de t, nous trouverons ensuite u_3, v_3, w_3, en appliquant les raisonnements du n° 10 au cas de $k = 3$.

Ces fonctions seront périodiques en t, si nous allons assujettir les constantes $c_2^{(3)}$ et $c_3^{(3)}$ à la seule condition (50), en y posant $m = 3$.

Les fonctions u_k, v_k, w_k ($k = 0, 1, 2, 3$) et p_k, q_k, r_k ($k = 0, 1, 2, 3$) étant trouvées, nous obtiendrons p_4, q_4, r_4 à l'aide des quadratures.

Ces dernières fonctions seront périodiques en t avec la période ω, si nous allons définir les constantes $\delta_1^{(3)}$, $\delta_2^{(3)}$, $\delta_3^{(3)}$, qui figurent dans les expressions de p_3, q_3, r_3, et qui restent encore indéterminées à l'aide des équations (58) en y posant $m = 3$.

En continuant ainsi de suite, nous allons déterminer successivement toutes les fonctions

$$u_k,\ v_k,\ w_k;\quad p_k,\ q_k,\ r_k$$

en fonctions périodiques de t avec la période ω.

Il est aisé de comprendre que chaque groupe de six fonctions

$$u_m,\ v_m,\ w_m;\quad p_{m+1},\ q_{m+1},\ r_{m+1},$$

quel que soit le nombre $m \geqq 2$, dépend de trois constantes arbitraires, et que chaque fonction de ce groupe est une fonction linéaire de ces constantes.

Si les constantes $\delta_j^{(1)}$ satisfont à la première des conditions (64), on peut prendre pour ces constantes arbitraires les constantes

$$c_1^{(m)},\ c_3^{(m)} \quad \text{et} \quad \delta_2^{(m)}.$$

Si $\delta_j^{(1)}$ satisfont à la seconde des conditions (64), nous pouvons considérer comme arbitraires les constantes

$$c_1^{(m)},\ c_3^{(m)} \quad \text{et} \quad \delta_1^{(m)}.$$

Enfin, dans le dernier cas (64), on peut prendre pour les constantes arbitraires

$$c_1^{(m)},\ c_3^{(m)} \quad \text{et} \quad \delta_3^{(m)}.$$

Ces constantes, dans chaque cas considéré, doivent être assujetties à une seule condition, que les séries (16), disposées suivant les puissances entières et positives du paramètre ε, soient convergentes.

Nous obtiendrons ainsi trois séries des solutions périodiques des équations du mouvement, correspondant à la solution particulière

$$(\gamma) \qquad p_0 = q_0 = r_0 = 0$$

de ces équations pour $\varepsilon = 0$, *conformément à trois conditions différentes* (64), *auxquelles doivent satisfaire les constantes* $\delta_j^{(1)}$.

On pourra, de la manière analogue à celle que nous venons d'indiquer, démontrer l'existence des solutions périodiques des équations du mouvement correspondant aux autres solutions périodiques de ces équations pour $\varepsilon = 0$, par exemple à la solution de la forme

$$(\delta) \qquad u_0 = v_0 = w_0 = 0,$$

ou, encore plus généralement (voir n° 9),

$$u_0 = \lambda_1 p_0, \qquad v_0 = \lambda_2 q_0, \qquad w_0 = \lambda_3 r_0.$$

Les cas particuliers (γ) et (δ) méritent une attention particulière.

Appliquant les raisonnements, analogues aux précédents, au cas (δ), nous pouvons arriver à la conclusion suivante :

On peut imprimer au corps solide certains mouvements périodiques qui impriment, à leur tour, des oscillations petites, aussi périodiques, au liquide contenu dans la cavité.

Inversement, on voit, d'après ce qui précède [le cas (γ)], qu'*il est possible d'imprimer au liquide, remplissant la cavité, tels mouvements périodiques, qui imprimeront, à leur tour, des oscillations petites, aussi périodiques, au corps solide, immobile, par exemple, au moment initial.*

Nous nous rencontrons ici avec une circonstance analogue à celle qui se manifeste dans le phénomène des variations de latitudes terrestres; nous pouvons donc en profiter pour en déduire quelques explications du phénomène dont il s'agit.

Ici, je me bornerai à cette remarque en me proposant de revenir sur cette question plus loin.

III. — Certaines solutions particulières des équations du mouvement, dans le cas où le moment résultant des forces extérieures, par rapport au point fixe, est égal a zéro.

[**23**] Nous allons indiquer, dans cette section, certaines solutions particulières des équations (7) et (8) du mouvement, en supposant que

$$M_\xi = M_\eta = M_\zeta = 0.$$

Remarquons tout d'abord qu'on peut satisfaire aux équations (7) et (8) en posant

$$u = v = w = 0.$$

La solution du problème se ramène à l'intégration des équations d'Euler

$$\alpha p' = (\beta - \gamma) qr, \qquad \beta q' = (\gamma - \alpha) rp, \qquad \gamma r' = (\alpha - \beta) pq$$

qui expriment p, q et r en fonctions elliptiques de t.

Nous retombons ici au cas bien connu du mouvement d'un corps solide ayant une cavité de la forme ellipsoïdale remplie par un liquide animé d'un mouvement irrotationnel.

Ce cas bien étudié n'est qu'un cas particulier du problème plus général que nous considérons dans ce travail.

[**24**] Une autre solution, très simple, s'obtient, si l'on pose

$$u = v = 0, \qquad p = q = 0.$$

Les équations du mouvement (7) et (8) se réduisent à deux suivantes

$$w' = 0, \qquad r' = 0$$

ce qui donne

$$w = \text{const.}, \quad r = \text{const.}$$

Dans ce cas, le corps solide tourne uniformément autour d'axe des ζ, et les tourbillons du liquide, remplissant la cavité, restent toujours les lignes droites parallèles à cet axe.

On peut aussi satisfaire aux équations du mouvement en posant

$$\begin{gathered} v = 0, \; w = 0; \quad q = 0, \; r = 0, \\ u = \text{const.}, \quad p = \text{const.} \end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered} u = 0, \; w = 0; \quad p = 0, \; r = 0, \\ v = \text{const.}, \quad q = \text{const.} \end{gathered}$$

Donc, *chaque corps solide, ayant une cavité de la forme ellipsoïdale, remplie par un liquide incompressible, dont les parties s'attirent suivant la loi de Newton, admet la rotation uniforme autour de chacun des axes principaux d'inertie par rapport au point fixe, situé au centre de la surface ellipsoïdale de la cavité* (1).

[**25**] Supposons maintenant que

$$u = p = 0,$$

tandis que v, w, r et q restent différents de zéro.

(1) Rappelons que nous supposons que les axes principaux de cet ellipsoïde coïncident avec les axes principaux d'inertie du corps solide.

Les équations (7) et (8) [pour $M_\xi = M_\eta = M_\zeta = 0$] deviennent alors

$$(67_1)\qquad (b-c)vw + 2(a+c)rv - 2(a+b)qw = 0,$$
$$v' = 0,\qquad w' = 0,$$

$$(67_2)\qquad (\beta-\gamma)qr + K(c-b)vw + \frac{2Ma(c-b)}{5}[c(a-b)rv - b(c-a)qw] = 0,$$
$$q' = 0,\qquad r' = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$v = \text{const.},\quad w = \text{const.},$$
$$q = \text{const.},\quad r = \text{const.}$$

Donc, v, w, q et r doivent rester constantes pendant le mouvement et satisfaire à deux équations (67_1) et (67_2).

Posons

$$\frac{2q}{v} = \eta,\qquad \frac{2r}{w} = \zeta,$$

$$\lambda = \frac{4Ma(b+c)}{5}.$$

Les équations (67_1) et (67_2) peuvent s'écrire

$$(68)\qquad \begin{cases} (b-c) + (a+c)\zeta - (a+b)\eta = 0,\\ (\beta-\gamma)\eta\zeta + \lambda c(a+b)\zeta - \lambda b(c+a)\eta = 0.\end{cases}$$

On en tire

$$(69)\qquad \eta = \frac{b-c}{a+b} + \frac{a+c}{a+b}\zeta.$$

Substituant cette expression de η dans la seconde des équations (68), on obtient cette équation pour ζ

$$(70)\qquad \zeta^2 + \frac{b-c}{(\beta-\gamma)(a+c)}\left\{(\beta-\gamma) + \lambda(bc-a^2)\right\}\zeta - \frac{\lambda b(b-c)}{\beta-\gamma} = 0.$$

Cette équation admet deux racines réelles, pourvu que

$$(71)\qquad (b-c)\left\{(b-c)[\sigma + \lambda m]^2 + 4\lambda b(a+c)^2\sigma\right\} \geqq 0,$$

où l'on a posé

$$\sigma = \beta - \gamma,\qquad m = bc - a^2.$$

Nous avons deux cas à distinguer :

1) $b - c = h^2 > 0$, 2) $b - c = -h^2 < 0$.

Supposons d'abord que

$$b - c = h^2 > 0.$$

La condition (71) exige que l'on ait

$$f(\sigma) = h^2[\sigma + \lambda m]^2 + 4\lambda b(a+c)^2\sigma \geqq 0.$$

Il est aisé de s'assurer que l'équation

$$f(\sigma) = 0$$

admet deux racines réelles et négatives :

$$\sigma_1 = -\frac{\lambda}{b-c}\left\{(a+c)\sqrt{b} + (a+b)\sqrt{c}\right\}^2,$$

$$\sigma_2 = -\frac{\lambda}{b-c}\left\{(a+c)\sqrt{b} - (a+b)\sqrt{c}\right\}^2.$$

Il s'ensuit que

$$f(\sigma) \geqq 0$$

pour les valeurs de σ satisfaisant aux conditions suivantes

$$(72)\qquad \begin{cases} -\infty < \sigma \leqq \sigma_1, \\ \sigma_2 \leqq \sigma < +\infty. \end{cases}$$

Toutes les fois que la différence

$$\sigma = \beta - \gamma$$

satisfait à l'une des conditions (72), l'équation (70) donne deux valeurs réelles pour ζ, que nous désignons par ζ_1 et ζ_2.

Substituant ces valeurs de ζ dans (69), nous trouverons deux valeurs correspondantes η_1 et η_2 pour η.

On obtient ainsi

$$q = \eta_j \frac{v}{2}, \qquad r = \zeta_j \frac{w}{2}. \qquad (j = 1, 2)$$

Donc, toutes les fois que les constantes

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ a,\ b,\ c,\ \mathrm{M},$$

qui caractérisent le système considéré, composé d'un corps solide et d'un liquide incompressible remplissant une cavité ellipsoïdale appartenant au corps solide, satisfont aux conditions (72), ce système admet un mouvement, défini par les équations

$$(73)\qquad \begin{cases} u = 0, \qquad p = 0 \\ q = \eta_j \frac{v}{2}, \qquad r = \zeta_j \frac{w}{2}. \end{cases}$$

On peut donner arbitrairement les constantes v et w, qui caractérisent le mouvement du liquide; dans ce cas, le mouvement du corps solide sera complètement déterminé à l'aide des équations (73). Inversement, on peut donner à l'avance les composantes q et r de la vitesse angulaire de rotation du corps solide; le mouvement du liquide sera alors complètement déterminé à l'aide des équations

$$u=0, \qquad v=\frac{2q}{\eta_j}, \qquad w=\frac{2r}{\zeta_j}.$$

Donc, *à tout mouvement du liquide, dans lequel les lignes de tourbillon sont des lignes droites, situées dans des plans parallèles au plan principal* $\zeta\eta$ *de la surface ellipsoïdale de la cavité, correspondent deux cas différents du mouvement du corps solide.*

Dans chacun de ces cas, *le corps solide tourne uniformément autour d'un axe fixe, situé dans le plan principal* $\eta\zeta$ *de l'ellipsoïde*

$$\frac{\xi^2}{a}+\frac{\eta^2}{b}+\frac{\zeta^2}{c}=1 \tag{74}$$

et passant par son centre.

Inversement, *on peut imprimer au corps solide à l'avance une rotation uniforme autour d'un axe quelconque passant par le centre de l'ellipsoïde* (74) *et situé dans le plan principal* $\eta\zeta$ *de cet ellipsoïde. A tout mouvement de l'espèce considérée du corps solide correspondent deux mouvements possibles du liquide, contenu dans la cavité, dans chacun desquels les tourbillons sont les lignes droites, parallèles à une droite fixe, située dans le plan principal* $\eta\zeta$ *de l'ellipsoïde* (74).

Nous avons supposé que

$$u=p=0.$$

Nous obtiendrons, évidemment, les résultats analogues, si l'on pose

$$1) \quad v=q=0,$$
$$2) \quad w=r=0.$$

Donc, *si les constantes*

$$\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, M$$

qui caractérisent le système, composé d'un corps solide et d'un liquide qui remplit entièrement la cavité de la forme ellipsoïdale appartenant à ce corps, satisfont à certaines inégalités, analogues à celles de (72), *le système peut être animé d'un mouvement qui consiste en rotation uniforme du corps solide autour d'un axe fixe, situé dans un des plans principaux de la surface ellipsoïdale de la cavité et passant par son centre, et en un mouvement du liquide, contenu dans la cavité, tel que les tourbillons restent toujours des lignes droites, parallèles à une droite fixe, située dans le plan principal considéré.*

[**26**] Nous avons supposé que le produit

$$(b-c)(c-a)(a-b)$$

soit différent de zéro, c'est-à-dire que la surface de la cavité soit un ellipsoïde à trois axes inégaux.

La proposition tout à l'heure énoncée sera en défaut, si nous supposons, par exemple, que

$$a-b=0,$$

tandis que $\alpha-\beta$ ne s'annule pas.

Dans ce cas, la rotation uniforme du corps solide autour d'axe, situé dans le plan équatorial de l'ellipsoïde

$$\frac{\xi^2+\eta^2}{a}+\frac{\zeta^2}{b}=1, \tag{74$_1$}$$

devient impossible, car, dans le cas considéré, la troisième des équations (8) se réduit à la suivante :

$$\gamma r' = (\alpha-\beta)pq.$$

La supposition

$$w=0, \qquad r=0$$

exige que l'on ait

$$p=0 \quad \text{ou} \quad q=0.$$

Or, la troisième des équations (7) prend la forme

$$qu-pv=0.$$

On en conclut que

$$u=0 \quad \text{ou} \quad v=0.$$

Nous retombons ici au cas du mouvement indiqué au n° 24.

Mais si nous supposons que les différences

$$a-b \quad \text{et} \quad \alpha-\beta$$

s'annulent à la fois, le théorème du numéro précédent devient exact de nouveau.

En effet, les équations (7) et (8), si l'on pose

$$r=w=0, \qquad a-b=0, \qquad \alpha-\beta=0.$$

deviennent

$$u'=0, \quad v'=0, \qquad p'=0, \quad q'=0,$$
$$qu-pv=0.$$

On en conclut que

$$u=\lambda p, \qquad v=\lambda q,$$

λ désignant un paramètre arbitraire.

A toutes les valeurs données des constantes u et v, c'est-à-dire à tout mouvement de l'espèce considérée du liquide, correspond une rotation uniforme du corps solide autour d'un axe fixe, situé dans le plan principal $\xi\eta$ de l'ellipsoïde (74), *avec une vitesse angulaire Ω qui reste arbitraire,* car

$$\Omega = \frac{1}{\lambda}\sqrt{u^2+v^2} = \text{const.},$$

et λ est un paramètre arbitraire.

Inversement, *à toute rotation uniforme du corps solide autour d'un axe fixe, situé dans le plan équatorial de l'ellipsoïde* (74_1), *correspond un tel mouvement du liquide, contenu dans la cavité, que les lignes de tourbillon restent toujours des droites, parallèles à une droite fixe, située dans le plan équatorial de l'ellipsoïde* (74_1), *et l'intensité de tourbillon reste arbitraire,* car

$$u^2+v^2 = \lambda^2(p^2+q^2).$$

[**27**] Le cas, où la surface ellipsoïdale de la cavité et l'ellipsoïde d'inertie du corps solide sont les ellipsoïdes de révolution, mérite une attention particulière.

Dans ce cas, le problème du mouvement se résout complètement, comme l'a déjà montré M. Joukowsky dans son travail « Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité remplie par un liquide incompressible », inséré dans les *Travaux de la Société physico-chimique de l'Université de Saint-Pétersbourg* (en russe, 1885).

En supposant de revenir à l'étude générale de ce problème plus tard, je me permets ici d'indiquer une solution particulière très simple, qui représente une généralisation intéressante de la solution signalée à la fin du numéro précédent.

Posons, dans (7) et (8),

$$a = b, \qquad \alpha = \beta.$$

Ces équations deviennent

$$(75)\quad \begin{cases} 2(a+c)u' = (a-c)vw + 2(a+c)rv + 4aqw, \\ 2(a+c)v' = (c-a)wu + 4apw - 2(a+c)ru, \end{cases}$$

$$(c+a)w' = 2c(qu-pv),$$

$$(76)\quad \begin{cases} \alpha p' = (\alpha-\gamma)qr + \mathrm{K}(c-a)vw - \dfrac{2\mathrm{M}a^2(c-a)^2}{5}qw, \\ \alpha q' = (\gamma-\alpha)rp + \mathrm{K}(a-c)uw + \dfrac{2\mathrm{M}a^2(c-a)^2}{5}pw, \end{cases}$$

$$r' = 0.$$

La dernière de ces équations donne

$$r = r_0 = \text{const.}$$

Considérons un cas particulier, où w reste constante pendant le mouvement.

Dans ce cas, on doit avoir

$$qu - pv = 0,$$

ou

$$u = \lambda p, \qquad v = \lambda q,$$

λ désignant un paramètre arbitraire.

Substituant ces expressions de u et de v dans (75) et (76), on obtient les équations suivantes

$$(77) \qquad \begin{cases} p' = \rho q, & q' = -\rho p, \\ p' = \sigma q, & q' = -\sigma p, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\rho = \frac{\{(a-c)w_0 + 2(a+c)r_0\}\lambda - 4aw_0}{2(a+c)\lambda},$$

$$\sigma = \frac{1}{\alpha}\left\{(\alpha-\gamma)r_0 + K(c-a)\lambda w_0 - \frac{2Ma^2(c-a)^2 w_0}{5}\right\}.$$

Pour que les équations (77) soient compatibles, il faut et il suffit que l'on ait

$$(78) \qquad \rho = \sigma.$$

C'est une équation du second degré en $x = \frac{1}{\lambda}$, qui admet deux racines réelles, si

$$\left\{2(a+c)\gamma h + \alpha(a-c) + \frac{4Ma^2(c-a)^2(a+c)}{5}\right\}^2 + 32a\alpha K(a^2-c^2) \geqq 0,$$

où l'on a posé

$$h = \frac{r_0}{w_0}.$$

Cette condition sera toujours remplie, si

$$a > c,$$

c'est-à-dire si la surface ellipsoïdale de la cavité est un ellipsoïde de révolution aplati.

Si cet ellipsoïde est un ellipsoïde de révolution allongé, c'est-à-dire

$$a < c,$$

l'équation (78) aura les racines réelles, si la constante h satisfait à l'une des conditions suivantes

$$(79) \qquad 1) \quad 2(a+c)\gamma h + \frac{4Ma^2(c-a)^2(a+c)}{5} - \alpha(c-a) - 4\sqrt{2a\alpha K(c^2-a^2)} \geqq 0,$$

ou

$$(80) \qquad 2) \quad 2(a+c)\gamma h + \frac{4Ma^2(c-a)^2(a+c)}{5} - \alpha(c-a) + 4\sqrt{2a\alpha K(c^2-a^2)} \leqq 0,$$

Les équations (77) conduisent aux expressions suivantes pour p et q :

$$p = C \cos \rho t + D \sin \rho t,$$
$$q = D \cos \rho t - C \sin \rho t,$$

C et D désignant des constantes arbitraires.

Dans le cas d'un ellipsoïde de révolution, on peut toujours supposer que

$$p = p_0, \quad q = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

ce qui donne

$$p = p_0 \cos \rho t, \qquad q = -p_0 \sin \rho t.$$

Ces équations, jointes à la suivante :

$$r = r_0 = \text{const.},$$

déterminent la rotation du corps solide autour de l'origine des coordonnées [autour du centre de l'ellipsoïde (74_1)].

Le mouvement du liquide, contenu dans la cavité, sera défini par les équations

$$u = \lambda p_0 \cos \rho t, \qquad v = -\lambda p_0 \sin \rho t, \qquad w = w_0 = \text{const.}$$

Comme l'équation (78) admet deux racines différentes x_1 et x_2, on obtient deux cas différents du mouvement de l'espèce considérée correspondant à deux valeurs différentes

$$\lambda_1, \lambda_2 \quad \text{et} \quad \rho_1, \rho_2$$

de λ et de ρ.

Ces mouvements sont toujours possibles pour un ellipsoïde de révolution aplati, quelles que soient les valeurs données de r_0 et w_0. Dans le cas d'un ellipsoïde de révolution allongé, ces mouvements seront possibles, pourvu que le rapport $\frac{r_0}{w_0}$ satisfasse à l'une des conditions (79) et (80).

Le mouvement considéré au n° 26 n'est qu'un cas particulier de celui-ci et correspond à la supposition que les constantes r_0 et w_0 soient égales à zéro.

[**28**] Revenons au cas général, où la surface de la cavité est un ellipsoïde à trois axes inégaux et le produit

$$(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)$$

est différent de zéro.

Proposons-nous de résoudre la question suivante :

Trouver tous les cas possibles du mouvement permanent du système considéré, ou, en d'autres termes, tous les cas possibles où les quantités

$$u, v, w; \quad p, q, r$$

restent constantes.

Les équations du mouvement (7) et (8) se réduisent alors aux équations algébriques suivantes, auxquelles doivent satisfaire les constantes u, v, w; p, q et r :

$$(81)\quad \left\{\begin{aligned}
&(b-c)vw+2(a+c)rv-2(a+b)qw=0,\\
&(c-a)uw+2(b+a)pw-2(b+c)ru=0,\\
&(a-b)vu+2(c+b)qu-2(c+a)pv=0,\\
&(\beta-\gamma)qr+\mathrm{K}(c-b)vw+\frac{2\mathrm{M}a(c-b)}{5}\{c(a-b)rv-b(c-a)qw\}=0,\\
&(\gamma-\alpha)rp+\mathrm{K}(a-c)uw+\frac{2\mathrm{M}b(a-c)}{5}\{a(b-c)pw-c(a-b)ru\}=0,\\
&(\alpha-\beta)pq+\mathrm{K}(b-a)uv+\frac{2\mathrm{M}c(b-a)}{5}\{b(c-a)qu-a(b-c)pv\}=0.
\end{aligned}\right.$$

Le problème se ramène à la détermination de tous cas possibles, où l'on peut satisfaire à ces équations par les valeurs réelles de u, v, w; p, q et r.

Posons

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{K}(c+a)(a+b)}{a}u+\alpha p=\xi,\\
&\frac{\mathrm{K}(a+b)(b+c)}{b}v+\beta q=\eta.\\
&\frac{\mathrm{K}(b+c)(c+a)}{c}w+\gamma r=\zeta.
\end{aligned}\right.$$

Les équations (81) conduisent aux suivantes (voir n° 4) :

$$r\eta-q\zeta=0,$$
$$p\zeta-r\xi=0,$$
$$q\xi-p\eta=0,$$

qui donnent

$$(83)\qquad \xi=\lambda p,\qquad \eta=\lambda q,\qquad \zeta=\lambda r,$$

λ désignant un paramètre arbitraire.

On trouve, eu égard à (82),

$$(84)\quad \left\{\begin{aligned}
u&=\frac{(\lambda-\alpha)a}{\mathrm{K}(c+a)(a+b)}p,\\
v&=\frac{(\lambda-\beta)b}{\mathrm{K}(a+b)(b+c)}q,\\
w&=\frac{(\lambda-\gamma)c}{\mathrm{K}(b+c)(c+a)}r.
\end{aligned}\right.$$

Posons maintenant

$$(85)\qquad \xi_1=\frac{1}{\lambda-\alpha},\qquad \eta_1=\frac{1}{\lambda-\beta},\qquad \zeta_1=\frac{1}{\lambda-\gamma}$$

et substituons les expressions (84) dans les trois premières des équations (81).

On trouve

$$
\begin{aligned}
&bc(b-c)+2\mathrm{K}b(b+c)(a+c)^2\zeta_1-2\mathrm{K}c(b+c)(a+b)^2\eta_1=0,\\
&ca(c-a)+2\mathrm{K}c(c+a)(b+a)^2\xi_1-2\mathrm{K}a(c+a)(b+c)^2\zeta_1=0,\\
&ab(a-b)+2\mathrm{K}a(a+b)(c+b)^2\eta_1-2\mathrm{K}b(a+b)(c+a)^2\xi_1=0,
\end{aligned}
$$

Posons ensuite

$$
(86) \qquad x=2\mathrm{K}\frac{\xi_1}{a(b+c)^2}, \qquad y=2\mathrm{K}\frac{\eta_1}{b(c+a)^2}, \qquad z=2\mathrm{K}\frac{\zeta_1}{c(a+b)^2}.
$$

Les équations précédentes s'écriront

$$
\frac{b^2-c^2}{\delta^2}=y-z, \qquad \frac{c^2-a^2}{\delta^2}=z-x, \qquad \frac{a^2-b^2}{\delta^2}=x-y,
$$

$$
\delta=(b+c)(c+a)(a+b).
$$

On en tire ces expressions pour x, y, z :

$$
x=\rho+\frac{a^2}{\delta^2}, \qquad y=\rho+\frac{b^2}{\delta^2}, \qquad z=\rho+\frac{c^2}{\delta^2},
$$

ρ désignant une constante arbitraire.

