
SUR LA CONTINUITÉ

DES

FONCTIONS DE VARIABLES COMPLEXES,

PAR M. D. POMPEIU,
Licencié ès Sciences.



INTRODUCTION.

Briot et Bouquet ⁽¹⁾ avaient remarqué que, pour établir la formule de Cauchy

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(u)}{u - \zeta} du,$$

il n'est pas nécessaire de supposer qu'au point fixe ζ la fonction $f(u)$ admet une dérivée : il suffit que $f(u)$ soit continue en ce point.

Cette remarque peut être traduite par un théorème :

*Soit $f(u)$ une FONCTION DE VARIABLE COMPLEXE [et, par ce mot, je ne désigne pas une fonction *analytique*, j'exprime seulement la dépendance la plus générale entre deux variables complexes : $w = f(u)$]. Je suppose que cette fonction $f(u)$, définie dans un certain domaine D , admet une dérivée pour tout point de D , sauf peut-être pour un point ζ , intérieur à D . Si la fonction $f(u)$ est continue au point ζ , elle admet une dérivée en ce point.*

On voit, par ce théorème, que pour une fonction de variable complexe le fait d'être *continue* en un point entraîne, sous certaines conditions, la nécessité d'avoir, au même point, une dérivée.

⁽¹⁾ *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 137. — BRIOT, *Théorie des fonctions abéliennes*, Introd. XVII.

Il est clair qu'au lieu d'un seul point ζ on peut supposer qu'il y en a, dans D , un nombre fini quelconque : le théorème subsiste. Mais alors il est naturel de se poser le problème général suivant (que j'appellerai *problème de Briot et Bouquet*) :

Soient R une certaine région, dans le plan de la variable complexe u , et $f(u)$ une fonction définie dans R .

Les points de la région R sont de deux sortes :

1° Points $u = z$ pour lesquels on sait que la fonction $f(u)$ admet une dérivée ;

2° Points $u = \zeta$ pour lesquels on sait seulement que $f(u)$ est continue.

Quelle est, pour les points ζ , la distribution la plus générale à l'intérieur de R , de façon que la fonction $f(u)$ admette une dérivée en tout point ζ ?

Cauchy, le fondateur de la théorie des fonctions d'une variable complexe, s'est occupé à plusieurs reprises des rapports qu'il y a entre la continuité et la monogénéité d'une fonction de variable complexe, mais ne s'est pas posé le problème sous la forme que nous lui donnons ici.

Dans la célèbre *Dissertation inaugurale* de Riemann on peut trouver le problème qui nous occupe posé (pour un cas particulier) à peu près dans les mêmes termes qu'ici.

Dans sa Thèse *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, M. Painlevé s'est occupé du cas où les points ζ forment une ligne rectifiable.

M. Harnack, dans un Mémoire : *Anwendung der Fourier'schen Reihe auf die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen* ⁽¹⁾, a traité le cas d'un système discret de courbes.

Enfin dans ses *Leçons sur la Théorie analytique des équations différentielles* (19^e Leçon et surtout p. 437), M. Painlevé a été amené à envisager le problème qui nous occupe sous la forme même que nous lui donnons ici.

Quant à la méthode qui m'a servi dans cette recherche, j'ai cherché à tirer tout le parti possible du procédé employé par M. Goursat dans sa belle démonstration du théorème fondamental de Cauchy (*Acta mathematica*, t. IV et *Transactions of the American math. Society*, 1900).

Ce travail comprend deux Parties.

La première est spécialement consacrée au problème de Briot et Bouquet. Elle comprend cinq Chapitres.

(1) *Mathem. Annalen*, Bd. XXI.

Après avoir posé des définitions dont j'ai besoin dans la suite, je donne dans le premier Chapitre les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction de variable complexe soit holomorphe.

Dans le second Chapitre, je montre qu'un ensemble dénombrable fournit une solution du problème de Briot et Bouquet.

Dans le troisième Chapitre, je m'occupe des ensembles fermés. J'introduis la notion d'*ensemble réductible d'ordre un* et cette notion me permet de donner la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble fermé quelconque fournisse une solution du problème de Briot et Bouquet.

Le quatrième Chapitre contient une extension des résultats obtenus dans les Chapitres précédents.

Enfin un cinquième Chapitre contient quelques propositions relatives aux ensembles d'aire nulle.

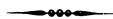
La seconde Partie traite des singularités des fonctions analytiques uniformes.

On a abordé, à divers points de vue, l'étude des singularités d'une fonction analytique uniforme. Dans ce travail, je me suis attaché à montrer que l'*étendue* de l'ensemble des points singuliers joue un rôle essentiel dans la façon dont la fonction se comporte aux environs des points singuliers.

En appliquant les résultats obtenus dans la première Partie et faisant usage du procédé de démonstration qui m'a été si souvent utile, j'ai pu obtenir quelques résultats que je crois nouveaux, relatifs aux singularités des fonctions analytiques uniformes.

J'ai étendu à des points singuliers formant un ensemble de nature particulière la propriété caractéristique des points singuliers essentiels; j'ai démontré un théorème relatif au cas où les points singuliers forment un ensemble d'aire nulle et j'ai donné des exemples de fonctions analytiques présentant des singularités d'une nature particulière. Enfin, dans la Conclusion qui termine cette seconde Partie, j'ai essayé de montrer dans quel sens l'*étendue* de l'ensemble des points singuliers peut servir comme criterium pour une classification des fonctions analytiques uniformes.

Les principaux résultats contenus dans ce travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 26 mai 1902 et 28 novembre 1904). Dans la Note parue le 26 mai 1902, il est question aussi des applications à la théorie du prolongement analytique; ces applications seront exposées à part dans un Mémoire qui fera suite au présent travail.



PREMIÈRE PARTIE.

LE PROBLÈME DE BRIOT ET BOUQUET.

1. Le mot *fonction de variable complexe* est assez souvent employé pour désigner une fonction analytique. Dans tout ce qui suit j'emploie ce mot dans son sens général pour exprimer la dépendance entre deux ensembles de nombres complexes. Soit z une variable complexe : à chaque valeur de z , appartenant à un certain domaine, on fait correspondre un nombre déterminé w ; on exprime cette correspondance en écrivant

$$w = f(z).$$

2. Soit $f(z)$ une fonction de variable complexe définie dans un domaine D . Si cette fonction admet une dérivée au point $z = a$, intérieur à D , je dirai que $f(z)$ est monogène au point a .

Prenons, comme exemple, la fonction $f(z)$ qui, pour $z = x + iy$, est égale à $x^2 + y^2$: cette fonction est monogène au point $z = 0$.

Voici un exemple plus général. Soit $g(z)$ une fonction de variable complexe définie dans un cercle C et continue dans ce cercle. Je définis, dans C , une nouvelle fonction $G(z)$ par le procédé suivant :

$G(z)$ prend au point z_0 , pris dans le cercle, une valeur quelconque $G(z_0)$; pour un point z , autre que z_0 , je pose

$$G(z) = G(z_0) + \int_{z_0}^z g(z) dz,$$

l'intégrale étant prise le long du chemin *rectiligne* $\overline{z_0 z}$.

Il est facile de voir que la fonction $G(z)$ est continue dans C , mais elle est aussi monogène au point z_0 et sa dérivée, en ce point, est égale à $g(z_0)$.

3. Si une fonction de variable complexe est monogène pour tous les points intérieurs à un domaine connexe D , on dit qu'elle est *holomorphe* dans D .

4. Si le domaine D n'est pas d'un seul tenant ou si la fonction $f(z)$ n'est pas monogène pour tous les points du domaine D , je dirai que $f(z)$ est *synectique* dans D .

CHAPITRE I.

LES FONCTIONS HOLOMORPHES.

5. Si une fonction $f(z)$, définie dans un domaine D , simplement connexe, est holomorphe :

1° Elle est continue ;

2° L'intégrale $\int f(z) dz$, prise le long d'un contour fermé, est nulle.

Ces conditions sont donc *nécessaires* pour qu'une fonction soit holomorphe. Je vais démontrer qu'elles sont, en même temps, *suffisantes*.

6. Soit C un cercle complètement intérieur au domaine D . Nous allons raisonner seulement sur la portion du domaine D comprise dans C , mais comme C est un cercle quelconque, intérieur à D , nos conclusions s'appliquent au domaine D tout entier.

Désignons par z_0 un point fixe pris dans C . Je définis, dans le cercle C , une fonction $F(z)$, analogue à la fonction $G(z)$ du n° 2. Je pose donc

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz,$$

le chemin d'intégration étant le segment rectiligne $\overline{z_0 z}$. La fonction $F(z)$ est continue dans C et, de plus, monogène au point z_0 ; sa dérivée, en ce point, est égale à $f(z_0)$.

Soit maintenant z_1 un point quelconque pris dans C . Je définis une nouvelle fonction $F_1(z)$ par l'égalité suivante :

$$F_1(z) = F(z_1) + \int_{z_1}^z f(z) dz,$$

le chemin d'intégration étant le segment rectiligne $\overline{z_1 z}$. La fonction $F_1(z)$ est monogène au point z_1 ; sa dérivée, en ce point, est $f(z_1)$.

Mais l'intégrale

$$\int f(z) dz$$

prise le long du triangle déterminé par les points z_0 , z_1 et z étant nulle, par

hypothèse, on conclut

$$F(z) = F_1(z).$$

Donc la fonction $F(z)$ est monogène au point z_1 et, ce point étant un point quelconque dans C , la fonction $F(z)$ est holomorphe dans C , sa dérivée étant $f(z)$.

Mais on démontre que la dérivée d'une fonction holomorphe est elle-même une fonction holomorphe. Donc $f(z)$ est holomorphe dans le cercle C ; ce qu'il fallait démontrer.

7. Je vais donner maintenant, du même théorème, une nouvelle démonstration, directe et qui nous fournira l'occasion d'exposer une méthode qui joue le rôle essentiel dans presque toutes les démonstrations que nous aurons à faire.

Le principe de cette méthode est dû à M. Goursat, qui l'a appliqué à la démonstration du théorème fondamental de Cauchy (*Acta mathematica*, t. IV). Cette démonstration repose sur un lemme fondamental (*Transactions of the American math. Society*, 1900). Nous donnerons au lemme de M. Goursat une forme tout à fait générale qui le rende susceptible des diverses applications qu'on en peut faire.

Dans les définitions de la continuité ou de la monogénéité d'une fonction en un point, il intervient des conditions d'inégalité qui doivent être vérifiées à l'intérieur de certains cercles ayant ce point pour centre.

Cela conduit à examiner une question relative aux domaines à deux dimensions.

Soit R une région connexe dans le plan de la variable complexe z . Je suppose qu'à chaque point z de R ou de son périmètre correspond un cercle C de rayon r non nul ayant ce point pour centre. Le rayon r peut varier d'un point à l'autre, mais pour aucun point z ce rayon n'est nul.

Cela posé, définissons une expression introduite par M. Goursat.

Désignons par A une portion de la région R . Nous dirons, avec M. Goursat, que la région A satisfait à la condition (α) s'il est possible de trouver dans A ou sur son périmètre un point a tel que la région A soit complètement intérieure au cercle C correspondant au point a et ayant ce point a pour centre.

Supposons maintenant que la région R ne satisfait pas à la condition (α) .

Je dis qu'il est toujours possible de subdiviser R en régions, en nombre fini et assez petites pour que chacune d'elles satisfasse à la condition (α) .

C'est le lemme de M. Goursat.

Il se démontre facilement par le procédé bien connu des subdivisions successives. On fait ainsi voir qu'il est absurde de supposer le lemme en défaut. On peut consulter, à cet effet, l'article de M. Goursat dans les *Transactions*. Dans le raisonnement de M. Goursat, les cercles C , dont il est question plus haut,

peuvent être définis de la façon suivante : z_k étant un point fixe pris dans R ou sur son périmètre, j'attache à ce point le plus grand cercle C tel que l'on ait

$$|f(z) - f(z_k) - (z - z_k)f'(z_k)| < |z - z_k|\varepsilon$$

pour tout point z intérieur à C ; ε étant un nombre positif donné à l'avance.

C'est pour cela que M. Goursat emploie l'expression : condition (α) *relative au nombre* ε . Mais on voit tout de suite que le raisonnement de M. Goursat, pour établir son lemme, est indépendant du procédé particulier par lequel on définit les cercles C . Ce qui est essentiel dans ce lemme, c'est le fait qu'à chaque point pris dans R ou sur son périmètre correspond un cercle de rayon non nul ayant ce point pour centre. Les moyens par lesquels on définit ces cercles n'ont pas à intervenir dans la démonstration du lemme.

Le lemme de M. Goursat est donc vrai sous la forme générale que nous lui avons donnée.

8. Reprenons maintenant la fonction $f(z)$ définie dans le domaine D , simplement connexe. Je fais sur cette fonction les hypothèses suivantes :

1° $f(z)$ est continue dans D ;

2° L'intégrale $\int f(z) dz$ est nulle pour tout contour fermé intérieur à D .

