SUR LA

# DÉFORMATION DES SURFACES DU SECOND ORDRE,

PAR K.-M. PETERSON.

**Traduit du russe par M. Édouard DAVAUX,**

Ingénieur de la Marine à Toulon (¹).

## I. — SUR LA DÉFORMATION DES SURFACES EN GÉNÉRAL.

Quand deux surfaces s'appliquent l'une sur l'autre, la distance de deux points infiniment voisins de l'une des surfaces est égale à la distance des points correspondants de l'autre surface.

Si les coordonnées $x, y, z$ et X, Y, Z des deux surfaces sont exprimées en fonction des deux variables $p$ et $q$, de telle sorte que les points, qui viennent en coïncidence dans l'application, correspondent aux mêmes valeurs de $p$ et de $q$, on aura

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\mathrm{X}^2 + d\mathrm{Y}^2 + d\mathrm{Z}^2 = u\,dp^2 + v\,dp\,dq + w\,dq^2,$$

où $u$, $v$, $w$ sont des fonctions des variables $p$ et $q$.

Inversement, si les éléments linéaires

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \qquad \text{et} \qquad d\mathrm{S} = \sqrt{d\mathrm{X}^2 + d\mathrm{Y}^2 + d\mathrm{Z}^2}$$

s'expriment de la même façon au moyen des deux variables $p$ et $q$, les points des deux surfaces, correspondant aux mêmes valeurs de $p$ et $q$, peuvent être successivement amenés en coïncidence, et, si les coordonnées $x$, $y$, $z$ de l'une des surfaces

(¹) Le Mémoire original intitulé : ОБЪ ИЗГИБАНІИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРАГО ПОРЯДКА a paru dans le Tome X, 1883 (p. 476-523) du *Recueil mathématique* (МАТЕМАТИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ) publié par la Société mathématique de Moscou.

sont réelles, entre les mêmes limites des variables $p$ et $q$, que les coordonnées X, Y, Z de l'autre surface, les deux surfaces s'appliquent l'une sur l'autre dans toute leur étendue. Si la dernière condition n'est pas remplie, alors en appliquant les deux surfaces l'une sur l'autre, en général une partie seulement de l'une des surfaces couvre une partie de l'autre surface; il peut même arriver que les parties réelles des deux surfaces ne coïncident pas.

Nous appellerons toutes les surfaces, dont l'élément linéaire est identique ou peut être rendu identique à l'élément linéaire d'une surface donnée, les *surfaces déformées de cette dernière*.

## II. — Limites de réalité des surfaces du second ordre.

Nous pouvons exprimer une surface du second ordre, dont les demi-axes sont $a$, $b$, $c$, sous la forme

$$x = a\cos p\cos q,\qquad y = b\cos p\sin q,\qquad z = c\sin p. \tag{1}$$

Les demi-axes $a$, $b$, $c$ sont des constantes données, dont les carrés $a^2$, $b^2$, $c^2$ sont réels entre les limites $-\infty$ et $+\infty$.

($\alpha$) Si $a^2$, $b^2$, $c^2$ sont positifs, les équations (1) représentent un ellipsoïde, qui est réel pour toutes les valeurs réelles des variables $p$ et $q$ de $-\infty$ à $+\infty$, et qui se compose d'un nombre infini de feuillets confondus. Le premier feuillet correspond aux limites $-\frac{\pi}{2} < p < \frac{\pi}{2}$, $-\pi < q < \pi$.

($\beta$) Si, parmi les trois carrés $a^2$, $b^2$, $c^2$, l'un, par exemple $c^2$, est négatif, les équations (1) représentent un hyperboloïde à une nappe, qui est réel entre les limites $-\infty i < p < +\infty i$, $-\infty < q < +\infty$. En mettant dans les équations (1), $ci$ et $pi$ à la place de $c$ et $p$, nous obtenons les équations de l'hyperboloïde à une nappe

$$x = a\cosh p\cos q,\qquad y = b\cosh p\sin q,\qquad z = c\sinh p, \tag{2}$$

qui ont une forme réelle pour $p$ et $q$ réels; les demi-axes sont alors $a$, $b$ et $ci$, où $a$, $b$, $c$ sont des quantités réelles.

($\gamma$) Si deux des carrés $a^2$, $b^2$, $c^2$, par exemple $a^2$ et $b^2$, sont négatifs, les équations (1) représentent un hyperboloïde à deux nappes, qui est réel entre les limites $\frac{\pi}{2} - \infty i < p < \frac{\pi}{2} + \infty i$, $-\infty < q < +\infty$. En mettant $ai$, $bi$, $\frac{\pi}{2} - pi$ à la place de $a$, $b$, $p$, nous obtenons les équations de cet hyperboloïde

$$x = a\sinh p\cos q,\qquad y = b\sinh p\sin q,\qquad z = c\cosh p \tag{3}$$

sous une forme réelle pour $p$ et $q$ réels; les demi-axes sont alors $ai$, $bi$ et $c$.

