SUR UN PROCÉDÉ ALTERNÉ,

PAR É. GOURSAT.

Je m'occupe dans ce travail d'un problème relatif aux équations aux dérivées partielles, que j'ai déjà résolu au moyen d'une équation fonctionnelle dans deux Mémoires de ce recueil (tomes V et VI de la 2e série; t. V, pp. 405-436; t. VI, pp. 117-144). Je montre comment on peut aussi le résoudre au moyen d'un procédé alterné, tout à fait analogue au procédé classique de M. Schwarz pour le problème de Dirichlet. M. Picard s'était aussi servi de méthodes analogues dans certaines questions relatives aux équations différentielles. L'application de ce procédé alterné donne immédiatement la solution de l'équation fonctionnelle simple dont dépend le problème, et on voit sans peine que l'on peut étendre la même méthode à d'autres équations fonctionnelles; mais je réserve l'étude de ces généralisations pour une autre occasion [1].

[1] Soit $f(x, y)$ une fonction continue dans le rectangle R défini par les inégalités

$$0 \leqslant x \leqslant a, \qquad 0 \leqslant y \leqslant a\alpha,$$

α étant un nombre supérieur à *un;* proposons-nous de déterminer une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y), \tag{1}$$

continue dans le rectangle R, et se réduisant à zéro le long des deux segments de droites $y = x$, $y = \alpha x$, situés dans ce rectangle. Nous avons vu comment ce problème se ramenait à la résolution d'une équation fonctionnelle (*Fac. T.*, tome VI, 2e série, p. 123). On peut aussi résoudre ce problème par une suite d'approximations successives de la façon suivante. Déterminons d'abord l'intégrale de l'équation (1) se

[1] Le principe de cette méthode a été résumé dans une note présentée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. CXLVIII, p. 762; 22 mars 1909).

réduisant à zéro pour $y = \alpha x$, et prenant pour $y = 0$ une suite continue de valeurs données. L'intégrale générale de l'équation (1) a pour expression

$$z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y), \tag{2}$$

où l'on a posé

$$F(x, y) = \int_0^x dx \int_0^y f(x, y)\,dy,$$

$\varphi(x)$ et $\psi(y)$ étant deux fonctions arbitraires, que l'on peut supposer nulles pour $x = 0$ ou $y = 0$. Comme on a évidemment $F(x, 0) = F(0, y) = 0$, si l'on veut que z se réduise, pour $y = 0$, à une fonction $\varphi_0(x)$, continue de 0 à a, et telle que $\varphi_0(0) = 0$, on doit prendre $\varphi(x) = \varphi_0(x)$. De plus, pour que l'intégrale soit nulle le long du segment ($y = \alpha x$), il faut que l'on ait

$$F(x, \alpha x) + \varphi_0(x) + \psi(\alpha x) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\psi(\alpha x) = -\varphi_0(x) - F(x, \alpha x),$$
$$\psi(x) = -\varphi_0\left(\frac{x}{\alpha}\right) - F\left(\frac{x}{\alpha}, x\right),$$

et l'intégrale particulière cherchée de l'équation (2) est

$$z_1 = F(x, y) + \varphi_0(x) - \varphi_0\left(\frac{y}{\alpha}\right) - F\left(\frac{y}{\alpha}, y\right). \tag{3}$$

Pour $x = 0$, cette intégrale se réduit à une fonction $\psi_1(y)$:

$$\psi_1(y) = -\varphi_0\left(\frac{y}{\alpha}\right) - F\left(\frac{y}{\alpha}, y\right),$$

continue dans l'intervalle (0, $a\alpha$). L'équation (1) admet de même une intégrale $u_1(x, y)$, continue dans le rectangle R, s'annulant pour $y = x$, et se réduisant à $\psi_1(y)$ pour $x = 0$. Cette intégrale a pour expression

$$u_1(x, y) = F(x, y) + \psi_1(y) - \psi(x) - F(x, x).$$

Pour $y = 0$, cette intégrale se réduit à une fonction $\varphi_1(x)$:

$$\varphi_1(x) = -\psi(x) - F(x, x),$$

continue de 0 à a. On peut ensuite former une intégrale z_2, s'annulant pour $y = \alpha x$, et se réduisant à $\varphi_1(x)$ pour $y = 0$. En continuant ainsi, on voit que l'on peut former deux suites de fonctions :

$$\begin{cases} \varphi_0(x), \ \varphi_1(x), \ \ldots, \ \varphi_n(x), \ \ldots, \\ \psi_1(y), \ \psi_2(y), \ \ldots, \ \psi_n(y), \ \ldots, \end{cases} \tag{4}$$

s'annulant pour $x=0$, ou $y=0$, dont les premières sont continues dans l'intervalle $(0, a)$ et les secondes dans l'intervalle $(0, a\alpha)$, et deux suites d'intégrales de l'équation (1)