Il s'agit de montrer que $f(z)$ est monogène pour tout point intérieur à D .

Soit z_0 un point intérieur au domaine D . Je trace autour du point z_0 un contour simple fermé C complètement intérieur à D et j'appelle R la région simplement connexe délimitée par le contour C .

Je fais correspondre à chaque point de la région R et de son périmètre un cercle bien déterminé, ayant ce point pour centre.

Au point z_0 j'attache le plus grand cercle G_0 , ayant z_0 comme centre et tel que l'on ait

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon$$

pour tout point z intérieur à G_0 , ε étant un nombre positif donné à l'avance.

Au point z dont la distance à z_0 est $\delta = |z - z_0|$, je fais correspondre un cercle G , de centre z et de rayon r , tel que l'on ait

$$\frac{|f(u) - f(z)|}{\delta^2} \leq \varepsilon$$

pour tout point u intérieur à G ; ε étant le même nombre que tout à l'heure. J'ajoute encore la condition

$$r \leq \frac{1}{2} \delta$$

qui est évidemment compatible avec la condition précédente.

De cette façon, à chaque point de la région R et de son périmètre se trouve attaché un cercle, ayant ce point pour centre.

9. Cela étant, désignons par R_0 la région comprise entre les contours C et G_0 . D'après le lemme de M. Goursat, il est possible de diviser R_0 en un nombre fini de régions assez petites pour que chacune d'elles satisfasse à la condition (α) relativement au nombre ε . Pour fixer les idées, je suppose qu'on a décomposé R_0 en carrés et portions de carrés (carrés écornés par les contours C et G_0) en nombre égal à n .

10. Je me propose de calculer l'intégrale

$$j = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Cette intégrale est égale à la somme des intégrales prises le long de chacun des contours fermés partiels déterminés par la division de la région R_0 .

Considérons d'abord l'intégrale

$$j_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{G_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

On peut encore l'écrire

$$j_0 = f(z_0) + \frac{1}{2i\pi} \int_{G_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

L'intégrale du second membre a un module inférieur à ε , de sorte que l'on peut écrire

$$j_0 = f(z_0) + \chi,$$

χ étant un nombre dont le module est, au plus, égal à ε .

Prenons maintenant dans la région R_0 un carré complet Q_h : ce carré est intérieur au cercle G_h correspondant au point z_h .

On a identiquement

$$\frac{1}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0 - z_h} - \frac{z - z_h}{(z_0 - z_h)^2} + \frac{z - z_h}{z - z_0} \frac{z - z_h}{(z_0 - z_h)^2}.$$

Multiplions, dans les deux membres, par $f(z)$ et intégrons le long du périmètre (Q_h) du carré Q_h .

J'écrirai, pour abrégé,

$$j_h = j'_h + j''_h + j'''_h.$$

L'intégrale

$$j'_h = - \frac{1}{2i\pi} \int_{(Q_h)} \frac{f(z)}{z_0 - z_h} dz$$

est nulle en vertu de nos hypothèses.

L'intégrale

$$j''_h = - \frac{1}{2i\pi} \int_{(Q_h)} \frac{z - z_h}{(z_0 - z_h)^2} f(z) dz$$

peut s'écrire

$$- \frac{1}{2i\pi} \int_{(Q_h)} \frac{z - z_h}{(z_0 - z_h)^2} [f(z) - f(z_h)] dz,$$

puisque l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \frac{f(z_h)}{(z_0 - z_h)^2} \int_{(Q_h)} (z - z_h) dz$$

est nulle. Donc

$$j'_h = - \frac{1}{2i\pi} \int_{(Q_h)} (z - z_h) \frac{f(z) - f(z_h)}{(z_0 - z_h)^2} dz.$$

Sous cette forme on voit que le module de j''_h est inférieur au nombre

$$\frac{2}{\pi} r_h^2 \sqrt{2} \varepsilon,$$

en désignant par r_h la longueur du côté du carré Q_h .

Considérons maintenant l'intégrale

$$j'''_h = \frac{1}{2i\pi} \int_{(Q_h)} \frac{z - z_h}{z - z_0} \frac{z - z_h}{(z_0 - z_h)^2} f(z) dz.$$

On peut l'écrire

$$j'''_h = \frac{1}{2i\pi} \int_{(Q_h)} (z - z_h) \frac{f(z) - f(z_h)}{(z_0 - z_h)^2} \frac{z - z_h}{z - z_0} dz,$$

puisque l'intégrale

$$- f(z_h) \int_{(Q_h)} \frac{(z - z_h)^2}{z - z_0} dz$$

est nulle.

Donc l'intégrale j'''_h est inférieure en module au nombre

$$\frac{2}{\pi} r_h^2 \sqrt{2} \theta_h \varepsilon,$$

en désignant par θ_h un nombre positif convenable inférieur à l'unité. On a, en

effet, sur le périmètre (Q_k)

$$\left| \frac{z - z_k}{z - z_0} \right| < 1,$$

d'après une de nos hypothèses.

En définitive,

$$|j_k| \leq |j'_k| + |j''_k| + |j'''_k|,$$

donc

$$|j_k| \leq \frac{2}{\pi} r_k^2 \sqrt{2} \varepsilon (1 + \theta_k)$$

et, *a fortiori*,

$$|j_k| \leq \frac{4}{\pi} r_k^2 \sqrt{2} \varepsilon.$$

Et, si l'on fait la somme de toutes les intégrales relatives aux carrés complets, on trouve un nombre dont le module est certainement inférieur à

$$\frac{4}{\pi} \alpha \sqrt{2} \varepsilon,$$

en désignant par α l'aire de la région R.

Passons maintenant aux carrés écornés par le contour (C) ou la circonférence (G_0). Soient Q_k un de ces carrés et G_k le cercle, de centre z_k , auquel Q_k est complètement intérieur.

Nous écrivons encore

$$\frac{1}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0 - z_k} - \frac{z - z_k}{(z_0 - z_k)^2} + \frac{z - z_k}{z - z_0} \frac{z - z_k}{(z_0 - z_k)^2}.$$

Multiplions dans les deux membres par $f(z)$ et intégrons le long du périmètre (Q_k).

Nous écrivons encore

$$j_k = j'_k + j''_k + j'''_k,$$

et nous ferons subir aux trois intégrales du second membre les mêmes transformations dont nous nous sommes servi dans le cas du carré complet Q_k .

L'intégrale

$$j'_k = -\frac{1}{2i\pi} \int_{(Q_k)} \frac{f(z)}{z_0 - z_k} dz,$$

est nulle. L'intégrale

$$j''_k = -\frac{1}{2i\pi} \int_{(Q_k)} \frac{z - z_k}{(z_0 - z_k)^2} f(z) dz = -\frac{1}{2i\pi} \int_{(Q_k)} (z - z_k) \frac{f(z) - f(z_k)}{(z_0 - z_k)^2} dz$$

a un module inférieur au produit

$$\frac{1}{2\pi} (4r_k + l_k) r_k \sqrt{2} \varepsilon,$$

l_k étant la longueur de la partie curviligne du contour (Q_k) .

En effet, la fonction soumise à l'intégration a, le long du chemin d'intégration, un module moindre que $r_k \sqrt{2} \varepsilon$; d'autre part, la longueur du chemin d'intégration est certainement inférieure à $4r_k + l_k$. En mettant aussi le facteur $\frac{1}{2\pi}$, on a le résultat annoncé.

L'intégrale

$$j_k''' = \frac{1}{2i\pi} \int_{(Q_k)} \frac{z - z_k}{z - z_0} \frac{z - z_k}{(z_0 - z_k)^2} f(z) dz$$

est égale à l'intégrale suivante

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(Q_k)} (z - z_k) \frac{f(z) - f(z_k)}{(z_0 - z_k)^2} \frac{z - z_k}{z - z_0} dz.$$

Elle a donc un module inférieur à la quantité

$$\frac{1}{2\pi} (4r_k + l_k) r_k \sqrt{2} \theta_k \varepsilon \quad (0 \leq \theta_k \leq 1),$$

donc inférieur à

$$\frac{1}{2\pi} (4r_k + l_k) r_k \sqrt{2} \varepsilon.$$

En définitive

$$|j_k| \leq \frac{1}{\pi} (4r_k + l_k) r_k \sqrt{2} \varepsilon.$$

Faisons maintenant la somme de toutes les intégrales relatives aux carrés écornés. On obtient un nombre dont le module est certainement inférieur à

$$\frac{1}{\pi} 4\alpha \sqrt{2} \varepsilon + \frac{1}{\pi} \lambda \rho \sqrt{2} \varepsilon,$$

ou

$$(4\alpha + \lambda \rho) \frac{\sqrt{2}}{\pi} \varepsilon,$$

λ étant la somme des longueurs du contour (C) et de la circonférence (G_0) ; ρ une limite supérieure des nombres r_k .

Faisons enfin la somme

$$\sum_{v=0}^{v=n} j_v = j$$

de toutes les intégrales que nous venons de considérer. On trouve qu'elle est formée du nombre $f(z_0)$ et d'une partie additionnelle dont le module est certainement inférieur à

$$\varepsilon + \frac{4}{\pi} \alpha \sqrt{2} \varepsilon + \frac{\sqrt{2}}{\pi} (4\alpha + \lambda\rho) \varepsilon,$$

ou à

$$\left(1 + \frac{16}{\pi\sqrt{2}} \alpha\right) \varepsilon + \frac{2\lambda}{\pi\sqrt{2}} \rho \varepsilon.$$

Comme le nombre positif ε est arbitraire on conclut que cette partie additionnelle est rigoureusement nulle.

11. Il est donc établi que l'on a

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

pour tout point du domaine D , le contour (C) étant un contour fermé quelconque, complètement intérieur à D et contenant z_0 dans son intérieur. C'est la formule de Cauchy. Il résulte immédiatement de cette formule que $f(z)$ admet une dérivée au point z_0 .

La fonction $f(z)$ est donc holomorphe dans le domaine D . C'est le résultat que je m'étais proposé d'établir.

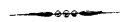
12. Nous avons ainsi des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit holomorphe.

Soit donc $f(z)$ une fonction *continue*, définie dans un domaine D , simplement connexe. Pour démontrer que cette fonction est holomorphe il suffit de démontrer que l'intégrale

$$\int f(z) dz,$$

est nulle pour tout contour fermé intérieur à D .

C'est de ce théorème que nous nous servirons constamment dans la suite.



CHAPITRE II.

LES ENSEMBLES DÉNOMBRABLES.

13. La remarque de Briot et Bouquet conduit, comme je l'ai déjà fait observer, au théorème suivant :

Soit $f(z)$ une fonction de variable complexe, définie dans un domaine D et monogène pour tout point intérieur à D , sauf peut-être pour un point ζ , intérieur à D . Si la fonction $f(z)$ est continue au point ζ elle est aussi monogène en ce point.

La théorie des ensembles permet de donner tout de suite l'extension la plus complète à ce premier résultat. On a ainsi la proposition générale suivante :

Soit $f(z)$ une fonction de variable complexe, définie dans un domaine D . On suppose que cette fonction est monogène pour tout point intérieur à D , sauf peut-être pour certains points ζ formant dans l'intérieur de D un ensemble RÉDUCTIBLE. Si la fonction $f(z)$ est continue pour tout point ζ elle est aussi monogène en ces points.

Je n'entrerai pas dans les détails du raisonnement qui permet de passer du cas d'un seul point ζ au cas où les points ζ forment un ensemble réductible. Ce raisonnement est, en quelque sorte, indépendant de la nature particulière du théorème qu'il s'agit d'établir et il a été exposé plus d'une fois et très complètement à l'occasion d'autres recherches. Je citerai, par exemple, la Thèse de M. Baire : *Sur les fonctions de variables réelles*, où (p. 32-37) la notion d'ensemble *réductible* s'introduit dans une question de nature tout à fait différente. Le raisonnement est d'ailleurs absolument le même, que les points ζ soient situés sur une droite ou distribués dans le plan.

14. Je me propose d'établir un théorème qui comprendra celui qui précède comme cas particulier.

Soit $f(z)$ une fonction de variable complexe, définie dans un domaine D ⁽¹⁾. Je suppose que cette fonction est monogène pour tout point intérieur à D ,

(1) Pour simplifier je suppose toujours que D est un domaine simplement connexe.

sauf peut-être pour certains points ζ , formant dans D un ensemble dénombrable.

Je dis que si la fonction $f(z)$ est continue aux points ζ elle est aussi monogène en ces points.

On remarquera que cet énoncé est plus général que celui du numéro précédent. En effet, il s'agit ici de l'ensemble dénombrable le plus général, qui peut être partout dense, tandis que l'ensemble réductible étant fermé est nécessairement non dense.

15. D'après nos hypothèses, il y a dans l'intérieur du domaine D deux sortes de points : d'abord les points z pour lesquels la fonction est supposée monogène; ensuite les points ζ , pour lesquels on sait seulement que la fonction est continue.

