SUR L'INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

PAR K. M. PETERSON.

DEUXIÈME MÉMOIRE.

Traduit du russe par M. Édouard DAVAUX,

Ingénieur de la Marine à Toulon ([1]).

XI. — ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES, BILINÉAIRES ET NON LINÉAIRES.

Une équation aux dérivées partielles d'ordre $n-1$, où entre une fonction arbitraire $b = \varphi a$, s'exprime en général par deux équations $F = 0$ et $f = 0$ entre les variables principales d'ordre $n-1$,

$$x,\quad y,\quad z,\quad z',\quad z_1,\quad \ldots,\quad z^{(n-1)},\quad \ldots,\quad z_{n-1},$$

qui contiennent a et b, mais peuvent aussi renfermer différentes formes de la fonction b, provenant de la différentiation ou de l'intégration de la fonction b par rapport à l'argument a.

Si cette fonction arbitraire b n'a qu'une forme dans les équations $F = 0$ et $f = 0$, elle peut toujours être éliminée des équations dérivées de $F = 0$ et $f = 0$,

([1]) Le deuxième Mémoire de K. M. Peterson, Объ интегрированіи уравненій съ частными производными, a paru dans le tome IX (p. 137-192) du *Recueil mathématique* (Математическій сборникъ) publié par la Société mathématique de Moscou; il a été lu le 21 janvier 1878.

par rapport à x et y, et nous obtenons ainsi une équation aux dérivées partielles d'ordre n, qui a pour intégrale intermédiaire l'équation d'ordre $n-1$, $F=0$, $f=0$.

En effet, des équations dérivées totales

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{da}\frac{da}{dx}=0, \qquad \frac{dF}{dy}+\frac{dF}{da}\frac{da}{dy}=0,\\ &\frac{df}{dx}+\frac{df}{da}\frac{da}{dx}=0, \qquad \frac{df}{dy}+\frac{df}{da}\frac{da}{dy}=0 \end{aligned}\right.$$

s'éliminent $\frac{da}{dx}$, $\frac{da}{dy}$, $\frac{dF}{da}$, $\frac{df}{da}$, et nous obtenons la proportion géométrique

$$(2)\qquad \frac{dF}{dx}:\frac{dF}{dy}=\frac{df}{dx}:\frac{df}{dy}$$

qui, par élimination de a et b au moyen de $F=0$ et $f=0$, exprime une équation aux dérivées partielles d'ordre n.

(α) Quand, des deux équations $F=0$, $f=0$ par lesquelles s'exprime l'équation d'ordre $n-1$, une équation seulement, $F=0$ est d'ordre $n-1$, et la seconde équation, $f=0$, d'ordre inférieur; alors, dans la proportion

$$(2)\qquad \frac{dF}{dx}:\frac{dF}{dy}=\frac{df}{dx}:\frac{df}{dy},$$

$\frac{dF}{dx}$ et $\frac{dF}{dy}$ seront des expressions linéaires d'ordre n, $\frac{df}{dx}$ et $\frac{df}{dy}$ des expressions d'ordre inférieur, et, dans ce cas, l'équation d'ordre n qui est exprimée par la proportion (2), et se ramène à la forme

$$\Phi=\frac{dF}{dx}\frac{df}{dy}-\frac{dF}{dy}\frac{df}{dx}=0$$

sera une *équation linéaire d'ordre n*.

(β) Si les deux équations $F=0$ et $f=0$ sont d'ordre $n-1$, les quatre termes de la proportion

$$\frac{dF}{dx}:\frac{dF}{dy}=\frac{df}{dx}:\frac{df}{dy}$$

sont des expressions linéaires d'ordre n, et, dans ce cas, l'équation du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$\Phi=\frac{dF}{dx}\frac{df}{dy}-\frac{dF}{dy}\frac{df}{dx}=0$$

contient, non seulement les premières puissances des dérivées partielles d'ordre n,

$z^{(n)}$, ..., z_n, mais aussi leurs produits deux à deux, et nous appellerons une telle équation une *équation bilinéaire d'ordre n*.

(γ) Quand la fonction arbitraire b a plus d'une forme dans les équations $F=0$ et $f=0$, elle n'est éliminée des équations dérivées que lorsque l'équation d'ordre $n-1$, $F=0, f=0$ se ramène à la forme normale $F=0$, $\frac{dF}{da}=0$, où F contient une forme de b et, par conséquent, $\frac{dF}{da}$ la seconde forme $b'=\frac{db}{da}$ de la fonction arbitraire. Dans ce cas, les dérivées totales de $F=0$ par rapport à x et y se transforment, en vertu de $\frac{dF}{da}=0$, dans les équations d'ordre n

$$\frac{dF}{dx}=0, \qquad \frac{dF}{dy}=0,$$

et, en éliminant a et b au moyen de $F=0$, nous obtenons une équation aux dérivées partielles d'ordre n, qui aura une forme plus générale que dans les deux cas précédents, et que nous appellerons une *équation non linéaire d'ordre n*.

Quand une fonction arbitraire $b=\varphi a$ entre d'une façon générale dans l'équation d'ordre $n-1$ donnée $F=0$, $f=0$, nous obtenons deux équations après avoir éliminé $\frac{da}{dx}$ et $\frac{da}{dy}$ des quatre équations dérivées (1) et, par conséquent, nous avons quatre équations

$$(3) \qquad \frac{dF}{dx}:\frac{df}{dx}=\frac{dF}{da}:\frac{df}{da}, \qquad \frac{dF}{dy}:\frac{df}{dy}=\frac{dF}{da}:\frac{df}{da}, \qquad F=0, \qquad f=0,$$

dont il faut éliminer l'argument a et toutes les formes de la fonction arbitraire b, pour obtenir une équation aux dérivées partielles d'ordre n. Il en résulte que deux formes seulement de cette fonction peuvent entrer dans les équations (3), si son élimination est possible.

Quand, dans les équations $F=0, f=0$, n'entre que l'une de ces deux formes, nous avons vu que l'élimination était possible et que l'équation d'ordre n obtenue est bilinéaire ou linéaire, selon que les dérivées partielles d'ordre $n-1$ entrent dans les deux équations $F=0$ et $f=0$, ou seulement dans l'une d'elles.

Quand, dans les équations $F=0$ et $f=0$, entrent les deux formes de la fonction arbitraire, lesquelles peuvent se présenter dans les quatre équations (3), les dérivées de ces formes doivent se réduire dans l'expression $\frac{dF}{da}:\frac{df}{da}$. Il en résulte que, si les deux formes entrent dans une seule équation $F=0$, l'une de ces formes au moins doit entrer dans l'autre équation $f=0$; les deux équations se ramènent alors algébriquement à deux équations $F=0$ et $f=0$, dont chacune contient une seule forme, et ce cas seul devra être examiné.

Quand b entre dans l'équation $F = 0$, la dérivée b' de b par rapport à a entre dans $\frac{dF}{da}$ et sera la seconde forme qui entre dans l'équation $f = 0$. La dérivée $b' = \frac{db}{da}$ entre alors dans $\frac{df}{da}$ et ne peut se réduire dans l'expression $\frac{dF}{da} : \frac{df}{da}$ que si $\frac{dF}{da} = 0$; par conséquent, l'équation donnée d'ordre $n - 1$, $F = 0$ $f = 0$ se ramène à la forme normale $F = 0$, $\frac{dF}{da} = 0$, où F ne contient qu'une forme de la fonction arbitraire $b = \varphi a$.

Les équations (3), dans le cas où $f = \frac{dF}{da}$, prennent la forme

$$\frac{dF}{dx} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} = 0, \qquad F = 0, \qquad \frac{dF}{da} = 0$$

et nous en déduisons, en éliminant a et b des trois équations $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{dF}{dy} = 0$, $F = 0$, une équation non linéaire d'ordre n, $\Phi = 0$.

Toute équation linéaire ou bilinéaire d'ordre n, $\Phi = 0$, obtenue au moyen de l'équation d'ordre $n - 1$, $F = 0$, $f = 0$, a une équation conditionnelle d'ordre $n - 1$ qui n'existe pas pour une équation non linéaire.

En effet, quand, dans les équations $F = 0$, $f = 0$, n'entre qu'une forme de la fonction arbitraire b, alors, en déterminant b et a, nous mettons ces équations sous la forme $b = \varphi$, $a = \psi$.

En égalant à zéro db et da, nous obtenons par suite l'équation conditionnelle

$$d\varphi = 0 \qquad \text{si} \qquad d\psi = 0,$$

exprimée par deux équations différentielles entre les variables principales d'ordre $n - 1$. L'équation différentielle $d\psi = 0$ exprime l'hypothèse que a ne varie pas; l'équation différentielle $d\varphi = 0$ veut dire que, sous cette hypothèse, b ne varie pas non plus; en d'autres termes, que b dépend de a. Cette dépendance indéterminée entre les variables a et b constitue au fond l'intégrale intermédiaire $F = 0, f = 0$.

Nous pouvons obtenir la même équation conditionnelle d'ordre $n - 1$ sous la forme

$$dF = 0 \qquad \text{si} \qquad df = 0,$$

en égalant à zéro db et da, dans les différentielles totales $dF = 0$ et $df = 0$, et en éliminant b et a au moyen de $F = 0$ et $f = 0$ (cette élimination est impossible s'il entre, dans les équations $F = 0$, $f = 0$, plus d'une forme de la fonction arbitraire b, c'est-à-dire si l'équation $\Phi = 0$ est non linéaire).

La simultanéité des deux équations différentielles

$$dF = \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0$$

et

$$df = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0,$$

par lesquelles s'exprime l'équation conditionnelle $dF = 0$ si $df = 0$, est évidemment exprimée complètement par la proportion

$$\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy} = \frac{df}{dx} : \frac{df}{dy}$$

qui représente une équation d'ordre n,

$$\Phi = 0.$$

Il en résulte que l'équation aux dérivées partielles du $n^{\text{ième}}$ ordre $\Phi = 0$, son intégrale intermédiaire d'ordre $n - 1$, $F = 0$, $f = 0$, et son équation conditionnelle d'ordre $n - 1$, $dF = 0$ si $df = 0$, expriment, sous différentes formes, la même dépendance entre x, y, z.

Dans les paragraphes suivants, les trois formes d'équations aux dérivées partielles d'ordre n (forme linéaire, forme bilinéaire et forme non linéaire) que nous avons obtenues ici au moyen de l'intégrale intermédiaire d'ordre $n - 1$, seront considérées indépendamment de cette intégrale intermédiaire d'ordre $n - 1$, qui n'existe que dans un cas particulier.

XII. — Équations bilinéaires.

Nous avons dit qu'une équation aux dérivées partielles d'ordre n est bilinéaire, quand elle a une intégrale intermédiaire d'ordre $n - 1$, exprimée par deux équations d'ordre $n - 1$, $F = 0$, $f = 0$, dans lesquelles la fonction arbitraire d'intégration $b = \varphi(a)$ entre sous une forme seulement.

De cette intégrale intermédiaire $F = 0$, $f = 0$ nous déduisons une équation bilinéaire, sous la forme d'une proportion

$$\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy} = \frac{df}{dx} : \frac{df}{dy}, \tag{1}$$

entre quatre expressions linéaires d'ordre n, prenant, par élimination des variables

a et b au moyen de $F = 0$, $f = 0$, la forme suivante :

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx} = A\, z^{(n)} + A_1 z_1^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1} z'_{n-1} + A_n = G, \\ \dfrac{dF}{dy} = A_1 z_1^{(n-1)} + A_2 z_2^{(n-2)} + \ldots + A_{n-1} z_n + A_{n+1} = G_1, \\ \dfrac{df}{dx} = B\, z^{(n)} + B_1 z_1^{(n-1)} + \ldots + B_{n-1} z'_{n-1} + B_n = G_2, \\ \dfrac{df}{dy} = B_1 z_1^{(n-1)} + B_2 z_2^{(n-2)} + \ldots + B_{n-1} z_n + B_{n+1} = G_3, \end{cases}$$

où tous les coefficients $A, \ldots, B_{n+1}$ sont des expressions d'ordre $n - 1$ ou inférieur.

La proportion (1) contient par conséquent $2(n + 1)$ coefficients indépendants $A_1, \ldots, B_{n+1}$ d'ordre $n + 1$, car nous pouvons égaler à l'unité les premiers coefficients A et B.

D'une manière indépendante de l'intégrale intermédiaire $F = 0$, $f = 0$, d'où nous avons déduit l'équation bilinéaire

$$\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy} = \frac{df}{dx} : \frac{df}{dy},$$

nous appellerons *équation bilinéaire d'ordre* n, toute équation aux dérivées partielles qui consiste en une proportion géométrique entre quatre expressions linéaires d'ordre n, dont la forme est exprimée par les équations (2) et que nous désignerons par G, G_1, G_2, G_3.

Nous pouvons mettre l'équation bilinéaire d'ordre n donnée

$$(3)\qquad G : G_1 = G_2 : G_3$$

sous la forme

$$(G + \mu G_2) : (G_1 + \mu G_3) = (\nu G + G_2) : (\nu G_1 + G_3)$$

et déterminer les deux variables arbitraires μ et ν de telle façon que, dans les termes moyens de cette proportion, n'entrent pas les dernières dérivées $z^{(n)}$ et z_n d'ordre n.