($\delta$) Si les trois carrés $a^2$, $b^2$, $c^2$ sont tous négatifs, les coordonnées de la surface du second ordre, que nous appellerons alors un *ellipsoïde imaginaire,* sont imaginaires pour toutes les valeurs des variables $p$ et $q$.

Au moyen des équations générales (1)

$$x = a\cos p\cos q, \qquad y = b\cos p\sin q, \qquad z = c\sin p,$$

nous obtenons l'élément linéaire

$$(4)\quad \begin{aligned} ds^2 = {} & [\sin^2 p(a^2\cos^2 q + b^2\sin^2 q) + c^2\cos^2 p]\,dp^2 \\ & + 2(a^2 - b^2)\sin p\cos p\sin q\cos q\,dp\,dq + \cos^2 p(a^2\sin^2 q + b^2\cos^2 q)\,dq^2, \end{aligned}$$

qui est réel pour toutes les valeurs de $a^2$, $b^2$, $c^2$, puisqu'il existe, pour les arguments $p$ et $q$, des limites entre lesquelles la distance $ds$ de deux points infiniment voisins est réelle.

Pour nous convaincre que, pour toutes les valeurs réelles de $a^2$, $b^2$, $c^2$, il existe des surfaces déformées réelles, nous considérerons la surface, qui a pour équations les équations suivantes :

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{b^2-a^2}\sin q\cos p, \\ \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} &= \frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arc\,tangh}(\cos q), \\ z &= \int\sqrt{c^2\cos^2 p + a^2\sin^2 p}\,dp. \end{aligned} \right.$$

La différentielle de la seconde de ces trois équations, après multiplication par la première équation, prend la forme

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = a\cos p\,dq.$$

En ajoutant le carré de cette différentielle aux carrés des différentielles de la première et de la troisième équations, nous obtenons un élément linéaire $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ identique à l'élément linéaire d'une surface du second ordre que nous avons exprimé par l'équation (4), et il en résulte que toutes les surfaces qui ont pour équations les équations (5) seront, pour toutes les permutations entre $a$, $b$ et $c$, des déformées de la surface du second ordre dont les demi-axes sont $a$, $b$, $c$.

($\alpha$) Si $a^2$, $b^2$ et $c^2$ sont positifs, alors, par les équations (5), s'expriment sept déformées réelles d'ellipsoïde; toutefois, parmi ces déformées, trois seulement s'appliquent sur un ellipsoïde, et les autres sont des déformées en dehors des limites.

En effet, si $a$ est le plus petit demi-axe et $c$ le plus grand, la déformée (5) est réelle pour $p$ et $q$ réels, et s'applique entièrement sur l'ellipsoïde

$$x = a\cos p\cos q, \qquad y = b\cos p\sin q, \qquad z = c\sin p,$$

qui est généralement réel pour $p$ et $q$ réels.

En substituant dans les équations (5), à la place de $\sqrt{b^2-a^2}$ et $c$, d'abord $\sqrt{c^2-a^2}$ et $b$, puis $\sqrt{c^2-b^2}$ et $a$, nous obtiendrons évidemment deux nouvelles déformées, qui s'appliquent entièrement sur le même ellipsoïde. En remplaçant dans les équations (5), $p$, $a$, $b$, $c$ par $pi$, $b$, $c$, $a$, nous aurons les équations

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{c^2-b^2}\sin q\cosh p,$$

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = \frac{b}{\sqrt{c^2-b^2}}\operatorname{arc\,tangh}(\cos q),$$

$$z = \int\sqrt{b^2\sinh^2 p - a^2\cosh^2 p}\,dp.$$

En substituant dans les équations (5), $\frac{\pi}{2}-pi$, $qi$ à $p$ et $q$, nous obtiendrons les équations

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{b^2-a^2}\sinh q\sinh p,$$

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = \frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arc\,tangh}(\cosh q),$$

$$z = \int\sqrt{c^2\sinh^2 p - a^2\cosh^2 p}\,dp.$$

En remplaçant enfin $p, q, a, b$, dans les équations (5), par $\frac{\pi}{2}-pi$, $\frac{\pi}{2}-qi$, $b$, $a$, nous aurons

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{b^2-a^2}\cosh q\sinh p,$$

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = \frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arc\,tang}(\sinh q),$$

$$z = \int\sqrt{c^2\sinh^2 p - b^2\cosh^2 p}\,dp.$$

Si $a$, $b$, $c$ désignent respectivement le plus petit, le moyen, le plus grand axes de l'ellipsoïde, les trois systèmes d'équations correspondent tous, pour $p$ et $q$ réels, à des déformées réelles, mais en dehors des limites d'un ellipsoïde, qui est réel pour des valeurs réelles des anciens arguments $p$ et $q$. Le second système représente deux déformées réelles, que nous obtiendrons en permutant $b$ et $c$. Chacun des deux autres systèmes représente une déformée réelle.