Je désignerai par u tout point intérieur à D lorsqu'il n'y aura pas lieu de distinguer si ce point est un point z ou un point ζ .

Cela posé, prenons un point z fixe. Je lui fais correspondre le plus grand cercle G , de centre z , et tel que l'on ait

$$|f(u) - f(z) - (u - z)f'(z)| < \varepsilon |u - z|$$

pour tout point u intérieur au cercle G .

La lettre ε désigne un nombre positif donné à l'avance.

Considérons maintenant les points ζ . Je suppose que ces points ont été rangés en suite simplement infinie

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k, \dots$$

Au point ζ_k je fais correspondre le plus grand cercle Γ_k , de centre ζ_k , tel que l'on ait

$$|f(u) - f(\zeta_k)| < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

pour tout point u intérieur à Γ_k .

De cette façon, chaque point intérieur à D est le centre d'un cercle, de rayon non nul, attaché à ce point.

16. Cela étant, traçons, dans l'intérieur de D , un contour fermé quelconque C . J'appelle R la région délimitée par le contour C . Maintenant servons-nous du lemme de M. Goursat pour partager R en régions, en nombre fini et assez petites pour que chacune d'elles satisfasse à la condition (2).

Pour fixer les idées je suppose qu'on partage R en carrés par des parallèles aux axes des coordonnées.

17. L'intégrale de la fonction $f(z)$, prise le long du contour C,

$$\int_C f(z) dz$$

est égale à la somme des intégrales prises le long des contours partiels déterminés par la division de la région R.

Considérons d'abord les carrés complètement intérieurs au contour C. Un de ces carrés, Q_h , par exemple, est complètement intérieur à un des cercles G ou Γ .

Supposons d'abord que Q_h soit intérieur au cercle G_h de centre z_h . On a, le long du périmètre (Q_h) du carré Q_h ,

$$|f(u) - f(z_h) - (u - z_h)f'(z_h)| \leq |u - z_h|\varepsilon,$$

d'où l'on conclut facilement

$$\left| \int_{(Q_h)} f(u) du \right| < 4r_h^2 \sqrt{2} \varepsilon,$$

en désignant par r_h la longueur du côté Q_h .

Si Q_h était intérieur au cercle Γ_h , du centre ζ_h , on pourrait écrire

$$\int_{(Q_h)} f(u) du = \int_{(Q_h)} [f(u) - f(\zeta_h)] du,$$

puisque le long du contour fermé (Q_h) l'intégrale

$$f(\zeta_h) \int du$$

est nulle.

Donc

$$\left| \int_{(Q_h)} f(u) du \right| \leq 4r_h \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

En définitive, si l'on fait la somme des intégrales relatives aux carrés complets, on trouve un nombre dont le module est certainement inférieur à

$$4\alpha \sqrt{2} \varepsilon + 4\rho \varepsilon,$$

α étant l'aire de la région R et ρ une limite supérieure des longueurs des côtés r_h .

Passons maintenant aux carrés écornés par le contour C. Soit Q_k un de ces

carrés. Si Q_k est intérieur à un cercle G on aura

$$\left| \int_{(Q_k)} f(u) du \right| \leq (4r_k + l_k) r_k \sqrt{2} \varepsilon,$$

r_k étant la longueur du côté de Q_k et l_k la longueur de la partie curviligne du contour (Q_k) .

Si le carré Q_k était intérieur au cercle Γ_k de centre ζ_k , on aurait

$$\int_{(Q_k)} f(u) du = \int_{(Q_k)} [f(u) - f(\zeta_k)] du$$

et, par conséquent,

$$\left| \int_{(Q_k)} f(u) du \right| \leq (4r_k + l_k) \frac{\varepsilon}{2^k}$$

et, *a fortiori*,

$$\left| \int_{(Q_k)} f(u) du \right| \leq (4r_k + \lambda) \frac{\varepsilon}{2^k},$$

λ étant la longueur du contour C .

De sorte que la somme de toutes les intégrales relatives aux carrés écornés est inférieure, en module, à

$$4\alpha\sqrt{2}\varepsilon + \lambda\rho\sqrt{2}\varepsilon + (4\rho + \lambda)\varepsilon,$$

en supposant que le nombre ρ , de tout à l'heure, est aussi une limite supérieure pour les côtés r_k .

Faisons maintenant la somme des intégrales relatives à tous les carrés tant écornés que complets.

On trouve que

$$\left| \int_C f(u) du \right| \leq (8\alpha + \lambda\rho)\sqrt{2}\varepsilon + (8\rho + \lambda)\varepsilon.$$

Puisque l'intégrale du premier membre est une constante et, dans le second membre, le nombre ε est arbitraire, on conclut que cette intégrale est nulle.

18. Maintenant, si l'on se rappelle que le contour C est un contour fermé quelconque, intérieur à D et que la fonction $f(u)$ est continue dans D , on conclut, d'après le théorème du Chapitre précédent, que la fonction $f(u)$ est holomorphe dans D .

C'est ce que l'on voulait démontrer.



CHAPITRE III.

LES ENSEMBLES FERMÉS.

19. La remarque de Briot et Bouquet a été généralisée par M. Painlevé. Soit $f(u)$ une fonction de variable complexe, définie dans un domaine D . Je suppose que $f(u)$ est monogène dans D sauf peut-être pour les points d'une certaine ligne rectifiable L . M. Painlevé a montré (*Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, p. 27) que si $f(u)$ est continue pour les points ζ de la ligne L , cette fonction est aussi monogène pour ces mêmes points.

20. Si l'on veut donner à ce résultat une extension analogue à celle que nous avons indiquée au n° 13 pour le cas d'un point ζ isolé, on est naturellement conduit à considérer une ligne rectifiable comme l'élément d'un certain ensemble et à raisonner sur ces éléments comme l'on raisonne sur des points pour arriver à la notion d'ensemble *réductible*.

Cette manière de procéder paraît avoir été adoptée par beaucoup d'auteurs qui ont eu à faire usage de la notion d'*ensemble de lignes*.

21. Pour pouvoir raisonner avec précision, il faut adopter des définitions convenables.

Soit

(E) $E_0, E_1, \dots, E_n, \dots$

une suite d'ensembles fermés, certains de ces ensembles pouvant se réduire à des points isolés. Le système des ensembles E_n forme un ensemble total que je désigne par E .

Un quelconque des ensembles de la suite (E) sera dit un *élément*.

Deux éléments E_h et E_k seront dit *écartés* s'ils n'ont pas tous leurs points en commun. Un exemple simple de deux ensembles écartés nous est donné par deux droites qui se coupent.

La notion d'*écart* est susceptible d'une définition précise, dans le cas des ensembles bornés.

Soit P_h un point quelconque pris sur E_h ; la distance du point P_h à l'ensemble E_k est une fonction continue de la position du point P_h . Cette fonction admet un maximum Δ_{hk} . C'est ce maximum que j'appellerai l'*écart* de l'ensemble E_h par rapport à E_k . Le nombre Δ_{hk} ne peut être nul que si tous les points de E_h font partie de E_k .

Prenons maintenant un point P_k dans l'ensemble E_k ; la distance du point P_k à l'ensemble E_h est une fonction continue de la position du point P_k : elle admet un maximum Δ_{kh} et ce nombre ne peut être nul que si tous les points de E_k font partie de E_h . Δ_{kh} est l'écart de l'ensemble E_k par rapport à E_h .

La somme

$$\Delta_{hk} + \Delta_{kh}$$

peut être appelée *écart mutuel* des ensembles E_h et E_k .

Si l'écart mutuel des deux ensembles est nul, ces deux ensembles coïncident et réciproquement. Si $\Delta_{kh} = 0$, E_h fait partie de E_k ; si $\Delta_{kh} = 0$, E_k fait partie de E_h .

22. La notion d'écart étant acquise, revenons à la suite (E).

Je dirai que l'ensemble E_ω est la limite de la suite (E), si l'écart mutuel

$$\Delta_{\omega n} + \Delta_{n\omega}$$

tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment. J'appellerai *élément-limite*, tout ensemble qui est la limite d'une suite d'ensembles. L'ensemble des *éléments-limites* forme un ensemble E' que l'on peut appeler le dérivé de E. En raisonnant sur E' comme nous venons de le faire sur E, on définira l'ensemble E'' dérivé de E' , et ainsi de suite.

Si l'ensemble E contient son dérivé, on dira que E est fermé.

Si un élément E_h appartient à E sans appartenir à E' , on dira que E_h est un élément discret dans E.

Un élément discret n'est pas nécessairement *isolé*. Un élément E_k est isolé dans E lorsqu'il n'a pas de points communs avec aucun des ensembles qui composent E.

23. Supposons maintenant que tous les E_n soient des lignes rectifiables. L'ensemble E est dénombrable; si, en outre, il est fermé, nous dirons que E est *réductible*.

Moyennant les définitions qui précèdent, les mêmes raisonnements qui permettent de passer du cas d'un point ζ au cas d'un ensemble ponctuel réductible, permettront ici de passer du cas d'une seule ligne rectifiable au cas d'une suite de lignes rectifiables formant un ensemble *réductible*.

24. J'ai tenu à exposer ce procédé de démonstration parce que c'est celui qui se présente naturellement à l'esprit lorsque l'on considère des ensembles de lignes et que l'on veut établir entre ces ensembles et les ensembles de points les plus grandes analogies.

Mais on ne peut pas tarder à s'apercevoir des inconvénients que présente cette façon de concevoir les choses.

D'abord, on raisonne sur des lignes et non sur des points : la notion de ligne est une notion complexe et un peu confuse. L'analogie avec les ensembles de points ne peut se maintenir, même pour les notions les plus simples. Il suffit d'observer, par exemple, que, dans un ensemble de points, un *point-limite* est un élément que (sauf la propriété qui le caractérise) rien ne distingue des autres éléments de l'ensemble : un point-limite est toujours un point, tandis que dans une suite de lignes une *ligne-limite* peut se réduire à un point ou être une ligne *discontinue* alors que toutes les lignes de la suite, qui l'admettent comme limite, sont continues. Dans le cas particulier d'une suite de lignes rectifiables, la *ligne-limite* n'est pas nécessairement une ligne rectifiable.

Ceci constitue un grave inconvénient parce que la démonstration que l'on a pu faire pour chaque ligne de la suite peut ne plus s'appliquer pour la *ligne-limite*. Rien de pareil ne s'était présenté avec les ensembles de points.

En outre, nous avons pris comme *éléments* de l'ensemble E des lignes E_n et, il semble au premier abord que nous avons établi ainsi entre l'ensemble E et son élément E_n la même distinction ou, pour mieux dire, une distinction analogue à celle qui existe entre un ensemble de points et son élément : le point.

Or, dans le cas d'un ensemble de lignes, la distinction dont il s'agit est le plus souvent artificielle. Car, un ensemble de lignes continues *non isolées* est lui-même une ligne continue. L'inconvénient auquel donne lieu cette circonstance résulte de la remarque suivante :

Dans le cas d'un ensemble de points (*réductible*) toute la démonstration repose sur le résultat obtenu avec un point isolé. La démonstration du cas général se ramène, se *réduit* à la démonstration du cas simple d'un seul point : c'est en quoi réside l'avantage de la méthode.

Dans le cas d'un ensemble de lignes, l'ensemble E étant de même nature que ses éléments, il n'y aura, dans certains cas, aucun avantage à faire la démonstration sur un élément plutôt que sur l'ensemble E lui-même.

25. Je vais maintenant reprendre, à un autre point de vue, la question qui nous intéresse et pour cela je commencerai par préciser certaines notions relatives à la mesure de l'*étendue* des ensembles à deux dimensions.

Soit E un ensemble fermé à deux dimensions. Autour de chaque point ζ , de l'ensemble E, pris comme centre, décrivons un cercle de rayon ρ : l'ensemble des points intérieurs à ces cercles forme un ou plusieurs domaines dont je désigne l'*aire* totale par $a(\rho)$. Lorsque ρ tend vers zéro, $a(\rho)$ tend vers un nombre positif ou nul α , que j'appelle *aire* de l'ensemble E.

Supposons que l'aire de E soit nulle et formons le rapport

$$\frac{a(\rho)}{2\rho}.$$

Il peut arriver que, lorsque ρ tend vers zéro, le rapport précédent reste inférieur à un nombre convenable. Dans ce cas, désignons par λ la limite supérieure d'indétermination pour $\rho = 0$, du rapport précédent. Je dirai que l'ensemble E a une longueur finie et que cette *longueur* est égale à λ .

26. Considérons maintenant un ensemble de longueur finie. Je divise le plan en carrés de côté r par des parallèles aux axes coordonnés. Parmi les carrés ainsi obtenus je retiens seulement ceux qui possèdent, dans leur intérieur ou seulement sur leur périmètre, des points de l'ensemble. Soit n le nombre de ces carrés.