Nous appellerons la forme nouvelle de la proportion donnée (3) que nous obtenons ainsi, la *forme la plus simple* de cette proportion. Elle s'écrit

$$(4)\qquad H : H_1 = H_2 : H_3,$$

où

$$\begin{aligned}
H &= z^{(n)} + A_1 z_1^{(n-1)} + \ldots + A_{n-2} z_{n-2}^2 + A_{n-1},\\
H_1 &= z_1^{(n-1)} + A_1 z_2^{(n-2)} + \ldots + A_{n-2} z'_{n-1} + A_n,\\
H_2 &= z_1^{(n-1)} + B_1 z_2^{(n-2)} + \ldots + B_{n-2} z'_{n-1} + B_{n-1},\\
H_3 &= z_2^{(n-2)} + B_1 z_3^{(n-3)} + \ldots + B_{n-2} z_n + B_n
\end{aligned}$$

et contient $2n$ coefficients arbitrairement donnés d'ordre $n-1$, $A_1, \ldots, A_n$, $B_1, \ldots, B_n$. Quand, dans les deux termes d'un même rapport $G : G_1$ ou $G_2 : G_3$ de la proportion donnée (3), n'entrent pas les dernières dérivées $z^{(n)}$ et z_n, la forme la plus simple (4) n'existe pas. Dans ce cas, la proportion donnée représente une seconde forme particulière, dans laquelle entrent $2n$ coefficients indépendants, et que nous désignerons par

$$K : K_1 = K_2 : K_3, \tag{5}$$

où K_2 et K_3 ne contiennent pas les dernières dérivées z_n et $z^{(n)}$.

Toute équation bilinéaire d'ordre n, donnée par la proportion

$$G : G_1 = G_2 : G_3,$$

peut s'écrire

$$F = GG_3 - G_1 G_2 = HH_3 - H_1 H_2 = 0, \tag{6}$$

où H, H_1, H_2, H_3 sont les termes de la forme la plus simple, et contient, écrite ainsi, non seulement les premières puissances de toutes les dérivées partielles d'ordre n, $z^{(n)}, \ldots, z_n$, mais encore leurs produits deux à deux.

Ces produits ont deux à deux un seul et même coefficient et se réunissent en un seul terme, que nous appellerons *terme bilinéaire d'ordre n*.

Les termes bilinéaires du premier ordre n'existent pas; il y a un seul terme bilinéaire du second ordre $rt - s^2$; trois du troisième ordre $gk - h^2$, $gl - hk$, $hl - k^2$; six du quatrième ordre et, d'une façon générale, $\frac{n(n-1)}{2}$ termes bilinéaires d'ordre n.

Nous appellerons *équation d'ordre n à termes bilinéaires* toute équation aux dérivées partielles d'ordre n qui contient des termes bilinéaires, outre des termes linéaires. Une telle équation comprend en général $n+2$ termes linéaires et $\frac{n(n-1)}{2}$ termes bilinéaires; elle a, par conséquent, $\frac{n(n-1)}{2} + n + 1$ coefficients arbitraires d'ordre $n-1$, si le premier coefficient est réduit à l'unité. Une équation bilinéaire d'ordre n consiste en général dans la proportion la plus simple (4), qui ne contient que $2n$ coefficients arbitraires; il en résulte que les $\frac{n(n-1)}{2} + n + 1$ coefficients de l'équation donnée d'ordre n à termes bilinéaires

$\Phi = 0$ doivent satisfaire à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations algébriques pour que cette équation donnée se réduise à la proportion géométrique de la forme la plus simple (4), c'est-à-dire pour qu'elle soit une équation bilinéaire.

En effet, en égalant une telle équation $\Phi = 0$ à une équation bilinéaire de la forme

$$F = HH_3 - H_1H_2 = 0, \tag{6}$$

nous obtenons $\frac{n(n-1)}{2} + n + 1$ équations algébriques entre les coefficients des deux équations $\Phi = 0$ et $F = 0$. Parmi ces équations algébriques, il se trouve $2n$ équations du premier degré, au moyen desquelles sont déterminés les $2n$ coefficients de la proportion géométrique de la forme la plus simple

$$H : H_1 = H_2 : H_3.$$

Les $\frac{n(n-1)}{2}$ autres équations algébriques, que nous appellerons *conditions de décomposition* de l'équation donnée $\Phi = 0$, doivent être remplies par les coefficients de cette équation, pour qu'elle soit une équation bilinéaire.

Quand les dernières dérivées $z^{(n)}$ et z_n, mais non leur produit $z^{(n)}z_n$, entrent dans l'équation d'ordre n à termes bilinéaires donnée $\Phi = 0$, cette équation peut être une équation bilinéaire, mais ne consiste pas alors en la proportion géométrique de la forme la plus simple

$$H : H_1 = H_2 : H_3.$$

Si les conditions de décomposition sont satisfaites, une équation telle que $\Phi = 0$ consiste dans la seconde forme particulière de proportion géométrique

$$K : K_1 = K_2 : K_3, \tag{5}$$

laquelle, dans les derniers termes K_2 et K_3, ne contient pas les dernières dérivées $z^{(n)}$ et z_n. Les $2n$ coefficients, dans cette décomposition, sont tous déterminés comme dans le cas précédent.

L'équation à termes bilinéaires donnée $\Phi = 0$ sera, par conséquent, une équation bilinéaire si les conditions de décomposition sont satisfaites, et, dans ce cas, elle consistera soit dans la proportion géométrique de la forme la plus simple (4), soit dans la proportion géométrique de seconde forme particulière (5).

Dans un cas seulement, nous obtenons deux décompositions, et les deux formes décomposées s'expriment par des proportions géométriques de la forme la plus simple (4). Il en est ainsi, quand les termes moyens

$$H_1 = z_1^{(n-1)} + A_1 z_2^{(n-2)} + \ldots + A_{n-2} z'_{n-1} + A_n,$$
$$H_2 = z_1^{(n-1)} + B_1 z_2^{(n-2)} + \ldots + B_{n-2} z'_{n-1} + B_{n-1}$$

de la proportion de la forme la plus simple

$$H : H_1 = H_2 : H_3$$

ont les mêmes coefficients pour toutes les dérivées partielles $z_1^{(n-1)}, \ldots, z'_{n-1}$, de sorte qu'ils ne diffèrent que par les derniers coefficients A_n et B_{n-1}.

Dans ce cas, nous obtenons, après déplacement des termes moyens H_1 et H_2, la seconde proportion géométrique de la forme la plus simple (4),

$$H : H_2 = H_1 : H_3.$$

La décomposition la plus simple s'obtient, en général, au moyen d'équations algébriques du premier degré seulement; dans le dernier cas, au contraire, il est nécessaire d'ajouter, à ces équations du premier degré, une équation quadratique, aux deux solutions de laquelle correspondent les deux proportions de la forme la plus simple mentionnées plus haut; ces deux proportions se confondent en une seule, quand les derniers coefficients A_n et B_{n-1} sont égaux.

Toute équation bilinéaire d'ordre n donnée a une équation conditionnelle d'ordre $n-1$.

En effet, si, dans la proportion $G : G_1 = G_2 : G_3$ de forme générale (2) suivant laquelle est écrite l'équation donnée, nous désignons $G : G_1$ ou $G_2 : G_3$ par u, nous obtenons, sous la condition $dy + u\,dx = 0$ $\left(\text{pour la relation } \frac{dy}{dx} = -u \text{ entre } x \text{ et } y\right)$, l'équation conditionnelle d'ordre $n-1$

$$G\,dx + G_1\,dy = 0 \qquad \text{si} \qquad G_2\,dx + G_3\,dy = 0,$$

exprimée par deux équations différentielles d'ordre $n-1$ qui, après introduction des valeurs (2) de G, G_1, G_2, G_3, prennent la forme

$$A\,dz^{(n-1)} + A_1\,dz_1^{(n-2)} + \ldots + A_{n-1}\,dz_{n-1} + A_n\,dx + A_{n+1}\,dy = 0,$$

si

$$B\,dz^{(n-1)} + B_1\,dz_1^{(n-2)} + \ldots + B_{n-1}\,dz_{n-1} + B_n\,dx + B_{n+1}\,dy = 0.$$

Cette équation conditionnelle d'ordre $n-1$ sera la même, quelle que soit la variété de la proportion dont nous la déduisons, et elle correspond à une racine déterminée de l'équation aux racines u.

Nous appellerons la racine u que nous obtenons, d'après ce qui précède, même si l'équation aux racines u ne se résout pas algébriquement, une racine bilinéaire de l'équation aux racines.

Quand l'équation différentielle d'ordre $n-1$, $G\,dx + G_1\,dy = 0$ s'intègre, si $G_2\,dx + G_3\,dy = 0$, nous obtenons alors l'intégrale intermédiaire d'ordre $n-1$, correspondant à la racine bilinéaire.

Quand l'équation bilinéaire d'ordre n donnée s'écrit en deux proportions géométriques de la forme la plus simple

$$H : H_1 = H_2 : H_3 \qquad \text{et} \qquad H : H_2 = H_1 : H_3,$$

alors, en posant $H_2 : H_3 = u$, $H_1 : H_3 = u_1$, nous obtenons, sous les deux conditions

$$dy + u\,dx = 0, \qquad dy + u_1\,dx = 0,$$

deux équations conditionnelles d'ordre $n-1$

$$H\,dx + H_1\,dy = 0 \quad \text{si} \quad H_2\,dx + H_3\,dy = 0,$$
$$H\,dx + H_2\,dy = 0 \quad \text{si} \quad H_1\,dx + H_3\,dy = 0,$$

qui, en général, correspondent à deux racines bilinéaires différentes de l'équation aux racines; mais, quand l'équation bilinéaire donnée s'écrit en une proportion géométrique continue de la forme la plus simple, les deux dernières équations conditionnelles d'ordre $n-1$ se confondent en une seule, qui correspond à deux racines égales de l'équation aux racines.

XIII. — Équations bilinéaires du second et du troisième ordres.

(α) *Équation bilinéaire du second ordre.*

Une équation à termes bilinéaires du second ordre a pour forme générale

$$rt - s^2 + Rr + Ss + Tt + U = 0,$$

où R, S, T, U sont des expressions du premier ordre.

Elle est toujours bilinéaire, car le nombre des conditions de décomposition $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ est égal à zéro pour $n = 2$, et elle s'écrit toujours en deux proportions géométriques de la forme la plus simple

$$(1) \qquad (r + A) : (s + B) = (s + C) : (t + D),$$

où $A = T$, $D = R$, mais où B et C sont déterminés par l'équation quadratique

$$BC = RT - U, \qquad B + C = -S.$$

Nous obtenons les deux formes de proportion, en introduisant les valeurs doubles de B et de C, ou, ce qui revient au même, en transposant les termes moyens de la décomposition la plus simple (1).

Une équation bilinéaire du second ordre a par conséquent toujours deux racines bilinéaires

$$u = \frac{s + C}{t + D} \qquad \text{et} \qquad u_1 = \frac{s + B}{t + D},$$

qui se confondent en une racine double de l'équation aux racines, quand $B = C$, c'est-à-dire quand, dans l'équation donnée,

$$S^2 = 4(RT - U).$$

Les deux équations conditionnelles du premier ordre que nous en déduisons sous les conditions $dy + u\,dx = 0$ et $dy + u_1\,dx = 0$, sont

$$dp + A\,dx + B\,dy = 0 \quad \text{si} \quad dq + C\,dx + D\,dy = 0,$$
$$dp + A\,dx + C\,dy = 0 \quad \text{si} \quad dq + B\,dx + D\,dy = 0.$$

Exemple XVIII.

$$z^2(rt - s^2) + p^2q^2 = 0.$$

Cette équation bilinéaire du second ordre s'exprime dans la proportion géométrique de forme la plus simple

$$zr : (zs \mp pq) = (zs \pm pq) : zt,$$

d'où nous déduisons les deux équations conditionnelles du premier ordre

$$z\,dp - pq\,dy = 0 \quad \text{si} \quad z\,dq + pq\,dx = 0,$$
$$z\,dp + pq\,dy = 0 \quad \text{si} \quad z\,dq - pq\,dx = 0,$$

dont les intégrales sont

$$b = \frac{z}{p} - x, \qquad a^2 = \frac{zq}{p},$$
$$\beta = \frac{z}{q} - y, \qquad \alpha^2 = \frac{zp}{q}.$$

En éliminant p et q de ces quatre intégrales, nous obtenons les deux équations

$$(1)\qquad \frac{b+x}{a}=\frac{\beta+y}{\alpha},$$

$$(2)\qquad z=a\alpha.$$

Si nous déterminons p et q, nous obtenons

$$p=\frac{z}{b+x}, \qquad q=\frac{z}{\beta+y}.$$

L'équation non conditionnelle

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

après introduction de ces valeurs, prend la forme

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx}{b+x}+\frac{dy}{\beta+y}.$$

En multipliant par $\frac{b+x}{a}$, nous obtenons, en vertu des équations (1) et (2), l'équation non conditionnelle

$$d\frac{b+x}{a}-\frac{db}{a}+d\frac{\beta+y}{\alpha}-\frac{d\beta}{\alpha}=0,$$

et par suite l'intégrale

$$\frac{b+x}{a}+\frac{\beta+y}{\alpha}=\int\frac{db}{a}+\int\frac{d\beta}{\alpha},$$

qui, avec les équations (1) et (2), constitue l'intégrale générale sous la forme normale

$$x=\frac{a}{2}\left(\int\frac{db}{a}+\int\frac{d\beta}{\alpha}\right)-b, \qquad y=\frac{\alpha}{2}\left(\int\frac{db}{a}+\int\frac{d\beta}{\alpha}\right)-\beta, \qquad z=a\alpha.$$

(β) *Équation bilinéaire du troisième ordre.*

L'équation du troisième ordre à termes bilinéaires a en général la forme suivante

$$(1)\qquad gk-h^2+\mathrm{A}(gl-hk)+\mathrm{B}(hl-k^2)+\mathrm{C}+\mathrm{G}g+\mathrm{H}h+\mathrm{K}k+\mathrm{L}l=0;$$

pour qu'elle soit une équation bilinéaire, une condition de décomposition seulement doit être remplie par les coefficients du second ordre A, ..., L, car le nombre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ de ces conditions est égal à l'unité pour $n=3$.