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots,$$
$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots,$$

continues dans le rectangle R, et satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Toutes les intégrales z_n sont nulles pour $y=\alpha x$;

2° Toutes les intégrales u_n sont nulles pour $y=x$;

3° Pour $y=0$, on a $z_1=\varphi_0(x)$, et, pour $n>1$, $z_n(x, 0)=u_{n-1}(x, 0)=\varphi_{n-1}(x)$;

4° Pour $x=0$, on a $u_n(0, y)=z_n(0, y)=\psi_n(y)$.

En partant d'une fonction continue quelconque $\varphi_0(x)$, on peut ainsi former les suites indéfinies qui précèdent.

Toutes les fonctions φ_n, ψ_n peuvent se déduire de $\varphi_0(x)$ par voie de récurrence. L'intégrale $z_n(x, y)$, qui est nulle pour $y=\alpha x$, et se réduit à $\varphi_{n-1}(x)$ pour $y=0$, a pour expression

$$z_n(x, y)=\mathrm{F}(x, y)+\varphi_{n-1}(x)-\varphi_{n-1}\left(\frac{y}{\alpha}\right)-\mathrm{F}\left(\frac{y}{\alpha}, y\right).$$

De même, l'intégrale $u_n(x, y)$, qui est nulle pour $y=x$ et se réduit à $\psi_n(y)$ pour $x=0$, a pour expression

$$u_n(x, y)=\mathrm{F}(x, y)+\psi_n(y)-\psi_n(x)-\mathrm{F}(x, x).$$

On déduit de là les relations

$$\left\{\begin{aligned}\psi_n(y)&=-\varphi_{n-1}\left(\frac{y}{\alpha}\right)-\mathrm{F}\left(\frac{y}{\alpha}, y\right),\\ \varphi_n(x)&=-\psi_n(x)-\mathrm{F}(x, x),\end{aligned}\right. \tag{5}$$

et par suite

$$\varphi_n(x)=\varphi_{n-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\pi(x) \tag{6}$$

en posant

$$\pi(x)=\mathrm{F}\left(\frac{x}{\alpha}, x\right)-\mathrm{F}(x, x).$$

De la relation (6) on tire successivement

$$\varphi_{n-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)=\varphi_{n-2}\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)+\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right),$$

$$\varphi_{n-2}\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)=\varphi_{n-1}\left(\frac{x}{\alpha^3}\right)+\pi\left(\frac{x}{\alpha^2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_1\left(\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)=\varphi_0\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)+\pi\left(\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right),$$

et par suite

$$\varphi_n(x)=\varphi_0\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)+\pi(x)+\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\ldots+\pi\left(\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right).$$

La série dont le terme général est $\pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)$ est absolument convergente; en effet, en désignant par M une limite supérieure du module de $f(x, y)$ dans R, on a $|F(x, y)| < Mxy$, et par suite $|\pi(x)| < M\frac{x^2(1+\alpha)}{\alpha}$. Lorsque n augmente indéfiniment, $\varphi_0\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)$ tend vers zéro, et par conséquent la fonction $\varphi_n(x)$ tend vers une limite $\Phi(x)$, égale à la somme de la série

$$\Phi(x)=\pi(x)+\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\ldots+\pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)+\ldots. \tag{7}$$

Des relations (5) on tire de même

$$\psi_n(y)=\psi_{n-1}\left(\frac{y}{\alpha}\right)+\pi_1(y)$$

en posant

$$\pi_1(y)=F\left(\frac{y}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}\right)-F\left(\frac{y}{\alpha}, y\right),$$

et on en déduit que $\psi_n(y)$ a une limite $\Psi(y)$ lorsque n augmente indéfiniment

$$\Psi(y)=\pi_1(y)+\pi_1\left(\frac{y}{\alpha}\right)+\ldots+\pi_1\left(\frac{y}{\alpha^n}\right)+\ldots. \tag{8}$$

Les fonctions $z_n(x, y)$, $u_n(x, y)$ tendent donc vers une limite $Z(x, y)$ lorsque n augmente indéfiniment :

$$Z(x, y)=F(x, y)+\Phi(x)+\Psi(y), \tag{9}$$

et on vérifie aisément que cette fonction est nulle pour $y = x$ et pour $y = \alpha x$; car on déduit des expressions des fonctions $\pi(x)$, $\pi_1(y)$, $\varphi(x)$, $\psi(y)$ les deux relations

$$\Phi(x) + \Psi(x) = -F(x, x), \qquad \Phi(x) + \Psi(\alpha x) = -F(x, \alpha x).$$