Je dis que le produit nr reste inférieur à un nombre fixe lorsque r tend vers zéro. Il est évident que n est une fonction de r et, lorsque r tend vers zéro, en général, n augmente; il s'agit de démontrer que, pour un ensemble de longueur finie, le produit nr est borné quelque petit que soit r .

Pour cela j'observe que l'aire des carrés dont nous nous occupons est nr^2 . Cela étant, posons

$$\rho = r\sqrt{2}$$

et considérons le rapport

$$\frac{a(\rho)}{2\rho}$$

dont la limite sert à définir la longueur de E.

Si r est assez petit, on a

$$a(\rho) < 2\lambda\rho + 2\varepsilon\rho,$$

ε étant un nombre positif très petit.

Mais, puisque

$$\rho = r\sqrt{2},$$

on voit que

$$nr^2 < a(\rho);$$

donc

$$nr^2 < 2\lambda r\sqrt{2} + \varepsilon \cdot 2r\sqrt{2}$$

ou

$$nr < 2\lambda\sqrt{2} + 2\varepsilon\sqrt{2}$$

ou encore

$$nr < \Lambda,$$

Λ étant un nombre supérieur à $2\lambda\sqrt{2}$.

27. Soit maintenant $f(u)$ une fonction de variable complexe, définie dans un domaine D . Je suppose que $f(u)$ est monogène dans D , sauf peut-être pour certains points ζ formant un ensemble de longueur finie. Je me propose de montrer que si $f(u)$ est continue aux points ζ elle est aussi monogène en ces points.

Je désignerai par z les points pour lesquels on sait que la fonction est monogène et je continuerai à désigner par u un point quelconque, intérieur à D , lorsqu'il n'y aura pas lieu à distinguer si ce point est un z ou un ζ .

Faisons correspondre à un point de monogénéité z le plus grand cercle G , ayant ce point pour centre, et tel que l'on ait

$$|f(u) - f(z) - (u - z)f'(z)| \leq |u - z|\varepsilon$$

pour tout point u intérieur à G , ε étant un nombre positif donné à l'avance.

A un point ζ faisons correspondre le plus grand cercle Γ , ayant ζ pour centre, et tel que l'on ait

$$|f(u) - f(\zeta)| \leq \varepsilon$$

pour tout point intérieur à Γ .

Cela posé, traçons à l'intérieur de D un contour fermé quelconque C . Le domaine D est supposé, comme toujours, simplement connexe.

Je décompose le plan en carrés par des parallèles aux axes coordonnés. D'après le lemme de M. Goursat, on peut faire cette décomposition de façon que la région R limitée par C se trouve partagée en un nombre fini de portions satisfaisant à la condition (α).

Dans l'énoncé de cette condition, les cercles G ou Γ jouent évidemment le même rôle.

La région R se trouve donc partagée en un nombre fini de carrés dont un certain nombre sont écornés par le contour C .

Ces carrés, complets ou écornés, peuvent être répartis en trois catégories :

- 1° Ceux qui ne contiennent pas de points ζ ;
- 2° Ceux qui ne contiennent des points ζ que sur leur périmètre;
- 3° Ceux qui contiennent des points ζ dans leur intérieur. Ces carrés peuvent d'ailleurs contenir ou non, sur leur périmètre, des points ζ .

Je vais évaluer l'intégrale

$$\int f(u) du$$

prise le long du contour fermé C .

Il est clair que cette intégrale est égale à la somme des intégrales prises le long de chacun des contours fermés partiels obtenus par le partage de la région R .

L'intégrale prise le long du périmètre d'un carré de première catégorie est nulle, en vertu du théorème fondamental de Cauchy. Il en est de même de l'in-

tégrale prise le long du périmètre d'un carré de deuxième catégorie. M. Goursat a montré, en effet, dans son *Cours d'Analyse*, que le théorème fondamental de Cauchy subsiste pourvu que la fonction $f(u)$ soit holomorphe dans une région et continue sur sa frontière.

Il reste les carrés de troisième espèce.

Prenons d'abord un carré complet Q_h . Si ce carré est intérieur à un cercle G , on aura

$$\left| \int_{(Q_h)} f(u) du \right| < 4r^2\sqrt{2}\varepsilon.$$

Si le carré est intérieur à un cercle Γ , on aura

$$\left| \int_{(Q_h)} f(u) du \right| < 4z\varepsilon,$$

puisque l'on peut écrire

$$\int_{(Q_h)} f(u) du = \int_{(Q_h)} [f(u) - f(\zeta)] du,$$

le point ζ étant le centre du cercle Γ auquel Q_h est complètement intérieur.

La somme des intégrales prises le long des périmètres de tous les carrés complets de troisième espèce est un nombre dont le module est certainement inférieur à

$$4\alpha\sqrt{2}\varepsilon + 4nr\varepsilon,$$

en désignant par α l'aire de la région R et par n le nombre des carrés de troisième espèce.

Passons aux carrés écornés.

Soit Q_k un de ces carrés. S'il est intérieur à un cercle G , on aura

$$\left| \int_{(Q_k)} f(u) du \right| < (4r + l_k)r\sqrt{2}\varepsilon.$$

S'il est intérieur à un cercle Γ , on aura

$$\left| \int_{(Q_k)} f(u) du \right| < (4r + l_k)\varepsilon.$$

En faisant la somme de toutes les intégrales relatives aux carrés écornés, on trouve que le module de cette somme est certainement inférieur à

$$(4\alpha - lr)\sqrt{2}\varepsilon + (4nr + l)\varepsilon,$$

l désignant la longueur du contour G .

Désignons maintenant par L le nombre auquel reste inférieur le produit nr . On trouve que la somme de toutes les intégrales relatives aux carrés complets ou incomplets est inférieure, en module, au nombre

$$8\alpha\sqrt{2}\varepsilon + 8L\varepsilon + lr\sqrt{2}\varepsilon + l\varepsilon.$$

Puisque le nombre ε est arbitraire, on conclut

$$\int_C f(u) du = 0.$$

La fonction $f(u)$ étant continue dans D et le contour C étant un contour fermé quelconque, il est démontré que $f(u)$ est holomorphe dans D .

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Soit $f(u)$ une fonction de variable complexe définie dans un domaine D simplement connexe. On suppose que cette fonction est monogène dans D , sauf peut-être pour certains points ζ formant, dans D , un ensemble de longueur finie. Si la fonction $f(u)$ est continue aux points ζ , elle est aussi monogène en ces points et, par suite, est holomorphe dans D .

28. Pour démontrer cette proposition, nous avons supposé que la décomposition du domaine D , d'après le lemme de M. Goursat, a été faite de façon que tous les carrés soient égaux.

Cette supposition est compatible avec nos hypothèses actuelles sur les cercles G et Γ .

En effet, la fonction $f(u)$ étant continue dans le domaine D , est uniformément continue dans une région R complètement intérieure à D .

Le nombre ε étant donné, les rayons ρ des cercles Γ admettent dans R une limite inférieure non nulle. Dans ces conditions, on peut trouver une décomposition en carrés de côté r telle que tout carré contenant un point ζ , au moins, satisfasse à la condition (α).

En effet, il suffit de prendre

$$r < \frac{\rho_0}{\sqrt{2}},$$

en désignant par ρ_0 la limite inférieure des rayons ρ .

Plus loin j'aurai l'occasion de revenir sur cette remarque et de la présenter sous une forme plus générale.

29. Je vais chercher maintenant à généraliser le résultat du n° 27 en lui donnant toute l'extension possible. Pour faire cette extension, j'aurai besoin d'un théorème sur les ensembles fermés que je vais d'abord établir.

Soit E un ensemble fermé à deux dimensions. On sait que tout ensemble fermé est, d'une seule manière, la somme d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble parfait. On peut ainsi écrire l'égalité symbolique :

$$E = E_0 + P.$$

Je me propose de définir un mode de décomposition de l'ensemble parfait P .

Remarquons, à ce propos, que l'ensemble dénombrable E_0 fournit une solution du problème de Briot et Bouquet. En extrayant de l'ensemble P un ensemble E_1 , je me propose de montrer que E_1 fournit aussi une solution du problème de Briot et Bouquet.

J'aurai extrait ainsi de tout ensemble fermé E deux ensembles E_0 et E_1 qui fournissent une solution du problème de Briot et Bouquet.

Je compléterai ce résultat en montrant que l'ensemble E_2 défini par l'égalité symbolique

$$E = E_0 + E_1 + E_2$$

n'est pas une solution du problème qui nous occupe.

30. Soit P un ensemble parfait quelconque. Je prends un point ζ de cet ensemble et je décris, de ce point comme centre, un cercle Γ , de rayon ρ . Si, en prenant ρ assez petit, tous les points de P contenus dans Γ peuvent être répartis sur une suite dénombrable d'ensembles de longueur finie, je dirai que ζ est un point de *première espèce*.

Si, au contraire, quelque petit que l'on prenne ρ , les points de P contenus dans Γ ne peuvent pas être répartis sur une suite dénombrable d'ensembles de longueur finie, je dirai que le point ζ est de *seconde espèce*.

D'après cette classification on peut écrire

$$P = E_1 + E_2,$$

en désignant par E_1 et E_2 respectivement les ensembles de points de première et de seconde espèce.

Si $E_2 = 0$, je dirai que E_1 est un *ensemble réductible d'ordre un*.

Pour expliquer cette dénomination, il faudrait étudier la structure de l'ensemble E_1 , en généralisant la notion d'ensemble *dérivé*. C'est cette étude qui m'a amené à la notion d'ensemble *réductible d'ordre un*, mais elle est trop étrangère au sujet de ce travail et je me borne aux indications strictement indispensables.

Les ensembles *réductibles* ordinaires peuvent être appelés *ensembles réductibles d'ordre zéro*.

31. Je suppose maintenant que E_2 n'est pas nul. Supprimons, dans P , les points de première espèce qui forment E_1 : il reste E_2 .

E_2 est un ensemble parfait, comme on le voit facilement. Je dis que E_2 ne peut pas contenir des points de première espèce. En effet, si dans un cercle Γ , de centre ζ , les points de E_2 contenus dans Γ pouvaient être répartis sur une suite dénombrable d'ensembles de longueur finie, on n'aurait qu'à rétablir dans Γ les points supprimés, appartenant à E_1 , pour voir que, dans Γ , les points de P forment une suite dénombrable d'ensembles de longueur finie. Donc ζ ne serait pas un point de E_2 , ce qui est contradictoire.

Donc l'ensemble E_2 ne contient pas de points de première espèce. C'est là la propriété caractéristique de l'ensemble E_2 . J'appelle E_2 un ensemble *irréductible*.

32. Je résume nos connaissances relatives aux ensembles fermés quelconques.

On sait qu'un ensemble fermé peut se mettre, d'une seule manière, sous la forme

$$E = E_0 + P,$$

E_0 étant un ensemble dénombrable et P un ensemble parfait. Mais E_0 n'est pas un ensemble dénombrable quelconque. Voici une propriété caractéristique de E_0 .

Puisque P est fermé, on peut décrire d'un point ζ_k appartenant à E_0 un cercle Γ_k de rayon $\rho_k < 0$, déterminé parfaitement par la condition suivante :

Le cercle Γ_k ne contient aucun point de P dans son intérieur, mais il contient au moins un point de P sur sa circonférence.

Le cercle Γ_k étant ainsi défini, on démontre que l'ensemble E_0 est *réductible* dans tout cercle Γ'_k concentrique à Γ_k et de rayon $\rho'_k < \rho_k$. Ce n'est pas une propriété qui appartienne à tout ensemble dénombrable.

Passant à l'ensemble P , nous l'avons décomposé en deux ensembles :

$$P = E_1 + E_2,$$

E_2 étant un ensemble parfait qui ne contient pas de points de première espèce.

L'ensemble E_1 jouit d'une propriété analogue à celle qui caractérise E_0 . En effet, autour d'un point ζ , appartenant à E_1 , décrivons un cercle Γ ne contenant, ni dans son intérieur, ni sur sa circonférence, de points de E_2 .

Cela est possible puisque E_2 est parfait. Dans ces conditions les points de E_1 , contenus dans Γ , forment dans ce cercle un ensemble *réductible d'ordre un*.

33. Si nous avons fait reposer la notion d'ensemble réductible d'ordre *un* sur la considération des nombres transfinis, il nous serait facile maintenant de montrer que le théorème du n° 27, relatif à un ensemble de longueur finie, s'étend à un ensemble réductible d'ordre *un*. Mais à défaut de cet appel à la théorie des

nombres transfinis on peut, pour démontrer le théorème que nous avons en vue, mettre en évidence une propriété des ensembles réductibles d'ordre un et cette propriété nous permettra de considérer ces ensembles comme des cas particuliers d'une catégorie d'ensembles pour lesquels je donnerai, dans le Chapitre suivant, un théorème général.