La forme décomposée la plus simple est

$$(2)\qquad (g+ah+b):(h+ak+c)=(h+\alpha k+\gamma):(k+\alpha l+\beta);$$

elle contient $2n=6$ coefficients inconnus a, b, c, α, β, γ. En identifiant les équations (1) et (2), nous déterminerons tous ces coefficients inconnus

$$a=\frac{B}{A},\qquad b=\frac{L}{A},\qquad \alpha=A,\qquad \beta=G,$$

$$c=\frac{B^2G-ABH+A^2K-AL}{A(B-A^2)},\qquad \gamma=\frac{A^2H-ABG-AK+L}{B-A^2},$$

et nous obtiendrons la condition de décomposition sous la forme

$$\gamma c A=GL-AC.$$

(a) Pour cette décomposition la plus simple, nous obtenons seulement une équation conditionnelle du second ordre

$$dr+a\,ds+b\,dx+c\,dy=0\qquad \text{si}\qquad ds+\alpha\,dt+\gamma\,dx+\beta\,dy=0,$$

correspondant à une racine bilinéaire.

(b) Mais, si $B-A^2=0$, les coefficients de la forme décomposée la plus simple

$$(2)\qquad (g+ah+b):(h+ak+c)=(h+\alpha k+\gamma):(k+\alpha l+\beta)$$

seront

$$a=\alpha=A,\qquad b=\frac{L}{A},\qquad \beta=G,$$

c et γ étant déterminés par l'équation quadratique

$$c+\gamma=AG-H,\qquad c\gamma=(LG-AC):A.$$

En prenant les deux solutions, ou en transposant les termes moyens de la forme décomposée la plus simple, nous obtenons deux équations conditionnelles du second ordre

$$dr+a\,ds+b\,dx+c\,dy=0\qquad \text{si}\qquad ds+a\,dt+\gamma\,dx+\beta\,dy=0,$$

$$dr+a\,ds+b\,dx+\gamma\,dy=0\qquad \text{si}\qquad ds+a\,dt+c\,dx+\beta\,dy=0,$$

auxquelles correspondent deux racines bilinéaires différentes.

La condition de décomposition est

$$A^3G-A^2H+AK-L=0.$$

(c) Quand $B - A^2 = 0$ et qu'en outre $A(AG - H^2) = 4(GL - AC)$, alors $a = \alpha$, $c = \gamma$; la forme décomposée la plus simple est la proportion géométrique continue

$$(g + ah + b) : (h + ak + c) = (h + ak + c) : (k + al + \beta),$$

et nous en déduisons une équation conditionnelle

$$dr + a\,ds + b\,dx + c\,dy = 0 \quad \text{si} \quad ds + a\,dt + c\,dx + \beta\,dy = 0,$$

à laquelle correspond une racine bilinéaire double.

(d) Quand $A = 0$, la forme décomposée la plus simple n'existe pas, mais on a la forme décomposée

$$(g + ah + bk + \alpha) : (h + ak + bl + \beta) = (h + c) : (k + \gamma),$$

sous la condition de décomposition

$$GKB^2 - BHL + B^3G^2 = L^2 + BC.$$

De cette proportion, où les termes d'un même rapport ne contiennent pas les dernières dérivées g et l, nous déduisons une équation conditionnelle

$$dr + a\,ds + b\,dt + \alpha\,dx + \beta\,dy = 0 \quad \text{si} \quad ds + c\,dx + \gamma\,dy = 0,$$

à laquelle correspond une racine bilinéaire simple.

Exemple XIX.

$$gl - kh = 0.$$

La forme décomposée la plus simple est ici

$$g : h = k : l,$$

et nous en déduisons une équation conditionnelle du second ordre

$$dr = 0 \quad \text{si} \quad dt = 0,$$

dont l'intégrale est $r = \varphi t$.

Exemple XX.

$$gk - h^2 + hl - k^2 = 0.$$

La forme décomposée la plus simple n'existe pas, mais l'équation donnée s'écrit suivant la proportion

$$(g-k):(h-l)=h:k,$$

d'où nous déduisons une équation conditionnelle

$$d(r-t)=0 \quad \text{si} \quad ds=0,$$

dont l'intégrale est $r-t=\varphi s$.

Les deux intégrales intermédiaires trouvées sont des cas particuliers de la forme $f(r, s, t)$, dont nous aurons encore à parler (*voir* exemple X).

Exemple XXI.

$$gk-h^2+gl-hk+hl-k^2+const.=0.$$

Cette équation bilinéaire du troisième ordre a deux racines bilinéaires, qui sont égales si $const.=0$. La troisième racine est égale à -1; son argument est par conséquent $y-x$.

(α) Si $const.=0$, nous avons l'équation

$$gk-h^2+gl-hk+hl-k^2=0,$$

dont la forme décomposée la plus simple sera la proportion continue

$$(g+h):(h+k)=(h+k):(k+l).$$

Nous en déduisons l'équation conditionnelle du second ordre

$$d(r+s)=0 \quad \text{si} \quad d(s+t)=0,$$

à laquelle correspond une racine double de l'équation, et dont l'intégrale sera

$$r+s=b, \qquad s+t=a.$$

En additionnant ces intégrales, après multiplication de la première par dx, et de la seconde par dy, nous obtenons, d'après le second procédé, l'intégrale normale du premier ordre

$$p+q=ay+bx+c, \qquad y+b'x+c'=0,$$

où c, en raison de la racine double, sera une fonction arbitraire de l'argument a. En substituant a, b, c à b', c' et $\int \frac{da}{2(b'+1)}$, nous en déduisons (*voir* § XV) l'intégrale générale

$$z=\int (y+ax+b)^2\, dc+f(y-x),$$

qui a la forme normale par rapport à l'argument a.

(β) Quand la *const.* n'est pas égale à zéro, dans l'équation donnée, nous obtenons, en substituant $z\sqrt{const.}$ à z, l'équation

$$gk - h^2 + gl - hk + hl - k^2 + 1 = 0,$$

dont la forme décomposée la plus simple est

$$(g + h):(h + k \pm 1) = (h + k \mp 1):(k + l).$$

A cette proportion correspondent deux racines bilinéaires, et les intégrales des deux équations conditionnelles que nous en déduisons sont

$$(1)\qquad \begin{cases} r + s + y = 2b, & s + t - x = -2a, \\ r + s - y = -2\beta, & s + t + x = 2\alpha; \end{cases}$$

nous en tirons

$$y = b + \beta, \qquad x = a + \alpha, \qquad r + s = b - \beta, \qquad s + t = \alpha - a,$$

et nous formons l'équation non conditionnelle du premier ordre

$$d(p + q) = (r + s)\,dx + (s + t)\,dy = (b - \beta)\,d(a + \alpha) + (\alpha - a)\,d(b + \beta),$$

dont l'intégrale est

$$(2)\qquad p + q = (b + \beta)(\alpha - a) + 2\int b\,da - 2\int \beta\,d\alpha.$$

Sous la troisième condition

$$dy - dx = 0,$$

dont l'intégrale est

$$y - x = \mathfrak{a},$$

$\mathfrak{a}$ étant un troisième argument, nous obtiendrons, ayant multiplié la dernière équation par

$$dx = d(a + \alpha),$$

la troisième équation conditionnelle d'ordre nul

$$dz = \left\{(b + \beta)(\alpha - a) + 2\int b\,da - 2\int \beta\,d\alpha\right\} d(a + \alpha) = 0 \qquad \text{si} \qquad d\mathfrak{a} = 0.$$

Comme

$$y = b + \beta, \qquad x = a + \alpha, \qquad y - x = \mathfrak{a},$$

nous aurons l'équation

$$b + \beta - (\mathfrak{a} + a + \alpha) = 0,$$

au moyen de laquelle nous pouvons exprimer α par a et $\mathfrak{a}$, et par conséquent effectuer la quadrature de la dernière équation conditionnelle par rapport à a, pour $\mathfrak{a}$ constant. L'intégrale générale, que nous en déduirons sous la forme normale, sera la suivante

$$x = a + \alpha, \qquad y = b + \beta,$$

$$z = \varphi(y - x) + \int \left\{ (b + \beta)(\alpha - a) + 2\int b\,da - 2\int \beta\,d\alpha \right\} \frac{\beta_1 - b'}{\beta_1 - 1}\,da,$$

où α dépend de a, en vertu de l'équation

$$b + \beta = a + \alpha + \mathfrak{a},$$

et où la quadrature est effectuée par rapport à a, pour $\mathfrak{a}$ constant; b' et β_1 désignent les dérivées de b et β par rapport à a et à α.

Exemple XXII.

$$(gx + hy + nr)(kx + ly + nt) = (hx + ky + ns)^2,$$

où n est une constante arbitraire.

Cette équation bilinéaire du troisième ordre est déjà décomposée en une proportion continue de la forme la plus simple et par conséquent a deux racines bilinéaires égales. La troisième racine est $-\frac{y}{x}$, et son argument est donc $\frac{y}{x}$. Nous obtenons la première intégrale

$$sx + ty + (n-1)q = b, \qquad rx + sy + (n-1)p = \int a\,db,$$

la deuxième intégrale de forme normale

$$px + qy + (n-2)z = \int (y + ax - c)\,db, \qquad y + ax - c = 0,$$

l'intégrale générale de forme normale (*voir* la forme composée § XV)

$$\begin{aligned}(n-1)(n-2)z = \int & \frac{c^{n-1}\,db}{(y+ax)^{n-2}} \\ & + (n-2)\int (y+ax)\,db - (n-1)\int c\,db + x^{2-n}\varphi\frac{y}{x},\end{aligned}$$

qui prend les formes particulières suivantes.

Pour $n = 2$,

$$z = \int (y + ax - c)\,db - \int \left(\log\frac{y+ax}{c}\right) c\,db + \varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

Pour $n = 1$,

$$z = \int (y + ax) \log \frac{y + \alpha x}{c}\, db - \int (y + ax - c)\, db + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Pour $n = 0$,

$$z = \int (y + ax - c)^2 \frac{db}{2c} + x^2 \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Exemple XXIII.

$$(gk - h^2)t + (gl - kh)\sqrt{rt} + (hl - k^2)r = 0.$$

Cette équation bilinéaire du troisième ordre a deux racines bilinéaires égales et s'exprime par la proportion continue de la forme la plus simple

$$(g\sqrt{t} + h\sqrt{r}) : (h\sqrt{t} + k\sqrt{r}) = (h\sqrt{t} + k\sqrt{r}) : (k\sqrt{t} + l\sqrt{r}).$$

Nous en déduisons l'équation conditionnelle

$$\sqrt{t}\, dr + \sqrt{r}\, ds = 0 \qquad \text{si} \qquad \sqrt{t}\, ds + \sqrt{r}\, dt = 0,$$

qui peut se mettre sous la forme

$$2\sqrt{rt}\, ds + r\, dt + t\, dr = 0 \qquad \text{si} \qquad r\, dt - t\, dr = 0$$

et dont l'intégrale est par conséquent

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} s + \sqrt{rt} = b, & r : t = a^2, \\ \text{ou} & \\ s + at \;= b, & r + as = ab. \end{array} \right.$$

En additionnant les deux dernières équations, après multiplication de la première par dy, et de la seconde par dx, nous obtenons l'équation non conditionnelle

$$dp + a\, dq = b(dy + a\, dx),$$

qui s'intègre pour a constant (*voir* § XIV). Son intégrale a la forme normale

$$(2) \qquad p + aq = b(y + ax) + c, \qquad q = b'(y + ax) + bx + c',$$

où c, en raison de la racine bilinéaire multiple, sera une seconde fonction arbitraire de l'argument a. Nous obtiendrons l'intégrale générale, dans l'exemple suivant.

Exemple XXIV.

$$(1)\qquad \begin{cases} p = ux + vy + w, \\ q = Ux + Vy + W, \end{cases}$$

où u, v, w, U, V, W sont des variables ayant entre elles une dépendance.

En considérant ces six variables comme des fonctions données de l'une d'entre elles, et en éliminant cette dernière des deux équations données, nous obtenons une équation du premier ordre avec cinq fonctions arbitraires, qu'il faut intégrer. En éliminant ces fonctions, nous obtenons une équation du sixième ordre, dont l'intégrale générale sera l'intégrale générale cherchée.

L'intégrale intermédiaire du premier ordre (2), trouvée dans l'exemple précédent, représente un cas particulier de l'équation actuelle.

Nous pouvons mettre l'équation donnée sous la forme

$$(2)\qquad \begin{cases} p = x\int(a\,dA - A\,da) + y\int(a\,dB - A\,db) + \int(a\,dC - A\,dc), \\ q = x\int(b\,dA - B\,da) + y\int(b\,dB - B\,db) + \int(b\,dC - B\,dc), \end{cases}$$

en introduisant, au lieu des variables u, v, w, U, V, W, six nouvelles variables a, b, c, A, B, C dépendant les unes des autres, qui sont complètement déterminées. Si v, w, U, V, W sont des fonctions indéterminées de l'argument u, alors b, c, A, B, C seront aussi des fonctions indéterminées de l'argument a.