On trouve donc, en tenant compte de (85) et (86),

$$
(87) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\alpha&=\lambda-\frac{2\mathrm{K}\delta^2}{a(b+c)^2(\tau+a^2)},\\
\beta&=\lambda-\frac{2\mathrm{K}\delta^2}{b(c+a)^2(\tau+b^2)},\\
\gamma&=\lambda-\frac{2\mathrm{K}\delta^2}{c(a+b)^2(\tau+c^2)},
\end{aligned}
\right.
$$

où l'on a posé

$$
\tau=\rho\delta^2.
$$

Substituant les valeurs trouvées de α, β et γ dans (84), on obtient

$$
(88) \qquad \left\{
\begin{aligned}
p&=\frac{(b+c)(\tau+a^2)}{2\delta}u,\\
q&=\frac{(c+a)(\tau+b^2)}{2\delta}v,\\
r&=\frac{(a+b)(\tau+c^2)}{2\delta}w.
\end{aligned}
\right.
$$

Il est évident que les équations (81) sont équivalentes aux équations (87) et (88) et que les expressions de α, β, γ, p, q et r, définies par les formules (87) et (88), satisfont aux équations (81), quelles que soient les constantes λ, τ, u, v et w.

On obtient ainsi la proposition suivante :

Si les constantes

$$\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, \mathrm{M}$$

qui caractérisent le système en question, composé d'un corps solide et d'un liquide incompressible, remplissant la cavité de la forme ellipsoïdale appartenant à ce corps, satisfont aux conditions (87), *où* λ *et* τ *sont des paramètres arbitraires, le système considéré admet un mouvement permanent, dans lequel les composantes* p, q *et* r *de la vitesse angulaire de rotation du corps solide autour de l'origine des coordonnées* (autour du centre fixe de la surface ellipsoïdale de la cavité) *et les composantes* u, v, w *du tourbillon du liquide sont liées par les relations* (88).

A tout mouvement du liquide, défini par les valeurs de u, v, w, données arbitrairement, correspond une rotation uniforme du corps solide autour d'un axe fixe, passant par l'origine des coordonnées ξ, η, ζ (par le centre fixe de la surface ellipsoïdale de la cavité); les composantes p, q et r, suivant les axes de la surface de la cavité de la vitesse angulaire de rotation du corps, s'expriment en u, v et w par les formules (88).

Inversement, à toute rotation uniforme du corps solide autour d'un axe fixe, passant par le centre de la surface ellipsoïdale de la cavité, correspond un mouvement bien déterminé du liquide, contenu dans la cavité.

Les composantes u, v, w, suivant les axes de la surface de la cavité, du tourbillon du liquide, s'expriment en les valeurs données de p, q et r par les formules

$$u = \frac{2\delta}{(b+c)(\tau+a^2)} p,$$
$$v = \frac{2\delta}{(c+a)(\tau+b^2)} q,$$
$$w = \frac{2\delta}{(a+b)(\tau+c^2)} r.$$

[**29**] Les équations du mouvement (7) et (8) admettent encore des solutions particulières de la forme

$$u = \lambda_1 p, \qquad v = \lambda_2 q, \qquad w = \lambda_3 r, \tag{89}$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant des constantes convenablement choisies, plus générales que celles que nous avons indiquées plus haut.

Sans chercher toutes les valeurs possibles des constantes λ_1, λ_2, λ_3, avec lesquelles on peut satisfaire aux équations du mouvement à l'aide de relations (89), j'indiquerai seulement un cas le plus simple des solutions particulières de l'espèce considérée.

En se rappelant que les équations du mouvement admettent une intégrale générale de la forme (13) [voir n° 4], on en conclut qu'on peut satisfaire à ces équations en posant

$$(90)\qquad u = -\frac{a\alpha(b+c)}{\mu}p, \qquad v = -\frac{b\beta(c+a)}{\mu}q, \qquad w = -\frac{c\gamma(a+b)}{\mu}r,$$
$$\mu = \mathrm{K}(b+c)(c+a)(a+b) = \mathrm{K}\delta.$$

Dans ce cas, les équations du mouvement se réduisent à trois suivantes :

$$(91)\qquad \begin{cases} u' = avw(\mathrm{B}_1 - \mathrm{C}_1), \\ v' = buw\,(\mathrm{C}_1 - \mathrm{A}_1), \\ w' = cuv\;(\mathrm{A}_1 - \mathrm{B}_1), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\mathrm{A}_1 = \frac{a^2}{\delta} + \frac{2\mathrm{K}\delta}{a\alpha(b+c)^2},$$
$$\mathrm{B}_1 = \frac{b^2}{\delta} + \frac{2\mathrm{K}\delta}{b\beta(c+a)^2},$$
$$\mathrm{C}_1 = \frac{c^2}{\delta} + \frac{2\mathrm{K}\delta}{c\gamma(a+b)^2}.$$

Les équations (91) déterminent u, v, w en fonctions elliptiques de t. Elles admettent les intégrales

$$(92)\qquad \begin{cases} \dfrac{u^2}{a} + \dfrac{v^2}{b} + \dfrac{w^2}{c} = k^2, \\ u^2\dfrac{\mathrm{A}_1}{a} + v^2\dfrac{\mathrm{B}_1}{b} + w^2\dfrac{\mathrm{C}_1}{c} = l^2, \end{cases}$$

k et l désignant des constantes arbitraires.

De ces intégrales on tire

$$(93)\qquad \begin{cases} u^2\dfrac{\mathrm{A}_1 - \mathrm{B}_1}{a} = l^2 - k^2\mathrm{B}_1 + \dfrac{w^2}{c}(\mathrm{B}_1 - \mathrm{C}_1), \\ v^2\dfrac{\mathrm{A}_1 - \mathrm{B}_1}{b} = k^2\mathrm{A}_1 - l^2 - \dfrac{w^2}{c}(\mathrm{A}_1 - \mathrm{C}_1). \end{cases}$$

Supposons, pour fixer les idées, que

$$\mathrm{A}_1 > \mathrm{B}_1 > \mathrm{C}_1.$$

La seconde des équations (93) montre que dans ce cas

$$k^2\mathrm{A}_1 - l^2 > 0.$$

Quant à la différence

$$l^2 - k^2\mathrm{B}_1,$$

elle peut être positive aussi bien que négative.

[**30**] Considérons d'abord le cas où

$$l^2 - k^2 B_1 > 0.$$

Posons

$$k^2 A_1 - l^2 = \frac{h^2}{c}, \qquad l^2 - k^2 B_1 = \frac{g^2}{c},$$
$$B_1 - C_1 = g_1^2, \qquad A_1 - C_1 = h_1^2,$$
$$\rho^2 = \frac{g^2}{g_1^2}, \qquad \sigma^2 = \frac{h^2}{h_1^2}.$$

Les équations (93) donnent

$$uvc(A_1 - B_1) = \varepsilon\lambda\sqrt{(\rho^2 + w^2)(\sigma^2 - w^2)},$$

où l'on a posé

$$\lambda = g_1 h_1 \sqrt{ab}, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

On trouve donc cette équation pour w :

$$w' = \varepsilon\lambda\sqrt{(\rho^2 + w^2)(\sigma^2 - w^2)},$$

d'où l'on tire

$$w = \varepsilon_3 \sigma cn\xi, \qquad \xi = \frac{\varepsilon\lambda\sigma}{k}(t + \tau), \qquad k^2 = \frac{\sigma^2}{\rho^2 + \sigma^2}, \qquad \varepsilon_3 = \pm 1,$$

τ désignant une constante arbitraire, et

$$u^2 = \frac{ag_1^2(\rho^2 + \sigma^2)}{c(A_1 - B_1)}(1 - k^2 sn^2\xi) = \frac{ag_1^2(\rho^2 + \sigma^2)}{c(A_1 - B_1)} dn^2\xi,$$
$$v^2 = \frac{bh_1^2\sigma^2}{c(A_1 - B_1)} sn^2\xi,$$

Il suffit de substituer les expressions trouvées de u, v, w dans (90), pour en déduire les composantes p, q, r de la vitesse angulaire de rotation du corps solide en fonction de t.

[**31**] Supposons maintenant que

$$l^2 - k^2 B_1 < 0.$$

Posons

$$l^2 - k^2 B_1 = -\frac{g^2}{c}.$$

On trouve, en adoptant les notations du numéro précédent,

$$u^2 v^2 c^2 (A_1 - B_1)^2 = \lambda^2(\sigma^2 - w^2)(w^2 - \rho^2)$$

et, en vertu de la troisième des équations (91),

$$w' = \varepsilon\lambda\sqrt{-(w^2 - \rho^2)(w^2 - \sigma^2)}. \tag{94}$$

Les équations (91) donnent

$$\frac{C_1 - A_1}{a} u^2 + \frac{C_1 - B_1}{b^2} v^2 = k^2 C_1 - l^2 < 0.$$

Or, il est aisé de s'assurer que

$$\rho^2 - \sigma^2 = \frac{(B_1 - A_1)(C_1 k^2 - l^2)}{(A_1 - C_1)(B_1 - C_1)}.$$

On a donc

$$\rho^2 < \sigma^2.$$

Posant

$$\frac{\sigma^2 - \rho^2}{\sigma^2} = k^2 < 1$$

et

$$w^2 = \sigma^2(1 - k^2 x^2),$$

on trouve, eu égard à (94),

$$\frac{dw}{\sqrt{-(w^2 - \rho^2)(w^2 - \sigma^2)}} = \frac{1}{\sigma} \frac{dx}{\sqrt{(1 - k^2)(1 - k^2 x^2)}} = \varepsilon \lambda \, dt.$$

Cette équation donne

$$x = sn\xi, \qquad \xi = \varepsilon\lambda\sigma(t + \tau),$$

τ étant une constante arbitraire.

On a donc

$$w = \varepsilon_3 \sigma \, dn\xi, \qquad \varepsilon_3 = \pm 1,$$

et, en tenant compte de (93),

$$\left.\begin{aligned} u &= \varepsilon_1 \frac{g_1\sqrt{a(\sigma^2 - \rho^2)}}{\sqrt{c(A_1 - B_1)}} cn\xi, \\ v &= \varepsilon_2 \frac{h_1\sqrt{b(\sigma^2 - \rho^2)}}{\sqrt{c(A_1 - B_1)}} sn\xi, \end{aligned}\right\} \qquad \varepsilon_1 = \pm 1, \qquad \varepsilon_2 = \pm 1.$$

Substituant ces expressions de u, v et w dans (90), nous trouverons p, q et r en fonctions elliptiques de t.

[**32**] Les équations (91) représentent les équations différentielles du mouvement du liquide remplissant la cavité.

Substituant dans ces équations, au lieu de u, v, w, leurs expressions en p, q et r, on obtient les équations suivantes du mouvement du corps solide autour de l'origine fixe de coordonnées ξ, η, ζ :

$$p' = \frac{bc\beta\gamma(C_1 - B_1)}{K\alpha(b+c)^2} rq = \alpha_1 rq,$$

$$q' = \frac{ca\gamma\alpha(A_1 - C_1)}{K\beta(c+a)^2} rp = \beta_1 rp,$$

$$r' = \frac{ab\alpha\beta(B_1 - A_1)}{K\gamma(a+b)^2} pq = \gamma_1 pq.$$

Nous avons ici un exemple du mouvement du corps solide, plus général que celui de Poinsot.

Si les constantes

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ a,\ b,\ c,\ M$$

satisfont à la condition

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \alpha_1\beta_1\gamma_1 = 0,$$

nous obtiendrons le mouvement de Poinsot.

IV. — Certains cas particuliers, où le problème du mouvement se résout complètement.

[33] Considérons tout d'abord le cas le plus simple, où la surface de la cavité est une sphère, c'est-à-dire

$$a = b = c.$$

On a

$$\alpha = \delta A, \qquad \beta = \delta B, \qquad \gamma = \delta C$$

et les équations du mouvement (7) et (8) deviennent

$$(95)\qquad u' = rv - qw, \qquad v' = pw - ru, \qquad w' = qu - pv,$$

$$Ap' = (B - C)qr,$$

$$Bq' = (C - A)rp,$$

$$Cr' = (A - B)pq.$$

où A, B et C désignent les moments d'inertie du corps solide par rapport à ces axes principaux d'inertie.

Ce sont les équations d'Euler. Donc, *le liquide, contenu dans la cavité sphérique et animé d'un mouvement de Dirichlet, n'exerce aucune influence sur le mouvement du corps solide.*

Quant au mouvement du liquide, il se détermine par l'intégration des équations (95) qui, jointes aux équations de Cinématique,

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = r\alpha_2 - q\alpha_3, \quad \text{etc.},$$

montrent que, dans le cas considéré, le vecteur

$$\mathrm{I} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

ne change ni sa grandeur, ni la direction dans l'espace.

[**34**] Supposons que

$$\mathrm{A} = \mathrm{B}$$

et que la surface de la cavité soit aussi un ellipsoïde de révolution ayant l'axe de ζ pour l'axe de révolution, c'est-à-dire

$$a = b.$$

Les équations du mouvement admettent alors la quatrième intégrale générale de la forme

$$r = r_0 = \text{const}.$$

Donc la solution du problème se ramène aux quadratures, d'après la proposition énoncée à la fin du n° 4.

L'analyse, assez détaillée, a été donnée déjà par M. Joukowsky, dans son ouvrage cité plus haut, pour le cas de

$$r_0 = 0.$$

En renvoyant pour les détails à cet ouvrage de M. Joukowsky (p. 100, etc.), je ferai seulement quelques remarques relatives au cas général, où r_0 est différent de zéro.

Il est aisé de s'assurer que, dans le cas considéré, les intégrales (11), (12) et (13) peuvent être présentées sous la forme suivante :

$$(96) \qquad \left\{ \begin{aligned} & u^2 + v^2 = l^2 - \frac{a}{c} w^2, \\ & p^2 + q^2 = m + nw^2, \end{aligned} \right.$$
$$up + vq = g - \lambda w + \mu w^2,$$

où l'on a posé, pour simplifier l'écriture,

$$m = \frac{2(k^2 - \gamma r_0^2) - \mathrm{K}al^2}{2\alpha}, \qquad n = \frac{\mathrm{K}(a^2 - c^2)}{2\alpha c},$$

$$\lambda = \frac{\gamma r_0 (a + c)}{2\alpha c}, \qquad \mu = \frac{\mathrm{K}[\alpha c - 2\mathrm{K}(a^2 - c^2)](a - c)}{8\alpha c^2},$$

$$g = \frac{h^2 - \gamma^2 r_0^2 - \alpha^2 m - 4\mathrm{K}^2 l^2 (a + c)^2}{4\mathrm{K}\alpha(a + c)},$$

h, k et l désignant des constantes arbitraires.

Cela posé, envisageons la dernière des équations (7) qui s'écrira

$$\sigma w' = uq - pv, \qquad \sigma = \frac{2c}{c+a}.$$

En remarquant que

$$(up+vq)^2 + (uq-pv)^2 = (u^2+v^2)(p^2+q^2)$$

on trouve

$$\sigma^2 (w')^2 = \left(l^2 - \frac{a}{c} w^2\right)(m+nw^2) - (g - \lambda w + \mu w^2)^2 = f(w). \tag{97}$$

Désignons par w_0 la valeur initiale de w pour $t=0$.

On doit avoir

$$f(w_0) > 0.$$

Le terme de plus haut degré de w du polynome $f(w)$ a pour coefficient

$$-\left(\frac{a}{c} n + \mu^2\right) = -s,$$

qui peut être positif ou négatif, si $n<0$, et reste nécessairement négatif, si $n>0$.

Donc, ce coefficient est négatif, si la surface de la cavité est un ellipsoïde de révolution aplati, car

$$n > 0 \quad \text{si} \quad a > c.$$

Je me bornerai à ce dernier cas, le plus inéressant.

Nous avons ici deux cas à distinguer : l'équation

$$\frac{1}{s} f(w) = 0$$

admet deux racines réelles et deux imaginaires, où toutes ces racines sont réelles.

On sait qu'on peut toujours trouver deux constantes réelles α_1 et β_1 telles que, si l'on pose

$$w = \frac{\alpha_1 + \beta_1 z}{1+z}, \tag{98}$$

on aura

$$\frac{dw}{\sqrt{\frac{1}{s} f(w)}} = \mathrm{R} \frac{dz}{\mathrm{T}},$$

où R est une constante bien déterminée, T désigne un radical ayant l'une des deux formes suivantes

$$\mathrm{T} = \sqrt{(h_1^2 + z^2)(g_1^2 - z^2)},$$

ou

$$T=\sqrt{(z^2-g_1^2)(h_1^2-z^2)},$$

h_1 et g_1 désignant des constantes bien déterminées.

La détermination de la fonction inconnue se ramène à l'intégration de l'équation suivante :

$$\frac{dz}{T}=\frac{\sqrt{s}}{R\sigma}dt=H dt, \tag{99}$$

$$H=\frac{\sqrt{s}}{R\sigma}.$$

[**35**] Considérons le premier cas, où

$$T=\sqrt{(h_1^2+z^2)(g_1^2-z^2)}.$$

Posons

$$k^2=\frac{g_1^2}{g_1^2+h_1^2}, \qquad z^2=g_1^2\cos^2\varphi.$$

L'équation (99) devient

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=H\sqrt{h_1^2+g_1^2}\,.\,dt.$$

On a donc

$$z=\varepsilon g_1 cn\xi,$$

où l'on a posé

$$\xi=(t+\tau)H\sqrt{h_1^2+g_1^2}, \qquad \varepsilon=\pm 1,$$

τ désignant une constante arbitraire.

On obtient ainsi cette expression pour w :

$$w=\frac{\alpha_1+\varepsilon\beta_1 g_1 cn\xi}{1+\varepsilon g_1 cn\xi}.$$

[**36**] Supposons maintenant que

$$T=\sqrt{(z^2-g_1^2)(h_1^2-z^2)}$$

et que

$$h_1^2<g_1^2.$$

Posons

$$\frac{g_1^2-h_1^2}{g_1^2}=k^2<1,$$

$$z^2=g_1^2(1-k^2\sin^2\varphi).$$

L'équation (99) devient

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \mathrm{H}g_1\,dt.$$

On peut donc écrire

$$z = \varepsilon g_1 dn\xi, \qquad \xi = \mathrm{H}g_1(t+\tau), \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

τ désignant une constante arbitraire.

On trouve donc, eu égard à (98),

$$w = \frac{\alpha_1 + \varepsilon\beta_1 g_1 dn\xi}{1+\varepsilon g_1 dn\xi}.$$

[**37**] L'analyse se simplifie essentiellement si l'on suppose, en particulier, que

$$r_0 = 0.$$

Dans ce cas

$$\lambda = 0.$$

L'équation

$$f(w) = 0$$

se ramène à l'équation biquadratique et peut avoir l'une de ces deux formes :

$$1) \quad f(w) = -s(h_1^2 + w^2)(g_1^2 - w^2),$$

$$2) \quad f(w) = -s(w^2 - h_1^2)(g_1^2 - w^2).$$

L'équation (96) donnera (voir M. Joukowsky, Mém. cité, p. 103)

$$w = g_1 cn\xi, \qquad \xi = \frac{1}{\sigma}(t+\tau)\sqrt{-s(g_1^2+h_1^2)}$$

dans le premier cas, et

$$w = g_1 dn\xi, \qquad \xi = \frac{1}{\sigma}g_1(t+\tau)\sqrt{-s}$$

dans le second.

[**38**] Passons à la détermination des composantes p et q de la vitesse angulaire de rotation du corps solide autour du point fixe.

Envisageons deux premières des équations (8) qui s'écriront, dans le cas considéré, comme il suit :

$$\alpha p' = (\alpha-\gamma)qr_0 + \mathrm{K}(c-a)vw - \frac{2\,\mathrm{M}a^2(c-a)^2}{5}qw,$$

$$\alpha q' = (\gamma-\alpha)r_0 p + \mathrm{K}(a-c)uw + \frac{2\,\mathrm{M}a^2(c-a)^2}{5}pw.$$

Multipliant la première de ces équations par q, la seconde par p, et en retranchant les résultats ainsi obtenus, on trouve

$$q^2\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{q}\right)=\mathrm{R}(p^2+q^2)+\mathrm{K}(c-a)w(pu+qv),$$

où l'on a posé

$$\alpha\mathrm{R}=(\alpha-\gamma)r_0-\frac{2\mathrm{M}a^2(c-a)^2}{5}w.$$

On en tire, eu égard à (96),

$$\frac{ds}{1+s^2}=f(t), \tag{100}$$

où

$$s=\frac{p}{q},$$

et $f(t)$ est une fonction connue de t :

$$f(t)=\mathrm{R}+\frac{\mathrm{K}(c-a)w(g-\lambda w+\mu w^2)}{m+nw^2},$$

car w est déjà déterminé en fonction de t (n^{os} 35 et 36).

L'équation (100) donne

$$\frac{p}{q}=s=\operatorname{tang}\xi,$$

où

$$\xi=\int_0^t f(t)\,dt+\text{const.}$$

On trouve donc, en tenant compte de la seconde des équations (96),

$$q^2=\mathrm{N}^2(t)\cos^2\xi,\qquad \mathrm{N}^2(t)=m+nw^2,$$

et

$$p^2=\mathrm{N}^2(t)\sin^2\xi.$$

On obtient ainsi ces expressions pour p, q et r :

$$p=\varepsilon_1\mathrm{N}(t)\sin\xi,\qquad q=\varepsilon_2\mathrm{N}(t)\cos\xi,\qquad r=r_0=\text{const.},$$
$$\varepsilon_1=\pm1,\qquad \varepsilon_2=\pm1.$$

La rotation du corps solide autour de l'origine fixe des coordonnées est donc complètement déterminée.

[**39**] Pour achever la solution du problème du mouvement du système considéré, il ne nous reste qu'à exprimer en fonction de t les composantes u et v du tourbillon

et les cosinus directeurs α_i, β_i, γ_i ($i = 1, 2, 3$) des axes mobiles ξ, η, ζ par rapport aux axes x, y, z, fixes dans l'espace.

Montrons que *ce problème se ramène aux quadratures*.

Introduisons les variables ξ, η, ζ, définies par les formules (82) du n° 28.

Les équations du mouvement conduisent, comme on sait, à trois équations suivantes :

$$\xi' = r_0\eta - q\zeta, \qquad \eta' = p\zeta - r_0\xi, \qquad \zeta' = q\xi - p\eta, \tag{101}$$

qui montrent que le vecteur

$$l = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

ne change ni sa grandeur, ni sa direction dans l'espace.

En prenant cette direction fixe pour l'axe de ζ, on a

$$\xi = l\gamma_1, \qquad \eta = l\gamma_2, \qquad \zeta = l\gamma_3. \tag{102}$$

D'autre part, multipliant la première des équations (101) par η, la seconde par ξ, et en retranchant les résultats, on trouve

$$\eta^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{\eta}\right) = r_0(\eta^2 + \xi^2) - \zeta(p\xi + q\eta). \tag{103}$$

Or,

$$\xi^2 + \eta^2 = l^2 - \zeta^2 = l^2 - \left(\frac{K(c+a)^2}{c} w + \gamma r_0\right)^2$$

est une fonction connue de t, car il en est de même de la fonction w.

Quant à

$$\zeta \quad \text{et} \quad (p\xi + q\eta),$$

ce sont aussi les fonctions connues de t, car

$$\zeta = \frac{K(c+a)^2}{c} w + \gamma r_0,$$

et, en vertu de (96),

$$\begin{aligned} p\xi + q\eta &= 2K(c+a)(up + vq) + \alpha(p^2 + q^2) \\ &= 2K(c+a)(g - \lambda w + \mu w^2) + \alpha(m + nw^2). \end{aligned} \tag{104}$$

L'équation (103) peut donc s'écrire

$$\frac{du}{1+u^2} = f(t),$$

où

$$u = \frac{\xi}{\eta},$$

$$f(t) = r_0 - \left\{\frac{K(c+a)^2}{c} w + \gamma r_0\right\} \frac{2K(c+a)(g - \lambda w + \mu w^2) + \alpha(m + nw^2)}{l^2 - \left(\dfrac{K(c+a)^2}{c} w + \gamma r_0\right)^2}.$$

On trouve donc

$$\xi = \eta \operatorname{cotang} \varphi, \qquad \varphi = \int_0^t f(t)\,dt + \text{const}.$$

On en tire ces expressions pour ξ et η :

$$\xi = \varepsilon_1 S(t) \cos \varphi, \qquad \eta = \varepsilon_2 S(t) \sin \varphi,$$

où l'on a posé

$$S^2(t) = l^2 - \left(\frac{K(c+a)^2}{c} w + \gamma r_0\right)^2, \qquad \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 = \pm 1.$$

On voit donc qu'il suffit d'effectuer une seule quadrature

$$\int f(t)\,dt$$

pour déterminer les variables ξ et η.