C'est la même méthode que nous avons suivie au n° 13, pour les ensembles réductibles d'ordre *zéro* : nous les avons considérés comme des cas particuliers des ensembles dénombrables quelconques.

Je me propose maintenant de montrer qu'un ensemble réductible d'ordre un est un cas particulier des ensembles formés par une suite dénombrable d'ensembles de longueur finie. D'une façon plus générale, dans la formule de tout à l'heure

$$P = E_1 + E_2,$$

l'ensemble E_1 est formé d'une suite d'ensembles de longueur finie.

En effet, soit ζ un point de E_1 : on peut décrire autour du point ζ , comme centre, un cercle Γ ne contenant pas de points de E_2 dans son intérieur, mais contenant au moins un point de E_2 sur sa circonférence.

De cette façon, à chaque point ζ de E_1 se trouve attaché un cercle de rayon non nul, ayant ce point pour centre.

Considérons l'ensemble des points de E_1 pour lesquels le rayon en question est $\geq \rho$; ρ étant un nombre positif assez petit. L'ensemble de ces points peut être réparti sur une suite dénombrable d'ensembles de longueur finie, sans quoi cet ensemble contiendrait au moins un point de seconde espèce, ce qui est impossible.

Prenons maintenant une suite de nombres positifs

$$\rho_0 > \rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_n > \dots$$

tendant vers zéro.

Les points de l'ensemble E_1 caractérisés par la condition

$$\rho_{k-1} \geq \rho > \rho_k$$

peuvent être répartis sur une suite dénombrable d'ensembles de longueur finie.

Mais, dans ces conditions, on a tout de suite cette proposition générale :

Les points de E_1 peuvent être répartis sur une suite dénombrable d'ensembles de longueur finie.

Car, une suite dénombrable, dont les éléments sont des suites dénombrables, peut être mise sous la forme d'une suite simple dénombrable.

En particulier, un ensemble réductible peut être mis sous la forme d'une suite dénombrable d'ensembles de longueur finie.

C'est la proposition que j'avais en vue.

34. Pour terminer ce Chapitre, je vais montrer qu'en général un ensemble *irréductible* E_2 ne fournit pas une solution du problème de Briot et Bouquet.

Un ensemble irréductible est un ensemble parfait qui ne contient pas des points de première espèce.

Je prends comme domaine D un rectangle ABCD et je suppose que le côté AB de ce rectangle est placé sur l'axe réel Ox .

Sur le côté AB je définis une fonction de variable réelle $f(x)$ par le procédé suivant :

Soit

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$$

une suite de nombres réels compris dans l'*intérieur* de l'intervalle (a, b) et formant dans cet intervalle un ensemble dénombrable partout dense.

Cela posé, je prends sur le côté AB un intervalle A_1B_1 et, dans cet intervalle, je définis la fonction $f(x)$ par la condition d'être constante et égale à y_1 .

Je prends maintenant, dans AB, un deuxième intervalle A_2B_2 n'ayant pas de point commun avec A_1B_1 , et dont la situation par rapport à A_1B_1 est la même ⁽¹⁾ que celle de y_2 par rapport à y_1 . Dans A_2B_2 je définis la fonction $f(x)$ par la condition d'être constante et égale à y_2 .

Pour prendre dans AB un troisième intervalle, j'observe que les deux nombres y_1 et y_2 ont partagé l'intervalle (a, b) en trois autres intervalles. De même, dans AB, si l'on enlève les segments A_1B_1 et A_2B_2 , il reste trois segments qui correspondent aux intervalles de (a, b) . La position du nombre y_3 dans (a, b) nous indiquera, sans ambiguïté, dans quel segment de AB il faudra prendre A_3B_3 .

Dans A_3B_3 la fonction $f(x)$ sera constante et égale à y_3 .

Cette opération peut être continuée indéfiniment, en observant la prescription suivante :

Deux segments quelconques A_hB_h et A_kB_k n'ont aucun point commun.

J'ajoute maintenant une autre condition. Soit l la longueur de AB et l_n la longueur de A_nB_n : on a

$$\sum_1^{\infty} l_n = l.$$

Il s'ensuit immédiatement que tout point pris dans AB appartient à un des segments A_nB_n ou est point-limite d'une suite de ces segments.

En outre, le procédé que nous avons adopté nous permet d'affirmer que la disposition relative de A_hB_h et A_kB_k est la même que la disposition relative de y_h et y_k .

(1) Voici ce que j'entends par là : si $y_2 < y_1$ le segment A_2B_2 devra être pris à *gauche* du segment A_1B_1 ; si $y_2 > y_1$ le segment A_2B_2 devra être pris à *droite* du segment A_1B_1 .

Il est facile de voir comment, par tout ce qui précède, se trouve achevée la définition de la fonction $f(x)$.

Soit M un point quelconque pris dans AB . Si le point M appartient à un des segments $A_n B_n$, la valeur de $f(M)$ sera le nombre γ correspondant à ce segment. Si le point M est *extérieur* à tout segment $A_n B_n$, l'ensemble de ces segments peut être partagé, par rapport à M , en deux ensembles : le premier contenant tous les segments situés à gauche du point M et le second contenant tous les segments situés à droite du point M .

Cette répartition des segments $A_n B_n$ en deux classes permet de diviser aussi, en vertu de la correspondance établie entre les segments $A_n B_n$ et les nombres γ_n , le système des nombres réels γ_n en deux ensembles H et K jouissant des propriétés suivantes :

- 1° Tout nombre de H est moindre que tout nombre de K ;
- 2° On peut toujours prendre dans H et dans K respectivement deux nombres γ_h et γ_k tels que l'on ait

$$\gamma_k - \gamma_h < \varepsilon,$$

quel que soit le nombre positif ε , donné à l'avance.

Les ensembles H et K définissent donc un nombre réel γ et ce nombre sera la valeur de la fonction $f(x)$ au point M .

La fonction $f(x)$ se trouve ainsi définie pour tout point du segment AB . On voit d'ailleurs que $f(x)$ est continue dans AB et non constante, dans cet intervalle, et cependant constante dans tout segment $A_n B_n$.

Pour avoir une fonction définie dans le rectangle $ABCD$ je fais la convention suivante :

Sur une parallèle MN à BC la fonction $f(u)$ est constante et égale à $f(M)$.

Dans le rectangle $ABCD$ il y a deux sortes de points :

1° Les points $u = z$ tels que dans un cercle de rayon assez petit, ayant le point z comme centre, la fonction $f(u)$ est constante. Pour ces points $f(u)$ admet évidemment une dérivée égale à zéro.

2° Les points $u = \zeta$ pour lesquels n'a pas lieu la propriété précédente. Pour ces points la fonction est évidemment continue.

Les points ζ forment dans le rectangle $ABCD$ un ensemble *irréductible* et la fonction $f(u)$ n'est pas holomorphe dans ce rectangle.

On peut donc conclure de tout ce qui a été fait jusqu'ici :

Si l'on considère un ensemble *fermé* quelconque, ce n'est que dans le cas où cet ensemble est *réductible* que l'on peut être certain qu'il fournit une solution du problème de Briot et Bouquet.



CHAPITRE IV.

CAS GÉNÉRAL.

35. Je me propose de généraliser le résultat obtenu dans le Chapitre II.

Soit $f(u)$ une fonction de variable complexe définie dans un domaine D . Je suppose que $f(u)$ est monogène dans D sauf peut-être pour certains points ζ formant dans D une suite dénombrable

$$E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$$

d'ensembles de longueur finie. Si la fonction $f(u)$ est continue aux points ζ , elle est aussi monogène en ces points.

On a, dans D , deux sortes de points :

1° Les points $u = z$ pour lesquels la fonction $f(z)$ est supposée monogène ;

2° Les points $u = \zeta$ pour lesquels la fonction $f(z)$ est supposée continue.

Je désignerai, comme d'habitude, par u tout point intérieur à D lorsqu'il n'y aura pas de distinction à faire entre les points de D .

Cela posé, je fais correspondre au point z le plus grand cercle G tel que l'on ait

$$|f(u) - f(z) - (u - z)f'(z)| \leq |u - z| \varepsilon$$

pour tout point u intérieur à G ; ε étant un nombre positif donné à l'avance.

Au point ζ , faisant partie de l'ensemble E_k , j'attache le cercle Γ tel que l'on ait

$$|f(u) - f(\zeta)| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$$

pour tout point u intérieur à Γ , dont le centre est ζ .

De cette façon à tout point u intérieur au domaine D se trouve attaché un cercle de rayon non nul ayant ce point pour centre.

Je fais maintenant sur les ensembles E_n l'hypothèse suivante : la *longueur* de E_n est, quel que soit n , au plus égale au nombre L .

Cela étant supposé, décomposons le domaine D en régions partielles par des parallèles aux axes coordonnés. Ces régions seront, par exemple, des carrés, complets ou écornés par la frontière de D .

Traçons dans D un contour fermé C et qui soit complètement intérieur à D . J'appelle R la région délimitée par C .

Je me propose d'évaluer l'intégrale

$$\int_C f(u) du.$$

En vertu du lemme de M. Goursat on a pu faire la décomposition de D en régions partielles de telle façon que chaque région partielle appartenant à R satisfasse à la condition (α) .

L'intégrale précédente est égale à la somme des intégrales prises le long de tous les contours fermés partiels obtenus par la décomposition du domaine R .

Considérons d'abord les carrés complets et soit Q un de ces carrés. Si Q est intérieur à un cercle G on aura

$$\left| \int_{(Q)} f(u) du \right| \leq 4r^2 \sqrt{2} \varepsilon,$$

et si Q est intérieur à un cercle Γ on aura

$$\left| \int_{(Q)} f(u) du \right| < 4r \frac{\varepsilon}{2^k},$$

en supposant que le point ζ , centre de Γ , est un point de l'ensemble E_k .

Si l'on fait maintenant la somme de toutes les intégrales relatives aux carrés complets, on trouve un nombre dont le module est certainement inférieur à

$$4\alpha \sqrt{2} \varepsilon + 4\Lambda \varepsilon$$

en tenant compte des remarques faites au n^{os} 26 et 28 relativement aux ensembles de longueur finie.

Passons aux carrés Q' écornés par le contour C . Pour un carré intérieur à un cercle G on aura

$$\left| \int_{(Q')} f(u) du \right| < (4r + l)r \sqrt{2} \varepsilon,$$

l étant la partie curviligne de (Q') .

Si le carré Q' est intérieur à un cercle Γ on aura

$$\left| \int_{(Q')} f(u) du \right| < (4r + l) \frac{\varepsilon}{2^k},$$

en supposant que le point ζ , centre de Γ , fait partie de l'ensemble E_k .

Faisons la somme des intégrales relatives aux carrés écornés. On trouve, en tenant toujours compte de la remarque du n^o 26, que cette somme est moindre, en module, que le nombre

$$4\alpha \sqrt{2} \varepsilon + \lambda r \sqrt{2} \varepsilon + 4\Lambda \varepsilon + \lambda \varepsilon,$$

en désignant par λ la longueur du contour C .

Donc, en définitive,

$$\left| \int_C f(u) du \right| \leq 8\alpha\sqrt{2}\varepsilon + 8\Lambda\varepsilon + \lambda r\sqrt{2}\varepsilon + \lambda\varepsilon,$$

en faisant la somme de toutes les intégrales relatives à tous les carrés complets ou incomplets.

Comme le nombre ε est arbitraire, on conclut que l'intégrale

$$\int_C f(u) du$$

est nulle.

Le contour C étant un contour quelconque intérieur à D , il est démontré que la fonction $f(u)$ est holomorphe dans le domaine D .

36. L'hypothèse relative à la longueur des ensembles E_n n'est pas essentielle. Supposons, en effet, que les longueurs respectives

$$L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$$

aillent en croissant indéfiniment : pour rentrer dans le cas de la démonstration précédente, il suffit de partager chaque ensemble E_k en un nombre fini d'ensembles tels que la longueur de chacun soit au plus égale à L .

Cela est évidemment possible.

En rangeant maintenant ces ensembles partiels en une suite simplement infinie, on se trouvera exactement dans le cas du numéro précédent.

Nous nous sommes donc affranchis de la condition relative aux nombres L_n .

37. Voici maintenant une application des résultats que nous venons d'obtenir.

Soit $f(u)$ une fonction de variable complexe définie dans un domaine D . Les points de ce domaine sont de deux sortes :

1° Points $z = x + iy$ ayant les deux coordonnées irrationnelles : pour ces points on sait que la fonction $f(u)$ admet une dérivée ;

2° Points $\zeta = \xi + i\eta$, dont une coordonnée au moins est rationnelle : pour ces points on sait seulement que $f(u)$ est continue.

Le théorème précédent nous permet d'affirmer que $f(u)$ admet une dérivée pour tout point ζ .

Une autre application est relative au cas de l'ensemble *réductible* E_1 , défini dans le Chapitre précédent.

L'ensemble E_1 étant formé d'une suite dénombrable d'ensembles de longueur finie, le théorème actuel lui est applicable.