En prenant les différentielles totales (2), et en éliminant da, nous obtenons une différentielle totale de l'équation donnée de la forme

$$P\,dp + Q\,dq + X\,dx + Y\,dy = 0.$$

L'équation conditionnelle

$$X\,dy + Q\,dp = 0 \quad \text{si} \quad Y\,dx + P\,dq = 0,$$

que nous en déduisons d'après le paragraphe VI, prend, après introduction des valeurs (2) de p et q, la forme

$$A\,dx + B\,dy + x\,dA + y\,dB + dC = 0,$$

si

$$a\,dx + b\,dy + x\,da + y\,db + dc = 0,$$

et nous en tirons son intégrale

$$(3)\qquad Ax + By + C = \beta, \qquad ax = by + c = \alpha.$$

L'équation non conditionnelle

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

prend, en vertu des équations (2), la forme

$$dz = \int [(x\,dA + y\,dB + dC)(a\,dx + b\,dy) - (x\,da + y\,db + dc)(A\,dx + B\,dy)].$$

Nous avons, d'après les équations (3),

$$\begin{aligned}\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha = (aB - bA)(x\,dy - y\,dx) + \alpha(x\,dA + y\,dB + dC)\\ - \beta(x\,da + y\,db + dc) + (cA - aC)\,dx + (cB - bC)\,dy.\end{aligned}$$

En additionnant ces deux équations, après multiplication de la première par 2, et en intégrant sous le signe $\int$ par rapport aux inconnues principales (*voir* la forme composée, § XV), nous obtenons l'intégrale générale normale

$$(4)\qquad 2z = \int [M(x\,dA + y\,dB + dC) - N(x\,da + y\,db + dc)] - \int (\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha),$$

où

$$M = ax + by + c - \alpha, \qquad N = Ax + By + C - \beta.$$

Les équations (3) se ramènent à la forme $M = 0$, $N = 0$; les dérivées de l'intégrale (4) par rapport aux arguments a et α sont par conséquent égales à zéro. En intégrant par parties, nous pouvons exprimer l'intégrale générale trouvée (4), sous la forme non normale

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} z + \int (Ax + By + C)(x\,da + y\,db + dc) - \int \beta\,da = 0,\\ ax + by + c = \alpha, \qquad Ax + By + C = \beta.\end{aligned}\right.$$

Pour déterminer, d'après l'équation donnée du premier ordre

$$(1)\qquad p = ux + vy + w, \qquad q = Ux + Vy + W,$$

toutes les variables a, b, c, A, B, C que nous avons introduites par les équations (2), nous avons les équations

$$\begin{aligned} du &= a\,dA - A\,da, & dv &= a\,dB - A\,db, & dw &= a\,dC - A\,dc,\\ dU &= b\,dA - B\,da, & dV &= b\,dB - B\,db, & dW &= b\,dC - B\,dc.\end{aligned}$$

En désignant $\frac{b}{a}$ par ε, nous en déduisons l'équation

$$(v - U)\,d\varepsilon + \varepsilon^2\,du - \varepsilon\,d(v + U) + dV = 0,$$

dont la résolution détermine toutes les variables inconnues b, c, A, B, C en fonctions de l'argument a, quand v, w, U, V, W sont donnés comme fonctions de l'argument u.

Si ces dernières sont indéterminées, les premières seront des fonctions arbitraires.

Premier cas particulier.

(α) Quand, dans l'équation donnée (1), U est égal à v, l'argument α se confond avec l'argument a ou u, et correspond à une racine d'ordre de multiplicité 5 de l'équation du cinquième ordre que nous obtenons, en éliminant de l'équation donnée les quatre fonctions arbitraires v, w, V, W de l'argument u.

En effet, en substituant a, b, c, A, B à u, $v=$ U, V, w, W, nous obtenons l'équation du premier ordre donnée sous la forme

$$(6) \qquad p = ax + by + \mathrm{A}, \qquad q = bx + cy + \mathrm{B}.$$

En additionnant ces équations, après multiplication de la première par dx, et de la seconde par dy, nous obtenons l'équation non conditionnelle

$$dz = ax\,dx + b(x\,dy + y\,dx) + cy\,dy + \mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dy,$$

qui s'intègre pour a constant.

Nous en déduisons l'intégrale générale (§ XIV) sous la forme normale

$$(7) \qquad 2z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2\mathrm{A}x + 2\mathrm{B}y + \mathrm{C},$$

où C est une nouvelle fonction arbitraire de l'argument a.

L'équation dérivée est

$$x^2 + 2b'xy + c'y^2 + 2\mathrm{A}'x + 2\mathrm{B}'y + \mathrm{C}' = 0.$$

Second cas particulier.

β) Nous pouvons en général exprimer l'équation du premier ordre donnée (1), par deux équations linéaires

$$ap + bq + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0, \qquad a_1p + b_1q + \mathrm{A}_1x + \mathrm{B}_1y = \mathrm{C}_1 = 0,$$

d'où nous tirons l'équation donnée, en déterminant p et q; mais le cas particulier

$$(8) \qquad y + ax + b = 0, \qquad p + cq + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$$

n'est pas contenu dans l'équation donnée.

Nous avons, dans ce cas, l'équation conditionnelle

$$dz + (Ax + By + C)\,dx = 0 \quad \text{si} \quad dy - c\,dx = 0.$$

En désignant $\int \frac{dc}{c+a}$ par $\log e$, nous obtenons l'intégrale de la condition

$$dy - c\,dx = 0,$$

sous la forme

$$(10) \qquad \int (y + ax + b)\,de = \alpha$$

et l'intégrale de l'équation conditionnelle (*voir* la forme composée § XV)

$$(11) \qquad z = \int (y + ax + b)(y + a_1 x + b_1)\,dc_1 + \beta,$$

où, à la place des variables A, B, C, sont introduites les variables a_1, b_1, c_1, par les équations

$$A + 2\int a a_1\,dc_1 + c\int (a + a_1)\,dc_1 = 0,$$

$$B + \int (a + a_1)\,dc_1 + 2cc_1 = 0,$$

$$C + \int (ab_1 + a_1 b)\,dc_1 + c\int (b + b_1)\,dc_1 = 0.$$

Nous pouvons, par suite, exprimer a_1, b_1, c_1 par A, B, C, ou prendre a_1, b_1, c_1 pour fonctions arbitraires de l'argument a, si A, B, C sont des fonctions indéterminées de cet argument.

En substituant β et α à $\beta - \alpha\beta'$ et β', nous pouvons amener l'intégrale trouvée à la forme normale

$$(12) \qquad z = \int (y + ax + b)(y + a_1 x + b_1)\,dc_1 + \alpha\int (y + ax + b)\,de + \beta.$$

Les équations dérivées par rapport à a et à α sont

$$y + ax + b = 0, \qquad \int (y + ax + b)\,de + \beta' = 0.$$

Troisième cas particulier.

(γ) Si les deux équations linéaires

$$ap + bq + Ax + By + c = 0, \qquad a_1 p + b_1 q + A_1 x + B_1 y + c_1 = 0,$$

par lesquelles s'exprime l'équation du premier ordre donnée, sont ramenées à une équation normale

$$(13)\qquad p + Aq + Bx + Cy + D = 0, \qquad q + B'x + C'y + D' = 0$$

où B', C', D' sont les dérivées de B, C, D par rapport à A, les intégrales trouvées (4) et (5) prennent des formes que nous allons indiquer.

En résolvant les équations (13) par rapport à p et à q, nous obtenons

$$(14)\qquad q + \int (B''x + C''y + D'')\,dA = 0, \qquad p - \int (B''x + C''y + D'')A\,dA = 0.$$

Nous pouvons mettre ces équations sous la forme

$$(15)\qquad p = \int (b''x + c''y + e'')\,b\,da, \qquad q = \int (b''x + c''y + e'')\,c\,da,$$

en introduisant, à la place de A, B, C, D, quatre nouvelles variables a, b, c, e dépendant les unes des autres, ou en substituant dans les équations (2),

$$\int b''\,da, \quad \int c''\,da, \quad \int e''\,da, \quad \int b''\,a\,da, \quad \int c''\,a\,da, \quad \int e''\,a\,da$$

à

$$a, \quad b, \quad c, \quad A, \quad B, \quad C.$$

Par suite de cette substitution, l'intégrale de l'équation conditionnelle, que nous avons exprimée par l'équation (3), prend la forme

$$(16)\qquad \int (b''x + c''y + e'')\,da = \alpha, \qquad \int (b''x + c''y + e'')\,a\,da = \beta$$

ou

$$(17)\qquad b'x + c'y + e' = \alpha, \qquad bx + cy + e = a\alpha - \beta.$$

L'intégrale générale (4) prend la forme

$$(18)\qquad 2z = \int (bx + cy + e - a\alpha + \beta)(x\,db' + y\,dc' + de') - \int (\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha),$$

normale par rapport à a et α; elle se ramène à la forme non normale

$$(19)\qquad 2z = \int (bx + cy + e)(x\,db' + y\,dc' + de') - \int (\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha),$$

$$b'x + c'y + e' = \alpha, \qquad bx + cy + e = a\alpha - \beta.$$

Exemple XXIII (suite).

$$(gk - h^2)t + (gl - hk)\sqrt{rt} + (hl - k^2)r = 0.$$

Nous avons déjà obtenu l'intégrale intermédiaire de cette équation sous la forme normale

$$(2) \qquad p + aq - abx - by - c = 0 \qquad \text{(exemple XXIII)}$$

avec trois coefficients arbitraires. En identifiant cette équation à l'équation (13) de l'exemple XXIV, nous trouvons, entre les coefficients A, B, C, D la dépendance $AC = B$.

En vertu de $AC = B$, nous obtenons entre les variables a, b, c, e, que nous avons introduites par l'équation (15), la dépendance suivante

$$b^2 \int \left(\frac{dc}{da}\right)^2 da = c^2 \int \left(\frac{db}{da}\right)^2 da,$$

qui permet de déterminer c en fonction de l'argument a, sous la forme

$$(3) \qquad \log c = 2 \int \left[\frac{da}{b^2} \int \left(\frac{db}{da}\right)^2 da\right] - \log b,$$

si la variable b est donnée en fonction de a.

L'intégrale générale prend, par conséquent, d'après l'équation (18), la forme normale

$$2z = \int (bx + cy + e - a\alpha + \beta)(x\,db' + y\,dc' + de') - \int (\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha),$$

et se ramène à la forme non normale

$$2z = \int (bx + cy + e)(x\,db' + y\,dc' + de') - \int (\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha),$$

$$b'x + c'y + e' = \alpha, \qquad bx + cy + e = a\alpha - \beta,$$

où b et e sont des fonctions arbitraires de l'argument a, mais où c est déterminé par l'équation (3).

Exemple XXV.

$$v^2(gk - h^2) - uv(gl - hk) + u^2(hl - k^2) = 0,$$

où

$$u = rx + sy - p, \qquad v = sx + ty - q.$$

Cette équation s'écrit suivant la proportion continue

$$(gv - hu):(hv - ku) = (hv - ku):(kv - lu)$$

et nous en déduisons l'équation conditionnelle

$$v\,dr - u\,ds = 0 \quad \text{si} \quad v\,ds - u\,dl = 0.$$

En remarquant que

$$du = x\,dr + y\,ds, \qquad dv = x\,ds + y\,dt,$$

nous en déduisons la seconde équation conditionnelle

$$v\,du - u\,dv = 0,$$

sous la même condition.

Les intégrales de ces équations conditionnelles sont

$$(1) \qquad u + \mathrm{A}v = 0,$$

$$(2) \qquad r + \mathrm{A}s + \mathrm{B} = 0,$$

$$(3) \qquad s + \mathrm{A}t + \mathrm{C} = 0,$$

où B et C, en raison de la racine multiple, sont des fonctions arbitraires de l'argument A.

En multipliant l'intégrale (2) par dx, l'intégrale (3) par dy, et en additionnant, nous obtenons l'équation non conditionnelle

$$dp + \mathrm{A}\,dq + \mathrm{B}\,dx + \mathrm{C}\,dy = 0,$$

dont l'intégrale

$$(4) \qquad p + \mathrm{A}q + \mathrm{B}x + \mathrm{C}y + \mathrm{D} = 0$$

a la forme normale et contient une fonction inconnue D.

En multipliant l'intégrale (2) par x, l'intégrale (3) par y, et en additionnant, nous obtenons $\mathrm{D} = 0$, en vertu de $u + \mathrm{A}v = 0$. En comparant l'intégrale (4) à l'équation (13) de l'exemple XXIV, et en remarquant que, par suite de $\mathrm{D} = 0$, e devient nul aussi, nous obtenons, d'après l'équation (19), l'intégrale générale sous la forme non normale

$$2z = \int (bx + cy)(x\,db' + y\,dc') - \int (\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha),$$

$$b'x + c'y = \alpha, \qquad bx + cy = a\alpha - \beta.$$

Exemple XXVI.

$$v^2(gk-h^2)-uv(gl-hk)+u^2(hl-k^2)=0,$$

où

$$u=rq-sp, \qquad v=sq-tp.$$

Au moyen de la proportion continue

$$(vg-uh):(vh-uk)=(vh-uk):(vk-ul),$$

nous obtenons l'équation conditionnelle du second ordre

$$v\,dr-u\,ds=0 \quad \text{si} \quad v\,ds-u\,dt=0.$$

En additionnant ces deux équations, d'abord après multiplication de la première par $\frac{-t}{(rt-s^2)^2}$, et de la seconde par $\frac{s}{(rt-s^2)^2}$, et ensuite après multiplication de la première par $\frac{-s}{(rt-s^2)^2}$, et de la seconde par $\frac{r}{(rt-s^2)^2}$, nous amenons l'équation conditionnelle à la forme

$$qd\frac{s}{rt-s^2}-pd\frac{t}{rt-s^2}=0, \quad \text{si} \quad qd\frac{r}{rt-s^2}-pd\frac{s}{rt-s^2}=0,$$

et nous en déduisons son intégrale

$$(1) \qquad x+\frac{sq-tp}{rt-s^2}=b,$$

$$(2) \qquad y-\frac{rq-sp}{rt-s^2}=\int a\,db.$$

En multipliant l'équation (1) par dp, l'équation (2) par dq et en additionnant, nous obtenons l'équation non conditionnelle

$$(3) \qquad x\,dp+y\,dq-(p\,dx+q\,dy)=b\,dp+\int a\,db.dq,$$

qui s'intègre pour a constant.