Après avoir trouvé les fonctions p, q, ξ et η, nous obtiendrons les expressions des composantes u, v du tourbillon moyennant les équations

$$u = \frac{\xi - \alpha p}{2K(a+c)}, \qquad v = \frac{\eta - \alpha q}{2K(a+c)}.$$

[**40**] Introduisons maintenant les angles φ, θ et ψ d'Euler, qui déterminent complètement la position du corps solide dans l'espace.

En se rappelant que

$$\gamma_1 = -\sin\theta\cos\varphi, \qquad \gamma_2 = \sin\theta\sin\varphi, \qquad \gamma_3 = \cos\theta,$$

on trouve, eu égard à (102),

$$\cos\theta = \frac{\zeta}{l}, \qquad \operatorname{tang}\varphi = -\frac{\eta}{\zeta}.$$

Ces équations déterminent les angles θ et φ en fonctions connues de t, car ξ, η et ζ sont déjà connues.

Il ne reste qu'à déterminer l'angle ψ.

Les équations connues de Cinématique donnent

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{p\gamma_1 + q\gamma_2}{1 - \gamma_3^2},$$

c'est-à-dire, en vertu de (102) et (104),

$$\frac{d\psi}{dt} = l\frac{p\xi + q\eta}{l^2 - \zeta^2} = \Phi(t),$$

$\Phi(t)$ étant une fonction connue de t.

On obtient donc l'expression de ψ par une quadrature

$$\psi = \psi_0 + \int_0^t \Phi(t)\,dt,$$

φ_0 désignant la valeur initiale de ψ pour $t=0$.

Le problème du mouvement du corps solide, ainsi que du liquide contenu dans son intérieur, est donc complètement résolu.

[**41**] Le problème que nous venons d'étudier a une connexion intime avec celui des variations des latitudes terrestres.

En effet, on suppose d'ordinaire que le globe terrestre se compose d'une enveloppe solide et d'une masse fluide remplissant son intérieur.

On sait que la surface extérieure de la Terre est un ellipsoïde de révolution aplati. Supposons que les axes de cet ellipsoïde coïncident avec les axes principaux d'inertie de l'enveloppe solide de la Terre, et que la surface qui limite le liquide, contenu à l'intérieur de la Terre, soit aussi un ellipsoïde de révolution aplati ayant le même centre et le même axe de révolution que la surface extérieure de la Terre.

Supposons encore que le moment résultant (par rapport au point fixe) des forces d'attraction extérieure, appliquées aux points du système considéré, soit égal à zéro, et que le liquide, contenu à l'intérieur de la Terre, soit animé d'un mouvement de Dirichlet.

Sous ces conditions, les équations (7) et (8), si l'on y fait

$$M_\xi = M_\eta = M_\zeta = 0, \qquad a = b, \qquad \alpha = \beta,$$

représentent le mouvement de la Terre et du liquide contenu dans son intérieur.

Désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées, par rapport aux axes de la surface ellipsoïdale de la Terre, du pôle de la Terre, c'est-à-dire du point de l'intersection de la vitesse angulaire Ω de rotation du globe terrestre autour de son centre (le centre de la surface de la Terre) avec la surface extérieure de la Terre.

On a

$$x_1 = p\lambda, \qquad y_1 = q\lambda, \qquad z_1 = r\lambda.$$

Désignant par $a_1 = b_1$, c_1 les carrés des demi-axes de l'ellipsoïde terrestre, on a cette équation de la surface de la Terre :

$$\frac{\xi^2+\eta^2}{a_1} + \frac{\zeta^2}{c_1} = 1.$$

Substituant dans cette équation x_1, y_1, z_1 au lieu de ξ, η et ζ, on trouve

$$\lambda^2 \left\{ \frac{p^2+q^2}{a_1} + \frac{r_0^2}{c_1} \right\} = 1.$$

d'où, en adoptant les notations du n° 38,

$$\lambda = \frac{\sqrt{a_1 c_1}}{\sqrt{c_1 N^2(t) + a_1 r_0^2}}.$$

Considérons le mouvement du point représentant la projection du pôle terrestre sur le plan équatorial.

Désignant par ρ et φ les coordonnées polaires de ce point, on trouve

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{a_1 c_1}\,\frac{N(t)}{\sqrt{c_1 N^2(t) + a_1 r_0^2}}, \tag{105}$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} \xi,$$

d'où (voir n° 38)

$$\varphi = \int_0^t f(t) + \text{const}.$$

En se rappelant que

$$N^2(t) = m + nw^2,$$

et que w est une fonction périodique en t avec la période réelle (voir n°s 35 et 36),

$$\omega = \frac{4K}{H\sqrt{g_1^2 + h_1^2}} \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{2K}{Hg_1}$$

où K désigne l'intégrale elliptique complète de la première espèce, on en conclut que le rayon vecteur ρ se change périodiquement avec le temps. Cette période est égale à

$$\omega = \frac{4K}{H\sqrt{g_1^2 + h_1^2}},$$

si l'équation

$$f(w) = 0 \tag{106}$$

a deux racines réelles et deux imaginaires ; elle est égale à

$$\omega = \frac{2K}{Hg_1},$$

si l'équation (106) n'a que des racines réelles.

Quant à l'angle φ, on peut le présenter sous la forme

$$\varphi = t\int_0^\omega f(t)\,dt + \psi(t), \tag{107}$$

où $\psi(t)$ est une fonction périodique en t avec la période ω.

Les formules (105) et (107) déterminent le mouvement du point x_1, y_1 dans le plan équatorial de la Terre et peuvent expliquer certains résultats des observations sur le mouvement du pôle de la Terre. Ici je me bornerai à cette remarque, ayant en vue de revenir à l'étude plus détaillée de cette question plus tard.

[**42**] Dans le cas précédent, les équations du mouvement admettent une quatrième intégrale générale, ne dépendant pas de t et linéaire par rapport aux fonctions inconnues

$$u,\ v,\ w,\ p,\ q \text{ et } r.$$

Il est aisé de s'assurer que *ce cas est le seul possible, où les équations d'un mouvement admettent l'intégrale de l'espèce tout à l'heure mentionnée.*

Il est naturel de se demander : Les équations du mouvement n'admettent-elles pas une quatrième intégrale générale sous la forme d'une fonction homogène du second degré par rapport à u, v, w, p, q et r?

J'ai étudié cette question, mais l'analyse très compliquée ne m'a pas conduit à des résultats assez intéressants.

J'indiquerai seulement le cas suivant :

Les équations (7) et (8) *admettent une quatrième intégrale algébrique de la forme*

$$\mathrm{S}\left(\rho_1\frac{\mathrm{K}(c+a)(a+b)}{a\alpha}+1\right)u^2+2\mathrm{S}\rho_1(c+a)(a+b)up=\text{const.},$$

où

$$\rho_1=\frac{\delta_1\alpha}{\mathrm{R}}\left\{\mathrm{H}^2\frac{\beta\gamma}{a}-\mathrm{H}\frac{c+b}{c-a}+\frac{\omega}{a}\right\},$$

$$\mathrm{H}=\frac{5}{2\mathrm{M}\delta},\qquad \delta_1=(c-b)(a-c)(b-a),\qquad \omega=bc+ca+ab,$$

$$\mathrm{R}=\mathrm{HS}bc(a+c)(a+b)(b-c)\alpha-\mathrm{H}^2\alpha\beta\gamma\delta_1,$$

et le symbole S *désigne la somme de trois termes dont chacun se déduit de l'écrit par la permutation circulaire des groupes des lettres*

$$(u,\ v,\ w),\quad (p,\ q,\ r),\quad (a,\ b,\ c),\quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma),\quad (\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3),$$

si entre les constantes

$$\mathrm{M},\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma,\quad a,\ b \text{ et } c$$

il existe trois relations de la forme

$$\rho_1\frac{\delta(\beta-\gamma)}{2\alpha(b+c)^2}+c\rho_3-b\rho_2=0,\qquad \rho_2\frac{\delta(\gamma-\alpha)}{2\beta(c+a)^2}+a\rho_1-c\rho_3=0,$$

$$\rho_3\frac{\delta(\alpha-\beta)}{2\gamma(a+b)^2}+b\rho_2-a\rho_1=0.$$

Dans ce cas, *le problème se ramène aux quadratures.*

Je me bornerai à ces remarques sans entrer en des détails.

V. — Application nouvelle de la méthode des approximations successives a la solution du problème du mouvement d'un corps solide de révolution.

[**43**] Le cas le plus intéressant est celui où l'ellipsoïde d'inertie du corps solide et la surface de la cavité sont les ellipsoïdes de révolution.

Nous avons vu que dans ce cas le problème se résout complètement et que les inconnues, qui déterminent le mouvement du système, s'expriment à l'aide de fonctions elliptiques.

Nous avons déjà mentionné que ce problème a une connexion intime avec une question d'astronomie, à savoir avec celle des variations des latitudes terrestres.

Or, l'application des formules générales, établies dans la section précédente, à ce dernier problème, conduit à un calcul si compliqué, qu'on doit renoncer à l'emploi de ces formules dans la pratique et les remplacer par d'autres qui permettent de calculer les inconnues avec une approximation suffisante.

Nous avons déjà indiqué l'application de la méthode des approximations successives au cas où le rapport de la masse du liquide à la masse du corps solide est un nombre assez petit (section II).

Les formules, déduites dans la section II, se simplifient essentiellement si l'on y fait

$$a = b, \qquad \alpha_1 = \beta_1.$$

On peut les employer avec succès en s'arrêtant, par exemple, à l'hypothèse que la masse du liquide, contenu à l'intérieur de la Terre, est très petite par rapport à la masse de la croûte solide.

Or, on peut profiter de la méthode des approximations successives d'une autre manière, souvent plus commode, sans s'appuyer sur l'hypothèse tout à l'heure mentionnée, en introduisant dans les équations du mouvement d'autres paramètres qu'on peut considérer comme des quantités suffisamment petites.

[**44**] Reprenons les équations (75) et (76) représentant le mouvement du système dans le cas de

$$a = b, \qquad \alpha = \beta$$

et introduisons dans ces équations le paramètre

$$\varepsilon = \frac{a - c}{a}.$$

En supposant que la surface de la cavité soit aussi un ellipsoïde de révolution aplati, on aura

$$0 < \varepsilon < 1.$$

Posant dans (75)

$$c = a(1 - \varepsilon), \tag{108}$$

il viendra

$$\left\{\begin{aligned} u' &= rv - qw + \varepsilon\left\{\frac{u'}{2} - \frac{rv}{2} + \frac{vw}{4}\right\},\\ v' &= pw - ru + \varepsilon\left\{\frac{v'}{2} + \frac{ru}{2} - \frac{uw}{2}\right\}.\\ w' &= qu - pv + \varepsilon\left\{\frac{w'}{2} + pv - qu\right\}.\end{aligned}\right. \tag{109}$$

Remarquant maintenant que, dans le cas considéré,

$$A = B,$$

on trouve, en tenant compte de (108) et (9),

$$\alpha = \beta = 8a^3\left\{A - \varepsilon A + \varepsilon^2\left(\frac{A}{4} + \frac{Ma}{10}\right) - \frac{Ma}{20}\varepsilon^3\right\},$$

$$\alpha - \gamma = 8a^3\left\{A - C - \varepsilon(A - C) + \varepsilon^2\left\{\frac{A - C}{4} + \frac{Ma}{10}\right\} - \frac{Ma}{20}\varepsilon^3\right\},$$

$$K(c - a) = \frac{2Ma^4}{5}(\varepsilon^2 - \varepsilon), \qquad \frac{2Ma^2(c - a)^2}{5} = \frac{2Ma^4}{5}\varepsilon^2.$$

Moyennant ces formules, on transforme les équations (76) à la forme suivante :

$$\left\{\begin{aligned} p' &= -\lambda q + \varepsilon(p' + \lambda q - \delta vw) + \varepsilon^2\big(\alpha q - \beta p' + \delta w(v - q)\big) + \varepsilon^3\delta(p' - qr_0),\\ q' &= \lambda p + \varepsilon(q' - \lambda p + \delta uw) - \varepsilon^2\big(\alpha p + \beta q' + \delta w(u - p)\big) + \varepsilon^3\delta(q' + pr_0),\end{aligned}\right. \tag{110}$$

$$r = r_0 = \text{const.},$$

où l'on a posé, pour simplifier l'écriture,

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha = r_0\left(\frac{A - C}{4A} + \frac{Ma}{10A}\right), \qquad \beta = \frac{1}{4} + \frac{Ma}{10A},\\ &\delta = \frac{Ma}{20A}, \qquad \lambda = \frac{C - A}{A}r_0.\end{aligned}\right. \tag{111}$$

[**45**] Supposant que ε soit un nombre assez petit, cherchons une solution des équations (109) et (110) sous la forme de séries disposées suivant les puissances entières et positives du paramètre ε.

Posons

$$(112)\qquad u=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j u_j,\qquad v=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j v_j,\qquad w=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j w_j,$$

$$(112_1)\qquad p=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j p_j,\qquad q=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j q_j,$$

u_j, v_j, w_j, p_j, q_j $(j=0, 1, 2, \ldots)$ étant des fonctions de t.

Substituant ces expressions dans les équations (109) et en y égalant les coefficients des termes contenant les mêmes degrés du paramètre ε, on trouve ces équations, auxquelles doivent satisfaire les fonctions inconnues u_0, v_0, w_0 :

$$(113)\qquad \left\{\begin{aligned} u'_0 &= r_0 v_0 - q_0 w_0,\\ v'_0 &= p_0 w_0 - r_0 u_0,\\ w'_0 &= q_0 u_0 - p_0 v_0,\end{aligned}\right.$$

et puis, pour toutes les valeurs de l'indice j, à partir de $j=1$:

$$(114)\qquad \left\{\begin{aligned} u'_j &= r_0 v_j - q_0 w_j + U_j,\\ v'_j &= p_0 w_j - r_0 u_j + V_j,\\ w'_j &= q_0 u_j - p_0 v_j + W_j,\end{aligned}\right.$$

où l'on a posé

$$(114_1)\qquad \left\{\begin{aligned} U_j &= \frac{u'_{j-1}}{2} - \frac{r_0 v_{j-1}}{2} + \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{j-1} v_i w_{j-i-1} - \sum_{i=1}^{j} q_i w_{j-i},\\ V_j &= \frac{v'_{j-1}}{2} + \frac{r_0 u_{j-1}}{2} - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{j-1} u_i w_{j-i-1} + \sum_{i=1}^{j} p_i w_{j-i},\\ W_j &= \frac{w'_{j-1}}{2} + \sum_{i=1}^{j}(q_i u_{j-i} - p_i v_{j-1}) - \sum_{i=0}^{j-1}(q_i u_{j-i-1} - p_i v_{j-i-1}).\end{aligned}\right.$$

Les fonctions U_j, V_j et W_j ne dépendent pas de u_j, v_j et w_j.

Substituant ensuite les séries (112) et (112_1) dans les équations (110), on obtient de la même manière ces équations pour p_j $(j=0, 1, 2)$:

$$\begin{aligned} p'_0 &= -\lambda q_0,\\ p'_1 &= -\lambda q_1 + \lambda q_0 + p'_0 - \delta v_0 w_0,\\ p'_2 &= -\lambda q_2 + p'_1 + \lambda q_1 - \delta(v_0 w_1 + v_1 w_0) + \alpha q_0 - \beta p'_0 + \delta w_0(v_0 - q_0),\end{aligned}$$

qui peuvent être écrites sous cette forme plus simple :

$$(115)\qquad \left\{\begin{aligned} p'_0 &= -\lambda q_0,\\ p'_1 &= -\lambda q_1 - \delta v_0 w_0,\\ p'_2 &= -\lambda q_2 - \delta(v_0 w_1 + v_1 w_0) + (\alpha + \beta\lambda) q_0 - \delta q_0 w_0.\end{aligned}\right.$$

On aura ensuite, pour toutes les valeurs de l'indice j, à partir de $j=3$,

$$p'_j = -\lambda q_j + P_j, \qquad (j=3, 4, 5, \ldots) \tag{115$_1$}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} P_j = {} & p'_{j-1} + \lambda q_{j-1} + \alpha q_{j-2} - \beta p'_{j-2} + \delta(p'_{j-3} - r_0 q_{j-3}) \\ & + \delta\left\{ \sum_{i=0}^{j-2} w_{j-i-2}(v_i - q_i) - \sum_{i=0}^{j-1} v_i w_{j-i-1} \right\}. \end{aligned} \tag{115'}$$

Les fonctions $P_j (j = 3, 4, 5, \ldots)$ ne dépendent pas évidemment de p_j, q_j, ainsi que de u_j, v_j et w_j.

Nous obtiendrons enfin les équations suivantes pour $q_j (j = 0, 1, 2)$:

$$\left\{ \begin{aligned} q'_0 &= \lambda p_0, \\ q'_1 &= \lambda p_1 + \delta u_0 w_0, \\ q'_2 &= \lambda p_2 + \delta(u_0 w_1 + u_1 w_0) - (\alpha + \beta\lambda) p_0 + \delta p_0 w_0, \end{aligned} \right. \tag{116}$$

et puis, pour toutes les valeurs de j, à partir de $j = 3$,

$$q'_j = \lambda p_j + Q_j, \qquad (j=3, 4, 5, \ldots) \tag{116$_1$}$$

où

$$\begin{aligned} Q_j = {} & q'_{j-1} - \lambda p_{j-1} - \alpha p_{j-2} - \beta q'_{j-2} + \delta(q'_{j-3} + r_0 p_{j-3}) \\ & - \delta\left\{ \sum_{i=0}^{j-2} w_{j-i-2}(u_i - p_i) - \sum_{i=0}^{j-1} u_i w_{j-i-1} \right\} \end{aligned} \tag{116'}$$

sont les fonctions qui ne dépendent pas, comme P_j, de p_j, q_j, u_j, v_j et w_j.

Les équations (113), (114), (115), (115$_1$), (116) et (116$_1$) permettent de déterminer successivement toutes les fonctions inconnues

$$u_j, v_j, w_j; \quad p_j, q_j$$

pour toutes les valeurs de l'indice $j = 0, 1, 2, \ldots$

[**46**] Supposons qu'on ait déjà trouvé les expressions de

$$u_j, v_j, w_j; \quad p_j, q_j,$$

en fonction de t pour toutes les valeurs de j à partir de $j = 0$ jusqu'à $j = k$.

Les fonctions P_{k+1} et Q_{k+1}, définies par les formules (115') et (116'), seront alors les fonctions connues de la variable t.

La détermination de p_{k+1} et q_{k+1} se ramène à l'intégration des équations

$$\begin{aligned} p'_{k+1} &= -\lambda q_{k+1} + P_{k+1}, \\ q'_{k+1} &= -\lambda p_{k+1} + Q_{k+1}, \end{aligned}$$

P_{k+1} et Q_{k+1} étant les fonctions connues de t.

L'intégration de ces équations linéaires conduit aux expressions suivantes pour p_{k+1} et q_{k+1} :

$$p_{k+1} = \alpha_{k+1} \cos \lambda t + \beta_{k+1} \sin \lambda t + X_{k+1} \cos \lambda t + Y_{k+1} \sin \lambda t,$$
$$q_{k+1} = \beta_{k+1} \cos \lambda t + \alpha_{k+1} \sin \lambda t + Y_{k+1} \cos \lambda t + X_{k+1} \sin \lambda t,$$

où α_{k+1} et β_{k+1} sont des constantes arbitraires et

$$(116'') \quad \left\{ \begin{aligned} X_{k+1} &= \int_0^t (P_{k+1} \cos \lambda t - Q_{k+1} \sin \lambda t)\,dt, \\ Y_{k+1} &= \int_0^t (P_{k+1} \cos \lambda t + Q_{k+1} \sin \lambda t)\,dt. \end{aligned} \right.$$

Supposant que

$$p_{k+1} = q_{k+1} = 0 \qquad \text{pour} \qquad t = 0,$$

on aura

$$(117) \quad \left\{ \begin{aligned} p_{k+1} &= X_{k+1} \cos \lambda t + Y_{k+1} \sin \lambda t, \\ q_{k+1} &= Y_{k+1} \cos \lambda t + X_{k+1} \sin \lambda t. \end{aligned} \right.$$

[**47**] Après avoir trouvé les fonctions p_{k+1} et q_{k+1}, considérons les équations (114), en y posant $j = k + 1$.

On a

$$(118) \quad \left\{ \begin{aligned} u'_{k+1} &= r_0\, v_{k+1} - q_0 w_{k+1} + U_{k+1}, \\ v'_{k+1} &= p_0 w_{k+1} - r_0\, u_{k+1} + V_{k+1}, \\ w_{k+1} &= q_0\, u_{k+1} - p_0\, v_{k+1} + W_{k+1}, \end{aligned} \right.$$

où U_{k+1}, V_{k+1}, W_{k+1} sont maintenant les fonctions connues de t, comme le montrent les formules (114_1) (pour $j = k + 1$) et (117).

Le problème se ramène tout d'abord à la détermination des intégrales générales des équations linéaires homogènes de la forme bien connue

$$(119) \quad \left\{ \begin{aligned} U' &= r_0 V - q_0 W, \\ V' &= p_0 W - r_0 U, \\ W' &= q_0 U - p_0 V, \end{aligned} \right.$$

où, comme il est aisé de s'assurer, en tenant compte des équations (115) et (116),

$$(120) \quad \left\{ \begin{aligned} p_0 &= A_0 \cos \lambda t + B_0 \sin \lambda t, \\ q_0 &= B_0 \cos \lambda t + A_0 \sin \lambda t, \end{aligned} \right.$$

et

$$r_0 = \text{const.}$$

Posons

$$g^2 = \frac{C^2 r_0^2 + A^2 \omega^2}{A^2}, \qquad l^2 = k^2 - \frac{h^2}{g^2}, \qquad \omega^2 = A_0^2 + B_0^2 = \text{const.}$$

Il est aisé de s'assurer que les équations (119) admettent les solutions particulières suivantes :

$$(121)\quad \begin{cases} U_1 = \dfrac{A}{Cr_0} p_0, & U_2 = -\dfrac{Cr_0}{A} p_0 \cos gt - g q_0 \sin gt, \quad U_3 = g q_0 \cos gt - \dfrac{Cr_0}{A} p_0 \sin gt, \\ V_1 = \dfrac{A}{Cr_0} q_0, & V_2 = -\dfrac{Cr_0}{A} q_0 \cos gt + g p_0 \sin gt, \quad V_3 = -g p_0 \cos gt - \dfrac{Cr_0}{A} q_0 \sin gt, \\ W_1 = 1, & W_2 = \omega^2 \cos gt, \quad W_3 = \omega^2 \sin gt. \end{cases}$$

Les intégrales générales des équations (119) peuvent donc s'écrire

$$(122)\quad \begin{cases} U = C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3, \\ V = C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3, \\ W = C_1 W_1 + C_2 W_2 + C_3 W_3, \end{cases}$$

C_j ($j = 1, 2, 3$) désignant des constantes arbitraires.

Moyennant la méthode de variation des constantes arbitraires, nous obtiendrons ces expressions pour u_{k+1}, v_{k+1}, w_{k+1} :

$$(123)\quad \begin{cases} u_{k+1} = C^{(1)}_{k+1} U_1 + C^{(2)}_{k+1} U_2 + C^{(3)}_{k+1} U_3, \\ v_{k+1} = C^{(1)}_{k+1} V_1 + C^{(2)}_{k+1} V_2 + C^{(3)}_{k+1} V_3, \\ w_{k+1} = C^{(1)}_{k+1} W_1 + C^{(2)}_{k+1} W_2 + C^{(3)}_{k+1} W_3, \end{cases}$$

où $C^{(1)}_{k+1}$, $C^{(2)}_{k+1}$, $C^{(3)}_{k+1}$ sont les fonctions de t, définies par les équations

$$\frac{dC^{(1)}_{k+1}}{dt} U_1 + \frac{dC^{(2)}_{k+1}}{dt} U_2 + \frac{dC^{(3)}_{k+1}}{dt} U_3 = U_{k+1},$$

$$\frac{dC^{(1)}_{k+1}}{dt} V_1 + \frac{dC^{(2)}_{k+1}}{dt} V_2 + \frac{dC^{(3)}_{k+1}}{dt} V_3 = V_{k+1},$$

$$\frac{dC^{(1)}_{k+1}}{dt} W_1 + \frac{dC^{(2)}_{k+1}}{dt} W_2 + \frac{dC^{(3)}_{k+1}}{dt} W_3 = W_{k+1}.$$

De ces équations on tire, en tenant compte de (121) :

$$\frac{dC^{(1)}_{k+1}}{dt} = \frac{Cr_0}{Ag^2}\left(U_{k+1} p_0 + V_{k+1} q_0 + \frac{Cr_0}{A} W_{k+1}\right),$$

$$\frac{dC^{(2)}_{k+1}}{dt} = \frac{-1}{g\omega^2}\left(U_{k+1} q_0 - V_{k+1} p_0\right) \sin gt - \frac{Cr_0}{Ag^2\omega^2}\left(U_{k+1} p_0 + V_{k+1} p_0 - \frac{Ag\omega^2}{cr_0} W_{k+1}\right) \cos gt,$$

$$\frac{dC^{(3)}_{k+1}}{dt} = \frac{1}{g\omega^2}\left(U_{k+1} p_0 - V_{k+1} q_0\right) \cos gt - \frac{Cr_0}{Ag^2\omega^2}\left(U_{k+1} p_0 + V_{k+1} p_0 - \frac{Ag\omega^2}{cr_0} W_{k+1}\right) \sin gt.$$

On a donc

$$(124)\qquad \begin{cases} C^{(1)}_{k+1} = \gamma^{(1)}_{k+1} + \dfrac{Cr_0}{Ag^2}\displaystyle\int_0^t \left(U_{k+1}p_0 + V_{k+1}q_0 + \frac{Cr_0}{A}W_{k+1}\right)dt, \\ C^{(2)}_{k+1} = \gamma^{(2)}_{k+1} - \displaystyle\int_0^t \left(G_{k+1}\sin gt + H_{k+1}\cos gt\right)dt, \\ C^{(3)}_{k+1} = \gamma^{(3)}_{k+1} + \displaystyle\int_0^t \left(G_{k+1}\cos gt - H_{k+1}\sin gt\right)dt, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$G_{k+1} = \frac{1}{g\omega^2}\left(U_{k+1}q_0 - V_{k+1}p_0\right),$$

$$H_{k+1} = \frac{Cr_0}{Ag^2\omega^2}\left(U_{k+1}p_0 + V_{k+1}p_0 - \frac{Ag\omega^2}{cr_0}W_{k+1}\right).$$

Si l'on suppose que

$$u_{k+1} = v_{k+1} = w_{k+1} = 0 \qquad \text{pour} \qquad t = 0,$$

on aura

$$\gamma^{(1)}_{k+1} = \gamma^{(2)}_{k+1} = \gamma^{(3)}_{k+1} = 0,$$

car le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} U_1, & U_2, & U_3 \\ V_1, & V_2, & V_3 \\ W_1, & W_2, & W_3 \end{vmatrix} = \frac{Cr_0}{A\omega^2 g^3}$$

est différent de zéro.