On voit bien que l'ensemble E_1 est un cas particulier des ensembles que nous

considérons dans ce Chapitre. En effet, E_1 étant fermé, il existe nécessairement des régions du plan ne contenant aucun point de E_1 , tandis que l'ensemble formé par une suite dénombrable quelconque d'ensembles de longueur finie peut être partout dense. C'est le cas de l'ensemble des points ζ , dans l'exemple de tout à l'heure.

38. Pour terminer ce Chapitre, je vais résumer, dans un énoncé général, les résultats obtenus sur le problème dont nous nous sommes occupés.

Soit $f(u)$ une fonction de variable complexe définie dans un domaine D .

Les points u intérieurs à D sont de deux espèces :

1° Points $u = z$, pour lesquels la fonction est supposée homogène ;

2° Points $u = \zeta$, pour lesquels la fonction est supposée continue.

Si les points ζ forment dans D une suite dénombrable d'ensembles de longueur finie, la fonction $f(u)$ admet une dérivée en tout point ζ .

CHAPITRE V.

ENSEMBLES D'AIRES NULLES.

39. On peut, moyennant quelques définitions, démontrer relativement aux ensembles d'aire nulle un théorème qui se rapporte encore à la continuité des fonctions de variable complexe.

Soit $f(u)$ une fonction de variable complexe et supposons que $f(u)$ est continue au point u_0 . Je dirai que la continuité de $f(u)$ est *régulière* au point u_0 si l'on peut trouver un nombre positif M tel que l'on ait

$$|f(u) - f(u_0)| < M |u - u_0|$$

pour tout point u intérieur à un cercle décrit du point u_0 comme centre avec un rayon suffisamment petit.

Il est clair que la condition précédente n'impose pas à la fonction $f(u)$ la nécessité d'être homogène au point u_0 . Mais, si $f(u)$ est homogène au point u_0 , sa continuité est évidemment régulière en ce point.

Si la fonction $f(u)$ est régulièrement continue en tout point u d'un certain domaine D et si l'on peut prendre le même nombre M pour tous les points u , je dirai que la continuité de $f(u)$ dans D est *uniformément régulière*.

Grâce à ces définitions, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Soit $f(u)$ une fonction de variable complexe définie dans un domaine simplement connexe D . Je suppose :

1° Que la fonction $f(u)$ est monogène pour tout point intérieur à D , sauf peut-être pour certains points ζ formant dans D un ensemble d'aire nulle;

2° Que $f(u)$ est continue aux points ζ .

Si la continuité de $f(u)$ est uniformément régulière dans le domaine D , cette fonction est holomorphe dans D .

40. Traçons, dans D , un contour fermé C n'ayant pas de point commun avec la frontière de D .

A un point de monogénéité z , situé dans l'intérieur de C ou sur C , je fais correspondre un cercle G tel que l'on ait

$$|f(u) - f(z) - (u - z)f'(z)| \leq |u - z| \varepsilon$$

pour tout point u intérieur au cercle G , ayant le point z pour centre.

A un point ζ je fais correspondre un cercle Γ , de centre ζ et de rayon très petit ρ .

Décomposons maintenant la région délimitée par C en carrés par des parallèles aux axes coordonnés. On peut effectuer cette décomposition de façon que tout carré satisfasse à la condition (a).

L'intégrale

$$\int_C f(u) du$$

est égale à la somme des intégrales $\int f(u) du$ prises le long des contours fermés qui limitent les régions partielles.

Pour un carré complet intérieur à un cercle G , on a

$$\left| \int f(u) du \right| < 4r^2 \sqrt{2} \varepsilon.$$

Pour un carré complet intérieur à un cercle Γ , on aura

$$\left| \int f(u) du \right| < 4r^2 M \sqrt{2}.$$

Pour les carrés écornés on aura

$$\left| \int f(u) du \right| < (4r + l)r \sqrt{2} \varepsilon$$

s'il s'agit d'un carré intérieur à un cercle G , et

$$\left| \int f(u) du \right| < (4r + l)Mr\sqrt{2}$$

s'il s'agit d'un carré intérieur à un cercle Γ .

En faisant la somme de toutes les intégrales relatives à tous les carrés, complets ou incomplets, on trouve

$$\left| \int_C f(u) du \right| < 8\alpha\sqrt{2}\varepsilon + \lambda r\sqrt{2}\varepsilon + 8M\omega\sqrt{2} + M\lambda r\sqrt{2},$$

la lettre ω désigne la somme des aires des carrés qui contiennent des points ζ ; les autres lettres ont la même signification que dans les démonstrations précédentes.

Or, l'ensemble des points ζ ayant une aire nulle, le nombre ω tend vers zéro avec r , ce qui montre que

$$\int_C f(u) du = 0.$$

Le contour C étant quelconque, on conclut que la fonction $f(u)$, supposée continue dans D , est holomorphe dans ce domaine.

C'est ce qu'on voulait démontrer.

41. Il est facile de s'assurer que la condition relative à l'aire de l'ensemble des points ζ est essentielle. Si cette aire n'est pas nulle la proposition n'est plus vraie.

On peut, en effet, construire une fonction synectique $g(u)$ ayant les propriétés suivantes :

- 1° $g(u)$ est monogène dans le domaine D , où elle est définie, sauf pour certains points ζ formant, dans D , un ensemble parfait d'aire *non nulle*;
- 2° $g(u)$ est continue aux points ζ ;
- 3° La continuité de $g(u)$ est uniformément régulière dans le domaine D ;
- 4° $g(u)$ n'est pas holomorphe dans D .

Pour définir $g(u)$ il me suffira de connaître cette fonction pour les valeurs réelles de la variable, en supposant que le domaine D est un rectangle placé sur l'axe réel Ox .

Je rappelle le procédé employé pour définir un ensemble parfait *non dense* P .

Ayant pris un intervalle (a, b) on retranche successivement de cet intervalle les points *intérieurs* à une suite dénombrable d'intervalles :

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n), \dots,$$

pris dans (a, b) et assujettis aux conditions suivantes :

- 1° Deux quelconques de ces intervalles n'ont aucun point commun;

2° La longueur λ_n du plus grand segment conservé, après avoir retranché les intervalles $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$, tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment.

L'ensemble P comprend des points de deux espèces distinctes : en premier lieu les points a_n et b_n qui sont les extrémités des intervalles (a_n, b_n) et qui forment un ensemble dénombrable; en second lieu, l'ensemble non dénombrable des points ξ tels que chacun d'eux est extérieur à tout intervalle (a_n, b_n) .

Posons

$$s = \sum_1^{\infty} |a_n - b_n|, \quad l = |a - b|.$$

On a évidemment

$$s \leq l.$$

Si $s < l$, je poserai

$$\lambda = l - s;$$

λ est, par définition, la longueur de l'ensemble P.

Ces notions étant rappelées, considérons un ensemble parfait non dense de longueur λ et soient a et b les points extrêmes de cet ensemble.

Pour définir la fonction $g(x)$ dans l'intervalle (a, b) il me sera commode de la définir d'abord pour les points de l'ensemble P.

A cet effet je définis, dans un intervalle $(0, \lambda)$ une fonction $\gamma(t)$ assujettie seulement aux conditions suivantes :

- 1° $\gamma(t)$ est continue dans l'intervalle $(0, \lambda)$;
- 2° Le rapport

$$\frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_2)}{t_1 - t_2}$$

est inférieur, en module, à un nombre M quels que soient les points t_1 et t_2 pris dans l'intervalle $(0, \lambda)$.

En d'autres termes la fonction $\gamma(t)$ est une fonction continue à nombres dérivés bornés.

Cela posé, soit ξ un point quelconque de l'ensemble P : il est compris entre a et b . L'ensemble parfait formé par tous les points de P qui se trouvent entre a et ξ a une longueur t qu'il est facile de calculer : on n'a qu'à retrancher de la longueur $|a - \xi|$ la somme des longueurs de tous les intervalles (a_k, b_k) qui se trouvent situés dans l'intervalle (a, ξ) .

On a évidemment

$$t < \lambda.$$

A cette valeur de t correspond une valeur de la fonction $\gamma(t)$ définie dans l'in-

tervalle $(0, \lambda)$, soit $\gamma(t) = \eta$. Je pose, comme définition,

$$g(\xi) = \eta.$$

De cette façon la fonction g se trouve définie pour tout point de l'ensemble P. Pour définir g aux autres points de l'intervalle (a, b) j'observe que

$$g(a_k) = g(b_k).$$

Alors, dans chaque intervalle *contigu* à P, j'attribue à la fonction $g(x)$ la valeur qu'elle a aux extrémités de cet intervalle.

La fonction $g(x)$ se trouve maintenant définie pour tout point de l'intervalle (a, b) . On voit facilement d'ailleurs que $g(x)$ possède, dans (a, b) , les mêmes propriétés que la fonction $\gamma(t)$ dans l'intervalle $(0, \lambda)$. En outre $g(x)$ est constante dans tout intervalle (a_n, b_n) mais non constante dans (a, b) .

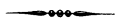
Pour avoir une fonction définie dans le rectangle ABCD je fais la convention suivante :

Sur une parallèle MN au côté BC la fonction $g(u)$ est constante et égale à $g(M)$.

On voit, sans aucune difficulté, que la fonction $g(u)$ ainsi définie satisfait aux quatre conditions que nous lui avons imposées.

42. Faisons, avant de terminer ce Chapitre, une remarque.

Nous avons construit, au n° 34, une fonction synectique $f(u)$. Cette fonction satisfait aux conditions 1° et 2° du n° 39, mais on peut s'assurer que sa continuité n'est pas régulière, dans le domaine où elle se trouve définie.



DEUXIÈME PARTIE.

LES SINGULARITÉS DES FONCTIONS ANALYTIQUES UNIFORMES.

1. Soit $h(z)$ une fonction analytique uniforme. J'appelle D son domaine naturel d'existence et F la frontière de ce domaine. Je désignerai par z les points intérieurs au domaine D ; par ζ les points de la frontière F et par Z les points extérieurs au domaine D .

Cela posé, je vais distinguer deux espèces de points-frontières. Prenons, en effet, un point ζ et décrivons, autour de ce point comme centre, un cercle Γ de rayon ρ .

Deux cas peuvent se présenter :

- 1° Si petit que soit le rayon ρ , on trouve dans Γ des points Z ;
- 2° On peut prendre ρ assez petit pour que dans le cercle Γ il n'y ait aucun point Z .

La frontière F est un ensemble *fermé*. On peut facilement voir que les points-frontières de première espèce forment un ensemble *parfait*.

Dans ce qui suit j'ai surtout en vue les points-frontières de seconde espèce. Pour éviter toute confusion je réserverai le nom de *points-frontières* aux points ζ de première espèce et j'appellerai *points singuliers* les points ζ de seconde espèce.

D'après cette classification une fonction analytique uniforme qui n'admet pas d'*espace lacunaire* n'a que des points *singuliers*. Au contraire, une fonction à espace lacunaire peut être dépourvue de points singuliers.

Tel est le cas de la transcendante de M. Fredholm :

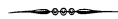
$$\sum_0^{\infty} a^n z^{n^2} \quad (|a| < 1).$$

2. Désignons par S l'ensemble des points singuliers.

Une conséquence immédiate des résultats obtenus dans la première Partie est la suivante :

Si S est un ensemble de longueur finie ou, plus généralement, un ensemble *réductible*, la fonction $h(z)$ est certainement discontinue dans le voisinage de tout point de S .

Car, si $h(z)$ était continue dans un cercle, si petit qu'il soit, ayant un point ζ pour centre, cette fonction serait holomorphe dans ce cercle.



CHAPITRE I.

LES ENSEMBLES DE LONGUEUR NULLE.



3. Ce théorème général peut être précisé encore dans le cas particulier où l'ensemble S est de longueur nulle.

Je vais montrer, en effet, que dans ce cas les points ζ jouissent de la propriété caractéristique des points singuliers essentiels : dans le voisinage d'un point ζ la fonction $h(z)$ s'approche autant qu'on veut de toute valeur donnée.

Soit ζ un point quelconque de S . Autour de ζ , pris comme centre, je décris un cercle Γ complètement intérieur à D .

Dans le cercle Γ les points de S forment un ensemble *fermé*. Or, tout ensemble fermé est composé d'un ensemble dénombrable (*cf.* n° 32, I^e Partie) et d'un ensemble parfait.

Je fais abstraction des points de l'ensemble dénombrable, puisque ces points sont des pôles, des points singuliers essentiels ou limites de tels points et la théorie de ces singularités est connue. On peut encore raisonner de la façon suivante :

Si dans le cercle Γ , l'ensemble S n'est pas parfait, on peut construire, en s'appuyant sur un théorème de M. Mittag-Leffler, une fonction analytique $k(z)$ équivalente (1) à $h(z)$ en tous les points de l'ensemble dénombrable dont il a été question. La différence $h(z) - k(z)$ est donc une fonction holomorphe dans Γ ou admettant, dans ce cercle, un ensemble parfait de points singuliers.