Son intégrale

$$(4) \qquad px+qy-2z=bp+q\int a\,db-\int c\,db$$

a, par conséquent, la forme normale et contient une nouvelle fonction arbitraire de l'argument a, car la racine bilinéaire est double. L'équation dérivée de cette intégrale est

$$(5) \qquad p+aq-c=0.$$

Au moyen de la différentielle totale (3) de l'intégrale (4), nous obtenons, d'après le paragraphe VI, l'équation conditionnelle du premier ordre

$$q\,dx - (x - b)\,dq = 0 \qquad \text{si} \qquad p\,dq - q\,dp = 0$$

et, par suite, l'intégrale de la condition

$$\frac{p}{q} = \alpha. \tag{6}$$

L'équation conditionnelle

$$q\,dx - (x - b)\,dq = 0,$$

après introduction de la valeur de q tirée des équations (5) et (6), prend la forme

$$d\frac{x(a + \alpha)}{c} = bd\frac{a + \alpha}{c}$$

et nous en déduisons son intégrale

$$\frac{x(a + \alpha)}{c} = \int bd\frac{a}{c} + \alpha\int bd\frac{1}{c} + \alpha\beta,$$

qui se ramène à la forme

$$\frac{(x - b)(a + \alpha)}{c} + \int\frac{a\,db}{c} + \alpha\int\frac{db}{c} - \alpha\beta = 0. \tag{7}$$

En intégrant l'équation non conditionnelle (3), après introduction des valeurs de p, q et x tirées des équations (5), (6) et (7), nous obtenons l'intégrale

$$\frac{\left(y - \int a\,db\right)(a + \alpha)}{c} + \int\frac{a^2\,db}{c} + \alpha\int\frac{a\,db}{c} + \int\alpha^2\,d\beta = 0. \tag{8}$$

L'intégrale (4), après introduction des valeurs de p et q, prend la forme

$$\frac{\left(2z - \int c\,db\right)(a + \alpha)}{c} = \alpha(x - b) + y - \int a\,db. \tag{9}$$

Les intégrales (7), (8) et (9) expriment l'intégrale générale sous forme normale.

Exemple XXVII.

$$(z^{\mathrm{IV}} z^{\mathrm{II}}_{\mathrm{II}} - z^{\mathrm{III}}_{\mathrm{I}} z^{\mathrm{III}}_{\mathrm{I}}) - (z^{\mathrm{II}}_{\mathrm{II}} z^{\mathrm{II}}_{\mathrm{II}} - z^{\mathrm{I}}_{\mathrm{III}} z^{\mathrm{III}}_{\mathrm{I}}) - (z^{\mathrm{IV}} z_{\mathrm{IV}} - z^{\mathrm{III}}_{\mathrm{I}} z^{\mathrm{I}}_{\mathrm{III}}) + (z^{\mathrm{II}}_{\mathrm{II}} z_{\mathrm{IV}} - z^{\mathrm{I}}_{\mathrm{III}} z^{\mathrm{I}}_{\mathrm{III}}) = 0.$$

Cette équation bilinéaire du quatrième ordre se compose de quatre termes bilinéaires et s'écrit suivant la proportion continue

$$(z^{\mathrm{IV}} - z^{\mathrm{II}}_{\mathrm{II}}) : (z^{\mathrm{III}}_{\mathrm{I}} - z^{\mathrm{I}}_{\mathrm{III}}) = (z^{\mathrm{III}}_{\mathrm{I}} - z^{\mathrm{I}}_{\mathrm{III}}) : (z^{\mathrm{II}}_{\mathrm{II}} - z_{\mathrm{IV}}).$$

Nous en déduisons l'équation conditionnelle du troisième ordre

$$d(g-k) = 0 \quad \text{si} \quad d(h-l) = 0,$$

dont l'intégrale est

$$g - k = \int b\, da, \qquad h - l = a,$$

que nous pouvons exprimer sous la forme

$$g - k = f(h - l).$$

Nous intégrerons cette équation du troisième ordre dans le paragraphe suivant.

XIV. — Des équations compatibles.

Nous pouvons diviser toutes les équations aux dérivées partielles en équations linéaires, bilinéaires et non linéaires.

Soit donnée une équation linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$\mathrm{F} = \mathrm{Z}^{(n)} z^{(n)} + \ldots + \mathrm{Z}_n z_n + \mathrm{Z} = 0, \tag{1}$$

où $\mathrm{Z}^{(n)}, \ldots, \mathrm{Z}_n, \mathrm{Z}$ sont des expressions d'ordre inférieur; en remplaçant toutes les dérivées partielles d'ordre n, $z^{(n)}, \ldots, z_n$, par les puissances $u^n, \ldots, u^0$ d'une inconnue u, nous obtenons l'équation aux racines

$$\mathrm{Z}^{(n)} u^n + \mathrm{Z}^{(n-1)} u^{n-1} + \ldots + \mathrm{Z}_n = 0, \tag{2}$$

par laquelle s'expriment les n racines $u_1, u_2, \ldots, u_n$, avec lesquelles nous formerons les n conditions

$$dy + u_1\, dx = 0, \qquad \ldots, \qquad dy + u_n\, dx = 0.$$

Sous chacune de ces conditions, l'équation donnée $\mathrm{F} = 0$ se change, après multiplication par dx, en une équation conditionnelle d'ordre $n-1$

$$\mathrm{F}\, dx = 0 \quad \text{si} \quad dy + u_m\, dx = 0,$$

où u_m désigne l'une des racines $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

En effet, en divisant l'équation donnée $\mathrm{F} = 0$ par $\mathrm{Z}^{(n)}$, nous la mettrons sous la forme

$$F = z^{(n)} + U_1 z_1^{(n-1)} + U_2 z_2^{(n-2)} + \ldots + U_n z_n + K = 0 \tag{3}$$

et l'équation aux racines sera

$$u^n + U_1 u^{n-1} + \ldots + U_n = 0. \tag{4}$$

D'après la loi connue des coefficients d'une équation algébrique, U_1 sera la somme négative de toutes les racines $u_1, \ldots, u_n$ de l'équation aux racines, U_2 sera la somme de leurs produits deux à deux, etc.

En désignant par $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$ les coefficients formés suivant cette même loi, avec toutes les racines $u_1, \ldots, u_n$, sauf une, u_m par exemple, nous aurons

$$U_1 = V_1 - u_m, \qquad U_2 = V_2 - u_m V_1, \qquad U_3 = V_3 - u_m V_2, \qquad \ldots, \qquad U_m = - u_m V_{n-1}$$

et, en portant ces valeurs dans l'équation $F = 0$, nous la mettons sous la forme

$$F = z^{(n)} - u_m z_1^{(n-1)} + V_1 (z_1^{(n-1)} - u_m z_2^{(n-2)}) + \ldots + V_{n-1} (z_{n-1}^1 - u_m z_n) + K = 0.$$

En multipliant cette équation par dx, et en introduisant, en vertu de la condition $dy + u_m\, dx = 0$, dy à la place de $u_m\, dx$, nous obtenons l'équation différentielle d'ordre $n = 1$,

$$F\, dx = dz^{(n-1)} + V_1\, dz_1^{(n-2)} + V_2\, dz_2^{(n-3)} + \ldots + V_{n-1}\, dz_{n-1} + K\, dx = 0, \tag{5}$$

car

$$(z^{(n)} - u_m z_1^{(n-1)})\, dx = z^{(n)}\, dx + z_1^{(n-1)}\, dy = dz^{(n-1)}, \qquad \ldots.$$

Cette équation différentielle $F\, dx = 0$, que nous avons exprimée ici au moyen des racines de l'équation donnée $F = 0$, a été exprimée au paragraphe VII, au moyen des coefficients de cette équation, et A.-I. Davidov l'a obtenue pour la première fois sous cette forme :

« En remplaçant, dans l'équation donnée $F = 0$ de la forme (1), les dérivées partielles $z^{(n)}, \ldots, z_n$, par les puissances $u^n, \ldots, u^0$, et en supprimant Z, nous obtenons l'équation aux racines. En divisant cette équation aux racines par $u - u_m$, en remplaçant les puissances $u^{n-1}, \ldots, u^0$ par les différentielles $dz^{(n-1)}, \ldots, dz_{n-1}$, et en ajoutant le terme $Z\, dx$, nous obtenons l'équation conditionnelle d'ordre $n - 1$, sous la forme

$$F\, dx = Z^{(n)} \{ dz^{(n-1)} + V_1\, dz_1^{(n-2)} + \ldots + V_{n-1}\, dz_{n-1} \} + Z dx = 0 \quad \text{si} \quad dy + u_m dx = 0. »$$

Cette équation différentielle $F\, dx = 0$ est vraie seulement sous la condition $dy + u_m\, dx = 0$. Les expressions $V_1, \ldots, V_{n-1}$ désignent les coefficients de l'équation algébrique de degré $n-1$, formés au moyen des n racines $u_1, \ldots, u_n$, sauf une, savoir la racine u_m, qui entre dans la condition $dy + u_m\,dx = 0$.

Cette équation conditionnelle contient les différentielles des dérivées partielles d'ordre $n-1$, $dz^{(n-1)}, \ldots, dz_{n-1}$, et nous l'appellerons équation différentielle d'ordre $n-1$, parce que, quand elle est intégrée, l'intégrale est une équation d'ordre $n-1$.

La condition $dy + u_m\,dx = 0$ n'a pas encore la forme d'une équation différentielle. Par suite des dérivées partielles d'ordre $n-1$, $z^{(n-1)}, \ldots, z_{n-1}$, qui peuvent entrer dans la racine u_m, l'hypothèse $dy + u_m\,dx = 0$ peut se transformer en une équation différentielle d'ordre $n-2$; mais, si ces dérivées partielles n'entrent pas dans u_m ou en sont éliminées, la condition $dy + u_m\,dx = 0$ peut se transformer en une équation différentielle de tous les ordres, depuis $n-2$ jusqu'à zéro inclusivement. Dans l'équation différentielle d'ordre zéro n'entrent, parmi les variables principales, que x, y et z.

Quand l'équation conditionnelle d'ordre $n-1$

$$\mathrm{F}\,dx = 0 \qquad \text{si} \qquad dy + u_m\,dx = 0$$

est intégrée, l'intégrale s'exprime par les deux équations $f = 0$ et $\varphi = 0$, avec les deux constantes d'intégration b et a. Ces constantes d'intégration sont deux variables dont l'une ne change pas quand l'autre ne change pas, et dépendent, par conséquent, l'une de l'autre. Nous exprimerons entièrement cette dépendance entre b et a, en prenant pour b une fonction arbitraire de l'argument a, et nous obtenons, par suite, une intégrale d'ordre $n-1$, exprimée par deux équations $f = 0$ et $\varphi = 0$, dans lesquelles entre la simple fonction arbitraire b. En éliminant l'argument a, pour une valeur donnée de cette fonction, des équations $f = 0$ et $\varphi = 0$, nous exprimerons cette intégrale par une équation aux dérivées partielles d'ordre $n-1$.

(α) Toute équation linéaire d'ordre n a par conséquent n équations conditionnelles d'ordre $n-1$, qui correspondent aux n racines de l'équation aux racines. Mais, s'il y a des racines égales, à chaque racine multiple ne correspond qu'une équation conditionnelle d'ordre $n-1$.

(β) Toute équation bilinéaire d'ordre n n'a, en général, comme nous l'avons vu, qu'une équation conditionnelle d'ordre $n-1$, qui correspond à une racine bilinéaire. Dans un cas particulier, elle a deux équations conditionnelles d'ordre $n-1$, correspondant à deux racines bilinéaires, qui peuvent se confondre en une racine double de l'équation aux racines.

(γ) Une équation non linéaire d'ordre n n'a jamais d'équation conditionnelle d'ordre $n-1$.

Toute équation aux dérivées partielles d'ordre n, $F = 0$, a deux équations dérivées d'ordre $n+1$, $\frac{dF}{dx} = 0$ et $\frac{dF}{dy} = 0$, trois équations dérivées d'ordre $n+2$, et, d'une façon générale, $m+1$ équations dérivées d'ordre $n+m$. Toutes ces équations dérivées ont la forme linéaire.

En désignant par $f = 0$ une équation dérivée d'ordre $n+m$ quelconque, et en formant son équation aux racines, nous obtenons, en écartant les racines superflues qui sont égales à zéro ou sont infinies, toujours n racines, lesquelles, en vertu des autres équations dérivées, seront les mêmes, quelle que soit l'équation dérivée que l'on ait prise. Nous appellerons ces n racines, *racines de l'équation donnée* $F = 0$, et l'équation, au moyen de laquelle nous les avons obtenues, *équation aux racines*, quel que soit son ordre. A ces n racines correspondent n conditions de la forme $dy + u\,dx = 0$, et, sous chacune de ces conditions, l'équation linéaire d'ordre $n+m$, $f = 0$, se transforme en une équation conditionnelle d'ordre $n+m-1$,

$$f\,dx = 0 \qquad \text{si} \qquad dy + u\,dx = 0,$$

que nous considérerons comme une simple équation conditionnelle d'ordre $n+m-1$, de l'équation donnée $F = 0$. Il en résulte que :

(δ) Toute équation aux dérivées partielles d'ordre n a, sous chacune des conditions correspondant à ses n racines, des équations conditionnelles de tous les ordres, depuis n jusqu'à l'infini ([1]).

Nous obtenons les équations conditionnelles d'ordre n de toute équation d'ordre n donnée $F = 0$, au moyen des équations dérivées d'ordre $n+1$, $\frac{dF}{dx} = 0$ ou $\frac{dF}{dy} = 0$.

En remplaçant dans l'équation $\frac{dF}{dx} = 0$ les dérivées partielles $z^{(n+1)}, \ldots, z'_n$, ou dans l'équation $\frac{dF}{dy} = 0$ les dérivées partielles $z_1^{(n)}, \ldots, z_{n+1}$, par $u^n, \ldots, u^0$ respectivement, nous obtenons l'*équation aux racines d'ordre n*, au moyen de laquelle les n racines $u_1, \ldots, u_n$ sont déterminées comme expressions d'ordre n. Nous obtenons, par suite, sous chacune des conditions $dy + u_1\,dx = 0, \ldots, dy + u_n\,dx = 0$, une équation conditionnelle d'ordre n

$$\frac{dF}{dx}\,dx = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dF}{dy}\,dx = 0 \qquad \text{si} \qquad dy + u\,dx = 0,$$

([1]) V.-V. Préobrajensky et N.-I. Sonine emploient ces équations différentielles d'ordre supérieur pour l'intégration des équations aux dérivées partielles.

dont les deux formes sont identiques, en vertu de $d\mathrm{F}=0$. En ajoutant à ces n équations conditionnelles d'ordre n, toutes les équations non conditionnelles d'ordre inférieur, nous obtenons les équations compatibles d'ordre n, que nous avons obtenues au paragraphe IV.