Posant dans (124)

$$\gamma^{(1)}_{k+1} = \gamma^{(2)}_{k+1} = \gamma^{(3)}_{k+1} = 0$$

et substituant les expressions ainsi obtenues de $C^{(1)}_{k+1}$, $C^{(2)}_{k+1}$, $C^{(3)}_{k+1}$ dans (123), nous trouverons les fonctions

$$u_{k+1}, \quad v_{k+1}, \quad w_{k+1}$$

satisfaisant aux équations (118) et s'annulant pour $t = 0$.

Donc, les fonctions

$$u_j,\ v_j,\ w_j,\ p_j,\ q_j \qquad\qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, k)$$

étant déterminées, on obtient ensuite les expressions de

$$u_{k+1}, \quad v_{k+1}, \quad w_{k+1}, \quad p_{k+1} \quad \text{et} \quad q_{k+1}$$

à l'aide des quadratures.

[**48**] Nous avons déjà trouvé les expressions de

$$(125)\qquad u_0,\ v_0,\ w_0,\ p_0 \text{ et } q_0$$

qui s'expriment à l'aide des formules (120) et 122), où A_0, B_0, C_1, C_2 et C_3 sont les constantes qu'on peut déterminer sous la condition que u_0, v_0, w_0, p_0 et q_0 se réduisent aux constantes, données à l'avance, pour $t = 0$.

Appliquant l'analyse précédente au cas de $k = 0$, nous trouverons

$$u_1,\ v_1,\ w_1,\ p_1 \text{ et } q_1. \tag{125$_1$}$$

Après avoir trouvé les fonctions (125) et (125$_1$), nous trouverons ensuite

$$u_2,\ v_2,\ w_2,\ p_2,\ q_2.$$

Continuant ainsi de suite, nous déterminerons successivement toutes les inconnues

$$u_j,\ v_j,\ w_j,\ p_j \text{ et } q_j \tag{126}$$

pour toutes les valeurs de l'indice j, à partir de $j = 0$ jusqu'à $j = k$, où k est un entier quelconque.

Substituant les valeurs ainsi déterminées de u_j, v_j, w_j, p_j et q_j dans (112) et (112$_1$), nous obtiendrons la solution des équations du mouvement (109) et (110) sous la forme de séries infinies, disposées suivant les puissances entières et positives du paramètre ε, se réduisant à des constantes, données à l'avance, pour $t = 0$.

Ces séries seront convergentes pour les valeurs de t ne surpassant pas une certaine limite T, qui sera d'autant plus grande que le module du paramètre ε sera plus petit.

[**49**] On peut employer ces séries pour en déduire les équations approchées du mouvement du système.

En négligeant dans ces séries tous les termes contenant les puissances de ε plus grandes que k, nous obtiendrons les équations approchées du mouvement avec l'approximation de l'ordre k.

Supposons que les valeurs initiales de p et q (pour $t = 0$) soient des quantités très petites.

Dans ce cas, nous pouvons définir la rotation du corps solide pour toutes les valeurs de t, plus petites que T, avec une approximation suffisante par les équations suivantes :

$$p = p_0 + \varepsilon p_1, \qquad q = q_0 + \varepsilon q_1, \qquad r = r_0. \tag{126$_1$}$$

Faisons quelques remarques, qui nous seront utiles plus loin, sur le mouvement de rotation du corps solide défini par ces formules approchées.

Comme la surface de la cavité est un ellipsoïde de révolution autour d'axe des ζ, on peut toujours supposer, sans restreindre la généralité, que

$$p_0 = \omega, \quad q_0 = 0 \qquad \text{pour} \qquad t = 0,$$

ce qui donne, en vertu de (120),

$$p_0 = \omega \cos \lambda t, \qquad q_0 = -\omega \sin \lambda t. \tag{127}$$

Quant à la fonction w_0, on peut la présenter sous la forme

$$w_0 = \frac{Chr_0}{Ag^2} + \frac{\omega l_0}{g} \cos g(t+\tau), \tag{128}$$

τ désignant une constante arbitraire.

[**50**] Cela posé, appliquons les formules générales du n° 46 au cas de $k = 0$.

On a, en tenant compte de (115) et (116),

$$P_1 = -\delta v_0 w_0, \qquad Q_1 = \delta u_0 w_0,$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} P_1 \cos \lambda t - Q_1 \sin \lambda t &= -\delta w_0 (v_0 \cos \lambda t + u_0 \sin \lambda t), \\ P_1 \sin \lambda t + Q_1 \cos \lambda t &= -\delta w_0 (v_0 \sin \lambda t - u_0 \cos \lambda t). \end{aligned}\right. \tag{129}$$

Or, les équations

$$\left\{\begin{aligned} q_0 u_0 - p_0 v_0 &= w_0', \\ p_0 u_0 + q_0 v_0 &= h - \frac{Cr_0}{A} w_0 \end{aligned}\right. \tag{129$_1$}$$

conduisent, en vertu de (127), aux relations

$$u_0 \sin \lambda t + v_0 \sin \lambda t = -\frac{w_0'}{\omega},$$

$$u_0 \cos \lambda t - v_0 \sin \lambda t = \frac{1}{\omega}\left(h - \frac{Cr_0}{A} w_0\right).$$

On trouve donc, en tenant compte de (129),

$$P_1 \cos \lambda t - Q_1 \sin \lambda t = \frac{\delta}{\omega} w_0 w_0',$$

$$P_1 \sin \lambda t + Q_1 \cos \lambda t = \frac{\delta}{\omega} w_0 \left(h - \frac{Cr_0}{A} w_0\right)$$

et, enfin, en vertu de (116''),

$$X_1 = \frac{\delta}{2\omega}(w_0^2 - \gamma_0^2),$$

$$Y_1 = \frac{\delta}{\omega} \int_0^t \left\{ hw_0 - \frac{Cr_0}{A} w_0^2 \right\} dt,$$

où γ_0 désigne la valeur initiale (pour $t = 0$) de la variable w_0.

Moyennant l'expression (128) de w_0 et en tenant compte de ce que

$$\gamma_0 = \frac{Chr_0}{Ag^2} + \frac{\omega l_0}{g} \cos g\tau, \tag{129$_2$}$$

on trouve, en effectuant le calcul,

$$(130)\quad \begin{cases} X_1 = -\dfrac{2\delta l_0}{g^2}\sin\mu t\sin\mu(t+2\tau)\left\{\dfrac{Chr_0}{Ag}+\omega l_0\cos\mu t\cos\mu(t+2\tau)\right\}, \\ Y_1 = \dfrac{\delta}{2A^2g^4}\left\{ACr_0\omega(2h^2-g^2l^2)t + 4hl_0(A^2\omega^2 - C^2r_0^2)\sin\mu t\cos\mu(t+2\tau)\right. \\ \qquad\qquad \left. -ACgl_0^2r_0\omega\sin 2\mu t\cos 2\mu(t+2\tau)\right\}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\mu = \frac{g}{2}.$$

On obtient donc, moyennant les formules (117) du n° 46 (en y faisant $k=0$), les expressions suivantes pour p_1 et q_1 :

$$p_1 = X_1\cos\lambda t + Y_1\sin\lambda t,$$
$$q_1 = Y_1\cos\lambda t - X_1\sin\lambda t,$$

où X_1 et Y_1 sont les fonctions de t, définies par les équations (130).

Substituant ces expressions de p_1 et q_1 dans (126), il viendra

$$p = G\cos\lambda t + H\sin\lambda t,$$
$$q = H\cos\lambda t - G\sin\lambda t,$$

où l'on a posé

$$G = \omega + \varepsilon X_1, \qquad H = \varepsilon Y_1.$$

Posant ensuite

$$G = N\cos\theta, \qquad H = N\sin\theta,$$

on trouve

$$(131)\qquad p = N\cos(\lambda t - \theta), \qquad q = N\sin(\lambda t - \theta),$$

où N et Θ se définissent par les équations

$$(132)\quad \begin{cases} N^2 = G^2 + H^2 = (\omega + \varepsilon X_1)^2 + \varepsilon^2 Y_1^2, \\ \operatorname{tang}\Theta = \dfrac{H}{G} = \dfrac{\omega Y_1}{\omega + \varepsilon Y_1}. \end{cases}$$

[**51**] Nous avons supposé que les valeurs initiales de p et q soient des quantités très petites, ou, ce qui revient au même, ω est un nombre assez petit.

Considérons ω comme une infiniment petite du premier ordre et supposons que ε soit une infiniment petite de l'ordre plus élevé.

Posons

$$\varepsilon = R\omega^2,$$

R désignant une constante finie.

Le produit $\varepsilon\omega$ sera une quantité infiniment petite de l'ordre plus élevé.

En se bornant, dans les formules approchées (131), aux infiniment petites de deux premiers ordres ω et ω^2, on peut simplifier les formules (131) de la manière suivante :

Remarquons tout d'abord que les équations (132) peuvent s'écrire, avec l'approximation adoptée, sous la forme

$$N = \omega + \varepsilon X_1, \tag{133}$$

$$\Theta = \operatorname{tang} \frac{\frac{\varepsilon}{\omega} Y_1}{1 + \frac{\varepsilon}{\omega} Y_1} = \frac{\varepsilon}{\omega} Y_1 \left(1 - \frac{\varepsilon}{\omega} Y_1\right), \tag{134}$$

car $\frac{\varepsilon}{\omega}$ est une infiniment petite du même ordre de grandeur que ω.

Désignant maintenant par

$$\alpha_0, \ \beta_0, \ \gamma_0$$

les valeurs de u_0, v_0, w_0 pour $t = 0$, supposons que α_0, β_0, γ_0 soient des constantes finies.

Cela posé, développons X_1 et Y_1 suivant les puissances de ω.

En remarquant que

$$h = \alpha_0 \omega + \frac{Cr_0}{A}\gamma_0, \qquad k^2 = \alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2,$$

et en se rappelant que

$$g^2 = \frac{A^2\omega^2 + C^2 r_0^2}{A^2}, \qquad l_0^2 = k^2 - \frac{h^2}{g^2},$$

on trouve, en effectuant le calcul,

$$X_1 = -2\delta \frac{Al_0\gamma_0}{Cr_0} \sin \mu t \sin \mu(t + 2\tau) + \omega X',$$

$$Y_1 = -2\delta \frac{Al_0\gamma_0}{Cr_0} \sin \mu t \cos \mu(t + 2\tau) + \omega^2 Y'$$

$$+ \omega\delta \frac{A}{Cr_0}\left\{\left(\gamma_0^2 - \frac{l_0^2}{2}\right)t - \frac{Al_0^2}{2Cr_0} \sin 2\mu t \cos 2\mu(t + 2\tau) - \frac{2A\alpha_0(l_0^2 - \gamma_0^2)}{l_0 Cr_0} \sin \mu t \cos \mu(t + 2\tau)\right\},$$

où

$$l_0^2 = \alpha_0^2 + \beta_0^2$$

et X' et Y' désignent certaines fonctions de t.

Substituant ces expressions dans (133) et (134) et en négligeant les termes d'ordre supérieur à ω^2, on trouve

$$N = \omega - 2\varepsilon\delta \frac{Al_0\gamma_0}{Cr_0} \sin \mu t \sin \mu(t + 2\tau),$$

$$\Theta = -2\frac{\varepsilon}{\omega}\delta\frac{Al_0\gamma_0}{Cr_0}\sin \mu t \cos \mu(t+2\tau) - 4\frac{\varepsilon^2}{\omega^2}\delta^2\frac{A^2 l_0^2\gamma_0^2}{C^2 r_0^2}\sin^2 \mu t \cos^2 \mu(t+2\tau)$$
$$+ \varepsilon\delta\frac{A}{Cr_0}\left\{mt - \frac{Al_0^2}{2Cr_0}\sin 2\mu t \cos 2\mu(t+2\tau) - \frac{2A\alpha_0 n}{l_0 Cr_0}\sin \mu t \cos \mu(t+2\tau)\right\},$$

où l'on a posé

$$m = \gamma_0^2 - \frac{l_0^2}{2}, \qquad n = l_0^2 - \gamma_0^2.$$

[**52**] Supposons maintenant que la surface extérieure du corps solide soit un ellipsoïde de révolution autour de l'axe des ζ; soient

$$a_1 = b_1, \ c_1$$

les carrés de ces demi-axes.

Considérons, comme au n° 41, le mouvement de la projection sur le plan équatorial du point x_1, y_1, z_1 de l'intersection de la vitesse angulaire du corps avec sa surface.

Désignant par ρ et φ les coordonnées polaires de ce point que nous désignerons par M, on trouve, moyennant les formules du n° 41 et en se bornant par l'approximation adoptée,

$$\rho = \frac{\sqrt{c_1}}{|r_0|}\left\{\omega - 2\varepsilon\delta\frac{Al_0\gamma_0}{Cr_0}\sin \mu t \sin \mu(t+2\tau)\right\}, \tag{135}$$

$$\varphi = \left(\lambda - \varepsilon\delta\frac{Am}{Cr_0}\right)t + \psi(t), \tag{136}$$

où l'on a posé

$$\psi(t) = 2\frac{\varepsilon}{\omega}\delta\frac{Al_0\gamma_0}{Cr_0}\sin \mu t \cos \mu(t+2\tau) + 4\frac{\varepsilon^2}{\omega^2}\delta^2\frac{A^2 l_0^2\gamma_0^2}{C^2 r_0}\sin^2 \mu t \cos^2 \mu(t+2\tau)$$
$$+ \varepsilon\delta\frac{A^2}{C^2 r_0^2}\left\{\frac{l_0^2}{2}\sin 2\mu t \cos 2\mu(t+2\tau) + \frac{2\alpha_0 n}{l_0}\sin \mu t \cos \mu(t+2\tau)\right\}. \tag{136$_1$}$$

On voit que la fonction $\psi(t)$ est une fonction périodique en t avec la période

$$T_1 = \frac{\pi}{\mu} = \frac{2\pi}{g} = \frac{2\pi A}{\sqrt{A^2\omega^2 + C^2 r_0^2}}.$$

Le rayon vecteur ρ du point M est aussi une fonction périodique de t avec la même période T_1.

Posant

$$\rho_0 = \omega \frac{\sqrt{c_1}}{|r_0|}, \qquad \theta(t) = -2\varepsilon\delta \frac{A l_0 \gamma_0 \sqrt{c_1}}{C r_0^2} \sin \mu t \sin \mu(t+2\tau),$$

$$\sigma = \lambda - \varepsilon\delta \frac{Am}{Cr_0},$$

on peut écrire [les égalités (135) et (136)]

$$\rho = \rho_0 + \theta(t),$$
$$\varphi = \sigma t + \psi(t),$$

où $\theta(t)$ et $\psi(t)$ sont les fonctions périodiques avec la période T_1.

Imaginons un point M_1 dont le mouvement dans le plan équatorial se détermine à l'aide des équations

$$\rho = \rho_0 + \theta(t),$$
$$\varphi_1 = \psi(t),$$

ρ et φ_1 étant les coordonnées polaires du point M_1.

Supposons que ce plan (S) tourne uniformément autour d'un axe, perpendiculaire à ce plan et passant par l'origine des coordonnées, avec une vitesse angulaire σ.

La courbe, décrite par le point M_1 dans ce mouvement composé dans l'espace, représente évidemment la trajectoire du point M.

Quand le temps augmente de quantité

$$T = \frac{2\pi}{\sigma},$$

le plan (S) reprend sa position primitive et l'angle φ croît à une quantité peu différente de 2π.

On a, en effet, pour le moment $t + T$,

$$\varphi = 2\pi + \sigma t + \psi\left(t + \frac{2\pi}{\sigma}\right).$$

Or, $\psi(t)$ contient un facteur $\frac{\varepsilon}{\omega}$, qui est une quantité infiniment petite du même ordre de grandeur que ω. Donc, φ croît à une quantité, peu différente de 2π.

S'il existe un entier k tel qu'on ait

$$T = kT_1,$$

on aura, pour $t = t + T$,

$$\varphi = 2\pi + \sigma t + \psi(t).$$

Dans ce cas, on peut dire que φ est une fonction périodique de t avec la période T.

Nous ferons usage des formules établies dans ce numéro un peu plus tard.

VI. — Mouvement du système considéré, lorsque le liquide est visqueux et lorsqu'il existe du frottement entre le liquide et la paroi du vase.

[**53**] Nous avons supposé, jusqu'à présent, que le liquide contenu à l'intérieur du corps solide soit parfait.

Considérons maintenant le cas d'un liquide visqueux et tenons compte du frottement qui peut exister entre le liquide et la paroi solide du vase.

Nous nous arrêtons à la théorie de la viscosité, la plus ordinairement adoptée, due à Stokes.

Désignons par U, V, W les composantes, suivant les axes des coordonnées rectangulaires quelconques, de la vitesse absolue d'un point quelconque x, y, z du liquide, par μ' ce qu'on appelle le *coefficient de la viscosité*. Désignons, suivant les notations de Kirchhoff, par

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\quad Y_z=Z_y,\quad X_z=Z_x,\quad X_y=Y_x$$

les *efforts intérieurs* dans le liquide.

On a, d'après la théorie de Stokes,

$$(137)\qquad \left\{\begin{aligned} X_x&=P-2\mu'\frac{\partial U}{\partial x}, & Y_z&=-\mu'\left(\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\right),\\ Y_y&=P-2\mu'\frac{\partial V}{\partial y}, & X_z&=-\mu'\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\right),\\ Z_z&=P-2\mu'\frac{\partial W}{\partial z}, & X_y&=-\mu'\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\right),\end{aligned}\right.$$

P désignant la pression du liquide.

Les équations du mouvement d'un liquide visqueux, dans cette hypothèse, ne diffèrent de celles du liquide parfait que par les termes complémentaires de la forme

$$(138)\qquad -\mu'\Delta U,\quad -\mu'\Delta V,\quad -\mu'\Delta W,$$

où le symbole Δ désigne l'opération

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Il est évident que *le mouvement de Dirichlet, dans lequel les vitesses du liquide sont les fonctions linéaires de coordonnées, est possible pour un liquide visqueux aussi bien que pour un liquide parfait*, car les termes complémentaires s'annulent si $\mu'=0$, ainsi que si U, V, W sont les fonctions linéaires de x, y et z.

[**54**] Supposons d'abord, comme précédemment, que la surface de la cavité soit un ellipsoïde (S) à demi-axes :

$$\sqrt{a}, \quad \sqrt{a}, \quad \sqrt{c}.$$

Prenons le centre de cet ellipsoïde pour l'origine des coordonnées mobiles ξ, η, ζ dont les axes soient dirigées suivant les axes de l'ellipsoïde (S). Supposons que le centre de (S) reste immobile dans l'espace et que le corps solide tourne autour de ce point fixe avec une vitesse angulaire ω.

Désignant, comme plus haut, par u, v, w les composantes du tourbillon au point ξ, η, ζ du liquide suivant les axes mobiles ξ, η, ζ, par p, q, r les composantes de ω suivant les mêmes axes, et supposant que le liquide soit animé d'un mouvement de Dirichlet, nous obtiendrons, évidemment, les mêmes équations du mouvement du liquide visqueux que nous avons établies plus haut pour un liquide parfait, à savoir les équations (7) du n° 3.

Supposons maintenant qu'il existe le frottement de contact (frottement extérieur) entre le liquide et la paroi solide de la cavité du corps.

Il existe beaucoup d'hypothèses sur les lois de la viscosité et des forces du frottement extérieur qui peuvent agir aux points de contact du fluide et de la paroi solide du vase contenant le liquide. Or, toutes ces hypothèses sont en général insuffisantes et souvent contredisent les unes aux autres.

Certains physiciens supposent que, sous l'influence du frottement, le liquide doit nécessairement adhérer à la surface du vase aux points de contact; d'autres admettent qu'il peut glisser le long de cette surface.

Mais tous les physiciens supposent toujours que le frottement du contact soit nécessairement nul pour un liquide parfait. La force du frottement extérieur dépend donc essentiellement de la viscosité du liquide, c'est-à-dire des propriétés physiques de la matière du fluide.

D'autre part, elle dépend aussi des propriétés physiques de la matière de la paroi solide aux points de contact, comme le montre l'expérience. Parmi les hypothèses sur les lois de la force du frottement de contact, celle de Stokes est la plus ordinairement adoptée.

Une hypothèse plus générale a été développée récemment par M. Duhem dans son ouvrage : *Recherches sur l'Hydrodynamique* (Paris, 1903-04), auquel je renvoie le lecteur pour les détails ainsi que pour l'étude historique de la question dont il s'agit [1]. Toute la différence de ces hypothèses consiste principalement dans les définitions différentes de la grandeur de la force du frottement de contact.

---

[1] P. Duhem, *Recherches hydrodynamiques* (Annales de Toulouse, 2e série, Paris, 1904, pp. 33, 79). — Voir aussi : Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge, 1906, pp. 520, etc.; Kirchhoff, *Vorlesungen über Mathemat. Physik.*, Leipzig, 1883, pp. 369, etc.

Quant à la direction de cette force, on suppose toujours qu'elle soit dirigée, en tout point de contact, suivant la vitesse relative de l'un de deux corps par rapport à l'autre.

On peut considérer cette dernière loi, qui définit la direction de la force du frottement extérieur, comme une simple conséquence de l'expérience.

Sans faire une hypothèse quelconque, toujours douteuse, sur la grandeur de cette force, nous la désignons par T, en supposant qu'elle soit appliquée au point ξ, η, ζ du liquide.

Désignant ensuite par

$$T_\xi, \ T_\eta, \ T_\zeta$$

les projections de la force T sur les axes ξ, η, ζ, par V la vitesse relative du point quelconque (ξ, η, ζ) du liquide par rapport au point correspondant de la paroi du vase, par

$$V_\xi, \ V_\eta, \ V_\zeta$$

les composantes de la vitesse V suivant les mêmes axes, on peut écrire

$$(139) \qquad T_\xi = -T_1 V_\xi, \qquad T_\eta = -T_1 V_\eta, \qquad T_\zeta = -T_1 V_\zeta,$$

où l'on a posé

$$T_1 = \frac{T}{V}.$$

On peut considérer les forces du frottement comme des forces extérieures appliquées aux points de la paroi de la cavité.

Pour déduire les équations du mouvement du corps solide, il faut seulement calculer les moments M_ξ, M_η, M_ζ, qui figurent dans les équations (8).

Le mouvement du corps solide et du liquide remplissant la cavité se détermine à l'aide des équations (7) et (8), auxquelles il faut encore ajouter certaines conditions aux limites.

On obtient ces conditions en exprimant que les efforts intérieurs du liquide et les forces du frottement de contact sont en équilibre en tous les points de la paroi de la cavité.

[**55**] Décomposons la force des efforts intérieurs du fluide, agissant à un point quelconque ξ, η, ζ de la surface (S) de la cavité, en deux composantes : l'une, dirigée suivant la normale à cette surface au point ξ, η, ζ, et l'autre, située dans le plan tangent à (S) au même point ξ, η, ζ.

Cette dernière composante doit être en équilibre avec la force T du frottement de contact, appliquée au point ξ, η, ζ du liquide.