Remarque. — Il est essentiel d'associer la droite $y = \alpha x$ à la caractéristique $y = 0$, et la droite $y = x$ à la caractéristique $x = 0$. Si on associait ces droites dans un autre ordre, les expressions de z_n et de u_n seraient respectivement

$$z_n = F(x, y) + \varphi_{n-1}(x) - F(y, y) - \varphi_{n-1}(y),$$
$$u_n = F(x, y) + \psi_n(y) - \psi_n(\alpha x) - F(x, \alpha x),$$

et les relations de récurrence (5) seraient remplacées par les suivantes :

$$\psi_n(y) = -\varphi_{n-1}(y) - F(y, y),$$
$$\varphi_n(x) = -\psi_n(\alpha x) - F(x, \alpha x),$$

On en déduirait

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(\alpha x) + F(\alpha x, \alpha x) - F(x, \alpha x) = \varphi_{n-1}(\alpha x) + \pi_2(x),$$

et par conséquent

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(\alpha^n x) + \pi_2(x) + \pi_2(\alpha x) + \ldots + \pi_2(\alpha^{n-1} x).$$

Si la fonction φ_0 est quelconque, le second membre ne tend vers aucune limite lorsque n augmente indéfiniment. Si l'on a par exemple $f = 1$, la formule précédente devient

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= \varphi_0(\alpha^n x) + \alpha(\alpha - 1)x^2 \{1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2n-2}\} \\ &= \varphi_0(\alpha^n x) + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 - \alpha^2} x^2 - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 - \alpha^2} x^2 \alpha^{2n};\end{aligned}$$

$\varphi_n(x)$ ne tend vers aucune limite, à moins que la différence

$$\varphi_0(\alpha^n x) - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 - \alpha^2}(x\alpha^n)^2$$

ne tende vers une limite lorsque n augmente indéfiniment.

[2] Considérons maintenant l'équation

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z, p, q), \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

dont le second membre est une fonction continue dans le domaine D défini par les inégalités

$$(11) \qquad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant a\alpha, \qquad |z| \leqslant Z, \quad |p| \leqslant P, \quad |q| \leqslant Q,$$

α étant un nombre positif supérieur à un, et a, Z, P, Q des nombres positifs; soit M une limite supérieure de la valeur absolue de f dans ce domaine. Pour obtenir l'intégrale de cette équation qui se réduit à zéro pour $y = x$ et pour $y = \alpha x$, et qui est continue dans le rectangle R, de côtés r et αr, r étant un nombre positif suffisamment petit et au plus égal à a, on peut employer un procédé alterné tout à fait analogue à celui du paragraphe précédent.

Nous présenterons tout d'abord quelques lemmes préliminaires. Soient N et N' deux nombres positifs vérifiant les deux inégalités

$$N - N' > 2M, \qquad N' - \frac{N}{\alpha^2} > \frac{2M}{\alpha};$$

pour trouver deux nombres satisfaisant à ces conditions, on peut prendre à volonté un nombre positif N, puis un nombre N' compris entre $\frac{N}{\alpha^2}$ et N, et multiplier ensuite ces deux nombres par un même facteur, de façon que les différences $N - N'$ et $N' - \frac{N}{\alpha^2}$ soient respectivement supérieures à $2M$ et à $\frac{2M}{\alpha}$.

Cela posé, nous dirons qu'une fonction $z(x, y)$, régulière dans le rectangle R, satisfait aux conditions (A) dans ce domaine si l'on a, en tout point de R et du périmètre,

$$(A) \qquad |z| \leqslant Z, \quad |p| \leqslant P, \quad |q| \leqslant Q, \qquad |z'_x(x, 0)| \leqslant Nx, \quad |z'_y(0, y)| \leqslant Ny.$$

Soit $f(x, y)$ une fonction continue dans le domaine $(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a\alpha)$, et dont la valeur absolue ne dépasse pas M. L'intégrale de l'équation auxiliaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y),$$

qui est nulle pour $y = \alpha x$, et qui se réduit pour $y = 0$ à une fonction continue $\varphi(x)$, s'annulant pour $x = 0$, a pour expression

$$(12) \qquad z = F(x, y) + \varphi(x) - \varphi\left(\frac{y}{\alpha}\right) - F\left(\frac{y}{\alpha}, y\right),$$

où l'on a posé

$$F(x, y) = \int_0^x dx \int_0^y f(x, y)\, dy.$$

La fonction $F(x, y)$ est continue dans le rectangle R, s'annule pour $x = 0$ et pour $y = 0$, et l'on a en tout point du domaine

$$|F(x, y)| \leqslant Mxy.$$

Les dérivées partielles

$$F_1(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad F_2(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