En ajoutant, d'une manière générale, à toutes les équations conditionnelles d'ordre m, toutes les équations non conditionnelles d'ordre inférieur, nous obtenons les équations compatibles d'ordre m. Quand il existe une intégrale générale, ses équations dérivées par rapport à x et à y, jusqu'à l'ordre m inclusivement, représentent les intégrales de toutes les équations compatibles d'ordre m.

Nous pouvons toujours éliminer, des équations dérivées de l'intégrale générale, toutes les formes de toutes les fonctions arbitraires, sauf une, et obtenir une équation dans laquelle n'entre que cette fonction, sous une forme seulement. Cette équation représente, d'après le paragraphe XI, l'intégrale d'une équation conditionnelle, et cette équation conditionnelle doit se trouver parmi les équations compatibles. Il en résulte que, s'il existe une intégrale générale, une équation conditionnelle s'intègre sous chaque condition et, dans son intégrale, n'entre qu'une fonction arbitraire sous une forme seulement.

Ayant obtenu l'intégrale d'une équation conditionnelle, qui s'intègre avec une simple fonction arbitraire $b=\varphi a$, nous pouvons, à l'aide de cette intégrale, intégrer d'autres équations compatibles. La fonction b reçoit, dans cette intégration, de nouvelles formes sous le signe $\int$ que nous appellerons *supérieures*, et de plus *libres* quand elles ne contiennent pas les variables principales ou les arguments d'autres fonctions arbitraires. Parmi les formes libres, nous pouvons en prendre une quelconque pour forme primitive, et nous appellerons *inférieures* les formes qui s'expriment alors par des dérivées de la forme primitive. Ces dernières peuvent aussi ne pas se présenter dans les intégrales d'ordre inférieur. Si toutes les formes de la fonction dérivée disparaissent dans l'intégrale, sauf une, nous avons alors, dans cette intégrale, une fonction simple conjointement avec des fonctions arbitraires d'autres arguments. Nous pouvons obtenir également cette intégrale au moyen de l'intégration d'une équation conditionnelle, dans laquelle se présentent des fonctions arbitraires, et nous obtenons de telles équations conditionnelles avec les intégrales déjà trouvées.

(ε) En effet, toute intégrale trouvée $f=0$ représente une équation aux dérivées partielles, dans l'intégrale générale de laquelle doivent entrer toutes les fonctions arbitraires de l'intégration de l'équation donnée $\mathrm{F}=0$. Si l'une de ces fonctions ne se présente pas dans l'intégrale $f=0$, l'argument de cette fonction doit être déterminé par une de ses racines, et, sous la condition correspondant à cette racine, nous obtenons, avec l'équation donnée $\mathrm{F}=0$, des équations conditionnelles sans fonctions arbitraires, et, avec l'intégrale trouvée $f=0$, des équations conditionnelles contenant les fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale $f=0$.

Nous appellerons *équations compatibles,* toutes ces équations conditionnelles contenant ou non des fonctions arbitraires, y compris toutes les équations non conditionnelles.

Dans le premier Mémoire, nous avons exposé deux procédés d'intégration des équations compatibles.

Dans l'intégration suivant le premier procédé, nous ne changeons pas la signification des équations intégrées, et nous obtenons les intégrales avec des fonctions arbitraires et avec des formes indéterminées de ces fonctions arbitraires.

Dans le second procédé, nous obtenons des équations différentielles plus générales, en liant avec l'intégration les équations de différents systèmes et en prenant pour constantes des arguments quelconques.

Les constantes d'intégration sont, dans leurs intégrales, des fonctions indéterminées qui doivent être déterminées de façon que les intégrales trouvées satisfassent à l'équation différentielle donnée.

Quand une équation non conditionnelle est intégrée, d'après ce procédé, pour une valeur constante d'un argument a, l'intégrale obtenue a la forme normale; la constante d'intégration dépend de a et sera une nouvelle fonction arbitraire de cet argument ou une nouvelle forme de la fonction arbitraire déjà introduite. En effet, si l'intégrale $f=k$ de l'équation différentielle $D=0$ est obtenue sous la condition $da=0$, la constante d'intégration k dépend de a. Quand $D=0$ ou $df=0$ est une équation non conditionnelle, elle doit être satisfaite non seulement pour $da=0$, mais aussi pour da arbitraire, et, par suite, de la différentielle

$$df+(f'-k')\,da=0$$

de l'intégrale trouvée $f=k$ résulte sa forme normale, et nous obtenons une nouvelle intégrale

$$f'-k'=0,$$

avec une constante d'intégration k' qui dépend de a. Sous la condition $da=0$, nous déduisons de là l'équation conditionnelle

$$df'=0 \qquad \text{si} \qquad da=0.$$

Si cette équation conditionnelle est la même que celle dont nous avons déterminé, par l'intégrale, l'argument a et la fonction arbitraire b, alors $f'-k'=0$ sera l'intégrale déjà trouvée et par suite k est déterminé comme une nouvelle forme de la fonction arbitraire b déjà introduite. Nous avons ce cas, dans l'exemple I du premier Mémoire.

Mais si l'équation conditionnelle

$$df' = 0 \quad \text{si} \quad da = 0$$

n'est pas identique à l'équation conditionnelle déjà intégrée, alors k' n'est déterminé par rien et nous pouvons prendre k ou k' pour nouvelle fonction arbitraire de l'argument a, qui dans ce cas correspond nécessairement à une racine multiple de l'équation aux racines.

Nous avons rencontré ce cas dans les derniers exemples du paragraphe XIII.

Exemple XXVII (suite).

$$g - k = f(h - l).$$

En désignant $h - l$ par a, et en posant $fa = \int b\,da$, nous mettons l'équation donnée sous la forme

$$g - k = \int b\,da, \tag{1}$$

$$h - l = a, \tag{2}$$

que nous avons déjà obtenue au paragraphe XII, dans l'intégration de l'équation bilinéaire XXVII.

En additionnant les deux équations (1) et (2), après multiplication de la première par dx, et de la seconde par dy, nous obtenons l'équation non conditionnelle

$$dr - dt = a\,dy + \left(\int b\,da\right)dx,$$

qui s'intègre pour a constant.

Par suite, nous obtenons l'intégrale

$$r - t = ya + x\int b\,da + k, \tag{3}$$

dont l'équation dérivée par rapport à a est

$$y + bx + k' = 0. \tag{4}$$

Comme l'intégrale (4) n'est pas identique à l'équation donnée, par laquelle sont déterminés b et a, nous en concluons que k' est une nouvelle fonction arbitraire de l'argument a. En posant $k' = c$, nous mettons l'intégrale (3) sous la forme normale

$$(5)\qquad r - t = \int (y + bx + c)\, da.$$

Nous pouvons intégrer cette intégrale intermédiaire au lieu de l'équation donnée; ses racines sont $+1$ et -1. En la multipliant par dx, nous obtenons par suite, sous la condition $dy - dx = 0$, l'équation conditionnelle

$$dp - dq = dx \int (y + bx + c)\, da \qquad \text{si} \qquad dy - dx = 0,$$

dont l'intégrale (*voir* la forme composée au § XV) est

$$(6)\qquad p - q = \int \frac{(y + bx + c)^2}{2(b+1)}\, da - 2\varphi'(y - x).$$

En multipliant cette intégrale par dx, nous obtenons, sous la condition

$$dy + dx = 0,$$

l'équation conditionnelle d'ordre nul, dont l'intégrale sera l'intégrale générale

$$z = \int \frac{(y + bx + c)^3}{6(b^2 - 1)}\, da + \varphi(y - x) + \psi(y + x).$$

La forme de cette intégrale est normale par rapport aux trois arguments; la dérivée par rapport à a devient nulle, en vertu de l'équation

$$(4)\qquad y + bx + c = 0;$$

les dérivées par rapport aux deux autres arguments, qui sont éliminés, sont identiquement nulles.

Exemple XXVIII.

$$t\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 - 2s\frac{d\omega}{dx}\frac{d\omega}{dy} + r\left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2 = 0, \qquad \text{où} \qquad \omega = \sqrt{s^2 - rt}.$$

Cette équation du troisième ordre se ramène à la forme linéaire

$$\mathrm{F} = \frac{d\omega}{dx} - \frac{d\omega}{dy}\frac{s - \omega}{t} = 0,$$

et nous obtenons par suite deux racines égales $\frac{s-\omega}{t}$ et une troisième racine $\frac{s+\omega}{t}$ de l'équation aux racines. Sous la condition

$$dy + \frac{s - \omega}{t}\, dx = 0,$$

nous en déduisons l'équation conditionnelle

$$d\omega = 0 \quad \text{si} \quad t\,dy + s\,dx - \omega\,dx = 0,$$

à l'intégrale de laquelle nous pouvons donner la forme

$$(1) \qquad \omega = c^2,$$

$$(2) \qquad q - c^2 x + 2\int c\,da = 0 \quad (^1).$$

$\Big($Il est évident que $F\,dx$, sous cette condition, se change en l'équation différentielle $\frac{d\omega}{dx}dx + \frac{d\omega}{dy}dy = d\omega = 0$, et nous pouvons obtenir, par suite, la racine $\frac{s-\omega}{t}$, en évitant de résoudre l'équation aux racines.$\Big)$

En vertu de $\omega = \sqrt{s^2 - rt}$, nous avons

$$\frac{s-\omega}{t} = \frac{r}{s+\omega},$$

et par conséquent, nous obtenons, sous la même condition, la deuxième équation conditionnelle

$$(s+\omega)\,dy + r\,dx = 0 \quad \text{si} \quad t\,dy + (s-\omega)\,dx = 0,$$

dont l'intégrale est

$$(3) \qquad p + c^2 y - 2\int c\,db = 0 \quad (^1).$$

(Il résulte de là que la racine trouvée est double.)

Comme $\frac{r}{s-\omega} = \frac{s+\omega}{t}$, nous obtenons, sous la condition correspondant à la troisième racine, l'équation conditionnelle

$$(s-\omega)\,dy + r\,dx = 0 \quad \text{si} \quad t\,dy + (s+\omega)\,dx = 0$$

ou

$$dp - c^2\,dy = 0 \quad \text{si} \quad dr + c^2\,dx = 0.$$

Cette équation conditionnelle, quand on y porte les valeurs de p et q tirées des intégrales (3) et (2), prend la forme

$$d(cy - b) = 0 \quad \text{si} \quad d(cx - a) = 0,$$

---

(1) Pour la symétrie, nous avons introduit l'argument et ses deux fonctions arbitraires, sous la forme c^2, $\int c\,da$ et $\int b\,da$.

et nous obtenons par suite son intégrale

$$(4) \qquad cy = b + \beta,$$
$$(5) \qquad cx = a + \alpha.$$

En portant les valeurs des variables p, q, x, y tirées des intégrales (2), (3), (4), (5), dans l'équation non conditionnelle $dz = p\,dx + q\,dy$, et en l'intégrant, nous obtenons l'intégrale générale sous la forme non normale

$$\begin{aligned} z = a\beta - \alpha b + \frac{2(a+\alpha)}{c}\int c\,db \\ - \frac{2(b+\beta)}{c}\int c\,da - \int(a\,db - b\,da) + \int(\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha), \end{aligned}$$
$$y = \frac{b+\beta}{c}, \qquad x = \frac{a+\alpha}{c},$$

qui se ramène à la forme normale

$$\begin{aligned} z = \quad & y\left[c(a+\alpha) - 2\int c\,da\right] \\ & - x\left[c(b+\beta) - 2\int c\,db\right] + 2\int b\,da - 2\int \beta\,d\alpha - (a+\alpha)(b-\beta). \end{aligned}$$

Exemple XXIX.

$$z_n(x+y)^n = z.$$

Toutes les racines sont infinies; il ne leur correspond qu'une condition $dx = 0$, et par conséquent les n fonctions d'intégration dépendent toutes de x.

En multipliant l'équation donnée par dy, nous obtenons une équation conditionnelle d'ordre $n-1$,

$$(1) \qquad (x+y)^n\,dz_{n-1} = z\,dy \quad \text{si} \quad dx = 0.$$

En multipliant cette équation par $(x+y)^{-u_1}$, où u_1 est une des racines de l'équation algébrique de degré n

$$(2) \qquad (u-1)(u-2)\ldots(u-n+1)(u-n) = 1,$$

et en l'intégrant par parties, nous obtenons l'intégrale d'ordre $n-1$

$$\begin{aligned} (3) \qquad (x+y)^{n-u_1}z_{n-1} + (u_1-n)(x+y)^{n-u_1-1}z_{n-2} + \ldots \\ + (u_1-n)\ldots(u_1-2)(x+y)^{1-u_1}z = \varphi_1 x, \end{aligned}$$

car le terme $\int(x+y)^{-u_1}z\,dy$ est réduit des deux côtés, à cause de l'équation (2).

L'intégrale (3), après multiplication par $(x+y)^{u_1}$, prend la forme

$$(4) \qquad (x+y)^n z_{n-1} + (u_1 - n)(x+y)^{n-1} z_{n-2} + \ldots \\ + \{(u_1-n)\ldots(u_1-2)\}(x+y)z = (x+y)^{u_1}\varphi_1 x$$

et nous obtenons évidemment n telles intégrales, qui correspondent aux n racines $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de l'équation (2), et contiennent les fonctions d'intégration $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. En éliminant de ces n intégrales les $n-1$ dérivées partielles $z_{n-1}, \ldots, z_1$, nous obtenons l'intégrale générale

$$(x+y)z = (x+y)^{u_1} f_1 x + (x+y)^{u_2} f_2 x + \ldots + (x+y)^{u_n} f_n x,$$

où $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont les n fonctions arbitraires d'intégration, et $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les n racines de l'équation algébrique

$$(u-1)(u-2)(u-3)\ldots(u-n) = 1.$$

Il n'est pas besoin d'exprimer les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ par $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

XV. — Intégrales indéfinies, intermédiaires et particulières des équations compatibles.

Formes normale, pure, mixte et composée de ces intégrales.