Désignons, avec Kirchhoff, par

$$X_n, \ Y_n, \ Z_n,$$

où n désigne la direction de la normale extérieur à (S) au point (ξ, η, ζ), les projections sur les axes mobiles de la résultante des efforts intérieurs dans le liquide à ce point, et posons

$$H = X_n\alpha + Y_n\beta + Z_n\gamma, \tag{140}$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale n par rapport aux axes ξ, η, ζ.

Il est aisé de comprendre que les projections sur ces axes de la composante tangentielle de la résultante des efforts intérieurs du liquide au point ξ, η, ζ de la surface (S) s'expriment comme il suit :

$$X_n - H\alpha, \qquad Y_n - H\beta, \qquad Z_n - H\gamma.$$

On obtient ainsi, eu égard à (139), ces conditions aux limites

$$\left\{\begin{aligned} X_n - H\alpha &= T_1 V_\xi, \\ Y_n - H\beta &= T_1 V_\eta, \\ Z_n - H\gamma &= T_1 V_\zeta, \end{aligned}\right. \tag{141}$$

qui doivent être satisfaites en tous les points de la surface de la cavité.

[**56**] Appliquons d'abord les équations générales (141) au cas que nous considérons dans ce travail (cas du mouvement de Dirichlet).

Moyennant les variables (3) du n° 2 et les formules (6), on trouve

$$\left\{\begin{aligned} V_\xi &= (y_3 + r)\eta + (x_2 - q)\zeta, & U &= y_3\eta + x_2\zeta, \\ V_\eta &= (y_1 + p)\zeta + (x_3 - r)\xi, & V &= y_1\zeta + x_3\xi, \\ V_\zeta &= (y_2 + q)\xi + (x_1 - p)\eta, & W &= y_2\xi + x_1\eta, \end{aligned}\right. \tag{142}$$

et, en vertu de (137) [en y remplaçant x, y, z par ξ, η, ζ] :

$$X_\xi = Y_\eta = Z_\zeta = p, \tag{143}$$

$$\left\{\begin{aligned} Y_\zeta = Z_\zeta &= -\mu'(x_1 + y_1), \\ X_\zeta = Z_\xi &= -\mu'(x_2 + y_2), \\ X_\eta = Y_\xi &= -\mu'(x_3 + y_3). \end{aligned}\right. \tag{144}$$

En se rappelant que

$$\left\{\begin{aligned} X_n &= X_\xi\alpha + X_\eta\beta + X_\zeta\gamma, & \alpha &= \frac{\xi}{a\Delta}, \\ Y_n &= X_\eta\alpha + Y_\eta\beta + Y_\zeta\gamma, & \beta &= \frac{\eta}{b\Delta}, & \Delta &= \sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}}, \\ Z_n &= X_\zeta\alpha + Y_\zeta\beta + Z_\zeta\gamma, & \gamma &= \frac{\zeta}{c\Delta}, \end{aligned}\right. \tag{145}$$

on trouve, en tenant compte de (141), (142), (143) et (144),

$$(141_1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\mu'}{\Delta}\left\{(x_3+y_3)\frac{\eta}{b}+(x_2+y_2)\frac{\zeta}{c}\right\}-H_1\frac{\xi}{a\Delta}-T_1\{(y_3+r)\eta+(x_2-q)\zeta\}=0,\\ &\frac{\mu'}{\Delta}\left\{(x_1+y_1)\frac{\zeta}{c}+(x_3+y_3)\frac{\xi}{a}\right\}-H_1\frac{\eta}{b\Delta}-T_1\{(y_1+p)\zeta+(x_3-r)\xi\}=0,\\ &\frac{\mu'}{\Delta}\left\{(x_2+y_2)\frac{\xi}{a}+(x_1+y_1)\frac{\eta}{b}\right\}-H_1\frac{\zeta}{c\Delta}-T_1\{(y_2+q)\xi+(x_1-p)\eta\}=0,\end{aligned}\right.$$

$$H_1=p-H.$$

Ces relations doivent être satisfaites pour toutes les valeurs de ξ, η, ζ vérifiant l'équation

$$\frac{\xi^2}{a}+\frac{\eta^2}{b}+\frac{\zeta^2}{c}=1.$$

Posons

$$\xi=\eta=0,\qquad \zeta=c.$$

La dernière des équations précédentes donne

$$(146)\qquad H_1=0 \quad \text{pour} \quad \xi=\eta=0,\qquad \zeta=c.$$

Or, en vertu de (140), (143), (144) et (145),

$$H_1=-\frac{\mu'}{\Delta}\left\{\frac{\xi}{a}[x_2+y_2+x_3+y_3]+\frac{\eta}{b}[x_3+y_3+x_1+y_1]+\frac{\zeta}{c}[x_1+y_1+x_2+y_2]\right\}.$$

L'équation (146) devient

$$(147)\qquad x_1+y_1+x_2+y_2=0.$$

On aura de même, en posant

$$\xi=\zeta=0,\qquad \eta=b$$

et

$$\eta=\zeta=0,\qquad \xi=a.$$

les relations suivantes :

$$(147)\qquad \left\{\begin{aligned} &x_2+y_2+x_3+y_3=0,\\ &x_3+y_3+x_1+y_1=0.\end{aligned}\right.$$

Les équations (147) exigent que l'on ait

$$(148)\qquad x_1+y_1=x_2+y_2=x_3+x_3=0.$$

Or, on a, eu égard à (4) et (5) du n° 2,

$$(149)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1+y_1&=\frac{b-c}{b+c}(2p-u),\\ x_2+y_2&=\frac{c-a}{c+a}(2q-v),\\ x_3+y_3&=\frac{a-b}{a+b}(2r-w),\end{aligned}\right.$$

$$(150)\qquad \left\{\begin{aligned} V_\xi&=a\left\{\frac{2r-w}{a+b}\eta-\frac{2q-v}{c+a}\zeta\right\},\\ V_\eta&=b\left\{\frac{2p-u}{b+c}\zeta-\frac{2r-w}{a+b}\xi\right\},\\ V_\zeta&=c\left\{\frac{2q-v}{c+a}\xi-\frac{2p-u}{b+c}\eta\right\}.\end{aligned}\right.$$

Il est aisé de s'assurer, en tenant compte de (141_1), (148), (149) et (150), que

$$2p-u=2q-v=2r-w=0,$$
$$V_\xi=V_\eta=V_\zeta=0,$$

quelles que soient les constantes a, b et c.

Ces équations conduisent à la proposition suivante :

Un seul cas possible du mouvement de Dirichlet d'un liquide visqueux, contenu à l'intérieur d'une cavité ellipsoïdale (S) *appartenant à un corps solide, quelle que soit la loi du frottement de contact entre le liquide et la paroi de la cavité, est celui où le liquide tourne autour du centre fixe de l'ellipsoïde* (S) *comme un système invariable avec la même vitesse angulaire que le corps solide.*

En d'autres termes, *un fluide visqueux et non compressible, animé d'un mouvement de Dirichlet, doit nécessairement adhérer à la paroi de la cavité ellipsoïdale.*

[**57**] Cette proposition résulte immédiatement des relations (141), qui doivent être satisfaites en tous les points de la surface (S) limitant les masses fluides.

Pour démontrer qu'un tel mouvement est, en effet, possible, il faut encore vérifier les équations (7) et (8).

Supposons, pour plus de simplicité, que le moment résultant, par rapport à l'origine des coordonnées, des forces externes, appliquées à divers points du système considéré, soit égal à zéro.

Il est évident que dans le cas considéré

$$M_\xi=M_\eta=M_\zeta=0.$$

Les équations du mouvement ne diffèrent donc pas des équations correspondantes pour un liquide parfait (voir n° 3) :

$$(152)\qquad \begin{cases} (c+a)(a+b)u' = a(b-c)vw + 2a[(a+c)rv - (a+b)qw], \\ (a+b)(b+c)v' = b(c-a)uw + 2b[(b+a)pw - (b+c)ru], \\ (b+c)(c+a)w' = c(a-b)vu + 2c[(c+b)qu - (c+a)pv], \end{cases}$$

$$(152_1)\qquad \begin{cases} \alpha p' = (\beta-\gamma)qr + K(c-b)vw + \dfrac{2Ma(c-b)}{5}[c(a-b)rv - b(c-a)qw]. \\ \beta q' = (\gamma-\alpha)rp + K(a-c)uw + \dfrac{2Mb(a-c)}{5}[a(b-c)pw - c(a-b)ru], \\ \gamma r' = (\alpha-\beta)pq + K(b-a)uv + \dfrac{2Mc(b-a)}{5}[b(c-a)qu - a(b-c)pv]. \end{cases}$$

Ces équations doivent admettre, en vertu de (151), une solution particulière de la forme

$$(153)\qquad u = 2p, \qquad v = 2q, \qquad w = 2r.$$

Substituant ces expressions de u, v, w dans (152), il viendra

$$p' = q' = r' = 0,$$

c'est-à-dire

$$(154)\qquad p = \text{const.} = p_0, \qquad q = \text{const.} = q_0, \qquad r = \text{const.} = r_0.$$

Donc, *s'il existe un mouvement de l'espèce considérée, il doit être nécessairement une rotation uniforme du système, comme s'il était un seul corps solide, autour du centre fixe de l'ellipsoïde* (S).

Il ne reste qu'à vérifier les équations (152_1).

Ces équations donnent, en vertu de (153) et (154),

$$\left\{\beta-\gamma+4K(c-b)+\frac{4Ma(c-b)}{5}\big(a(b+c)-2bc\big)\right\}q_0r_0=0,$$

$$\left\{\gamma-\alpha+4K(a-c)+\frac{4Mb(a-c)}{5}\big(b(c+a)-2ca\big)\right\}r_0p_0=0,$$

$$\left\{\alpha-\beta+4K(b-a)+\frac{4Mc(b-a)}{5}\big(c(a+b)-2ab\big)\right\}p_0q_0=0,$$

ou, en y substituant, au lieu de α, β, γ et K, leurs expressions (9) et (10) du n° 3,

$$(155)\qquad \begin{cases} \left\{B-C+\dfrac{M}{5}(c-b)\right\}q_0r_0=0, \\ \left\{C-A+\dfrac{M}{5}(a-c)\right\}r_0p_0=0, \\ \left\{A-B+\dfrac{M}{5}(b-a)\right\}p_0q_0=0. \end{cases}$$

[**58**] Supposons d'abord que p_0, q_0, r_0 soient différents de zéro.

Dans ce cas, on doit avoir

$$B - C = \frac{M}{5}(b - c),$$

$$C - A = \frac{M}{5}(c - a),$$

$$A - B = \frac{M}{5}(a - b),$$

d'où

$$A = \sigma + \frac{Ma}{5}, \qquad B = \sigma + \frac{Mb}{5}, \qquad C = \sigma + \frac{Mc}{5},$$

σ désignant une constante arbitraire.

Ces équations peuvent s'écrire, en vertu de (3) du n° 1,

$$A + A_1 = B + B_1 = C + C_1 = \lambda, \tag{156}$$

λ désignant une constante arbitraire.

Il est évident que

$$A + A_1, \qquad B + B_1, \qquad C + C_1 \tag{157}$$

représentent les moments d'inertie, par rapport aux axes ξ, η, ζ, du système, composé du corps solide et du liquide, considéré comme un système invariable.

Si les constantes (157) satisfont aux équations (156), l'ellipsoïde d'inertie du système, considéré comme un seul corps solide, se réduit à une sphère.

Dans ce cas, les équations (155) seront satisfaites, quelles que soient les constantes p_0, q_0, r_0.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si l'ellipsoïde d'inertie du système, considéré comme un seul corps solide, se réduit à une sphère, le système admet une rotation uniforme, comme un système invariable, autour d'un axe fixe de la direction arbitraire avec une vitesse angulaire arbitrairement donnée.

Nous retombons ici à un cas particulier du mouvement possible pour un liquide parfait, indiqué au n° 28.

Il suffit, en effet, de poser, dans les formules (87) et (88) du n° 28,

$$\tau = bc + ca + ab$$

pour en déduire les équations (151) et (155).

[**59**] Supposons maintenant que l'une des trois quantités p_0, q_0, r_0 soit égale à zéro.

Soit, par exemple, $r_0 = 0$. Dans ce cas, les équations (156) se réduisent à une seule :

$$A - B = \frac{M}{5}(a - b) \tag{158}$$

ou

$$A + A_1 = B + B_1. \tag{158$_1$}$$

Dans ce cas, l'ellipsoïde d'inertie du système, considéré comme un système invariable, est de révolution autour de l'axe des ζ.

On obtient les résultats analogues, si l'on pose

$$p_0 = 0 \qquad \text{ou} \qquad q_0.$$

Donc, *si l'ellipsoïde d'inertie du système, considéré comme un seul corps solide, est de révolution, le système admet la rotation uniforme autour d'un axe fixe, situé dans le plan équatorial de l'ellipsoïde d'inertie, avec une vitesse angulaire* ω, *d'ailleurs arbitraire.*

Il est évident encore que *la rotation du système autour de l'axe des* ζ (*l'axe de révolution de l'ellipsoïde d'inertie*) *sera aussi possible dans le cas considéré.*

[**60**] Considérons enfin le cas général, où l'ellipsoïde d'inertie du système, considéré comme un seul système invariable, est un ellipsoïde quelconque à trois axes inégaux.

Dans ce cas, les premiers facteurs entre les crochets, qui figurent dans les équations (155), sont différents de zéro; il s'ensuit que les deux de trois quantités p_0, q_0, r_0 doivent être égales à zéro.

Donc, *si l'ellipsoïde d'inertie du système, considéré comme un seul corps solide, est un ellipsoïde à trois axes inégaux, le mouvement de Dirichlet, pour un tel système, se réduit nécessairement à la rotation uniforme autour d'un des axes principaux d'inertie avec une vitesse angulaire* ω, *arbitrairement donnée.*

Il est évident que *les trois cas du mouvement, tout à l'heure indiqués, sont les seuls possibles pour le système considéré, lorsque les constantes* A, B, C, a, b, c, M *restent arbitraires.*

[**61**] Je profite de l'occasion pour faire quelques remarques complémentaires relatives aux résultats établis aux n^{os} 58-61.

Considérons le cas général, où la surface (S) de la cavité, contenant le liquide visqueux, est une surface quelconque fermée.

Il est aisé de comprendre que le mouvement du corps solide et du liquide, contenu à son intérieur, se détermine, dans le cas général, à l'aide des équations suivantes :

Les composantes U, V, W de la vitesse absolue, suivant les axes mobiles ξ, η, ζ d'un point quelconque ξ, η, ζ du liquide, doivent satisfaire aux équations

$$(159)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \xi} &= \frac{\partial U}{\partial t} + v(W - p\eta + q\xi) - w(V - r\xi + p\zeta) - \mu'\Delta U, \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} &= \frac{\partial V}{\partial t} + w(U - q\zeta + r\eta) - u(W - p\eta + q\xi) - \mu'\Delta V, \\ \frac{\partial T}{\partial \zeta} &= \frac{\partial W}{\partial t} + u(V - r\xi + p\zeta) - v(U - q\zeta + r\eta) - \mu'\Delta W, \end{aligned}\right.$$

$$(159_1)\quad \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta} = 0,$$

où

$$(160)\quad T = F - P - \frac{V_1^2}{2} + U(q\zeta - r\eta) + V(r\xi - q\zeta) + W(p\eta - q\xi),$$

F désigne la fonction des forces, agissant aux divers points du liquide, P la pression du liquide, V_1 la vitesse absolue du point ξ, η, ζ du liquide,

$$(160_1)\quad V_1^2 = U^2 + V^2 + W^2,$$

u, v, w les composantes du tourbillon suivant les axes ξ, η, ζ.

Soit

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

l'équation de la surface (S) de la cavité.

Aux équations précédentes, il faut encore ajouter certaines conditions aux limites [sur la surface (S)] qui peuvent s'écrire comme il suit :

$$(161)\quad \frac{\partial f}{\partial \xi}(U - q\zeta + r\eta) + \frac{\partial f}{\partial \eta}(V - r\xi + p\zeta) + \frac{\partial f}{\partial \zeta}(W - p\eta + q\xi) = 0 \qquad \text{sur (S)},$$

et, en vertu de (141),

$$(162)\quad \left\{\begin{aligned} X_n - H\alpha &= T_1 V_\xi, \\ Y_n - H\beta &= T_1 V_\eta, \\ Z_n - H\gamma &= T_1 V_\zeta, \end{aligned}\right. \qquad \text{sur (S)}.$$

On adopte certainement la même théorie de la viscosité et du frottement extérieur qu'au n° 54.

Désignant maintenant par

$$M'_\xi,\ M'_\eta,\ M'_\zeta$$

les sommes des moments des efforts intérieurs du liquide aux points de la surface (S), par

$$M_\xi,\ M_\eta,\ M_\zeta$$

les sommes des moments, par rapport aux axes des ξ, η, ζ, des forces externes, appliquées au corps solide.

Supposons, pour plus de simplicité, que ces axes soient dirigés suivant les axes principaux d'inertie du corps par rapport à l'origine des coordonnées (fixe dans l'espace).

Le mouvement du corps solide, contenant à son intérieur un liquide visqueux, sera défini par les équations suivantes :

$$(163)\qquad \begin{cases} Ap' = (B - C)qr + M'_\xi + M_\xi, \\ Bq' = (C - A)rp + M'_\eta + M_\eta, \\ Cr' = (A - B)pq + M'_\zeta + M_\zeta. \end{cases}$$

Toute solution des équations différentielles (159), (159_1) et (163) vérifiant les conditions aux limites (161) et (162) représente un mouvement possible du système considéré.

[**62**] Il est évident qu'on peut satisfaire aux conditions (161) et (162), quelle que soit la surface fermée (S) de la cavité, si l'on pose

$$(164)\qquad U = q\zeta - r\eta, \qquad V = r\xi - p\zeta, \qquad W = p\eta - q\xi.$$

Dans ce cas

$$V_\xi = V_\eta = V_\zeta = 0,$$

et, si l'on suppose que le moment résultant des forces externes soit nul,

$$M_\xi = M_\eta = M_\zeta = 0.$$

Les expressions (164) de U, V, W satisfont évidemment à l'équation (159_1).

Quant aux équations (159), elles deviennent, en vertu de (160), (160_1) et (164),

$$(165)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial \xi} = \dfrac{\partial F}{\partial \xi} + \xi(p^2 + q^2) - p(q\eta + r\zeta) + r'\eta - q'\zeta, \\ \dfrac{\partial P}{\partial \eta} = \dfrac{\partial F}{\partial \eta} + \eta(q^2 + r^2) - q(r\zeta + p\xi) + p'\zeta - r'\xi, \\ \dfrac{\partial P}{\partial \zeta} = \dfrac{\partial F}{\partial \zeta} + \zeta(r^2 + p^2) - r(p\xi + q\eta) + q'\xi - p'\eta. \end{cases}$$

Ces équations conduisent immédiatement aux suivantes :

$$p' = q' = r' = 0,$$

c'est-à-dire

$$(166)\qquad p = p_0 = \text{const.}, \qquad q = q_0 = \text{const.}, \qquad r = r_0 = \text{const.}$$

Donc, *la rotation du corps solide autour du point fixe doit être nécessairement uniforme.*

[**63**] Cela posé, formons les expressions de M'_ξ, M'_η, M'_ζ.

On a, eu égard à (165) et (166) ([1]),

$$M'_\xi = \int \left(\eta \frac{\partial P}{\partial \zeta} - \zeta \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) d\tau = \int \left(\eta \frac{\partial F}{\partial \zeta} - \zeta \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) d\tau + (B_1 - C_1) q_0 r_0,$$

$$M'_\eta = \int \left(\zeta \frac{\partial P}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) d\tau = \int \left(\zeta \frac{\partial F}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial F}{\partial \zeta} \right) d\tau + (C_1 - A_1) r_0 p_0,$$

$$M'_\zeta = \int \left(\xi \frac{\partial P}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) d\tau = \int \left(\xi \frac{\partial F}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) d\tau + (A_1 - B_1) p_0 q_0,$$

où

$$A_1 = \int (\zeta^2 + \eta^2) d\tau, \qquad B_1 = \int (\xi^2 + \zeta^2) d\tau, \qquad C_1 = \int (\eta^2 + \xi^2) d\tau,$$

les intégrales étant étendues au volume de la cavité, représentent les moments d'inertie du liquide, considéré comme un système invariable, par rapport aux axes ξ, η, ζ.

Les équations (163) deviennent alors

$$(167) \qquad \begin{cases} [B + B_1 - (C + C_1)] q_0 r_0 = M_1, \\ [C + C_1 - (A + A_1)] r_0 p_0 = M_2, \\ [A + A_1 - (B + B_1)] p_0 q_0 = M_3, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$M_1 = \int \left(\zeta \frac{\partial F}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial F}{\partial \zeta} \right) d\tau, \quad \text{etc.}$$

[**64**] Supposons d'abord que M_1, M_2 et M_3 soient différents de zéro et que l'ellipsoïde d'inertie du système, considéré comme un seul système invariable, ait trois axes inégaux.

Dans ce cas, les équations (167) conduisent à ces expressions pour les constantes p_0, q_0 et r_0 :

$$p_0 = \sigma \frac{\gamma_1 - \beta_1}{M_1}, \qquad q_0 = \sigma \frac{\alpha_1 - \gamma_1}{M_2}, \qquad r_0 = \sigma \frac{\beta_1 - \gamma_1}{M_3},$$

où l'on a posé

$$\alpha_1 = A + A_1, \qquad \beta_1 = B + B_1, \qquad \gamma_1 = C + C_1,$$

$$\sigma^2 = \frac{M_1 M_2 M_3}{(\beta_1 - \gamma_1)(\gamma_1 - \alpha_1)(\alpha_1 - \beta_1)}.$$

Il est évident que le mouvement de l'espèce considérée n'est possible que sous la supposition que le rapport

$$(168) \qquad \frac{M_1 M_2 M_3}{(\beta_1 - \gamma_1)(\gamma_1 - \alpha_1)(\alpha_1 - \beta_1)}$$

soit positif. Dans le cas contraire, le mouvement considéré sera impossible.

([1]) Voir aussi mon *Mémoire sur la théorie des tourbillons*, p. 306.

Donc, *si les forces extérieures, appliquées aux points du liquide, et les constantes* α_1, β_1, γ_1 *sont telles que le rapport* (168) *soit positif, le système admet un mouvement se réduisant à la rotation uniforme du système, comme s'il était un seul système invariable, autour d'un axe fixe* L *avec la vitesse angulaire* σ. *La direction de cet axe se détermine par les cosinus directeurs*

$$\cos(\mathrm{L}, \xi) = \frac{\gamma_1 - \beta_1}{\mathrm{M}_1}, \qquad \cos(\mathrm{L}, \eta) = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\mathrm{M}_2}, \qquad \cos(\mathrm{L}, \zeta) = \frac{\beta_1 - \gamma_1}{\mathrm{M}_3}.$$

[**65**] Si l'on suppose que

$$\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_3 = 0$$

les équations (167) deviennent

$$(169) \qquad \left\{ \begin{array}{l} [\mathrm{B} + \mathrm{B}_1 - (\mathrm{C} + \mathrm{C}_1)] q_0 r_0 = 0, \\ [\mathrm{C} + \mathrm{C}_1 - (\mathrm{A} + \mathrm{A}_1)] r_0 p_0 = 0, \\ [\mathrm{A} + \mathrm{A}_1 - (\mathrm{B} + \mathrm{B}_1)] p_0 q_0 = 0, \end{array} \right.$$

et coïncident avec les équations (155) du n° 57.

Tous les raisonnements des nos 58, 59 et 60 s'appliquent sans changement au cas général que nous considérons ici, et conduisent aux mêmes résultats que nous avons établis plus haut pour le cas particulier, où la surface de la cavité est un ellipsoïde et le liquide est animé d'un mouvement de Dirichlet.

[**66**] Cela posé, considérons le problème en question dans toute sa généralité.

Formons, tout d'abord, les expressions de M'_ξ, M'_η, M'_ζ.

On a

$$\mathrm{M}'_\xi = \int (\eta \mathrm{Z}_n - \zeta \mathrm{Y}_n)\, ds$$

avec les expressions analogues pour M'_η et M'_ζ.