Je peux donc supposer que les points ζ forment dans Γ un ensemble parfait. J'ai déjà supposé que cet ensemble est de *longueur nulle*.

4. Comme type d'ensemble parfait et de longueur nulle je donnerai celui-ci :

On divise l'intervalle $(0, 1)$ en cinq parties égales par les points $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$ et l'on exclut les points intérieurs au segment $(\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$. On divise de même chacun

(1) On dit que deux fonctions analytiques sont équivalentes en un point lorsque leur différence est *régulière* en ce point.

des segments $(0, \frac{1}{5})$ et $(\frac{4}{5}, 1)$ en cinq parties égales et l'on exclut dans chacun d'eux les points intérieurs au segment médian formé de trois divisions. Il reste quatre segments non exclus : on opère sur chacun d'eux, comme on a opéré sur le segment $(0, 1)$ et ainsi indéfiniment.

L'ensemble P des points qui ne sont jamais exclus est parfait et de longueur nulle.

Pour avoir une définition analytique de l'ensemble P, représentons les abscisses des points de l'intervalle $(0, 1)$ dans le système de numération de base 5. Dans ce système un nombre t , compris entre 0 et 1, est représenté par une série de la forme suivante :

$$t = \frac{a_1}{5} + \frac{a_2}{5^2} + \frac{a_3}{5^3} + \dots,$$

chacun des entiers a étant égal à 0, 1, 2, 3 ou 4.

Il est facile de voir qu'un point quelconque ξ de l'ensemble P est donné par la formule

$$\xi = \frac{\alpha_1}{5} + \frac{\alpha_2}{5^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{5^n} + \dots,$$

le nombre des fractions étant fini ou infini et chaque quantité α pouvant prendre l'une des valeurs 0 ou 4.

Pour avoir un ensemble parfait de longueur nulle, à deux dimensions, je pose

$$\eta = \frac{\beta_1}{5} + \frac{\beta_2}{5^2} + \dots + \frac{\beta_n}{5^n} + \dots,$$

les nombres β pouvant prendre la valeur 0 ou 4.

Les points $\zeta = \xi + i\eta$ forment, dans le carré de côté un construit dans l'angle des parties positives des axes coordonnés, un ensemble parfait de longueur nulle.

5. Reprenons maintenant le cercle Γ décrit autour de l'un quelconque des points ζ : j'ai supposé que Γ était complètement intérieur au domaine D. Dans l'exemple que je viens de donner on peut prendre comme domaine D le carré dont il a été question.

Soit H un nombre complexe quelconque. Il s'agit de démontrer que, dans le voisinage d'un point ζ , la fonction $h(z)$ approche autant que l'on veut de la valeur H. D'une façon précise : *Étant donné un nombre ϵ aussi petit qu'on voudra, il existe toujours dans le cercle Γ , quel que soit le rayon ρ , des points z pour lesquels*

$$|h(z) - H| < \epsilon.$$

En effet, si cela n'était pas, la fonction

$$h_1(z) = \frac{1}{h(z) - \mathbf{H}}$$

resterait, en module, inférieure à un certain nombre \mathbf{M} dès que le rayon ρ aura été pris suffisamment petit.

Mais je vais démontrer que, dans ces conditions, la fonction $h_1(z)$ est holomorphe dans le cercle Γ .

En effet, la fonction $h_1(z)$ est monogène pour tout point du cercle Γ sauf peut-être pour les points ζ .

Cela étant, je divise le plan en carrés de côté r par des parallèles aux axes coordonnées. Le cercle Γ se trouve alors partagé (si r est suffisamment petit) en un nombre fini de carrés, dont un certain nombre sont écornés par la circonférence (Γ).

Ces carrés, tant complets qu'écornés, peuvent être répartis en trois catégories :

- 1° Ceux qui ne contiennent pas des points ζ ;
- 2° Ceux qui ne contiennent des points ζ que sur leur périmètre;
- 3° Ceux qui contiennent des points ζ dans leur intérieur. Ces carrés peuvent d'ailleurs contenir ou non, sur leur périmètre, des points ζ .

Cela posé, l'intégrale

$$\int_{(\Gamma)} h_1(z) dz,$$

prise le long de la circonférence (Γ), est égale à la somme des intégrales prises le long de chacun des contours fermés partiels obtenus par la division du cercle Γ .

L'intégrale

$$\int h_1(z) dz,$$

prise le long du périmètre d'un carré de première espèce, est nulle en vertu du théorème fondamental de Cauchy.

Prenons alors un carré de deuxième ou de troisième catégorie et supposons que c'est un carré complet. On aura

$$\left| \int h_1(z) dz \right| < 4\mathbf{M}r,$$

l'intégrale étant prise le long du périmètre du carré.

Pour un carré incomplet, on aura

$$\left| \int h_1(z) dz \right| < 4(r + l_k)\mathbf{M},$$

en désignant par l_k la longueur de l'arc de (Γ) intercepté par le carré d'indice k .

En définitive, on trouve

$$\left| \int_{(\Gamma)} h_1(z) dz \right| < 4Mnr + M \sum_1^m l_k,$$

n étant le nombre des carrés, tant complets qu'incomplets, et m le nombre des carrés incomplets de deuxième ou de troisième espèce.

Or, l'ensemble S étant de longueur nulle, le produit nr tend vers zéro avec r . Il en est de même de la somme

$$\sum_1^m l_k,$$

puisque, s'il y a des points ζ sur la circonférence (Γ) , leur ensemble est de longueur nulle.

Donc

$$\int_{(\Gamma)} h_1(z) dz = 0.$$

Remarquons, d'ailleurs, que le raisonnement fait pour la circonférence (Γ) s'applique à tout contour fermé intérieur à Γ . On peut donc affirmer que l'intégrale

$$\int h_1(z) dz,$$

prise le long d'un contour fermé quelconque, intérieur à Γ , est nulle.

C'est là une des conditions exigées pour que $h_1(z)$ soit holomorphe dans le cercle Γ .

L'autre condition c'est la *continuité*.

6. Ici se place une remarque relative aux fonctions synectiques telles que nous les avons définies au n° 3 de la première Partie.

Weierstrass, en donnant la définition des fonctions analytiques, a remarqué, en même temps, que la notion de fonction analytique n'est pas équivalente à la notion de fonction synectique ⁽¹⁾.

Cette différence se manifeste aussi par la nature des singularités que peuvent présenter ces fonctions.

Soit $f(z)$ une fonction synectique discontinue en un point ζ : je dirai que cette

(1) *Monatsberichte*, August 1880 (728^e s.).

singularité est *artificielle* si l'on peut rétablir la continuité de $f(z)$ en changeant la valeur de cette fonction au point ζ .

Une fonction analytique ne peut pas avoir des singularités artificielles. C'est une conséquence de la définition de Weierstrass.

Au contraire, une fonction synectique définie par une certaine expression analytique peut posséder des singularités artificielles. M. Painlevé en a donné un exemple, au début de sa Thèse *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, et M. Goursat, dans son *Cours d'Analyse*, a de nouveau insisté sur cette particularité des fonctions synectiques.

7. Revenant à la fonction $h_1(z)$ je dis que si $h_1(z)$ est discontinue aux points ζ de l'ensemble S , on peut rétablir la continuité en attribuant à $h_1(z)$, en chacun des points ζ , une valeur convenable.

La fonction $h_1(z)$ étant alors continue dans Γ et l'intégrale

$$\int h_1(z) dz$$

étant nulle pour tout contour fermé intérieur à Γ , nous serons certains, d'après un théorème de la première Partie, que $h_1(z)$ est holomorphe dans Γ .

Je vais me servir encore des notations employées dans le cours de ce travail.

Par la lettre ζ je désigne les points singuliers.

Je réserve la lettre z pour désigner les points pour lesquels $h(z)$ est monogène.

Enfin je désignerai par u un point intérieur à Γ , lorsqu'il n'y aura lieu à distinguer si ce point est un z ou un ζ .

Cela posé, considérons l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(\Gamma)} \frac{h_1(u)}{u-z} du.$$

Le raisonnement déjà fait pour l'intégrale $\int h_1(u) du$ montre que l'on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(\Gamma)} \frac{h_1(u)}{u-z} du = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\gamma)} \frac{h_1(u)}{u-z} du,$$

(γ) étant un cercle très petit décrit autour du point z . En effet, entre les deux circonférences (Γ) et (γ) , la fonction

$$\frac{h_1(u)}{u-z}$$

présente les mêmes caractères que $h_1(u)$.

Mais on peut prendre (γ) assez petit pour que dans ce cercle il n'y ait aucun

point ζ . La fonction $h_1(u)$ étant alors holomorphe, dans γ , on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(\gamma)} \frac{h_1(u)}{u-z} du = h_1(z).$$

Donc, en même temps,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(\Gamma)} \frac{h_1(u)}{u-z} du = h_1(z).$$

Cette égalité étant établie, je pose maintenant, *comme définition*,

$$h_1(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\Gamma)} \frac{h_1(u)}{u-\zeta} du.$$

Nous avons ainsi rétabli la continuité de $h_1(u)$, mais, en même temps, l'on voit que $h_1(u)$ est monogène pour tout point ζ .

Donc $h_1(u)$ est monogène dans Γ .

C'est le résultat fondamental pour notre démonstration.

En effet, la fonction $h_1(u)$ étant holomorphe dans Γ , son inverse

$$h(z) - \mathbf{H}$$

ne peut être que méromorphe dans le cercle Γ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il est donc démontré que, si les points singuliers d'une fonction analytique uniforme forment un ensemble parfait de longueur nulle, tout point ζ de cet ensemble jouit de la propriété caractéristique des points singuliers essentiels : dans le voisinage de ζ , la fonction approche autant que l'on veut de toute valeur donnée.

8. Nous pouvons donner maintenant un théorème général sur les points singuliers qui forment un ensemble de longueur nulle.

Dans le cas général un ensemble fermé de longueur nulle est formé d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble parfait.

Nous venons de voir que, dans le voisinage de tout point de l'ensemble parfait, la fonction approche autant qu'on veut de toute valeur donnée. Les points de l'ensemble dénombrable sont des pôles, des points singuliers essentiels ou limites de tels points.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Une fonction analytique uniforme, dont les points singuliers ζ forment un ensemble de longueur nulle, ne peut pas être bornée dans le voisinage d'aucun point ζ . En d'autres termes, on ne peut pas avoir

$$|h(z)| < \mathbf{M},$$

quel que soit z , \mathbf{M} étant un nombre fixe.

Nous savions par les théorèmes démontrés dans la première Partie que la fonction $h(z)$ ne peut pas être continue sur l'ensemble S . Nous voyons maintenant que $h(z)$ est non seulement discontinue mais même *infinie* dans le voisinage de S .

CHAPITRE II.

ENSEMBLES DE LONGUEUR FINIE.

9. On sait qu'une fonction analytique uniforme admettant comme singularité une coupure (par exemple un segment de droite) peut être bornée dans le voisinage de cette coupure, que j'appellerai K . D'une façon précise : si l'on délimite autour de K une région R ne contenant d'autres points singuliers que ceux de K , on peut avoir, quel que soit le point z dans R ,

$$|h(z)| < M,$$

M étant un nombre positif fixe.

Je ne m'arrêterai pas à donner des exemples de cette nature. Ils sont trop connus. Mais, si les points singuliers ζ , au lieu de remplir toute une ligne, forment un ensemble *non dense*, il me semble intéressant de montrer, par un exemple, que, même dans ce cas, la fonction $h(z)$ peut être bornée dans le voisinage des points ζ .

10. Je prends donc, pour me placer dans des conditions simples, un ensemble P à une dimension et je suppose P parfait et non dense. Il est bien entendu que la longueur de P est finie et non nulle.

L'ensemble de P comprend des points de deux espèces distinctes :

1° Les points $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \dots$, qui sont les extrémités des intervalles *contigus* à P ; ces points forment un ensemble dénombrable.

2° Les points ξ , qui sont extérieurs à tout intervalle contigu; ces points forment un ensemble non dénombrable.

Je désigne par α et β les points extrêmes de l'ensemble P et par λ la longueur de cet ensemble.

Pour construire une fonction analytique ayant la propriété annoncée, j'ai besoin d'une certaine fonction de variable réelle définie dans l'intervalle (α, β) .

On sait qu'il existe des fonctions dérivées bornées et s'annulant dans tout in-

tervalle : je les appellerai *fonctions de M. Köpcke*, car c'est M. Köpcke qui, le premier, a construit de pareilles fonctions.

Je considère une fonction de M. Köpcke, ayant les propriétés suivantes :

- 1° Elle est nulle pour tout point α_n ou β_n et dans tout intervalle contigu à P ;
- 2° Elle est nulle aussi pour les points extrêmes α et β .