Quand l'intégrale d'ordre m de l'équation d'ordre n donnée contient $n-m$ fonctions arbitraires d'intégration, alors, en éliminant toutes ces fonctions, nous obtenons l'équation donnée, et en intégrant cette intégrale, au lieu de l'équation donnée, nous obtenons l'intégrale générale de l'équation donnée. Cette intégrale se nomme *intégrale intermédiaire* d'ordre m. L'intégrale générale est par conséquent une intégrale intermédiaire d'ordre nul.

Toutes les $m+1$ intégrales d'ordre m, entre l'ordre nul et l'ordre n, peuvent être intermédiaires, mais, d'une façon générale, chacune d'elles contient plus de $n-m$ fonctions arbitraires. Nous appellerons une telle intégrale, une *intégrale indéfinie* d'ordre m (au § IX, nous l'avons appelée *intégrale conditionnelle*). Si nous éliminons, d'une intégrale indéfinie, toutes les fonctions arbitraires, nous n'obtenons pas l'équation donnée, mais une équation aux dérivées partielles d'ordre supérieur. Quand, au lieu de l'équation donnée, nous intégrons l'intégrale indéfinie, l'intégrale générale que nous obtenons contient des fonctions arbitraires superflues, et ce n'est que pour des valeurs particulières de ces fonctions, qui doivent être déterminées, qu'elle se change en l'intégrale générale de l'équation donnée. Dans les deux procédés d'intégration que nous avons exposés au premier

Mémoire, ces fonctions d'intégration superflues disparaissent, de sorte que, par les intégrales indéfinies, nous obtenons non seulement l'intégrale générale définie, mais nous pouvons aussi obtenir les intégrales intermédiaires, si elles existent.

Les intégrales, dans lesquelles les fonctions d'intégration ont des valeurs particulières, s'appellent *intégrales particulières*.

En intégrant, à la place de l'équation donnée, une intégrale particulière, nous obtenons une intégrale générale, dans laquelle il n'y a pas assez de fonctions arbitraires d'intégration, et si en même temps il entre, dans les fonctions d'intégration, des fonctions indéterminées superflues, alors l'intégrale trouvée sera appelée *intégrale particulière indéfinie*.

(α) *Forme normale des intégrales.*

Nous appellerons *normale* la forme de l'intégrale $F=0$, quand tous les arguments a, α, ... des fonctions qui y entrent sont déterminés par les équations dérivées $\frac{dF}{da}=0$, $\frac{dF}{d\alpha}=0$, ... de F, par rapport à ces arguments, et nous désignerons une telle intégrale par une équation $F=0$.

Nous pouvons amener toute intégrale à la forme normale.

En effet, si, dans l'intégrale $f=0$, n'entre qu'un argument a, qui est déterminé par l'équation arbitraire $f_1=0$, la forme normale de cette intégrale $f=0$, $f_1=0$ sera

$$F=f\frac{df_1}{da}-f_1\frac{df}{da}=0, \tag{1}$$

car $\frac{dF}{da}=0$ et $F=0$, par suite de $f=0$ et $f_1=0$.

Si, dans l'intégrale $f=0$, entrent n arguments, qui sont déterminés par n équations arbitraires $f_1=0$, ..., $f_n=0$, alors, en prenant les dérivées des $n+1$ expressions f, ..., f_n par rapport aux n arguments, et en désignant par D_m le déterminant de ces dérivées des expressions f, ..., f_n, sauf une f_m, nous obtenons la forme normale de cette intégrale

$$F=fD+f_1D_1+f_2D_2+\ldots+f_nD_n=0, \tag{2}$$

car, d'après une propriété connue des déterminants, les dérivées de F par rapport à tous les arguments seront nulles.

En amenant à la forme normale une intégrale non normale, nous introduisons en général des formes superflues des fonctions arbitraires, et, pour cette raison, nous considérerons toutes les intégrales, sous la forme dans laquelle nous les obtenons.

Parmi ces formes, nous distinguerons les suivantes.

(β) *Forme pure des intégrales.*

Nous appellerons *forme pure* par rapport à un argument, la forme de l'intégrale $F = 0$, quand cet argument est donné comme une fonction des variables principales.

La forme pure d'une intégrale, par rapport à tous les arguments, s'exprime par une équation arbitraire $F = 0$, avec toutes les fonctions d'intégration, et avec autant d'équations, sans ces fonctions arbitraires, qu'il entre d'arguments dans l'équation $F = 0$. Tous les arguments sont alors déterminés comme fonctions des variables principales, et n'entrent pas dans l'équation $F = 0$, si nous y portons leurs valeurs.

Après élimination des arguments, la forme pure se change en un cas particulier de la forme normale, car les dérivées de l'intégrale, par rapport aux arguments qui n'y entrent pas, sont égales à zéro.

(γ) *Forme mixte des intégrales.*

Cette forme est, comme nous le verrons, particulièrement commode pour l'expression des intégrales générales, et représente la généralisation de la forme normale, dans laquelle elle se transforme dans le cas particulier. Elle s'exprime par deux équations arbitraires $F = 0$ et $f = 0$, dont les dérivées par rapport à tous les arguments a, α, $\mathfrak{a}$, ... qui y entrent, ont le même rapport, de sorte que

$$\frac{dF}{da} : \frac{df}{da} = \frac{dF}{d\alpha} : \frac{df}{d\alpha} = \frac{dF}{d\mathfrak{a}} : \frac{df}{d\mathfrak{a}} = \ldots \tag{3}$$

Si n est le nombre de tous les arguments a, α, $\mathfrak{a}$, ..., ces rapports égaux (3) représentent $n - 1$ équations qui, à l'aide de l'équation $f = 0$, représentent tous les arguments, de sorte que $F = 0$, après élimination de ces arguments, représente une équation entre les variables principales. Si $f = \frac{dF}{da}$, alors l'intégrale de la forme mixte $F = 0$, $f = 0$ prend la forme normale $F = 0$, car les dérivées de F par rapport à tous les arguments deviennent nulles, en vertu des équations (3) et de $f = 0$.

En vertu des rapports égaux (3), les déterminants du second ordre

$$\frac{dF}{da}\frac{df}{d\alpha} - \frac{dF}{d\alpha}\frac{df}{da},$$

des dérivées partielles des deux expressions F et f, par rapport à tous les arguments a, α, $\mathfrak{a}$, ... seront nuls.

Si, par conséquent, nous amenons l'intégrale de *forme mixte* donnée $F=0$, $f=0$, à la forme normale

$$\Phi = F\frac{df}{da} - f\frac{dF}{da} = 0,$$

par rapport à un argument a, elle devient alors normale par rapport à tous les arguments, car, en vertu de $F=0$ et $f=0$, la dérivée de Φ, par rapport à un argument quelconque α, sera un déterminant du second ordre

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = \frac{dF}{d\alpha}\frac{df}{da} - \frac{dF}{da}\frac{df}{d\alpha} = 0.$$

Convenons d'exprimer l'intégrale de forme mixte seulement par les deux équations $F=0$ et $f=0$.

Nous avons obtenu, dans l'exemple XXIV, l'intégrale générale de l'équation linéaire entre x, y, p, q, sous la forme normale

$$(4)\qquad \begin{cases} z + \int (Ax+By+C)(x\,da+y\,db+dc) - \int \beta\,d\alpha = 0, \\ ax+by+c=\alpha, \qquad Ax+By+C=\beta. \end{cases}$$

La forme mixte de cette intégrale s'exprime par deux équations

$$(5)\qquad \begin{gathered} F = z + \int (Ax+By+C)(x\,da+y\,db+dc) - \beta = 0, \\ f = ax+by+c-\alpha = 0. \end{gathered}$$

L'équation

$$\frac{dF}{da}:\frac{df}{da} = \frac{dF}{d\alpha}:\frac{df}{d\alpha}$$

qui, pour la forme mixte, est sous entendue, a la forme

$$Ax+By+C = \frac{d\beta}{d\alpha}.$$

L'intégrale de forme non normale (4) se ramène à trois équations

$$F=0, \qquad f=0, \qquad Ax+By+C=\frac{d\beta}{d\alpha},$$

si nous substituons $\frac{d\beta}{d\alpha}$ à β.

(δ) *Forme composée des intégrales.*

Toute expression E, dans laquelle entre un argument a, peut, en désignant $\frac{dF}{da}$

par U, se ramener à la forme

$$F = V + \int U\, da,$$

où V ne contient pas a.

Si F est une expression normale par rapport à a, c'est-à-dire si $\frac{dF}{da} = U = 0$, nous pouvons sous le signe $\int$, sans avoir égard aux limites, différentier l'expression F par rapport à une variable quelconque u qui y entre. En effet,

$$\frac{dF}{du} = \frac{dV}{du} + \int \frac{dU}{du}\, da,$$

car, en vertu de $U = 0$, la dérivée des limites sera nulle.

Si le facteur de l'expression U qui, en s'annulant, détermine l'argument a, est un facteur multiple, nous pouvons répéter une telle différentiation sous le signe $\int$, autant de fois que ce facteur entre dans l'expression U. Nous appellerons l'expression F, dans ce cas, une expression normale d'ordre supérieur.

Nous pouvons aussi effectuer sous le signe $\int$ la quadrature de l'expression

$$F = V + \int U\, da,$$

par rapport à la variable u qui y entre; mais les limites de cette quadrature sous le signe $\int$ doivent être déterminées de telle façon que l'expression obtenue f soit normale.

En effet, en posant

$$f = \int F\, du = \int V\, du + \int \left(\int_{u=u_0} U\, du \right) da,$$

où u_0 désigne la valeur que prend la variable u, quand nous la déterminons par l'équation $U = 0$, nous obtenons, d'après ce qui précède,

$$\frac{df}{du} = F = V + \int U\, da.$$

Les limites u_1 et u_2 de la quadrature $\int_{u_1}^{u_2} F\, du$ restent arbitraires.

Nous conviendrons de désigner par Z l'expression

$$\int (U\, du + V\, dv + W\, dw + \ldots),$$

dont la différentielle totale est

$$dZ = U\,du + V\,dv + W\,dw + \ldots.$$

Si $F = 0$ désigne une intégrale normale par rapport à deux arguments a, α, ou plus, alors, en désignant $\frac{dF}{da}$ par U, $\frac{dF}{d\alpha}$ par V, nous pouvons mettre l'intégrale $F = 0$ sous la forme

$$F = W + \int (U\,da + V\,d\alpha) = 0, \tag{6}$$

où les expressions U et V satisfont aux conditions d'intégrabilité $\frac{dU}{d\alpha} = \frac{dV}{da}$, et contiennent en facteurs des expressions qui, en s'annulant, déterminent les arguments a et α.

Nous appellerons cette forme (6), *forme composée* de l'intégrale $F = 0$. Nous obtenons une forme composée de forme normale, en plaçant sous le signe $\int$ la différentielle de cette intégrale prise par rapport aux arguments.

La différentiation et l'intégration d'une intégrale de forme composée

$$F = W + \int (U\,da + V\,d\alpha) = 0,$$

par rapport aux variables principales qui entrent dans les expressions U, V, W, s'effectue en général sous le signe $\int$.

En effet, si $F = 0$ est une intégrale de forme normale, nous avons

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dW}{dx} + \int \left(\frac{dU}{dx}\,da + \frac{dV}{dx}\,d\alpha\right) = 0,$$
$$\frac{dF}{dy} = \frac{dW}{dy} + \int \left(\frac{dU}{dy}\,da + \frac{dV}{dy}\,d\alpha\right) = 0,$$

et, si les facteurs multiples des expressions U et V s'annulent, les expressions $\frac{dF}{dx} = 0$ et $\frac{dF}{dy} = 0$ seront normales, et nous pourrons, par conséquent, répéter la différentiation sous le signe $\int$.

Il résulte de là que nous pouvons effectuer sous le signe $\int$ la quadrature de l'expression composée, pourvu que le résultat de la quadrature soit une expression normale.

La forme composée de l'intégrale (4), que nous avons mise sous la forme mixte (5), s'exprime par l'équation

$$2z + \int [(Ax + By + C - \beta)(x\,da + y\,db + dc + d\alpha) \\ - (ax + by + c - \alpha)(x\,dA + y\,dB + dC + d\beta)] = 0,$$

où sous le signe $\int$, dans les parenthèses [ ], se trouve une différentielle totale par rapport à a et α, pour x et y constants.

Les équations

$$Ax + By + C = \beta \qquad \text{et} \qquad ax + by + c = \alpha$$

sont les conséquences de la normalité.

Exemple XXX.

$$[gst - h(rt + s^2) + krs](s + t) = [hst - k(rt + s^2) + lrs](r + s).$$

En résolvant l'équation aux racines, nous obtenons les racines

$$\frac{r + s}{s + t}, \quad \frac{r}{s}, \quad \frac{s}{t},$$

auxquelles correspondent les conditions

$$d(p + q) = 0, \qquad dp = 0, \qquad dq = 0.$$

Sous ces conditions, nous déduisons de l'équation donnée les équations conditionnelles

$$d\frac{rt - s^2}{s} = 0 \quad \text{si} \quad d(p + q) = 0,$$

$$d\frac{rt - s^2}{s + t} = 0 \quad \text{si} \quad dp = 0,$$

$$d\frac{rt - s^2}{r + s} = 0 \quad \text{si} \quad dq = 0,$$

dont les intégrales

$$rt - s^2 = sf(p + q), \qquad rt - s^2 = (s + t)f_1 p, \qquad rt - s^2 = (r + s)f_2 q,$$

sont des intégrales intermédiaires du second ordre, puisque chacune d'elles contient une fonction arbitraire.