En se rappelant que

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_n &= \mathrm{X}_\xi \alpha + \mathrm{X}_\eta \beta + \mathrm{X}_\zeta \gamma, \\ \mathrm{Y}_n &= \mathrm{X}_\eta \alpha + \mathrm{Y}_\eta \beta + \mathrm{Y}_\zeta \gamma, \\ \mathrm{Z}_n &= \mathrm{X}_\zeta \alpha + \mathrm{Y}_\zeta \beta + \mathrm{Z}_\zeta \gamma, \end{aligned}$$

on trouve, en tenant compte de (137) et employant la transformation connue des intégrales superficielles,

$$\mathrm{M}'_\xi = \int \mathrm{P}(\eta\gamma - \zeta\beta)\, ds - \mu' \int \left\{ \eta \left(\frac{\partial \mathrm{X}'_\zeta}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathrm{Y}'_\zeta}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathrm{Z}'_\zeta}{\partial \zeta} \right) - \zeta \left(\frac{\partial \mathrm{X}'_\eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathrm{Y}'_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathrm{Y}'_\zeta}{\partial \zeta} \right) \right\} d\tau,$$

où l'on a posé

$$(170)\quad \left\{\begin{aligned} X'_\xi &= -2\frac{\partial U}{\partial \xi}, & Y'_\zeta &= -\left(\frac{\partial W}{\partial \eta}+\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right),\\ Y'_\eta &= -2\frac{\partial V}{\partial \eta}, & X'_\zeta &= -\left(\frac{\partial U}{\partial \zeta}+\frac{\partial W}{\partial \xi}\right),\\ Z'_\zeta &= -2\frac{\partial W}{\partial \zeta}, & X'_\eta &= -\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}+\frac{\partial U}{\partial \eta}\right).\end{aligned}\right.$$

Eu égard à ces expressions, on trouve enfin, employant la même transformation de la première des intégrales de l'expression de M'_ξ :

$$M'_\xi = \int\left\{\zeta\left(\mu'\Delta V - \frac{\partial P}{\partial \eta}\right) - \eta\left(\mu'\Delta W - \frac{\partial P}{\partial \zeta}\right)\right\}d\tau.$$

[67] Écrivons maintenant les équations (159) sous la forme

$$\begin{aligned}\mu'\Delta U - \frac{\partial P}{\partial \xi} &= \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \xi}V_\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta}V_\eta + \frac{\partial U}{\partial \zeta}V_\zeta + Wq - Vr - \frac{\partial F}{\partial \xi},\\ \mu'\Delta V - \frac{\partial P}{\partial \eta} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \xi}V_\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta}V_\eta + \frac{\partial V}{\partial \zeta}V_\zeta + Ur - Wp - \frac{\partial F}{\partial \eta},\\ \mu'\Delta W - \frac{\partial P}{\partial \zeta} &= \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial \xi}V_\xi + \frac{\partial W}{\partial \eta}V_\eta + \frac{\partial W}{\partial \zeta}V_\zeta + Vp - Uq - \frac{\partial F}{\partial \zeta}.\end{aligned}$$

Ces équations donnent

$$\begin{aligned} M'_\xi = {}& \frac{\partial}{\partial t}\int(V\zeta - W\eta)\,d\tau + \int[\zeta(Ur - Wr) - \eta(Vp - Uq)]\,d\tau\\ &+\int\left\{\zeta\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}V_\xi + \frac{\partial V}{\partial \eta}V_\eta + \frac{\partial V}{\partial \zeta}V_\zeta\right) - \eta\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}V_\xi + \frac{\partial W}{\partial \eta}V_\eta + \frac{\partial W}{\partial \zeta}V_\zeta\right)\right\}d\tau\\ &-\int\left(\zeta\frac{\partial F}{\partial \eta} - \eta\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right),\quad \text{etc.}\end{aligned}$$

La première intégrale de cette dernière ligne se transforme en la suivante :

$$\int(\zeta - \eta)K\,ds - \int(V\zeta - W\eta)\Theta\,d\tau + \int\{W(p\zeta - r\xi) + V(p\eta - q\xi)\}\,d\tau,$$

où l'on a posé

$$K = V_\xi\alpha + V_\eta\beta + V_\zeta\gamma,\qquad \Theta = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta}.$$

On obtient donc, eu égard à (159_1) et (161),

$$M'_\xi = q\int(U\eta - V\xi)\,d\tau - r\int(W\xi - U\zeta)\,d\tau + \frac{d}{dt}\int(V\zeta - W\eta)\,d\tau - \int\left(\zeta\frac{\partial F}{\partial \eta} - \eta\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)d\tau.$$

Posant maintenant

$$m_1 = \int (V\zeta - W\eta)\,d\tau, \qquad m_2 = \int (W\xi - U\zeta)\,d\tau, \qquad m_3 = \int (U\eta - V\xi)\,d\tau,$$

on aura

$$M'_\xi = \frac{dm_1}{dt} + qm_3 - rm_2,$$

et, de la même manière,

$$M'_\eta = \frac{dm_2}{dt} + rm_1 - pm_3,$$

$$M'_\zeta = \frac{dm_3}{dt} + pm_2 - qm_1.$$

Il est évident que m_1, m_2 et m_3 représentent les projections sur les axes mobiles ξ, η, ζ du moment résultant des quantités du mouvement des divers points du liquide.

Les équations (163) s'écriront

$$(163_1)\quad \begin{cases} Ap' = (B - C)qr + qm_3 - rm_2 + \dfrac{dm_1}{dt} + M_\xi - \displaystyle\int \left(\zeta \frac{\partial F}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial F}{\partial \zeta}\right) d\tau, \\ Bq' = (C - A)rp + rm_1 - pm_3 + \dfrac{dm_2}{dt} + M_\eta - \displaystyle\int \left(\xi \frac{\partial F}{\partial \zeta} - \zeta \frac{\partial F}{\partial \xi}\right) d\tau, \\ Cr' = (A - B)pq + pm_2 - qm_1 + \dfrac{dm_3}{dt} + M_\zeta - \displaystyle\int \left(\eta \frac{\partial F}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial F}{\partial \eta}\right) d\tau. \end{cases}$$

Les expressions de M'_ξ, M'_η, M'_ζ restent toujours les mêmes, quelle que soit la direction des axes mobiles ξ, η, ζ.

Donc, si nous considérons le cas général, où ces axes ne coïncident pas avec les axes principaux d'inertie du corps solide, les équations du mouvement deviendront

$$(172)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial p}\right) = r\dfrac{\partial T}{\partial q} - q\dfrac{\partial T}{\partial r} + qm_3 - rm_2 + \dfrac{dm_1}{dt} + M_\xi - \displaystyle\int \left(\zeta \frac{\partial F}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial F}{\partial \zeta}\right) d\tau, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial q}\right) = p\dfrac{\partial T}{\partial r} - r\dfrac{\partial T}{\partial p} + rm_1 - pm^3 + \dfrac{dm_2}{dt} + M_\eta - \displaystyle\int \left(\xi \frac{\partial F}{\partial \zeta} - \zeta \frac{\partial F}{\partial \xi}\right) d\tau, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial r}\right) = q\dfrac{\partial T}{\partial p} - p\dfrac{\partial T}{\partial q} + pm_2 - qm_1 + \dfrac{dm_3}{dt} + M_\zeta - \displaystyle\int \left(\eta \frac{\partial F}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial F}{\partial \eta}\right) d\tau, \end{cases}$$

où T désigne la force vive du corps solide.

Les équations du mouvement du système considéré se représentent sous la forme de sept équations (159), (159_1) et (172), jointes aux conditions aux limites (161) et (162).

Les équations différentielles (159) et (172) du type Lagrange-Liouville [1] sont ana-

[1] Voir TISSERAND, *Traité de mécanique céleste*, t. II, 1891, p. 500. — Le lecteur trouvera dans ce traité toutes les indications bibliographiques sur ce sujet, que je me permets de ne pas reproduire.

Comparez aussi : N. JOUKOVSKY, *Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité remplie par un liquide incompressible*, Saint-Pétersbourg, 1885, p. 88, etc. (en russe).

logues à celles, déduites par M. Vito-Volterra, d'une autre manière, dans son *Mémoire sur la théorie des variations des latitudes*, pour le cas d'un liquide non visqueux[1].

[**68**] Remarquons, en passant, que la méthode indiquée s'étend aisément au cas beaucoup plus général, à savoir : elle permet d'établir les équations du mouvement du système, composé d'un noyau solide, d'un liquide visqueux incompressible qui recouvre la surface de ce noyau solide et de masses fluides à différentes densités remplissant diverses cavités appartenant au noyau solide, lorsque un tel système est soumis à des forces externes telles, que les forces agissantes aux points des liquides dérivent d'une fonction des forces, les forces appliquées aux points du corps solide étant arbitraires.

Les équations du mouvement du corps solide auront la forme (172).

Les équations du mouvement de chaque liquide, contenu dans une des cavités du corps, seront analogues aux équations (159) et (159_1), jointes aux conditions aux limites (161) et (162), qui doivent être satisfaites en tous les points de la surface fermée de la cavité considérée.

Les équations du mouvement du liquide, qui recouvre la surface extérieure du corps solide, auront de même la forme des équations (159) et (159_1); mais aux conditions aux limites (161) et (162), qui doivent être vérifiées aux points de la surface extérieure du noyau solide, il faut encore ajouter la suivante :

$$P = \text{const.}$$

sur la surface libre du liquide qui recouvre ce noyau solide.

Pour que les transformations, analogues à celles que nous venons de faire aux n^{os} 66 et 67, soient admissibles, il faut seulement supposer que les fonctions inconnues, qui figurent dans les équations du mouvement, soient continues avec leurs dérivées de deux premiers ordres par rapport aux variables ξ, η, ζ.

Remarquons, enfin, que ces considérations, convenablement modifiées, peuvent s'étendre au cas des surfaces fermées à connexion multiple, où les vitesses du liquide, recouvrant une telle surface ou contenu dans son intérieur, peuvent devenir discontinues; mais ici nous n'insistons pas sur ce point.

[**69**] Revenons maintenant aux équations (159) et (159_1).

Multiplions (159) respectivement par V_ξ, V_η, V_ζ et additionnons les résultats; multiplions ensuite la somme ainsi obtenue par l'élément de volume du liquide et intégrons, en étendant l'intégration au volume de la cavité tout entier.

---

(1) Vito-Volterra, *Sur la théorie des variations des latitudes*. Acta Mathematica, t. XXII, 1899, p. 310.

On trouve, en vertu de (161),

$$-\mu'\int(V_\xi\Delta U+V_\eta\Delta V+V_\zeta\Delta W)d\tau+\int\left(\frac{\partial U}{\partial t}V_\xi+\frac{\partial V}{\partial t}V_\eta+\frac{\partial W}{\partial t}V_\zeta\right)d\tau$$
$$=\int T(V_\xi\alpha+V_\eta\beta+V_\zeta\gamma)ds=0.$$

Or,

$$-\Delta U=\frac{\partial X'_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial X'_\eta}{\partial\eta}+\frac{\partial X'_\zeta}{\partial\xi},$$
$$-\Delta V=\frac{\partial X'_\eta}{\partial\xi}+\frac{\partial Y'_\eta}{\partial\eta}+\frac{\partial Y'_\zeta}{\partial\zeta},$$
$$-\Delta W=\frac{\partial X'_\zeta}{\partial\xi}+\frac{\partial Y'_\zeta}{\partial\eta}+\frac{\partial Z'_\zeta}{\partial\zeta}.$$

Il en résulte cette transformation, due à M. Clapeyron (¹),

$$K=-\int(V_\xi\Delta U+V_\eta\Delta V+V_\zeta\Delta W)d\tau=\int(V_\xi X_n+V_\eta Y_n+V_\zeta Z_n)ds$$
$$-\int\left\{X'_\xi\frac{\partial V_\xi}{\partial\xi}+Y'_\eta\frac{\partial V_\eta}{\partial\eta}+Z'_\xi\frac{\partial V_\zeta}{\partial\zeta}+X'_\eta\left(\frac{\partial V_\xi}{\partial\eta}+\frac{\partial V_\eta}{\partial\xi}\right)+X'_\zeta\left(\frac{\partial V_\xi}{\partial\zeta}+\frac{\partial V_\zeta}{\partial\xi}\right)+Y'_\zeta\left(\frac{\partial V_\eta}{\partial\zeta}+\frac{\partial V_\zeta}{\partial\eta}\right)\right\}d\tau.$$

De cette égalité on tire, en tenant compte de (162) et (170),

$$K=\int T\sqrt{V_\xi^2+V_\eta^2+V_\zeta^2}\,ds+\int\left\{\frac{(X'_\xi)^2+(Y'_\eta)^2+(Z'_\zeta)^2}{2}+(X'_\eta)^2+(X'_\zeta)^2+(Y'_\xi)^2\right\}d\tau.$$

D'autre part, on a, eu égard à (171),

$$S=\int\left(\frac{\partial U}{\partial t}V_\xi+\frac{\partial V}{\partial t}V_\eta+\frac{\partial W}{\partial t}V_\zeta\right)d\tau=\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int(U^2+V^2+W^2)d\tau+p\frac{dm_1}{dt}+q\frac{dm_2}{dt}+r\frac{dm_3}{dt}.$$

Considérons le cas le plus simple, où

$$M_\xi-\int\left(\zeta\frac{\partial F}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial F}{\partial\zeta}\right)d\tau=M_\eta-\int\left(\xi\frac{\partial F}{\partial\zeta}-\zeta\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)d\tau=M_\zeta-\int\left(\eta\frac{\partial F}{\partial\xi}-\xi\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)d\tau=0.$$

Dans ce cas on trouve, eu égard à (163_1),

$$p\frac{dm_1}{dt}+q\frac{dm_2}{dt}-r\frac{dm_3}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(Ap^2+Bq^2+Cr^2).$$

On en conclut que

$$S=\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int(U^2+V^2+W^2)d\tau+\frac{Ap^2+Bq^2+Cr^2}{2}\right\}=\frac{dT}{dt},$$

T désignant la force vive du système considéré.

(¹) Voir Lamé, *Leçons sur l'élasticité*, Paris, 1852, p. 81. — Comp. aussi Joukovsky, Mémoire russe, cité plus haut, p. 136.

On trouve donc

$$(173) \qquad \frac{dT}{dt} = -\mu' \int T\sqrt{V_\xi^2 + V_\eta^2 + V_\zeta^2}\, ds - \mu' \int \left\{ \frac{(X'_\xi)^2 + (Y'_\eta)^2 + (Z'_\zeta)^2}{2} + (X'_\eta)^2 + (X'_\xi)^2 + Y'_\zeta)^2 \right\} d\tau,$$

l'égalité ayant lieu toujours, quelle que soit la loi de la force T *du frottement de contact.*

[**70**] L'équation (173) représente une généralisation de l'équation analogue, obtenue par M. Joukovsky dans son Mémoire, déjà cité plusieurs fois, sous la supposition que la force T soit assujettie à la loi de Stokes, c'est-à-dire que

$$T = \nu \sqrt{V_\xi^2 + V_\eta^2 + V_\zeta^2},$$

ν désignant une constante positive.

De l'égalité (173) résulte immédiatement ce théorème général [1] :

Tout mouvement d'un système, soumis aux forces extérieures, dont le moment résultant par rapport au point fixe est nul, et composé d'un corps solide recouvert par un liquide visqueux et ayant un certain nombre de cavités quelconques, remplies par des liquides visqueux, tend à un mouvement limite, dans lequel l'un des axes principaux d'inertie coïncide avec la direction fixe du moment résultant des quantités du mouvement et le système tourne uniformément autour de cet axe comme un seul corps solide.

En effet, l'équation (173) montre que la force vive T du système est toujours une fonction décroissante de t.

Or, les équations (163) admettent une intégrale évidente :

$$(174) \qquad (Ap - m_1)^2 + (Bq - m_2)^2 + (Cr - m_3)^2 = \text{const.}$$

Il s'ensuit que T, étant une fonction décroissante de t, ne peut, en général, devenir nulle et tend donc vers une quantité positive, différente de zéro.

Mais, si le second membre de l'équation (173) ne tend pas vers zéro, T sera toujours une fonction décroissante; elle cessera d'être décroissante seulement dans le cas où les intégrales du second membre de l'équation (173) deviennent nulles, c'est-à-dire lorsque

$$(175) \qquad \left\{ \begin{array}{c} V_\xi = V_\eta = V_\zeta = 0, \\ X'_\xi = Y'_\eta = Z'_\zeta = X'_\eta = X'_\zeta = Y'_\zeta = 0. \end{array} \right.$$

Ces équations définissent donc ce mouvement limite, auquel tend tout mouvement possible du système considéré.

Les équations (174), en vertu de (170), n'admettent qu'une seule solution :

$$U = q\xi - r\eta, \qquad V = r\xi - p\zeta, \qquad W = p\eta - q\xi.$$

[1] Comparez M. Joukovsky, Mém. cité plus haut, p. 137.

Or, on voit que le mouvement limite dont il s'agit est précisément ce que nous avons étudié aux n^{os} 62 et 63.

Ces remarques conduisent immédiatement au théorème énoncé plus haut.

Nous n'avons considéré que le cas d'une seule cavité, mais il est évident que le théorème reste exact dans toute sa généralité; pour s'en assurer, il suffit de rappeler les remarques que nous avons faites au n° 68.

[**71**] On peut déduire une autre conséquence de l'égalité (173) que je crois utile de signaler.

Proposons-nous de *trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que le mouvement du liquide visqueux, contenu dans une cavité du corps solide, soit permanent*, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial W}{\partial t}=0. \tag{176}$$

Il est évident tout d'abord que la rotation du corps solide doit être nécessairement uniforme, car l'équation aux limites (161) conduit à la suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(r'\eta-q'\zeta)+\frac{\partial f}{\partial \xi}(p'\zeta-r'\xi)+\frac{\partial f}{\partial \eta}(q'\xi-p'\eta)=0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$p'=q'=r'=0.$$

Dans ce cas, on a

$$T=\text{const.},$$

et l'équation (173) devient

$$\int T\sqrt{V_\xi^2+V_\eta^2+V_\zeta^2}\,d\tau+\int\left\{\frac{(X'_\xi)^2+(Y'_\eta)^2+(Z'_\zeta)^2}{2}+(X'_\eta)^2+(X'_\zeta)^2+(Y'_\zeta)^2\right\}d\tau=0,$$

ce qui donne les équations (174).

Donc, *un seul cas possible du mouvement permanent d'un liquide visqueux, contenu dans une cavité quelconque fermée d'un corps solide, animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un point fixe, est celui où le liquide adhère à la paroi de la cavité et le système tourne uniformément autour d'un axe fixe comme un seul corps solide.*

[**72**] Nous avons supposé, dans ce qui précède, que la constante de l'équation (174) soit différente de zéro.

Le cas où cette constante est nulle mérite une attention particulière.

Dans ce cas

$$Ap=m_1,\qquad Bq=m_2,\qquad Cr=m_3$$

et les équations

$$A\frac{dp}{dt}=(B-C)qr+qm_3-rm_2+\frac{dm_1}{dt},\quad \text{etc.},$$

se vérifient identiquement.

Le problème se ramène à la détermination de quatre fonctions inconnues

$$U,\ V,\ W,\ P$$

à l'aide des équations (159), (159_1), jointes aux conditions (161) et (162), où il faut remplacer p, q et r respectivement par

$$\frac{\int (V\zeta - W\eta)\,d\tau}{A}, \qquad \frac{\int (W\xi - U\zeta)\,d\tau}{B}, \qquad \frac{\int (U\eta - V\xi)}{C}.$$

Remarquons qu'un tel mouvement est possible pour un liquide parfait, et nous en avons donné un exemple au n° 29 de la section III. Un tel mouvement est-il possible pour un liquide visqueux? Je ne vois pas de raisons ni pour affirmer, ni pour nier la possibilité du mouvement de cette espèce.

Or, si nous admettions que ce mouvement eût pu exister pour un liquide visqueux, le théorème du n° 70 aurait pu devenir inexact dans ce cas exceptionnel, car alors nous ne pouvons pas affirmer que la force vive T ne peut tendre vers zéro, c'est-à-dire que le système ne peut tendre vers repos, au moins si le mouvement limite du n° 70 ne représente pas un seul cas possible du mouvement dont il s'agit.

La solution de cette dernière question représente cependant des difficultés si grandes que je ne puis pas les surmonter en ce moment. Quoi qu'il en soit, le théorème du n° 70 reste vrai, pourvu que la valeur initiale du moment résultant des quantités du mouvement soit différente de zéro.

[**73**] Remarquons que les équations générales (159), (159_1) et (172), jointes aux conditions aux limites (161) et (162), peuvent être prises pour le point de départ de toutes nos recherches.

Il suffit de supposer que la surface de la cavité soit un ellipsoïde, que le liquide soit parfait et que les vitesses U, V, W soient les fonctions linéaires de coordonnées ξ, η, ζ, pour en déduire les équations (7) et (8) du n° 3, établies dans mon *Mémoire sur la théorie des tourbillons* par une méthode un peu différente.

Rapprochant ensuite le théorème général du n° 70 et les propositions des n°s 58-61, on arrive à la conclusion suivante :

Le seul cas possible du mouvement d'un système, composé d'un corps solide et d'une masse fluide visqueuse, remplissant une cavité ellipsoïdale et douée d'un mouvement de Dirichlet, est précisément le mouvement limite, vers lequel tend toujours tout mouvement d'un système de l'espèce considérée, quelle que soit la forme de la cavité remplie par un liquide visqueux.

En se rappelant l'analyse des n°s 58-61, on obtient immédiatement cette proposition analogue à la précédente :

Un seul cas possible du mouvement du système dont il s'agit, sous la supposition que *le liquide soit animé d'un mouvement de Dirichlet et qu'il adhère à la surface de la cavité, est celui où le système tourne uniformément, comme un seul corps solide, autour d'un de ses axes principaux d'inertie restant fixe dans l'espace.*

On voit donc que, dans le cas où le liquide remplissant la cavité ellipsoïdale est animé d'un mouvement de Dirichlet, la supposition qu'il adhère à la surface de la cavité, c'est-à-dire que

$$U = q\zeta - r\eta, \qquad V = r\xi - p\zeta, \qquad W = p\eta - q\xi \qquad \text{sur (S)},$$

entraîne nécessairement les équations

$$U = q\zeta - r\eta, \quad \text{etc.,} \quad \text{en tous les points à l'intérieur de (S)},$$

qui définissent le mouvement du n° 70 (*le mouvement limite*).

D'autre part, ce dernier mouvement représente un seul cas possible du mouvement du système considéré, quelle que soit la forme de la cavité remplie par le liquide, sous la seule supposition que le mouvement du liquide soit permanent.

Rappelons enfin que tout mouvement possible du système tend toujours vers le mouvement limite du n° 70, de sorte que s'il existe une différence quelconque à une certaine époque entre le mouvement de la croûte solide et celui du liquide intérieur, les frottements détruisent peu à peu cette différence, le liquide va adhérer à la paroi de la croûte et suivre la croûte absolument comme si le tout formait une seule masse solide [1].

---

[1] Ces remarques peuvent inspirer la question suivante : Ne représente-t-il pas le mouvement limite, étudié aux nos 61-65, un seul cas possible du mouvement du système considéré, si l'on suppose que le liquide visqueux adhère toujours à la surface de la cavité?

Je me permets de poser cette question, bien que je n'aie pas réussi à la résoudre en ce moment, en me bornant à cette remarque :

M. P. Duhem a établi, à cet égard, le lemme suivant (*Annales de Toulouse*, 1904) :

Si l'on considère le cas d'adhérence du liquide comme un cas particulier du mouvement général, défini par les équations (159) et (159_1) jointes aux conditions (161) et (162), les équations (162) deviendront

$$X_n - H\alpha = 0, \qquad Y_n - H\beta = 0, \qquad Z_n - H\gamma = 0.$$

En y ajoutant les conditions d'adhérence

$$(\alpha) \qquad U = q\zeta - r\eta, \qquad V = r\xi - p\zeta, \qquad W = p\eta - q\xi \qquad \text{sur (S)},$$

on s'assure sans peine que les dérivées partielles de U, V, W doivent satisfaire aux conditions

$$(\beta) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = 0, & \dfrac{\partial V}{\partial \xi} = r, & \dfrac{\partial W}{\partial \xi} = -q, \\ \dfrac{\partial U}{\partial \eta} = -r, & \dfrac{\partial V}{\partial \eta} = 0, & \dfrac{\partial W}{\partial \eta} = p, \\ \dfrac{\partial U}{\partial \zeta} = q, & \dfrac{\partial V}{\partial \zeta} = -p, & \dfrac{\partial W}{\partial \zeta} = 0 \end{cases}$$

sur la surface (S) de la cavité.

La solution du problème se ramène à l'intégration des équations (159), (159_1) et 163_1), jointes aux conditions aux limites (α) et (β), ce qui présente des grandes difficultés même dans le cas le plus simple, où la surface de la cavité est une sphère.

[**74**] Ce dernier résultat coïncide avec une assertion de M. Delaunay qu'il a énoncée dans sa *Note sur l'hypothèse de la fluidité intérieure du globe terrestre* (C. R., t. LXVII, 1868) et qui l'a conduit à la conclusion que « la considération des phénomènes de la précession et de la nutation ne peut fournir aucune donnée sur le plus ou moins d'épaisseur de la croûte solide du globe ».

Mais cette dernière assertion de M. Delaunay est fondée sur la supposition que la force du frottement du contact du liquide à la paroi de la cavité soit assez sensible, de sorte qu'on ne peut pas négliger dans les équations du mouvement les termes affectés par la constante μ' et supprimer, en même temps, les conditions aux limites (162).

Si, au contraire, nous nous arrêtons à cette dernière supposition, ou, en d'autres termes, supposons que le liquide diffère peu du liquide parfait, nous obtiendrons des conclusions tout à fait différentes, comme nous allons le montrer un peu plus tard.

[**75**] Nous avons déjà rappelé que les équations (163_1) [ou, plus généralement, les équations (172)] coïncident avec celles établies par M. Vito-Volterra dans son *Mémoire sur la théorie des variations des latitudes*.