sont elles-mêmes continues, et l'on a

$$|F_1(x, y)| \leqslant My, \qquad |F_2(x, y)| \leqslant Mx.$$

Les dérivées partielles de la fonction $z(x, y)$ ont pour expressions

$$\begin{aligned} p &= F_1(x, y) + \varphi'(x), \\ q &= F_2(x, y) - \frac{1}{\alpha}\varphi'\left(\frac{y}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha}F_1\left(\frac{y}{\alpha}, y\right) - F_2\left(\frac{y}{\alpha}, y\right); \end{aligned}$$

supposons que la fonction $\varphi(x)$ satisfait elle-même à la condition

$$|\varphi'(x)| < Nx,$$

ce qui entraîne, puisque $\varphi(0) = 0$, l'inégalité

$$|\varphi(x)| < \frac{Nx^2}{2}.$$

On a donc, dans le domaine R,

$$\begin{aligned} |z| &\leqslant M\alpha r^2 + N\frac{r^2}{2} + \frac{Nr^2}{2} + M\alpha r^2 = 2M\alpha r^2 + Nr, \\ |p| &\leqslant M\alpha r + Nr, \\ |q| &\leqslant Mr + \frac{Nr}{\alpha} + Mr + Mr = 3Mr + \frac{Nr}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$z'_y(0, y) = -\frac{1}{\alpha}\varphi'\left(\frac{y}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha}F_1\left(\frac{y}{\alpha}, y\right) - F_2\left(\frac{y}{\alpha}, y\right),$$

et par suite

$$|z'_y(0, y)| < \frac{Ny}{\alpha^2} + \frac{2My}{\alpha}.$$

Pour que la fonction $z(x, y)$ vérifie les conditions (A), il faudra que l'on ait

$$(13) \qquad 2M\alpha r^2 + Nr^2 \leqslant Z, \quad M\alpha r + Nr \leqslant P, \quad 3Mr + \frac{Nr}{\alpha^2} \leqslant Q,$$

$$\frac{Ny}{\alpha^2} + \frac{2My}{\alpha} < N'y;$$

la dernière condition est satisfaite d'elle-même, d'après la façon dont on a choisi les nombres N et N'; il suffira donc que le nombre r vérifie les inégalités (13).

Soit de même $\psi(y)$ une fonction continue de o à r, nulle pour $y = 0$, et telle que l'on ait $|\psi'(y)| \leqslant N'y$. L'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y),$$

qui est nulle pour $y = x$, et se réduit à $\psi(y)$ pour $x = 0$, a pour expression

$$u(x, y) = F(x, y) + \psi(y) - \psi(x) - F(x, x).$$

On en tire

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F_1(x, y) - \psi'(x) - F_1(x, x) - F_2(x, x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = F_2(x, y) + \psi'(y),$$

$$u'_x(x, 0) = -\psi'(x) - F_1(x, x) - F_2(x, x),$$

et par suite, dans le domaine R, on a

$$|u| \leqslant M\alpha r^2 + \frac{N'\alpha^2 r^2}{2} + \frac{N'r^2}{2} + Mr^2,$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant M\alpha r + N'r + 2Mr,$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant Mr + N'\alpha r,$$

$$|u'_x(x, 0)| \leqslant N'x + 2Mx.$$

La fonction $u(x, y)$ vérifiera donc les conditions (A) pourvu que l'on ait

$$(14) \qquad \begin{cases} M(1+\alpha)r^2 + \dfrac{N'(1+\alpha^2)}{2} r^2 \leqslant Z, \\ M(\alpha+2)r + N'r \leqslant P, \\ Mr + N'\alpha r \leqslant Q, \end{cases}$$

car la condition

$$N'x + 2Mx < Nx$$

est vérifiée d'elle-même. Nous supposerons dans la suite que r est un nombre positif satisfaisant à toutes les conditions (13) et (14).

[**3**] Revenons maintenant à la question proposée. Nous formerons encore une série de valeurs approchées de l'intégrale, en prenant pour première approximation $u_0 = 0$. Soit d'autre part $\varphi_1(x)$ une fonction continue de 0 à r, s'annulant pour $x = 0$, et telle que l'on ait, dans l'intervalle $(0, r)$, $|\varphi'(x)| \leqslant Nx$. Pour seconde valeur approchée, nous prendrons la fonction $z_1(x, y)$, satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = f(x, y, 0, 0, 0),$$