Soit $g(t)$ cette fonction. Formons l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{g(t)}{t-z} dt.$$

Je dis que la fonction $h(z)$ définie par cette intégrale est bornée dans tout le plan.

Il est bien entendu que, pour former l'intégrale précédente, je me suis servi de la définition de M. Lebesgue. On peut, il est vrai, considérer (d'après un théorème de M. Baire) la fonction $g(t)$ comme la limite d'une suite des fonctions continues $g_n(t)$ et définir l'intégrale ci-dessus comme la limite d'une suite d'intégrales

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{g_n(t)}{t-z} dt.$$

Mais tout cela est inutile et je définis directement la fonction $h(z)$ par l'intégrale portant sur $g(t)$.

Le fait que sous le signe d'intégration figure un nombre complexe z ne peut introduire aucune difficulté.

Il est manifeste que les points singuliers de la fonction $h(z)$ font partie de l'ensemble P.

D'autre part, puisque $g(t)$ est une dérivée, la fonction

$$\frac{g(t)}{t-z}$$

est aussi une dérivée.

Il existe donc une fonction $F(t, z)$ définie, à une constante près, dans l'intervalle (α, β) et telle que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{g(t)}{t-z}.$$

Dans tout ce qui précède le nombre complexe z est à considérer comme un paramètre.

On a donc

$$h(z) = F(\beta, z) - F(\alpha, z).$$

Pour voir maintenant comment se comporte la fonction $h(z)$ lorsque le point z

s'approche d'un point ξ de l'ensemble P , considérons un point $z = \xi + iy$ dont l'abscisse ξ est fixe et dont l'ordonnée y joue le rôle de paramètre.

Posons

$$k(t) = g(t) - g(\xi).$$

On aura

$$h(z) = \frac{1}{2i\pi} g(\xi) \log \frac{\beta - z}{\alpha - z} + \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{k(t)}{t - z} dt.$$

Dans cette formule la fonction

$$\log \frac{\beta - z}{\alpha - z}$$

est déterminée par la condition de s'annuler à l'infini. Quant à l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{k(t)}{t - z} dt,$$

elle tend, lorsque y tend vers zéro, vers la *valeur principale* (au sens de Cauchy) de l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{k(t)}{t - \xi} dt.$$

Désignons par $E(t, z)$ la fonction primitive de

$$\frac{k(t)}{t - z}.$$

La valeur principale de l'intégrale précédente est

$$E(\beta, \xi) - E(\alpha, \xi).$$

C'est une fonction bornée. Je poserai

$$H(\alpha, \beta, z) = E(\beta, z) - E(\alpha, z).$$

Donc, en définitive,

$$h(z) = \frac{1}{2i\pi} g(\xi) \log \frac{\beta - z}{\alpha - z} + \frac{1}{2i\pi} H(\alpha, \beta, z).$$

Nous n'avons pas envisagé le cas où le point z s'approcherait de l'un des points extrêmes α et β . Mais ce cas rentre dans l'analyse précédente.

En effet, nous avons supposé

$$g(\alpha) = 0, \quad g(\beta) = 0.$$

Cela étant, prenons deux points

$$a = \alpha - h, \quad b = \beta + h;$$

le nombre h étant positif. Convenons que dans les intervalles $(a, \alpha - h)$ et $(\beta + h, b)$ la fonction $g(t)$ soit nulle. Dans l'intervalle (a, b) la fonction $g(t)$ est une fonction dérivée, et les points α et β sont maintenant intérieurs à (a, b) .

En résumé, $h(z)$ étant la somme de deux fonctions bornées est elle-même une fonction bornée.

11. L'analyse précédente montre que tout point ζ de l'ensemble P est un point singulier de la fonction $h(z)$. Nous savons que, dans le cas où les points ζ forment un ensemble de longueur nulle, la fonction $h(z)$ ne peut pas être bornée. Dans l'exemple précédent nous sommes certains, d'après la nature de la fonction $g(t)$, que les points ζ forment un ensemble de longueur non nulle. En effet, soit A une valeur que prend, en un certain point, une fonction dérivée, définie dans un intervalle : l'ensemble des points où la fonction est différente de A a une longueur non nulle. C'est une proposition démontrée par M. Lebesgue.

12. Dans l'exemple que nous venons de donner nous avons supposé que l'ensemble parfait P , de longueur finie, était placé sur une droite. Mais la définition générale que nous avons donnée (n° 23 de la première Partie) de la *longueur* d'un ensemble fermé ne suppose nullement que P soit placé sur une ligne rectifiable.

Considérons l'ensemble parfait formé par les points $\zeta = \xi + i\eta$ définis de la façon suivante

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{4^n} + \dots, \\ \eta &= \frac{\beta_1}{4} + \frac{\beta_2}{4^2} + \dots + \frac{\beta_n}{4^n} + \dots, \end{aligned}$$

le nombre des fractions étant fini ou infini et les quantités α et β ne pouvant prendre d'autres valeurs que 0 ou 3.

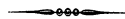
Cet ensemble a une longueur finie et cette longueur est égale à $\frac{1}{2}$.

Pour pouvoir construire, à l'aide d'une intégrale, une fonction analytique uniforme et bornée, admettant comme points singuliers les points ζ , il faudrait pouvoir faire passer une ligne rectifiable par tous les points ζ .

On est ainsi naturellement amené à se demander si tout ensemble de longueur finie ne fait pas partie d'une certaine ligne rectifiable convenablement choisie.

Tout porte à penser que cette question doit être résolue par l'affirmative. En effet, on a pu faire passer une ligne continue par tous les points d'un carré. Il

semble naturel que l'on puisse faire passer une ligne rectifiable par tous les points d'un ensemble de longueur finie.



CHAPITRE III.

ENSEMBLES D'AIRE NULLE.



13. Nous avons démontré (Chap. III, I^{re} Partie) que tout ensemble parfait se compose d'un ensemble E_1 et d'un ensemble E_2 que nous avons appelé *irréductible*.

L'ensemble E_2 est parfait. L'ensemble E_1 possède la propriété suivante :

Si l'on décrit, d'un point de E_1 comme centre, un cercle ne contenant pas de points de E_2 dans son intérieur, mais pouvant en contenir sur sa circonférence, les points de E_1 contenus dans ce cercle forment un ensemble *réductible d'ordre un*.

Nous sommes assurés, par les théorèmes de la première Partie, qu'une fonction analytique uniforme dont les points singuliers forment un ensemble parfait ne peut pas être continue pour les points de l'ensemble E_1 . Il n'en est pas de même pour les points de l'ensemble E_2 : les théorèmes de la première Partie ne nous apprennent rien sur cet ensemble.

Nous avons même pu construire (n^o 34 de la première Partie) une fonction synectique (non analytique) dont les points ζ forment un ensemble E_2 , cette fonction étant continue dans tout le domaine où elle est définie.

Il se pourrait donc qu'il existe des fonctions analytiques uniformes dont les points singuliers forment un ensemble irréductible d'aire nulle, ces fonctions étant continues, même pour les points singuliers.

Comme type d'ensemble purement ponctuel irréductible et d'aire nulle, je donnerai celui-ci :

$$\xi = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{3^n} + \dots,$$

$$\eta = \frac{\beta_1}{3} + \frac{\beta_2}{3^2} + \dots + \frac{\beta_n}{3^n} + \dots,$$

le nombre des fractions étant fini ou infini et les quantités α et β ne pouvant prendre d'autres valeurs que 0 ou 2.

14. Si les points singuliers d'une fonction analytique uniforme $h(z)$ forment

un ensemble d'aire nulle, et, si la fonction $h(z)$ est continue en ces points singuliers, on peut démontrer un théorème relatif à la dérivée : cette dérivée $h'(z)$ devient nécessairement infinie lorsque l'on s'approche d'un point singulier. Donc $h'(z)$ n'est pas bornée.

La démonstration de ce théorème est identique à une démonstration que nous avons donnée, dans la première Partie, pour une proposition relative aux ensembles d'aire nulle.

CHAPITRE IV.

ENSEMBLES D'AIRES NON NULLES.

15. Nous avons montré jusqu'à présent qu'une fonction analytique uniforme, dont les points singuliers forment un ensemble de longueur nulle, devient nécessairement infinie lorsque l'on s'approche d'un point singulier. Donc, elle ne peut pas être bornée. Dans le cas où les points singuliers forment un ensemble de longueur finie, non nulle, la fonction peut être bornée.

Considérons maintenant le cas où les points singuliers forment un ensemble d'aire non nulle. Je me propose de montrer, par un exemple, que dans ce cas la fonction peut être non seulement bornée, mais continue même aux points singuliers.

Je définis d'abord un ensemble parfait d'aire non nulle :

D'un rectangle R je retranche les points d'une région R_1 en forme de croix, de façon que le domaine restant se compose de quatre rectangles séparés, situés dans les coins du rectangle primitif. Sur chacun de ces rectangles j'opère de la même façon et ainsi indéfiniment.

Je suppose que la somme

$$\sigma = \sum_1^{\infty} \alpha_k$$

des aires α_k des régions retranchées R_k est inférieure à l'aire α du rectangle R . L'ensemble E des points $\zeta = \xi + i\eta$ non retranchés a pour aire le nombre $\alpha - \sigma$.

Je désigne par $z = x + iy$ les points qui ne font pas partie de l'ensemble E , et par $w = u + iv$ un point quelconque du rectangle R , sans distinguer s'il appartient ou non à l'ensemble E .

Cela posé, définissons dans R une fonction continue quelconque $\varphi(u, v)$: pour fixer les idées on peut supposer que φ est une fonction réelle et positive.

Formons maintenant l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \iint_{(R)} \frac{[(u-x) - i(v-y)] \varphi}{(u-x)^2 + (v-y)^2} du dv$$

étendue au rectangle R. On peut encore l'écrire sous la forme suivante

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(R)} \frac{\varphi(w)}{w-z} d\omega,$$

$d\omega$ étant l'élément d'aire et w le centre de gravité de cet élément.

De cette intégrale retranchons successivement les intégrales

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(R_k)} \frac{\varphi(w)}{w-z} d\omega$$

étendues aux régions R_k .

Posons maintenant

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(R)} \frac{\varphi(w)}{w-z} d\omega - \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=1}^{k=\infty} \int_{(R_k)} \frac{\varphi(w)}{w-z} d\omega;$$

$F(z)$ est la fonction analytique cherchée. On peut voir, en effet, en s'appuyant sur les propriétés bien connues du potentiel, que $F(z)$ est une fonction continue dans tout le plan. Ses points singuliers font partie de l'ensemble E. La fonction $F(z)$ est continue aussi en ces points.

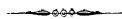
Remarquons, d'ailleurs, que l'on peut définir plus simplement la fonction $F(z)$ en faisant usage de la définition générale de l'intégrale, donnée par M. Lebesgue.

Désignons par ψ une fonction égale à φ pour tout point ζ de l'ensemble E, et égale à zéro pour tout autre point.

On aura

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(R)} \frac{\psi(w)}{w-z} d\omega.$$

La condition imposée à l'ensemble E d'avoir une aire non nulle est évidemment essentielle : autrement la fonction $F(z)$ serait identiquement nulle.



CHAPITRE V.

CONCLUSION.

16. Le but de cette seconde Partie était, comme je l'ai déjà dit dans l'Introduction, de montrer que l'*étendue* de l'ensemble des points singuliers joue un rôle essentiel dans la façon dont une fonction analytique uniforme se comporte aux environs de ces points singuliers.

Dans les exemples que j'ai donnés, j'ai choisi de préférence des ensembles *purement ponctuels*.

On sait que la propriété caractéristique de ces ensembles est la suivante :

Soit ζ un point quelconque d'un ensemble E , purement ponctuel, que je suppose fermé. Du point ζ comme centre décrivons un cercle Γ de rayon ρ : quelque petit que soit le rayon ρ , les points de E qui se trouvent dans l'intérieur de Γ ne partagent pas ce cercle en régions séparées. En d'autres termes, on peut aller d'un point z intérieur à Γ et ne faisant pas partie de E à un autre point z quelconque, dans Γ , par un chemin continu (sans sortir de Γ) et sans rencontrer des points ζ de l'ensemble E .

J'ai choisi de préférence des ensembles purement ponctuels, parce que ces ensembles étant les plus simples semblaient, par ce fait même, devoir jouir des propriétés particulières au point de vue qui nous occupe. Il n'en est rien, comme nous l'avons vu.

Le fait qu'un ensemble de points singuliers est *purement ponctuel* ne constitue pas un criterium suffisant pour distinguer les fonctions analytiques uniformes d'après la manière dont elles se comportent aux environs des points singuliers. Le véritable criterium paraît être l'*étendue* de l'ensemble des points singuliers. En effet, pour un ensemble purement ponctuel quelconque, nous avons vu que les circonstances les plus diverses sont possibles, tandis que, en précisant l'*étendue* de l'ensemble des points singuliers, on obtient des résultats dignes d'intérêt.