Mais M. Vito-Volterra considère un cas plus général : il suppose seulement qu'à l'intérieur d'un corps il y ait un mouvement d'une partie de la matière dont il est constitué, sans supposer que cette partie soit précisément un liquide visqueux remplissant une cavité.

Cette circonstance lui a permis de ne considérer que les équations (163_1) sans tenir compte des équations (159), (159_1), (161) et (162).

Dans ce cas général, le mouvement intérieur ne se définit que par trois variables m_1, m_2 et m_3, représentant les moments des quantités des mouvements intérieurs par rapport aux axes ξ, η et ζ.

On peut donner en fonctions arbitraires de t les quantités m_1, m_2, m_3; les équations (163_1) détermineront alors le mouvement du corps. Si l'on connaît, inversement, le mouvement du corps, c'est-à-dire p, q et r en fonction de t, l'intégration des équations (163_1), où il faut considérer m_1, m_2, m_3 comme inconnues, donnera les expressions de ces inconnues en fonction de t.

L'étude détaillée des équations (163_1), représentant un grand intérêt au point de vue de l'analyse, a été faite par M. Vito-Volterra dans son Mémoire cité, auquel je renvoie le lecteur.

Or, les résultats ainsi obtenus ne suffisent pas pour notre but, lorsque nous nous arrêtons à une hypothèse bien déterminée que les mouvements intérieurs au corps se réduisent précisément à un mouvement du liquide qui remplit une cavité appartenant au corps solide, car, dans cette hypothèse, on ne peut pas donner arbitrairement ni p, q et r, ni m_1, m_2 et m_3.

Les quantités p, q, r; U, V et W, qui déterminent le mouvement de la croûte solide et du liquide contenu à son intérieur, satisfont à un système de sept équations simultanées (159), (159_1) et (163_1), jointes à certaines conditions aux limites; les variables U, V, W, qui ne sont pas indépendantes des variables p, q, r, étant déterminées d'une manière quelconque, en fonction de t, ξ, η et ζ, nous trouverons les expressions déterminées de m_1, m_2, m_3 en fonction de t à l'aide de formules (171).

On ne peut pas donc affirmer, dans le cas que nous considérons, qu'à tout mouvement donné de l'enveloppe solide correspond un mouvement déterminé du liquide contenu dans cette enveloppe, ou, au moins, un tel mouvement du liquide que les quantités m_1, m_2, m_3 soient égales précisément aux mêmes fonctions de t qui représentent les intégrales des équations différentielles (163_1), où l'on considère p, q et r comme donnés à l'avance.

Si l'on veut, par exemple, expliquer les phénomènes des variations des latitudes terrestres par l'influence du mouvement du liquide qui remplit l'intérieur de la Terre, il faut trouver les intégrales générales des équations simultanées (159), (159_1) et (163_1) et disposer ensuite les quantités arbitraires de ces intégrales de façon que les expressions obtenues pour p, q et r coïncident avec celles qui résultent des observations.

Or, ce problème général présente des difficultés énormes sous bien des rapports, de sorte que nous devons nous contenter de certaines solutions particulières les plus simples, en faisant d'avance certaines hypothèses simples sur le mouvement du liquide.

L'une de ces hypothèses est celle que le liquide, contenu dans la cavité du corps, soit animé d'un mouvement de Dirichlet, qui peut être considéré comme la première approximation du mouvement plus général, lorsque les vitesses U, V, W se représentent sous la forme des séries disposées suivant les puissances entières et positives des variables ξ, η, ζ.

C'est pourquoi je me permets de croire que les recherches précédentes méritent une attention, et que les considérations qui vont suivre et qui contiennent certaines applications des résultats obtenus plus haut au problème des variations des latitudes terrestres ne sont pas dénuées d'intérêt.

VII. — Application des recherches précédentes au problème des variations des latitudes terrestres.

[**76**] Les observations astronomiques, commencées, si je ne me trompe pas, par Peters, Gyldén, Nyrén et Chandler, ont montré que les déplacements des pôles de l'axe de rotation de la Terre sur sa surface ne suivent pas la loi d'Euler, déduite dans l'hypothèse que la Terre est un corps absolument solide.

MM. Chandler et Nyrén ont découvert que le mouvement des pôles est périodique avec la période de 430 jours (à peu près), tandis que selon la loi d'Euler cette période devrait être égale à 305 jours.

Les observations postérieures, et surtout les observations organisées par l'Association internationale et rédigées par M. Albrecht, ont confirmé les résultats obtenus par Chandler et ont indiqué d'autres propriétés du mouvement des pôles terrestres qui est d'ailleurs très compliqué.

Il est évident que le phénomène dont il s'agit peut dépendre d'une foule de causes tout à fait différentes dont chacune exerce une influence plus ou moins considérable.

Plusieurs savants, comme, par exemple, MM. Darwin, Gyldén, Schiaparelli, Newcomb, Helmert, Radeau, Herz, Vito-Volterra et d'autres, ont essayé de tenir compte de telles ou telles de diverses causes possibles et de déterminer leurs influences sur le phénomène en question. En général, on cherche les causes des variations des latitudes terrestres dans les actions géologiques, les explosions volcaniques, les actions météorologiques qui peuvent altérer la distribution des masses sur la surface de la Terre, ainsi que dans l'influence sur la rotation du globe terrestre des courants marins constants, les courants atmosphériques, l'évaporation et la condensation de la vapeur sur les montagnes, etc., qui ne changent pas sensiblement la distribution des masses.

On a essayé aussi d'expliquer les lois du mouvement des pôles par l'influence sur le mouvement de la croûte solide du globe terrestre des masses fluides qui en partie recouvrent la Terre et remplissent, suivant l'hypothèse la plus souvent adoptée par des géologues, son intérieur.

[**77**] Je crois utile de rappeler, à cet égard, quelques remarques de M. Delaunay qui se trouvent dans sa Note déjà citée : *Sur l'hypothèse de la fluidité intérieure du globe terrestre.*

« Quand on veut appliquer les théories de la Mécanique rationnelle à l'étude des phénomènes naturels, dit M. Delaunay, on se trouve toujours en présence de questions d'une complication extrême.

« Si l'on voulait traiter ces questions en toute rigueur, on ne pourrait jamais y parvenir, et cela pour des raisons diverses que je n'ai pas besoin d'énumérer.

« Nous sommes donc obligés de nous contenter de résoudre non pas les questions elles-mêmes que nous avons en vue, mais d'autres questions qui s'en rapprochent plus ou moins et qui présentent un degré de simplicité assez grand pour que nous puissions en aborder la solution plus ou moins rigoureuse... Mais nous ne devons pas perdre de vue que, en agissant ainsi, nous nous mettons à côté de la réalité, et nous devons toujours nous préoccuper de l'influence que les circonstances dont nous avons fait l'abstraction peuvent avoir sur le résultat auquel nous sommes parvenus. »

En suivant ces idées, M. Delaunay arrive à sa conclusion, déjà mentionnée plus haut (n° 74).

« La viscosité, qui est extrêmement faible dans la plupart des liquides que nous connaissons, dit M. Delaunay, n'est cependant pas absolument nulle, et on comprend qu'il doit en résulter que, si le mouvement de rotation donné au ballon est suffisamment lent, le liquide sera entraîné par le ballon, de sorte que le tout tournera tout d'une pièce, comme si le liquide était congelé et ne faisait avec son enveloppe qu'un seul corps entièrement solide. »

Cette remarque contient, évidemment, l'énoncé d'une proposition analogue au théorème de M. Joukovsky, établi au n° 70.

En appliquant cette remarque générale, confirmée par une expérience de M. Champagneur (*Comptes rendus*, 1868, t. LXVII), M. Delaunay continue : « Si l'on admettait qu'une différence quelconque eût pu exister à une certaine époque entre le mouvement de la croûte et celui du liquide intérieur, les frottements auraient peu à peu détruit cette différence, de manière à amener la conformité des mouvements de ces deux parties. »

C'est précisément le même résultat qui découle immédiatement du théorème du n° 70 et que nous avons déjà signalé à la fin du n° 73. De ces propositions, confirmées par notre analyse, M. Delaunay a déduit sa conclusion, mentionnée plus haut (n° 74).

Citons textuellement, pour plus de clarté, les raisonnements de M. Delaunay :

« Les actions perturbatrices qui produisent la précession et la nutation s'exercent sur la croûte solide et tendent à la faire tourner autour d'un axe s'éloignant de plus en plus de la direction de l'axe autour duquel elle tournait tout d'abord ; c'est un mouvement extraordinairement lent que ces actions tendent à imprimer à la croûte solide, et qui doit se combiner avec le mouvement de rotation qu'elle possède déjà.

« La question est de savoir si le liquide intérieur participera à ce mouvement additionnel ou si la croûte solide en sera seule affectée sans entraîner immédiatement le liquide avec elle. »

« Pour moi, dit M. Delaunay, il n'y a pas lieu au moindre doute... ; il ne me paraît pas possible d'admettre que l'effet des actions perturbatrices, auxquelles sont dues la précession et la mutation, ne s'étend qu'à une partie de la masse du globe terrestre ; la masse entière doit être entraînée par ces actions perturbatrices, quelle que soit la grandeur que l'on suppose à la partie fluide intérieure, et, *par conséquent, la considération des phénomènes de la précession et de la nutation ne peut fournir aucune donnée sur le plus ou moins d'épaisseur de la croûte solide du globe.* »

Donc, M. Delaunay suppose que la croûte solide, affectée d'un mouvement additionnel, entraîne *immédiatement* le liquide avec elle.

C'est seulement sous cette dernière supposition qu'on peut considérer comme vraisemblable la conclusion finale de M. Delaunay. Mais il me semble que nous n'avons aucune raison d'accepter cette assertion tout à fait arbitraire ; il est vrai que les frottements tendent peu à peu à détruire la différence entre le mouvement de la croûte solide et celui du liquide intérieur, mais il est impossible d'affirmer que la croûte *entraîne immédiatement* le liquide intérieur avec elle.

D'autre part, les actions perturbatrices peuvent s'exercer non seulement sur la croûte solide, mais aussi bien sur les masses fluides contenues à l'intérieur du globe terrestre ; ces actions perturbatrices peuvent imprimer un changement brusque du mouvement du liquide aussi bien que de l'enveloppe solide.

Bien que la viscosité du liquide et le frottement de contact tendent à détruire peu à peu une différence entre le mouvement de la croûte et celui du liquide, qui peut être imprimée, même brusquement, à une certaine époque, néanmoins rien n'empêche de supposer que la durée de temps nécessaire pour réduire le mouvement à son état limite (n° 70) soit très longue, ou, en d'autres termes, que, pendant une durée de temps assez courte, l'influence des frottements soit peu sensible, de sorte qu'on puisse la négliger et considérer le mouvement du système, pendant cette courte durée de temps, comme peu différent de celui du système, dans lequel le liquide visqueux est remplacé par un liquide parfait, et de tâcher d'expliquer certaines propriétés du mouvement des pôles terrestres par l'influence que le mouvement du liquide intérieur peut exercer sur celui de la croûte solide. Si nous nous arrêtons à cette hypothèse, qui n'est pas moins admissible que toute autre, nous parviendrons à une conclusion différente de celle de M. Delaunay. L'étude du mouvement d'un corps solide ayant une cavité remplie par un liquide incompressible et parfait nous conduira à certaines analogies entre la théorie du mouvement d'un tel système et les résultats des observations sur les variations des latitudes terrestres, et nous fournira ensuite certaines données sur l'épaisseur de la croûte solide du globe, comme nous le verrons dans ce qui va suivre.

[**78**] On sait que la surface extérieure de la Terre est un ellipsoïde de révolution peu différent de la sphère, car l'aplatissement de la Terre est égal à

$$\frac{a_1 - c_1}{a_1} = \frac{1}{300},$$

a_1 et c_1 désignant le plus grand et le plus petit des axes principaux de l'ellipsoïde terrestre.

Supposons, comme aux n^{os} 41 et 43, que la surface de la cavité du globe terrestre est aussi un ellipsoïde de révolution aplati ayant le même centre et la même direction des axes principaux que ceux de l'ellipsoïde extérieur.

En entendant, comme précédemment, par $a = b$ et c les carrés des demi-axes de la surface intérieure de la croûte solide de la Terre, faisons l'hypothèse que

$$\varepsilon = \frac{a - c}{a}$$

est une quantité assez petite, de sorte qu'on puisse négliger la deuxième, ainsi que les puissances plus élevées de ε.

Supposant enfin que le liquide remplissant l'intérieur de la Terre soit parfait et animé d'un mouvement de Dirichlet, nous pouvons, en faisant abstraction de forces externes, appliquer au cas considéré les formules établies au n° 52 de la cinquième Section.

En entendant par ρ et φ les coordonnées polaires de la projection du pôle terrestre sur le plan équatorial, on a, en vertu de (135) et (136),

$$(177)\qquad \begin{cases} \rho = \dfrac{\sqrt{c_1}}{|r_0|}\left(\omega - 2\varepsilon\delta\dfrac{\mathrm{A}l_0\gamma_0}{\mathrm{C}r_0}\sin\mu t\sin\mu(t+2\tau)\right), \\ \varphi = \left(\lambda - 2\varepsilon\delta\dfrac{\mathrm{A}m}{\mathrm{C}r_0}\right)t + \psi(t), \end{cases}$$

où $\psi(t)$ est une fonction de t, définie par la formule (136_1) du n° 52.

Ces équations définissent la loi approchée du mouvement du pôle terrestre, qui est, comme l'on voit, très compliqué.

Appliquons ces équations à certains cas particuliers en y introduisant des hypothèses complémentaires.

Posons maintenant

$$(178)\qquad \Theta = \varepsilon\delta\frac{\mathrm{A}l_0\gamma_0}{\mathrm{C}r_0}$$

et supposons, pour plus de simplicité, que les lignes des tourbillons soient perpendiculaires, au moment initial ($t = 0$), à l'axe des ξ, c'est-à-dire que $\alpha_0 = 0$.

On aura

$$(179)\qquad \rho = \frac{\sqrt{c_1}}{|r_0|}\left\{\omega - \frac{\Theta}{2}[\cos 2\mu\tau - \cos 2\mu(t+\tau)]\right\}$$

et

$$(180)\qquad \psi(t) = \frac{2}{\omega}\Theta\sin\mu t\cos\mu(t+2\tau) + \frac{4}{\omega^2}\Theta^2\sin^2\mu t\cos^2\mu(t+2\tau) + \varepsilon\frac{\delta\mathrm{A}^2}{2\mathrm{C}^2r_0^2}l_0^2\sin 2\mu t\cos 2\mu(t+2\tau).$$

Le rayon vecteur ρ est une fonction périodique de t avec la période

$$\mathrm{T}_1 = \frac{\pi}{\mu} = \frac{2\pi}{g} = \frac{2\pi\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2\omega^2 + \mathrm{C}^2r^2}}.$$

Supposons que le rapport

$$\frac{C}{A}$$

diffère peu de l'unité.

La période T_1 sera alors peu différente d'un jour, car

$$T_1 = \frac{2\pi}{|r_0|}\frac{A}{C}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{A^2\omega^2}{C^2 r_0^2}}},$$

où $\frac{2\pi}{|r_0|}$ représente le jour sidéral que nous allons prendre pour l'unité de temps.

M. Nyrén [1] a remarqué que les latitudes terrestres ne restent pas constantes même pendant une journée; mais ces variations sont, en général, si petites qu'on les néglige ordinairement [2].

Désignons par ρ_1 le maximum, par ρ_2 le minimum de ρ, et posons

$$\sigma_1 = \rho_1 - \rho_0 > 0, \qquad \sigma_2 = \rho_0 - \rho_2 > 0,$$

où, comme au n° 52,

$$\rho_0 = \omega \frac{\sqrt{c_1}}{|r_0|}$$

représente la valeur initiale (pour $t = 0$) de ρ.

On peut supposer, en vertu de ce que nous venons de dire, que σ_1 et σ_2 soient infiniment petites de l'ordre plus élevé que ε.

Posons maintenant

$$R_0 = \frac{\sqrt{c_1}}{|r_0|}\left(\omega - \frac{\Theta}{2}\cos 2\mu\tau\right).$$

L'équation (179) s'écrira

$$\rho = R_0 + \frac{\Theta\sqrt{c_1}}{2|r_0|}\cos 2\mu(t+\tau). \tag{181}$$

On voit que ρ atteint son maximum ou minimum aux moments de t, définis par l'équation

$$\sin 2\mu(t+\tau) = 0.$$

---

(1) Voir, par exemple, NYRÉN, *Die Polhöhe von Pulkowa*, Saint-Pétersbourg, 1873; — A. IVANOFF, *Mouvement de rotation de la terre*, Saint-Pétersbourg, 1895, p. 11 (en russe).

(2) On suppose souvent qu'il n'existe aucune variation diurne des latitudes. Voir, par exemple, le Mémoire déjà cité de M. VITO-VOLTERRA (*Acta Mathematica*, t. XXII, 1898, p. 338).

On a donc

$$(182)\qquad \rho_1 = R_0 + \frac{\Theta\sqrt{c_1}}{2|r_0|}, \qquad \rho_2 = R_0 - \frac{\Theta\sqrt{c_1}}{2|r_0|},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Theta\sqrt{c_1}}{|r_0|} = \rho_1 - \rho_2, \qquad 2R_0 = \rho_1 + \rho_2,$$

et l'équation (181) devient

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\cos 2\mu(t+\tau).$$

Si l'on suppose que

$$\rho_1 - \rho_2 = \sigma_1 + \sigma_2$$

soit une quantité infiniment petite de l'ordre plus élevé que ε, on peut écrire, avec l'approximation adoptée,

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \text{const.}$$

[**79**] Les équations (182) donnent

$$(183)\qquad \Theta = \varepsilon\delta\frac{Al_0\gamma_0}{Cr_0} = \frac{|r_0|}{\sqrt{c_1}}(\rho_1 - \rho_2),$$

$$(184)\qquad \cos 2\mu\tau = \cos g\tau = \frac{2\rho_0 - \rho_1 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Or, on a, en tenant compte de (129_1) et (129_2) du n° 50,

$$\cos g\tau = \frac{\omega\gamma_0}{gl_0};$$

car, d'après l'hypothèse faite plus haut,

$$p_0 = \omega, \qquad q_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad u_0 = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

On trouve donc, en vertu de (183) et (184),

$$\varepsilon l_0\gamma_0 = \frac{Cr_0^2}{\delta A\sqrt{c_1}}(\rho_1 - \rho_2),$$

$$\frac{\gamma_0}{l_0} = \frac{g}{\omega}\,\frac{2\rho_0 - \rho_1 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2},$$

d'où

$$(185)\qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon l_0^2 &= \frac{Cr_0^2\omega(\rho_1 - \rho_2)^2}{\delta Ag\sqrt{c_1}(2\rho_0 - \rho_1 - \rho_2)} = \frac{C|r_0|(\rho_1 - \rho_2)^2}{\delta A\rho_0 g(2\rho_0 - \rho_1 - \rho_2)}\omega^2, \\ \varepsilon\gamma_0^2 &= \frac{Cr_0^2(2\rho_0 - \rho_1 - \rho_2)}{\omega\delta A\sqrt{c_1}} = \frac{C|r_0|g(2\rho_0 - \rho_1 - \rho_2)}{\delta A\rho_0}. \end{aligned}\right.$$

Nous obtiendrons les valeurs réelles de l_0 et γ_0 si

$$2\rho_0 - \rho_1 - \rho_2 = \sigma_2 - \sigma_1 > 0,$$

ce que nous allons supposer.

La différence

$$\sigma_2 - \sigma_1$$

est une quantité infiniment petite, mais son ordre de grandeur peut surpasser celui de chacune des quantités σ_1 et σ_2.

N'ayant aucun moyen pour déterminer l'ordre de grandeur de cette différence, nous pouvons faire à ce sujet telle ou telle hypothèse.

Supposons, pour plus de simplicité, que

$$\sigma_2 - \sigma_1$$

soit une infiniment petite du même ordre de grandeur que chacune des quantités σ_1 et σ_2.

Sous cette supposition, εl_0^2 et $\varepsilon \gamma_0^2$ deviendront, comme le montrent les équations (185), des infiniment petites de l'ordre plus élevé que ω^2 (ou ε); il en sera de même de la quantité

$$\varepsilon\delta \frac{Am}{Cr_0} = \varepsilon\delta \frac{A}{Cr_0}\left(\gamma_0^2 - \frac{l_0^2}{2}\right)$$

et les équations (179) et (177) prennent cette forme simple :

$$(186) \qquad \left\{\begin{aligned} \rho &= \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \text{const.}, \\ \varphi &= \frac{C - A}{A} r_0 t, \end{aligned}\right.$$

car, dans le cas considéré, $\psi(t)$ sera une quantité infiniment petite de l'ordre plus élevé que ε.

[80] Il est évident que les équations (186) représentent le mouvement du pôle terrestre sous la supposition qu'il n'existe aucun liquide à l'intérieur de la croûte solide.

On peut donc imaginer un tel mouvement de la masse liquide contenu à l'intérieur de la Terre que son influence sur le mouvement du pôle terrestre, au moins pendant une durée de temps assez courte, sera si peu sensible qu'on puisse la négliger.

On obtient ainsi les équations (186) qui peuvent conduire à la période de Chandler aussi bien que toutes les autres équations approchées, déduites par les autres auteurs à l'aide des considérations tout à fait différentes.

La seconde des équations (186) montre que *le rayon vecteur* ρ *tourne autour de l'origine des coordonnées toujours dans le sens opposé à celui de l'aiguille de montre, ce qui coïncide avec les observations.*

En effet, en tenant compte de ce que

$$C > A$$

et que la Terre tourne de l'ouest à l'est, on en conclut que

$$\frac{C-A}{A} r_0 < 0,$$

car, en vertu du choix de la direction des axes ξ, η, ζ que nous avons fait, on a

$$r_0 < 0.$$

Quand le temps s'augmente de quantité

$$T = \frac{2\pi A}{(C-A)|r_0|},$$

l'angle φ croît à 2π.

Donc T doit présenter la période de Chandler, c'est-à-dire 430 jours.

On obtient ainsi l'équation suivante

$$\frac{A}{C-A} = 430,$$

qui donne

$$\frac{C}{A} = \frac{431}{430}.$$

C'est une quantité peu différente de l'unité, ce qui s'accorde avec l'hypothèse faite plus haut.

[**81**] Supposons maintenant que la croûte solide du globe terrestre est un corps homogène et désignons par $a_1 = b_1$ et c_1 les carrés des demi-axes de la surface extérieure de la Terre.

En se rappelant que $A = B$ et C représentent les moments principaux d'inertie de la croûte, on trouve

$$(186_1) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{M_0(a_1+c_1) - M'_0(a+c)}{5} = B, \\ C &= \frac{2(M_0 a_1 - M'_0 a)}{5}, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$(186_2) \qquad M_0 = \frac{4\pi}{3}\mu_0 a_1\sqrt{c_1}, \qquad M'_0 = \frac{4\pi}{3}\mu_0 a\sqrt{c},$$

μ_0 désignant la densité de la croûte.

On a donc

$$(187) \qquad \frac{A}{C-A} = \frac{a_1\sqrt{c_1}(a_1+c_1) - a\sqrt{c}(a+c)}{a_1\sqrt{c_1}(a_1-c_1) - a\sqrt{c}(a-c)} = 430 = T.$$

Écrivons cette équation sous la forme

$$\frac{a_1^2\sqrt{c_1}-a^2\sqrt{c}}{a_1c_1\sqrt{c_1}-ac\sqrt{c}}=\frac{\mathrm{T}+1}{\mathrm{T}-1}=h$$

et posons

$$c_1=e_1a_1,\qquad c=\varepsilon_1a,\qquad x=\left(\frac{a_1}{a}\right)^{\frac{5}{2}}$$

où e_1 et ε_1 sont des quantités positives plus petites que l'unité.

On aura

$$x=\left(\frac{a}{a_1}\right)^{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{e_1}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\frac{1-he_1}{1-h\varepsilon_1} \tag{187_1}$$

et

$$\left(\frac{c}{c_1}\right)^{\frac{5}{2}}=\left(\frac{\varepsilon_1}{e_1}\right)^2\frac{1-he_1}{1-h\varepsilon_1}. \tag{187_2}$$

En se rappelant que

$$\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{c_1}}{\sqrt{a_1}}=\frac{1}{300},\qquad h=\frac{\mathrm{T}+1}{\mathrm{T}-1}=\frac{431}{429},$$

on trouve

$$1-he_1=\frac{78169}{429\,.\,300^2}>0.$$

On a donc

$$1-\varepsilon_1h>0,\qquad \varepsilon_1<\frac{1}{h}=\frac{429}{431}.$$

D'autre part, on doit avoir

$$\frac{\sqrt{e_1}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\frac{1-he_1}{1-h\varepsilon_1}<1. \tag{188}$$

et

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{e_1}\right)^2\frac{1-he_1}{1-h\varepsilon_1}<1.$$

La dernière inégalité exige que l'on ait

$$\varepsilon_1<e_1.$$

Il s'ensuit que l'*aplatissement de l'ellipsoïde représentant la surface intérieure de la croûte solide du globe terrestre doit être plus grand que celui de la surface extérieure de la Terre.*

Posons maintenant

$$\varepsilon_1=\sigma e_1,\qquad 0<\sigma<1,\qquad x=\sqrt{\sigma}.$$

On aura, en vertu de (188),

$$f(x) = 1 - he_1 - x(1 - he_1 x^2) < 0.$$

L'équation

$$f(x) = (x - 1)\left\{he_1 x^2 + he_1 x - (1 - he_1)\right\}$$

admet trois racines réelles :

$$x_0 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1 - he_1}{he_1}}, \qquad x_1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1 - he_1}{he_1}}, \qquad x_2 = 1.$$

Donc, elle admet une seule racine positive, comprise entre 0 et 1, qui est égale à

$$x_0 = 0{,}002\ldots$$

En remarquant que $f(x)$ reste négative pour les valeurs de x, comprises entre x_0 et 1, on en conclut que

$$\sigma \geqq x_0^2,$$

c'est-à-dire

$$x_0^2 e_1 \leqq \varepsilon_1 < e_1. \tag{189}$$

Cette inégalité doit avoir lieu toujours, quelle que soit la forme de l'ellipsoïde représentant la surface intérieure de la croûte solide de la Terre.