se réduisant à $\varphi_1(x)$ pour $y = 0$, et à zéro pour $y = \alpha x$. Cette intégrale est régulière dans le rectangle R et, d'après la façon dont le nombre r a été choisi, elle satisfait aux conditions (A). Pour $x = 0$, elle se réduit donc à une fonction $\psi_1(y)$, dont la dérivée est inférieure en valeur absolue à $N'y$. Soit de même $u_1(x, y)$ l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z_1, \frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}\right)$$

qui se réduit à $\psi_1(y)$ pour $x = 0$, et à zéro pour $y = x$. Le second membre de cette équation est une fonction continue dans le rectangle R et sa valeur absolue reste inférieure à M. La fonction $u_1(x, y)$ est donc elle-même régulière dans R et satisfait aux conditions (A). Pour $y = 0$, elle se réduit à une fonction $\varphi_2(x)$, dont la dérivée est inférieure à Nx en valeur absolue. On forme ensuite une nouvelle fonction $z_2(x, y)$, satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right),$$

se réduisant à $\varphi_2(x)$ pour $y = 0$, et à zéro pour $y = \alpha x$, et ainsi de suite. Il est clair que ce procédé peut être continué indéfiniment; on obtiendra donc une suite illimitée de fonctions

$$z_1, u_1, z_2, u_2, \ldots, z_n, u_n, \ldots$$

qui sont toutes régulières dans le rectangle R, et satisfont aux conditions (A) dans ce domaine. Pour $y = 0$, ces fonctions se réduisent à des fonctions de x :

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

dont la première peut être choisie arbitrairement, sous les restrictions énoncées.

Pour $x=0$, ces fonctions se réduisent de même à des fonctions de y :

$$\psi_1(y),\ \psi_2(y),\ \ldots,\ \psi_n(y),\ \ldots.$$

La liaison entre toutes ces fonctions peut être résumée dans le schéma suivant :

$$\begin{array}{cccccccccc}
\psi_1(y), & & \psi_2(y), & & \ldots. & \psi_n(y), & & \psi_{n+1}(y), & & \ldots, \\
z_1 \uparrow & u_1\searrow & \uparrow z_2 & & & z_n \uparrow & u_n\searrow & \uparrow z_{n+1} & & \\
\varphi_1(x), & & \varphi_2(x), & & \ldots, & \varphi_n(x), & & \varphi_{n+1}(x), & & \ldots.
\end{array}$$

D'une façon générale, $z_n(x, y)$ est l'intégrale de l'équation

$$\text{(E}_n\text{)}\qquad \frac{\partial^2 z_n}{\partial x\,\partial y}=f\left(x,\ y,\ u_{n-1},\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x},\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right),$$

qui satisfait aux conditions

$$z_n(x,\ \alpha x)=0,\qquad z_n(x,\ 0)=u_{n-1}(x,\ 0)=\varphi_n(x),$$

tandis que $u_n(x, y)$ est l'intégrale de l'équation

$$\text{(E}'_n\text{)}\qquad \frac{\partial^2 u_n}{\partial x\,\partial y}=f\left(x,\ y,\ z_n,\ \frac{\partial z_n}{\partial x},\ \frac{\partial z_n}{\partial y}\right)$$

déterminée par les conditions initiales

$$u_n(x,\ x)=0,\qquad u_n(0,\ y)=z_n(0,\ y)=\psi_n(y).$$

Posons, pour abréger,

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{P}_n(x,\ y) &= \int_0^x dx \int_0^y f\left(x,\ y,\ u_{n-1},\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x},\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right) dy,\\
\mathrm{Q}_n(x,\ y) &= \int_0^x dx \int_0^y f\left(x,\ y,\ z_n,\ \frac{\partial z_n}{\partial x},\ \frac{\partial z_n}{\partial y}\right) dy;
\end{aligned}\right.$$

on a les formules suivantes de récurrence permettant de définir de proche en proche les fonctions u_i, v_i :

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned}
z_n(x,\ y) &= \mathrm{P}_n(x,\ y)+\varphi_n(x)-\varphi_n\left(\frac{y}{\alpha}\right)-\mathrm{P}_n\left(\frac{y}{\alpha},\ y\right), &\qquad \varphi_n(x)&=u_{n-1}(x,\ 0),\\
u_n(x,\ y) &= \mathrm{Q}_n(x,\ y)+\psi_n(y)-\psi_n(x)-\mathrm{Q}_n(x,\ x), &\qquad \psi_n(y)&=z_n(0,\ y).
\end{aligned}\right.$$

D'après ce qui a été expliqué plus haut, on a, en tout point du rectangle R, les inégalités