En introduisant les arguments a, α, $\mathfrak{a}$, nous pouvons mettre ces intégrales sous la forme

$$(1)\qquad rt - s^2 + as = 0,$$

$$(2)\qquad p + q + b - ab' = 0,$$

$$(3)\qquad rt - s^2 - \alpha(s + t) = 0,$$

$$(4)\qquad p - \beta + \alpha\beta' = 0,$$

$$(5)\qquad rt - s^2 - \mathfrak{a}(r + s) = 0,$$

$$(6)\qquad q - \mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}' = 0.$$

En déterminant r, s, t au moyen des intégrales (1), (3), (5), et en portant leurs valeurs dans les différentielles totales des intégrales (2), (4) et (6), nous obtenons trois équations non conditionnelles

$$(7)\qquad \alpha\, dx + \mathfrak{a}\, dy - (a + \alpha + \mathfrak{a})\, db' = 0,$$

$$(8)\qquad (a + \mathfrak{a})\, dx - \mathfrak{a}\, dy + (a + \alpha + \mathfrak{a})\, d\beta' = 0,$$

$$(9)\qquad -\alpha\, dx + (a + \alpha)\, dy + (a + \alpha + \mathfrak{a})\, d\mathfrak{b}' = 0.$$

En additionnant les équations (7) et (8), nous obtenons l'équation non conditionnelle

$$dx - db' + d\beta' = 0,$$

dont l'intégrale est

$$(10)\qquad x - b' + \beta' = 0.$$

En additionnant les équations (7) et (9), nous obtenons une équation non conditionnelle, dont l'intégrale est

$$(11)\qquad y - b' + \mathfrak{b}' = 0.$$

En multipliant l'intégrale (10) par $d\alpha$, l'intégrale (11) par $d\mathfrak{a}$, et en les additionnant avec l'équation (7), nous obtenons l'équation non conditionnelle

$$d\{\alpha x + \mathfrak{a} y + b + \beta + \mathfrak{b} - (a + \alpha + \mathfrak{a})\, b'\} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$(12)\qquad \alpha x + \mathfrak{a} y + b + \beta + \mathfrak{b} - (a + \alpha + \mathfrak{a})\, b' = 0.$$

Désignons

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\alpha x + \mathfrak{a} y + b + \beta + \mathfrak{b}}{a + \alpha + \mathfrak{a}} - b' & \text{par U,} \\[2ex] \dfrac{\alpha x + \mathfrak{a} y + b + \beta + \mathfrak{b}}{a + \alpha + \mathfrak{a}} - \beta' - x & \text{par V,} \\[2ex] \dfrac{\alpha x + \mathfrak{a} y + b + \beta + \mathfrak{b}}{a + \alpha + \mathfrak{a}} - \mathfrak{b}' - y & \text{par W.} \end{cases}$$

En divisant l'intégrale (12) par $a+\alpha+\mathfrak{a}$, en en retranchant d'abord l'intégrale (10) et ensuite l'intégrale (11), nous amenons ces trois intégrales à la forme

$$(14) \qquad \mathrm{U}=0, \qquad \mathrm{V}=0, \qquad \mathrm{W}=0.$$

En éliminant, au moyen des intégrales (10), (11) et (12), les dérivées b', β' et $\mathfrak{b}'$, des intégrales (2), (4) et (6), nous obtenons deux intégrales indéfinies du premier ordre, avec trois fonctions arbitraires,

$$(15) \qquad p=\alpha x+\beta-\frac{\alpha(\alpha x+\mathfrak{a}y+b+\beta+\mathfrak{b})}{a+\alpha+\mathfrak{a}},$$

$$(16) \qquad q=\mathfrak{a}y+\mathfrak{b}-\frac{\mathfrak{a}(\alpha x+\mathfrak{a}y+b+\beta+\mathfrak{b})}{a+\alpha+\mathfrak{a}}.$$

Il n'y a pas d'intégrale intermédiaire du premier ordre.

En mettant ces intégrales (15) et (16) sous la forme composée, c'est-à-dire en plaçant le signe $\int$ sur leurs différentielles, nous obtenons, en vertu des équations (13),

$$p=\int\frac{\alpha\mathrm{U}\,da-(a+\mathfrak{a})\mathrm{V}\,d\alpha+\alpha\mathrm{W}\,d\mathfrak{a}}{a+\alpha+\mathfrak{a}}=\int\left(\mathrm{U}\frac{d\mathrm{U}}{dx}da+\mathrm{V}\frac{d\mathrm{V}}{dx}d\alpha+\mathrm{W}\frac{d\mathrm{W}}{dx}d\mathfrak{a}\right),$$

$$q=\int\frac{\mathfrak{a}\mathrm{U}\,da+\mathfrak{a}\mathrm{V}\,d\alpha-(\alpha+a)\mathrm{W}\,d\mathfrak{a}}{a+\alpha+\mathfrak{a}}=\int\left(\mathrm{U}\frac{d\mathrm{U}}{dy}da+\mathrm{V}\frac{d\mathrm{V}}{dy}d\alpha+\mathrm{W}\frac{d\mathrm{W}}{dy}d\mathfrak{a}\right).$$

En portant ces valeurs de p et q dans l'équation non conditionnelle

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

et en intégrant sous le signe $\int$, nous obtenons l'intégrale générale sous la forme composée

$$2z=\int\{\mathrm{U}^2\,da+\mathrm{V}^2\,d\alpha+\mathrm{W}^2\,d\mathfrak{a}\},$$

d'après la normalité du second ordre, car les dérivées par rapport aux arguments sont les puissances secondes des expressions U, V, W, qui sont égales à zéro.

Nous déduisons des équations (13)

$$\frac{d\mathrm{U}^2}{d\alpha}=\frac{d\mathrm{V}^2}{da}=-\frac{2\mathrm{UV}}{a+\alpha+\mathfrak{a}}, \qquad \frac{d\mathrm{U}^2}{d\mathfrak{a}}=\frac{d\mathrm{W}^2}{da}, \qquad \frac{d\mathrm{V}^2}{d\mathfrak{a}}=\frac{d\mathrm{W}^2}{d\alpha},$$

et il en résulte que l'expression $\mathrm{U}^2\,da+\mathrm{V}^2\,d\alpha+\mathrm{W}^2\,d\mathfrak{a}$ est, en effet, une différentielle totale par rapport à a, α et $\mathfrak{a}$, pour x et y constants.

Exemple XXXI.

$$z^{\text{IV}} + e z_{\text{I}}^{\text{III}} + \varepsilon z_{\text{II}}^{\text{II}} = 0,$$

$$z_{\text{I}}^{\text{III}} + e z_{\text{II}}^{\text{II}} + \varepsilon z_{\text{III}}^{\text{I}} = 0,$$

$$z_{\text{II}}^{\text{II}} + e z_{\text{III}}^{\text{I}} + \varepsilon z_{\text{IV}} = 0,$$

où, après élimination des variables introduites e et ε,

$$z_{\text{II}}^{\text{II}} \{ z^{\text{IV}} z_{\text{IV}} + 2 z_{\text{I}}^{\text{III}} z_{\text{III}}^{\text{I}} - z_{\text{II}}^{\text{II}} z_{\text{II}}^{\text{II}} \} = z^{\text{IV}} z_{\text{III}}^{\text{I}} z_{\text{III}}^{\text{I}} + z_{\text{IV}} z_{\text{I}}^{\text{III}} z_{\text{I}}^{\text{III}}.$$

En résolvant l'équation aux racines, nous obtiendrons deux racines doubles u et v, au moyen desquelles l'équation donnée s'exprime sous la forme suivante :

$$(1) \qquad z^{\text{IV}} - (u+v) z_{\text{I}}^{\text{III}} + uv z_{\text{II}}^{\text{II}} = 0,$$

$$(2) \qquad z_{\text{I}}^{\text{III}} - (u+v) z_{\text{II}}^{\text{II}} + uv z_{\text{III}}^{\text{I}} = 0,$$

$$(3) \qquad z_{\text{II}}^{\text{II}} - (u+v) z_{\text{III}}^{\text{I}} + uv z_{\text{IV}} = 0.$$

En multipliant ces trois équations par dx, nous obtenons, sous chacune des deux conditions $dy + u\,dx = 0$ et $dy + v\,dx = 0$, les trois équations conditionnelles

$$(4) \quad dg - v\,dh = 0, \quad dh - v\,dk = 0, \quad dk - v\,dl = 0 \quad \text{si} \quad dy + u\,dx = 0,$$

c'est-à-dire, si le premier argument a ne varie pas,

$$(5) \quad dg - u\,dh = 0, \quad dh - u\,dk = 0, \quad dk - u\,dl = 0 \quad \text{si} \quad dy + v\,dx = 0,$$

c'est-à-dire, si le second argument α ne varie pas.

En considérant toutes les variables comme des fonctions des variables indépendantes a et α, nous pouvons exprimer ces six équations conditionnelles, avec les dérivées partielles par rapport à a et à α, sous la forme suivante :

$$(6) \qquad \frac{dg}{d\alpha} = v\frac{dh}{d\alpha}, \quad \frac{dh}{d\alpha} = v\frac{dk}{d\alpha}, \quad \frac{dk}{d\alpha} = v\frac{dl}{d\alpha},$$

$$(7) \qquad \frac{dg}{da} = u\frac{dh}{da}, \quad \frac{dh}{da} = u\frac{dk}{da}, \quad \frac{dk}{da} = u\frac{dl}{da},$$

nous en déduisons

$$(8) \qquad \frac{dg}{d\alpha} = v^3\frac{dl}{d\alpha}, \quad \frac{dh}{d\alpha} = v^2\frac{dl}{d\alpha}, \quad \frac{dk}{d\alpha} = v\frac{dl}{d\alpha},$$

$$(9) \qquad \frac{dg}{da} = u^3\frac{dl}{da}, \quad \frac{dh}{da} = u^2\frac{dl}{da}, \quad \frac{dk}{da} = u\frac{dl}{da}.$$

En éliminant k des équations $\frac{dk}{d\alpha} = v\frac{dl}{d\alpha}$, $\frac{dk}{da} = u\frac{dl}{da}$, nous obtenons l'équation

$$(10)\qquad (v-u)\frac{d^2 l}{da\,d\alpha} + \frac{dv}{da}\frac{dl}{d\alpha} - \frac{du}{d\alpha}\frac{dl}{da} = 0,$$

qui doit être satisfaite quand nous remplaçons u et v par u^2 et v^2, ou par u^3 et v^3, car, au lieu de k, nous pouvons éliminer de la même manière h ou g des équations (8) et (9).

Il en résulte

$$(11)\qquad \frac{d^2 l}{da\,d\alpha} = 0,$$

$$(12)\qquad \frac{dv}{da} = 0,$$

$$(13)\qquad \frac{du}{d\alpha} = 0.$$

Les intégrales de ces équations sont

$$(14)\qquad l = c + \gamma,$$

$$(15)\qquad v = \alpha,$$

$$(16)\qquad u = a,$$

si nous prenons les fonctions a et α pour arguments.

Les deux conditions

$$dy + u\,dx = 0 \quad \text{et} \quad dy + v\,dx = 0$$

prennent la forme

$$dy + a\,dx = 0 \quad \text{si} \quad da = 0,$$
$$dy + \alpha\,dx = 0 \quad \text{si} \quad d\alpha = 0,$$

et nous avons, par suite, leurs intégrales

$$(17)\qquad y + ax + b = 0,$$

$$(18)\qquad y + \alpha x + \beta = 0.$$

En multipliant les équations (8) par $d\alpha$, et les équations (9) par da, et en ajoutant après substitution de a, α et $c+\gamma$ à u, v et e, nous obtenons les équations non conditionnelles

$$dg = a^3\,dc + \alpha^3\,d\gamma, \qquad dh = a^2\,dc + \alpha^2\,d\gamma, \qquad dk = a\,dc + \alpha\,d\gamma,$$

dont l'intégrale est

$$g = \int a^3\,dc + \int \alpha^3\,d\gamma, \tag{19}$$

$$h = \int a^2\,dc + \int \alpha^2\,d\gamma, \tag{20}$$

$$k = \int a\,dc + \int \alpha\,d\gamma. \tag{21}$$

L'équation non conditionnelle

$$dt = k\,dx + l\,dy,$$

après introduction des valeurs de k et l, prend la forme

$$dt = \int (dy + a\,dx)\,dc + \int (dy + \alpha\,dx)\,d\gamma.$$

En intégrant par rapport aux variables x et y sous le signe $\int$ et en déterminant les limites inférieures d'intégration des équations

$$y + ax + b = 0 \quad \text{et} \quad y + \alpha x + \beta = 0,$$

nous obtenons l'intégrale sous la forme composée

$$t = \int (y + ax + b)\,dc + \int (y + \alpha x + \beta)\,d\gamma. \tag{22}$$

Nous obtenons de la même manière les intégrales des équations non conditionnelles

$$ds = h\,dx + k\,dy, \qquad dr = g\,dx + h\,dy,$$

et, par suite, les intégrales des équations non conditionnelles

$$dq = s\,dx + t\,dy, \qquad dp = r\,dx + s\,dy,$$

sous la forme

$$2q = \int (y + ax + b)^2\,dc + \int (y + \alpha x + \beta)^2\,d\gamma,$$

$$2p = \int (y + ax + b)^2 a\,dc + \int (y + \alpha x + \beta)^2 \alpha\,d\gamma.$$

Par l'intégration de l'équation non conditionnelle

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

nous obtenons l'intégrale générale sous la forme composée

$$2.3z = \int (y + ax + b)^3 \, dc + \int (y + \alpha x + \beta)^3 \, d\gamma$$

d'après la normalité du troisième ordre.