[**82**] L'inégalité (189) montre, en outre, que cet ellipsoïde ne peut pas être homologue à l'ellipsoïde représentant la surface extérieure de la Terre, car ε_1 ne peut pas être égal à e_1.

Faisons une autre hypothèse complémentaire ; supposons, par exemple, que la surface intérieure de la croûte soit un ellipsoïde homofocal à l'ellipsoïde extérieur et posons

$$a = a_1 - \sigma, \qquad c = c_1 - \sigma,$$

où σ est une quantité positive plus petite que c_1.

L'équation (185) devient

$$T = \frac{1+e}{1-e} + 2\sigma \frac{(a_1 - \sigma)\sqrt{ea_1 - \sigma}}{a_1(1-e)\left(a_1\sqrt{a_1}\sqrt{e} - (a_1 - \sigma)\sqrt{ea_1 - \sigma}\right)},$$

où l'on a posé maintenant

$$e = \frac{c_1}{a_1}.$$

En introduisant ensuite les notations suivantes

$$x = \frac{\sigma}{a_1}, \qquad h = T(1-e) - (1+e),$$

on trouve l'équation

$$f(x)=h-2x\frac{(1-x)\sqrt{e-x}}{\sqrt{e}-(1-x)\sqrt{e-x}}=0,$$

qui peut s'écrire

$$(189_1)\qquad f(x)=h-2\frac{(1-x)\sqrt{e-x}\left(\sqrt{e}+\sqrt{e-x}\right)}{1+\sqrt{e-x}\left(e+\sqrt{e-x}\right)}=0,$$

car

$$\sqrt{e}-\sqrt{e-x}=\frac{x}{\sqrt{e}+\sqrt{e-x}}.$$

Il est aisé de s'assurer que la fonction

$$\frac{\sqrt{e-x}}{1+\sqrt{e-x}\left(\sqrt{e}+\sqrt{e-x}\right)}=\psi(x)$$

est une fonction décroissante de x, lorsque x varie entre 0 et e.

On trouve, en effet,

$$\psi'(x)=\frac{e-x-1}{2\sqrt{e-x}\left\{1+\sqrt{e-x}\left(\sqrt{e}+\sqrt{e-x}\right)\right\}^2}<0.$$

Il s'ensuit que la fonction

$$2\frac{(1-x)\sqrt{e-x}\left(\sqrt{e}+\sqrt{e-x}\right)}{1+\sqrt{e-x}\left(\sqrt{e}+\sqrt{e-x}\right)}$$

décroît, lorsque x croît de 0 à e.

D'autre part, on a

$$f(0)=h-\frac{4e}{1+2e}.$$

Or,

$$h=T(1-e)-(1+e)=\frac{430\,.\,599-299^2-300^2}{300^2}=\frac{78169}{90000}>0,$$

$$\frac{4e}{1+2e}=\frac{4\,.\,299^2}{300^2+2\,.\,299^2}=\frac{357604}{288802}.$$

On a donc

$$f(0)=\frac{78169}{90000}-\frac{357604}{288802}<0$$

et

$$f(e)=h>0.$$

Donc, l'équation (189_1) n'admet qu'une seule racine réelle, comprise entre o et e, et rien qu'une.

Désignons cette racine par x_0.

[**83**] Signalons les limites plus étroites, entre lesquelles doit être comprise la quantité x_0.

Posons

$$\varphi(x) = 2x \frac{(1-x)\sqrt{e-x}}{\sqrt{e}-(1-x)\sqrt{e-x}}$$

et calculons la valeur de cette fonction pour

$$x = \frac{e}{3} = \frac{299^2}{3 \, . \, 300^2}.$$

On a

$$\varphi\left(\frac{e}{3}\right) = \frac{2 \, . \, 299^2(3 \, . \, 300^2 - 299^2)\sqrt{2}}{3 \, . \, 300^2 \left\{3\sqrt{3} \, . \, 300^2 - \sqrt{2}(3 \, . \, 300^2 - 299^2)\right\}}.$$

Posons

$$N = (3 \, . \, 300^2 - 299^2)\sqrt{2} = 180599 \, . \, \sqrt{2}.$$

On trouve

$$\log N = \log 180599 + \frac{1}{2}\log 2 < 5{,}25672 + 0{,}15052 = 5{,}40724.$$

On a donc

$$N < 255500.$$

Posant ensuite

$$N_1 = 27\sqrt{3},$$

on trouve

$$\log N_1 > 1{,}43136 + 0{,}23856 = 1{,}66992.$$

Par conséquent,

$$100^2 N_1 > 467600$$

et

$$3\sqrt{3} \, . \, 300^2 - \sqrt{2}(3 \, . \, 300^2 - 299^2) > 212100,$$

c'est-à-dire

$$\varphi\left(\frac{e}{3}\right) < \frac{2 \, . \, 299^2 \, . \, 2555}{2121 \, . \, 27 \, . \, 100^2} = \frac{299^2 \, . \, 511}{2121 \, . \, 27 \, . \, 10^3} = 0{,}79\ldots.$$

Or,

$$h = \frac{78169}{300^2} > 0{,}86\ldots;$$

Il s'ensuit que

$$f\left(\frac{e}{3}\right) > 0. \tag{190}$$

[**84**] Posons maintenant

$$x = \frac{e}{4}.$$

On trouve

$$\varphi\left(\frac{e}{4}\right) = \frac{299^2(4 \cdot 300^2 - 299^2)\sqrt{3}}{2 \cdot 300^2 \left\{8 \cdot 300^2 - \sqrt{3}(4 \cdot 300^2 - 299^2)\right\}}.$$

Posant

$$N = \sqrt{3}(4 \cdot 300^2 - 299^2) = 270599 \cdot \sqrt{3},$$

on obtient

$$\log N > 5{,}67073, \qquad N > 468500$$

et

$$N_1 = 8 \cdot 300^2 - \sqrt{3}(4 \cdot 300^2 - 299^2) < 251500.$$

On a donc

$$\varphi\left(\frac{e}{4}\right) > \frac{299^2 \cdot 4685}{2 \cdot 300^2 \cdot 2515} > \frac{299^2 \cdot 52}{503 \cdot 10^4} > 0{,}9242\ldots.$$

Par conséquent,

$$f\left(\frac{e}{4}\right) = h - \varphi\left(\frac{e}{4}\right) < 0{,}87 - 0{,}92\ldots < 0. \tag{191}$$

Les inégalités (190) et (191) conduisent à la suivante :

$$\frac{e}{4} < x_0 < \frac{e}{3}. \tag{192}$$

En se rappelant que

$$\sigma = a_1 x_0,$$

on trouve

$$\left\{\begin{array}{l} a = a_1 - \sigma = a_1(1 - x_0), \\ c = c_1 - \sigma = e a_1 - a_1 x_0 = a_1(e - x_0). \end{array}\right. \tag{193}$$

[**85**] Désignons par δ_p et δ_e l'épaisseur de l'enveloppe solide de la Terre dans la direction du petit et du grand axe de l'ellipsoïde terrestre.

On a, eu égard à (193),

$$\delta_p = \sqrt{a_1}\left(\sqrt{e} - \sqrt{e - x_0}\right),$$
$$\delta_e = \sqrt{a_1}\left(1 - \sqrt{1 - x_0}\right),$$

ou

$$\delta_p = \sqrt{a_1}\frac{x_0}{\sqrt{e}+\sqrt{e-x_0}}, \qquad \delta_e = \sqrt{a_1}\frac{x_0}{1+\sqrt{1-x_0}}.$$

On en conclut immédiatement que

$$\delta_p > \delta_e,$$

car $e < 1$.

Donc, *l'épaisseur de la croûte solide de la Terre dans la direction du petit axe de l'ellipsoïde terrestre est plus grande que celle dans la direction du grand axe.*

[**86**] Cherchons les limites, entre lesquelles sont comprises les quantités δ_p et δ_e. On a, eu égard à (192),

$$\delta_e > \sqrt{a_1}\left(1-\frac{\sqrt{4-e}}{2}\right) = \sqrt{a_1}\left(1-\frac{\sqrt{270599}}{600}\right) > \sqrt{a_1}\left(1-\frac{2601}{3000}\right) = 0,133\sqrt{a_1}.$$

Supposant, pour plus de simplicité, que

$$\sqrt{a_1} = 6000 \text{ kilom.},$$

on trouve

$$\delta_e > 6000 \,.\, 0,133 \text{ kilom.} = 798 \text{ kilom.}$$

D'autre part, on a

$$\delta_e < \sqrt{a_1}\left(1-\sqrt{1-\frac{e}{3}}\right) = \sqrt{a_1}\left(1-\frac{1}{300}\sqrt{\frac{180599}{3}}\right).$$

Or,

$$\frac{1}{300}\sqrt{\frac{180599}{3}} > \frac{613}{750} > 0,817.$$

Par conséquent,

$$\delta_e < 0,183\sqrt{a_1} = 1098 \text{ kilom.}$$

On obtient ainsi les inégalités suivantes :

$$798 \text{ kilom.} < \delta_e < 1098 \text{ kilom.}$$

On trouvera de la même manière :

$$\delta_p > \sqrt{a_1}\frac{299}{300}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 798,33 \text{ kilom.},$$

$$\delta_p < \sqrt{a_1}\frac{299}{300}\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) < 1099 \text{ kilom.}$$

[87] Considérons, enfin, le paramètre ε :

$$\varepsilon = \frac{a-c}{a},$$

introduit au n° 44.

On a, eu égard à (193),

$$\varepsilon = \frac{a_1 - c_1}{a} = \frac{1-e}{1-x_0},$$

et, en vertu de (192),

$$\frac{4(1-e)}{4-e} < \varepsilon < \frac{3(1-e)}{3-e}.$$

On trouve

$$\frac{4(1-e)}{4-e} = \frac{4.599}{270599} = 0{,}00848\ldots,$$

$$\frac{3(1-e)}{3-e} = \frac{3.599}{180599} = 0{,}00995\ldots.$$

On obtient donc les inégalités

$$0{,}00848\ldots < \varepsilon < 0{,}00995\ldots.$$

[88] Les recherches précédentes conduisent aux conclusions suivantes :

Envisageons un système composé d'une croûte solide homogène remplie par un liquide parfait et incompressible.

Supposons que la surface extérieure de la croûte soit un ellipsoïde de révolution dont les axes sont égaux aux axes de l'ellipsoïde terrestre.

Désignons par x_0 la racine positive, comprise entre 0 et

$$e = \frac{299^2}{300^2},$$

de l'équation

$$h - 2x\frac{(1-x)\sqrt{e-x}}{\sqrt{e}-(1-x)\sqrt{e-x}} = 0, \qquad h = \frac{78169}{300^2}.$$

Supposons que la surface intérieure de la croûte solide soit aussi un ellipsoïde, homofocal à l'ellipsoïde terrestre à demi-axes α et β,

$$\alpha = R\sqrt{1-x_0}, \qquad \beta = R\sqrt{e-x_0}, \qquad \beta < \alpha,$$

R désignant le plus grand des demi-axes de l'ellipsoïde terrestre.

Supposons que les forces externes, agissant aux divers points du système considéré, soient telles que leur moment résultant, par rapport au centre commun des ellipsoïdes qui limitent la croûte, est nul.

On peut imprimer au liquide, contenu à l'intérieur de la croûte, un tel mouvement et une telle rotation initiale à la croûte solide, que le pôle du système considéré (le point d'intersection de l'axe de rotation avec la surface de la croûte solide) sera animé d'un mouvement peu différent de celui du pôle terrestre sur la surface de la Terre, à savoir : il va décrire sur l'ellipsoïde extérieur de la croûte un cercle du rayon

$$\frac{R_0 \omega}{2\pi},$$

où R_0 désigne le plus petit des demi-axes de l'ellipsoïde terrestre, ω la valeur initiale de la projection de la vitesse angulaire de rotation de la Terre sur son plan équatorial.

La direction du mouvement de ce point sera la même qu'on observe pour le pôle de la Terre et aura la même période de 430 jours que M. Chandler a découvert dans le mouvement du pôle terrestre.

Cette analogie entre ces deux mouvements ne peut avoir lieu que pendant une durée de temps assez courte, assez voisine du moment de t, pris pour moment initial.

[**89**] Les considérations précédentes nous ont montré que l'épaisseur de la croûte solide du système, que nons considérons comme un modèle du globe terrestre, doit être plus grande que

798 kilom.

Ce résultat ne s'accorde pas avec les hypothèses que font le plus souvent les géologues sur l'épaisseur de la croûte solide de la Terre, à savoir que cette épaisseur ne surpasse pas 100 kilomètres à peu près.

D'autre part, cette épaisseur ne doit pas surpasser, selon notre calcul,

1099 kilom.,

ce qui ne s'accorde pas non plus avec l'assertion de Sir Williams Thomson (Lord Kelwin), que le globe terrestre ne peut contenir des masses fluides à son intérieur et qu'on doit le considérer comme un corps absolument solide.

Le modèle du globe terrestre, auquel nous sommes conduits en tenant compte de certaines circonstances les plus simples dans les phénomènes des variations des latitudes terrestres, occupe, en quelque sorte, une position intermédiaire entre deux modèles extrêmes dont l'un est le plus souvent employé par la plupart des géologues, l'autre est adopté par S. W. Thomson, M. Darwin et d'autres.

Je me permets de me borner, en passant, à cette remarque sans entrer en des détails.

[**90**] Nous avons déjà mentionné que les équations générales du mouvement du système que nous considérons dans ce Mémoire sont analogues à celles déduites par

M. Vito-Volterra dans son *Mémoire sur la théorie des variations des latitudes;* il n'y a qu'une différence dans les notations.

Dans les équations de M. Vito-Volterra (Mém. cité, p. 309), A, B et C désignent les moments principaux d'inertie (par rapport au point fixe) du système tout entier (de l'enveloppe solide et du liquide y contenu), u, v, w les composantes, suivant les axes mobiles, de la vitesse relative du point ξ, η, ζ du liquide; tandis que, dans les équations (159), (159_1) et (172) de ce Mémoire, A, B et C désignent les moments principaux d'inertie de la croûte solide et U, V et W représentent les composantes de la vitesse absolue du même point (ξ, η, ζ) du liquide.

Si nous allons nous arrêter à la seule supposition que ω et ε soient des quantités très petites, nous obtiendrons, en considérant ε comme une infiniment petite de l'ordre plus élevé que ω et ne faisant aucune hypothèse complémentaire sur les constantes γ_0 et l_0, les équations (179), (177) et (180) du mouvement de la projection du pôle sur le plan principal de l'ellipsoïde terrestre, perpendiculaire à l'axe de révolution.

Dans ce cas plus général, nous obtiendrons cette équation pour la période de Chandler :

$$\text{(194)} \qquad T = 430 \text{ jours} = \frac{2\pi}{\left| \frac{C-A}{A} r_0 - \varepsilon\delta \frac{Am}{Cr_0} \right|},$$

analogue à l'équation [1]

$$\text{(195)} \qquad 430 \text{ jours} = \frac{2\pi}{\frac{C_0 - A_0}{A_0} |r_0| + \frac{m_3^0}{A_0}},$$

établie par M. Volterra dans son Mémoire cité, où A_0, B_0, C_0 désignent les moments principaux d'inertie du globe terrestre tout entier (c'est-à-dire de la croûte solide et du liquide y contenu, pris ensemble).

Dans cette dernière équation, on peut considérer le rapport

$$\frac{C_0 - A_0}{A_0}$$

comme connu, car en faisant l'hypothèse que le mouvement interne ne change pas le rapport

$$\text{(196)} \qquad \frac{C_0 - A_0}{A_0},$$

calculé d'après les phénomènes de précession et de nutation, on peut poser

$$\text{(197)} \qquad \frac{C_0 - A_0}{A_0} = \frac{1}{305}.$$

---

[1] Nous remplaçons la lettre ω de M. Vito-Volterra par $|r_0|$.

L'équation (195) fournira alors le moyen de déterminer la quantité

$$\frac{m_3^0}{A},$$

où m_3^0 est une constante qui caractérise, d'après M. Vito-Volterra, le mouvement interne.

Dans notre équation (194) le rapport

$$\frac{C-A}{A}$$

reste inconnu.

On peut donc considérer cette équation comme celle qui permet de déterminer le rapport

$$\frac{C}{A},$$

lorsque la constante

$$\varepsilon\delta m = \varepsilon\delta\left(\gamma_0^2 - \frac{l_0^2}{2}\right),$$

qui caractérise le mouvement interne, sera connue.

[**91**] Nous avons déjà signalé certaines conséquences les plus simples qu'on peut déduire de la manière tout à l'heure indiquée, en faisant certaines hypothèses sur les propriétés du mouvement interne, compatibles avec des observations astronomiques.

Nous avons obtenu cette équation simple

$$\frac{C}{A} = \frac{431}{430}, \tag{198}$$

qui nous a conduit elle-même, sans hypothèse quelconque sur la valeur du rapport (196), à certaines conclusions relatives à la forme de la croûte solide de la Terre.

Si nous adoptons encore l'hypothèse de M. Vito-Volterra, ou, en d'autres termes, si nous tenons compte de l'équation (197) en la combinant avec celle de (198), nous obtiendrons un moyen de déterminer la densité de la croûte solide et du liquide contenu dans son intérieur, si nous supposons en même temps que la densité moyenne du globe terrestre soit connue et que la surface intérieure de la croûte solide soit un ellipsoïde confocal avec l'ellipsoïde terrestre. Je me permets, en terminant ce Mémoire, de faire quelques remarques sur ce sujet.

Supposons, comme précédemment, que la croûte de la Terre soit un corps solide homogène à densité μ_0.

Désignons par μ la densité moyenne de la Terre, qui est égale à 5,6 à peu près, par μ_1 la densité du liquide intérieur.

Désignant par $A' = B'$ et C' les moments principaux d'inertie des masses fluides contenues à l'intérieur de la Terre, on trouve

$$A_0 = B_0 = A + A', \qquad C_0 = C + C',$$

où

$$A' = \frac{4}{15}\pi\mu_1 a(a+c)\sqrt{c}, \qquad C' = \frac{8}{15}\pi\mu_1 a^2\sqrt{c}.$$

Quant à A et C, ils se déterminent par les formules (186_1) et (186_2) du n° 81.

On trouve

$$A_0 = \frac{4\pi}{15}\left(\mu_0\left[a_1(a_1+c_1)\sqrt{c_1} - a(a+c)\sqrt{c}\right] + \mu_1 a(a+c)\sqrt{c}\right),$$

$$C_0 = \frac{8\pi}{15}\left(\mu_0\left[a_1^2\sqrt{c_1} - a^2\sqrt{c}\right] + \mu_1 a^2\sqrt{c}\right),$$

d'où

$$(199) \qquad Q = \frac{2A_0 - C_0}{C_0} = \frac{\mu_0\left(a_1 c_1\sqrt{c_1} - ac\sqrt{c}\right) + \mu_1 ac\sqrt{c}}{\mu_0\left(a_1^2\sqrt{c_1} - a^2\sqrt{c}\right) + \mu_1 a^2\sqrt{c}}.$$

Or, on a

$$\mu = \frac{\mu_0\left(a_1\sqrt{c_1} - a\sqrt{c}\right) + \mu_1 a\sqrt{c}}{a_1\sqrt{c_1}},$$

d'où

$$(199_1) \qquad (\mu_1 - \mu_0)a\sqrt{c} = (\mu - \mu_0)a_1\sqrt{c_1}.$$

L'équation (199) peut donc s'écrire

$$Q = \frac{\mu_0 c_1 + (\mu - \mu_0)c}{\mu_0 a_1 + (\mu - \mu_0)a},$$

Supposons maintenant que la surface intérieure de la croûte solide soit un ellipsoïde homofocal avec l'ellipsoïde terrestre.

Dans ce cas on trouve, en tenant compte des équations (193),

$$Q = \frac{\mu(e - x_0) + \mu_0 x_0}{\mu(1 - x_0) + \mu_0 x_0},$$

x_0 désignant la racine réelle, comprise entre o et e, de l'équation (189_1). [Voir n° 82.]

Cette équation donne

$$\frac{\mu_0}{\mu} = 1 + \frac{Q - e}{x_0(1 - Q)}. \tag{200}$$

où, en vertu de (197) et (199),

$$Q = \frac{152}{153}$$

et

$$e = \frac{299^2}{300^2}.$$

On a

$$Q - e = \frac{152}{153} - \frac{299^2}{300^2} = \frac{1647}{153 \,.\, 300^2} = \frac{183}{153 \,.\, 10^4} > 0,$$

et

$$1 - Q = \frac{1}{153} > 0.$$

L'équation (200) détermine la densité moyenne de la croûte solide de la Terre et montre que

$$\mu_0 > \mu = 5,6.$$

[**92**] En se rappelant que

$$\frac{e}{4} < x_0 < \frac{e}{3}, \tag{200_1}$$

on trouve

$$\mu_0 < \mu\left(1 + \frac{(Q - e)4}{e(1 - Q)}\right),$$

$$\mu_0 > \mu\left(1 + \frac{(Q - e)3}{e(1 - Q)}\right),$$

d'où l'on tire, en effectuant le calcul,

$$6,012\ldots > \mu_0 > 5,908\ldots.$$

Substituant, enfin, le rapport $\frac{\mu_0}{\mu}$ [l'équation (200)] dans (199_1), on obtient

$$\frac{\mu_1}{\mu} = 1 - \frac{Q - e}{x_0(1 - Q)}\left(\frac{\sqrt{e}}{(1 - x_0)\sqrt{e - x_0}} - 1\right),$$

l'équation qui permet de déterminer la densité μ_1 du liquide contenu à l'intérieur de la Terre.

On voit que

$$\mu_1 < \mu,$$

et, en vertu de (200_1),

$$5,6 > \mu_1 > 5.$$

[93] On voit, par ce qui précède, que certaines circonstances du phénomène des déplacements du pôle terrestre, que nous observons aujourd'hui, peuvent être expliquées, abstraction faite de toutes les autres causes possibles, par l'influence sur la rotation de la croûte solide de la Terre du mouvement du liquide contenu à son intérieur.

Or, toutes les lois approchées qu'on puisse en déduire dans cette hypothèse ne subsistent que pendant une durée de temps assez courte.

La viscosité et le frottement de contact, bien qu'ils soient extrêmement faibles, ne sont cependant pas absolument nuls (voir la remarque de M. Delaunay, citée plus haut).

Après un certain laps de temps, la loi de l'écart de l'axe de rotation de la Terre de celui de révolution de sa surface extérieure se changera essentiellement sous l'influence des frottements; en vertu du théorème n° 70, le premier de ces axes va s'approcher de plus en plus du second, et les variations des latitudes terrestres vont devenir de moins en moins sensibles.

Il est naturel d'admettre, inversement, qu'à certaines époques géologiques, très éloignées de notre temps, l'écart de l'axe de rotation du globe terrestre de son axe principal d'inertie (de l'axe de révolution de l'ellipsoïde terrestre) était beaucoup plus grand et les variations des latitudes terrestres étaient, par suite, beaucoup plus considérables. Cela nous ramène à une hypothèse, à l'aide de laquelle on essaye parfois d'expliquer les changements géologiques des zones climatiques, ainsi que la périodicité des époques glaciales, et qui, d'après les considérations précédentes, ne paraît pas au moins invraisemblable.

En admettant cette hypothèse, on découvre, en même temps, la cause principale qui a détruit, avec le laps de temps, ces changements périodiques des climats et qui a rendu la distribution des zones climatiques en son état actuel. On la trouve, selon le théorème du n° 70, dans l'influence sur le mouvement du système considéré, de la viscosité du liquide intérieur qui tend à réduire ce mouvement à son état limite, à savoir à la rotation uniforme du système autour d'un de ces axes principaux d'inertie (autour d'axe de révolution de la surface de la Terre, dans le cas considéré).

N'oubliant jamais que tous les résultats qu'on puisse obtenir en appliquant les théories de la Mécanique rationnelle à l'étude des phénomènes naturels ne représentent toujours que certaines analogies, plus ou moins vraisemblables, je crois cependant qu'elles ne sont pas dénuées d'intérêt; c'est pourquoi je me suis permis de faire quelques remarques relatives à ces questions dans ce Mémoire.

TABLE DES MATIÈRES