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} |z_n(x, y)| < \mathrm{M}xy + \mathrm{N}\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\mathrm{N}y^2}{2\alpha^2} + \mathrm{M}\dfrac{y^2}{\alpha}, \\ \left|\dfrac{\partial z_n}{\partial x}\right| < \mathrm{M}y + \mathrm{N}x, \\ \left|\dfrac{\partial z_n}{\partial y}\right| < \mathrm{M}x + \mathrm{N}'y, \\ |u_n(x, y)| < \mathrm{M}xy + \dfrac{\mathrm{N}'y^2}{2} + \dfrac{\mathrm{N}'x^2}{2} + \mathrm{M}x^2, \\ \left|\dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right| < \mathrm{M}y + 2\mathrm{M}x + \mathrm{N}'x < \mathrm{M}y + \mathrm{N}x, \\ \left|\dfrac{\partial u_n}{\partial y}\right| < \mathrm{M}x + \mathrm{N}'y. \end{array}\right.$$

[**4**] Pour démontrer que les fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$ $\varphi_n(x)$, $\ldots$ tendent vers une limite lorsque n augmente indéfiniment, on ne peut plus raisonner comme dans le cas simple du n° 1, car les fonctions $\mathrm{P}_n(x, y)$, $\mathrm{Q}_n(x, y)$ dépendent de n. Posons

$$z_n(x, y) - z_{n-1}(x, y) = \zeta_n(x, y), \qquad u_n(x, y) - u_{n-1}(x, y) = \xi_n(x, y);$$

on aura

$$\zeta_n(x, \alpha x) = 0, \quad \zeta_n(x, 0) = \varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x), \quad \xi_n(x, x) = 0, \quad \xi_n(0, y) = \psi_n(y) - \psi_{n-1}(y).$$

Des équations (E_n), (E'_n) et des équations analogues, on tire

$$(17')\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \zeta_n(x, y)}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, u_{n-1}, \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right) - f\left(x, y, u_{n-2}, \dfrac{\partial u_{n-2}}{\partial x}, \dfrac{\partial u_{n-2}}{\partial y}\right), \\ \dfrac{\partial^2 \xi_n(x, y)}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z_n, \dfrac{\partial z_n}{\partial x}, \dfrac{\partial z_n}{\partial y}\right) - f\left(x, y, z_{n-1}, \dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right). \end{array}\right.$$

Posons encore, pour abréger :

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{P}_n(x, y) = \mathrm{P}_n(x, y) - \mathrm{P}_{n-1}(x, y), \\ \mathfrak{Q}_n(x, y) = \mathrm{Q}_n(x, y) - \mathrm{Q}_{n-1}(x, y); \end{array}\right.$$

d'après les conditions initiales, nous aurons les formules analogues aux formules (16) :

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} \zeta_n(x, y) = \mathfrak{P}_n(x, y) + \varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) - \varphi_n\left(\dfrac{y}{\alpha}\right) + \varphi_{n-1}\left(\dfrac{y}{\alpha}\right) - \mathfrak{P}_n\left(\dfrac{y}{\alpha}, y\right), \\ \xi_n(x, y) = \mathfrak{Q}_n(x, y) + \psi_n(y) - \psi_{n-1}(y) - \psi_n(x) + \psi_{n-1}(x) - \mathfrak{Q}_n(x, x). \end{array}\right.$$

Pour achever la démonstration, une nouvelle hypothèse est indispensable ; nous supposerons que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ satisfait à la condition de Lipschitz, c'est-à-dire qu'il existe trois nombres positifs A, B, C, tels que l'on ait, dans le domaine D :

$$(20) \qquad |f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, p', q')| < \mathrm{A}\,|z - z'| + \mathrm{B}\,|p - p'| + \mathrm{C}\,|q - q'|.$$

Supposons que l'on ait, dans le rectangle R, les inégalités

$$(21) \qquad |\xi_{n-1}(x, y)| < \mathrm{T}\lambda^n (x+y)^2, \qquad \left|\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x}\right| < 2\mathrm{T}\lambda^n (x+y), \qquad \left|\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial y}\right| < 2\mathrm{T}\lambda^n (x+y),$$

λ étant un nombre positif compris entre $\frac{1}{\alpha}$ et 1, et T un nombre positif. On peut toujours satisfaire à ces conditions, d'après les inégalités (17), pour une valeur donnée de n, en choisissant pour T un nombre positif convenable. La relation (20) montre que l'on aura aussi

$$\left| f\left(x, y, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right) - f\left(x, y, u_{n-2}, \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-2}}{\partial y}\right) \right| < \mathrm{T}\lambda^n \left\{ \mathrm{A}(x+y)^2 + 2(\mathrm{B}+\mathrm{C})(x+y) \right\},$$

et ar suite

$$|\mathfrak{P}_n(x, y)| < \mathrm{T}\lambda^n \int_0^x dx \int_0^y \left\{ \mathrm{A}(x+y)^2 + 2(\mathrm{B}+\mathrm{C})(x+y) \right\} dy,$$

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{P}_n}{\partial x}\right| < \mathrm{T}\lambda^n \int_0^y \left\{ \mathrm{A}(x+y)^2 + 2(\mathrm{B}+\mathrm{C})(x+y) \right\} dy,$$

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{P}_n}{\partial y}\right| < \mathrm{T}\lambda^n \int_0^x \left\{ \mathrm{A}(x+y)^2 + 2(\mathrm{B}+\mathrm{C})(x+y) \right\} dy,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$|\mathfrak{P}_n(x, y)| < \mathrm{T}\lambda^n [\mathrm{U}_4(x, y) + \mathrm{U}_3(x, y)],$$

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{P}_n}{\partial x}\right| < \mathrm{T}\lambda^n \left[\frac{\partial \mathrm{U}_4}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{U}_3}{\partial x}\right],$$

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{P}_n}{\partial y}\right| < \mathrm{T}\lambda^n \left[\frac{\partial \mathrm{U}_4}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{U}_3}{\partial y}\right],$$

U_4 et U_3 étant des polynomes homogènes d'un degré marqué par leur indice, s'annulant pour $x = 0$ et pour $y = 0$, et dont les coefficients positifs ne dépendent que de A, B, C. Les inégalités (21) entraînent les suivantes :

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| < \mathrm{T}\lambda^n x^2, \qquad |\varphi'_n(x) - \varphi'_{n-1}(x)| < 2\mathrm{T}\lambda^n x,$$

et par suite on a, d'après la première des formules (19) :

$$|\zeta_n(x,y)| < T\lambda^n[U_4(x,y)+U_3(x,y)]+T\lambda^n x^2+T\lambda^n\frac{y^2}{\alpha^2}+T\lambda^n\left[U_3\left(\frac{y}{\alpha},y\right)+U_3\left(\frac{y}{\alpha},y\right)\right],$$

$$\left|\frac{\partial\zeta_n}{\partial x}\right| < T\lambda^n\left[\frac{\partial U_4}{\partial x}+\frac{\partial U_3}{\partial x}\right]+2T\lambda^n x,$$

$$\left|\frac{\partial\zeta_n}{\partial y}\right| < T\lambda^n\left[\frac{\partial U_4}{\partial y}+\frac{\partial U_3}{\partial y}\right]+2T\frac{\lambda^n y}{\alpha^2}+T\lambda^n(Hy^2+Ky^3),$$

H et K étant des coefficients positifs, dont il serait facile d'avoir l'expression. Cela étant, choisissons un nombre positif $h \leqslant r$, assez petit pour que les inégalités $0 \leqslant x \leqslant h$, $0 \leqslant y \leqslant h\alpha$ entraînent les suivantes :

$$U_4(x,y)+U_3(x,y) \leqslant 2xy, \qquad \frac{\partial U_4}{\partial x}+\frac{\partial U_3}{\partial x} \leqslant 2y, \qquad \frac{\partial U_4}{\partial y}+\frac{\partial U_3}{\partial y} \leqslant 2x.$$

$$\frac{y^2}{\alpha^2}+U_3\left(\frac{y}{\alpha},y\right)+U_4\left(\frac{y}{\alpha},y\right) \leqslant \frac{y^2\lambda}{\alpha},$$

$$\frac{2}{\alpha^2}+Hy+Ky^2 \leqslant 2\frac{\lambda}{\alpha}.$$

On aura donc aussi dans ce nouveau domaine

$$(21') \qquad |\zeta_n(x,y)| < T\lambda^n(x+y)^2, \qquad \left|\frac{\partial\zeta_n}{\partial x}\right| < 2T\lambda^n(x+y), \qquad \left|\frac{\partial\zeta_n}{\partial y}\right| < 2T\lambda^n(x+y),$$

et de plus

$$|\zeta_n(0,y)| = |\psi_n(y)-\psi_{n-1}(y)| < T\frac{\lambda^{n+1}y^2}{\alpha}, \qquad \left|\frac{\partial\zeta_n(0,y)}{\partial y}\right| < \frac{2T\lambda^{n+1}y}{\alpha}.$$

La seconde des formules (19) donne ensuite

$$|\xi_n(x,y)| < T\lambda^n[U_4(x,y)+U_3(x,y)]+T\lambda^{n+1}\frac{y^2}{\alpha}+T\lambda^{n+1}\frac{x^2}{\alpha}+T\lambda^n[U_4(x,x)+U_3(x,x)],$$

$$\left|\frac{\partial\xi_n}{\partial x}\right| < T\lambda^n\left[\frac{\partial U_4}{\partial x}+\frac{\partial U_3}{\partial x}\right]+\frac{2T\lambda^{n+1}}{\alpha}x+T\lambda^n[H_1x^2+K_1x^3],$$

$$\left|\frac{\partial\xi_n}{\partial y}\right| < T\lambda^n\left[\frac{\partial U_4}{\partial y}+\frac{\partial U_3}{\partial y}\right]+\frac{2T\lambda^{n+1}}{\alpha}y.$$

H_1 et K_1 étant deux autres coefficients positifs. Supposons le nombre h assez petit pour que l'on ait dans le rectangle de côtés h et $h\alpha$:

$$U_1(x, y) + U_3(x, y) < 2\lambda xy, \qquad \frac{x^2}{\alpha} + \frac{U_1(x, x) + U_3(x, x)}{\lambda} < x^2,$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_3}{\partial x} < 2\lambda y, \qquad \frac{2x}{\alpha} + \frac{H_1 x^2 + K_1 x^3}{\lambda} < 2x,$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial y} < 2x;$$

on aura aussi dans ce nouveau rectangle R′

$$|\xi_n(x, y)| < T\lambda^{n+1}(x+y)^2, \qquad \left|\frac{\partial \xi_n}{\partial x}\right| < 2T\lambda^{n+1}(x+y), \qquad \left|\frac{\partial \xi_n}{\partial y}\right| < 2T\lambda^{n+1}(x+y),$$

et on peut continuer indéfiniment la même suite de raisonnements. Les séries

$$z_1(x, y) + \zeta_2(x, y) + \zeta_3(x, y) + \ldots + \zeta_n(x, y) + \ldots,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial \zeta_n}{\partial x} + \ldots,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial \zeta_n}{\partial y} + \ldots,$$

$$\xi_1(x, y) + \xi_2(x, y) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \xi_n(x, y) + \ldots,$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x} + \ldots,$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\partial \xi_2}{\partial y} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial \xi_n}{\partial y} + \ldots$$

sont donc uniformément convergentes dans R′. En d'autres termes, lorsque n augmente indéfiniment, les fonctions $z_n(x, y)$ et $u_n(x, y)$ tendent uniformément vers deux limites $Z(x, y)$, $U(x, y)$, tandis que les dérivées partielles $\frac{\partial z_n}{\partial x}$, $\frac{\partial z_n}{\partial y}$, $\frac{\partial u_n}{\partial x}$, $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ tendent respectivement vers $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial Z}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, et les équations (E_n) et (E'_n) deviennent à la limite

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right), \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}\right). \tag{23}$$

La fonction $Z(x, y)$ est nulle pour $y = \alpha x$, et la fonction $U(x, y)$ est nulle pour $y = x$. Il reste à démontrer que l'on a $Z(x, y) = U(x, y)$. Remarquons pour cela que ces deux fonctions deviennent identiques pour $y = 0$ et pour $x = 0$:

$$(24) \qquad \begin{cases} Z(x, 0) = U(x, 0) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = \Phi(x), \\ Z(0, y) = U(0, y) = \lim_{n=\infty} \psi_n(y) = \Psi(y). \end{cases}$$

Les deux fonctions $Z(x, y)$, $U(x, y)$ sont complètement déterminées par les équations aux dérivées partielles (22) et (23), jointes aux conditions initiales (24). On pourrait le démontrer sans peine par la méthode habituelle des approximations successives. Ces deux fonctions $Z(x, y)$, $U(x, y)$ se réduisent donc l'une et l'autre à l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

qui est égale à $\Phi(x)$ pour $y = 0$ et à $\Psi(y)$ pour $x = 0$.

On pourrait aussi le démontrer directement en appliquant les raisonnements qui précèdent aux deux équations

$$\frac{\partial^2 (Z - u_n)}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) - f\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 (U - z_n)}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}\right) - f\left(x, y, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right),$$

et en observant que, d'après ce qui vient d'être démontré, on a, pour $y = 0$,

$$|Z(x, 0) - u_n(x, 0)| < T_1 \lambda^n x^2, \qquad |U(x, 0) - z_n(x, 0)| < T_1 \lambda^n x^2,$$

$$\left|\frac{\partial Z(x, 0)}{\partial x} - \frac{\partial u_n(x, 0)}{\partial x}\right| < 2 T_1 \lambda^n x, \qquad \left|\frac{\partial U(x, 0)}{\partial x} - \frac{\partial z_n(x, 0)}{\partial x}\right| < 2 T_1 \lambda^n x,$$

T_1 étant un nombre positif indépendant de n, avec des inégalités analogues pour les différences $Z(0, y) - u_n(0, y)$, $U(0, y) - z_n(0, y)$.