(β) Si $a^2$ et $b^2$ sont positifs, $c^2$ négatif, en substituant, dans les équations (5), $ci$ et $pi$ à $c$ et $p$, nous obtiendrons les équations

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{b^2-a^2}\sin q\cosh p,$$
$$\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}=\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arc\,tangh}(\cos q),$$
$$z=\int\sqrt{c^2\cosh^2 p+a^2\sinh^2 p}\,dp,$$

qui, pour $p$ et $q$ réels, représentent une déformée, entièrement applicable sur l'hyperboloïde à une nappe

$$x=a\cosh p\cos q,\qquad y=b\cosh p\sin q,\qquad z=c\sinh p,$$

où $a$ désigne le plus petit axe réel.

Par les équations (5) se représentent encore deux déformées en dehors des limites de cet hyperboloïde.

(γ) Si $a^2$ et $b^2$ sont négatifs, $c^2$ positif, en substituant, dans les équations (5), $ai$, $bi$, $\frac{\pi}{2}-pi$ à $a$, $b$, $p$, nous obtiendrons les équations

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{b^2-a^2}\sin q\sinh p,$$
$$\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}=\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arc\,tangh}(\cos q),$$
$$z=\int\sqrt{c^2\sinh^2 p+a^2\cosh^2 p}\,dp,$$

qui, pour $p$ et $q$ réels, représentent une surface réelle, entièrement applicable sur l'hyperboloïde à deux nappes

$$x=a\sinh p\cos q,\qquad y=b\sinh p\sin q,\qquad z=c\cosh p,$$

où $b$ désigne le plus grand demi-axe imaginaire. Par les équations (5) se représentent encore deux déformées, en dehors des limites de cet hyperboloïde.

(δ) Si $a^2$, $b^2$, $c^2$ sont négatifs, les équations (5) représentent neuf déformées réelles de l'ellipsoïde imaginaire, lequel n'existe pas en réalité.

En substituant, dans les équations (5), $ai$, $bi$, $ci$, $\frac{\pi}{2}-pi$ à $a$, $b$, $c$, $p$, nous obtiendrons les équations

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{b^2-a^2}\sin q\sinh p,$$
$$\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}=\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arc\,tangh}(\cos q),$$
$$z=\int\sqrt{a^2\cosh^2 p-c^2\sinh^2 p}\,dp.$$

En substituant, dans les équations (5), $bi$, $ai$, $ci$, $\frac{\pi}{2} - qi$, $pi$ à $a$, $b$, $c$, $q$, $p$, nous obtiendrons les équations

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{b^2-a^2}\cosh q \cosh p,$$

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = \frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arc\,tang}(\sinh q),$$

$$z = \int \sqrt{c^2\cosh^2 p - a^2\sinh^2 p}\, dp.$$

En substituant, dans les équations (5), $bi$, $ai$, $ci$, $qi$, $\frac{\pi}{2} - pi$ à $a$, $b$, $c$, $q$, $p$, nous obtiendrons les équations

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{b^2-a^2}\sinh q \sinh p,$$

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = \frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arc\,cotangh}(\cosh q),$$

$$z = \int \sqrt{a^2\cosh^2 p - c^2\sinh^2 p}\, dp.$$

Si $ai$, $bi$ et $ci$ désignent respectivement le plus petit, le moyen et le plus grand demi-axes de l'ellipsoïde imaginaire, chacun de ces trois systèmes d'équations représente, pour $p$ et $q$ réels, trois déformées réelles de cet ellipsoïde, que nous obtiendrons en remplaçant $\sqrt{b^2-a^2}$ et $c$, d'abord par $\sqrt{c^2-a^2}$ et $b$, et ensuite par $\sqrt{c^2-b^2}$ et $a$.

## III. — Détermination des points correspondants de deux surfaces applicables.

Au moyen de l'élément linéaire donné d'une surface connue ou inconnue, nous pouvons déterminer le produit des rayons de courbure, lequel, comme on le sait, a la même valeur dans toutes les déformées de la surface.

Si

$$ds^2 = u^2\, dp^2 + 2uv\cos\omega\, dp\, dq + v^2\, dq^2 \tag{1}$$

est l'élément linéaire de cette surface, $u$, $v$, $\omega$ étant des fonctions des arguments $p$ et $q$, alors, en désignant par P le produit des rayons de courbure et en posant

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p} - \cos\omega\frac{\partial u}{\partial q}\right) : u\sin\omega = \mathrm{A}, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial q} - \cos\omega\frac{\partial v}{\partial p}\right) : v\sin\omega = \mathrm{B}, \tag{2}$$

nous obtenons

$$(3)\qquad 1 : \mathrm{P} = -\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial q} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial p\, \partial q}\right) : uv \sin\omega.$$

Si l'élément linéaire a la forme

$$ds^2 = dp^2 + v^2\, dq^2,$$

on a donc

$$(4)\qquad 1 : \mathrm{P} = -\frac{1}{v}\, \frac{\partial^2 v}{\partial p^2}.$$

Le produit P, comme toute fonction des arguments $p$ et $q$ de la surface donnée, ne varie pas dans une certaine direction sur la surface et, dans la direction perpendiculaire, la variation $d\mathrm{P}$, rapportée à l'arc $ds$, atteint son maximum de valeur

$$\mathrm{Q} = \max.\frac{d\mathrm{P}}{ds}.$$

Cette variation maximum Q est évidemment la même dans toutes les déformées de la surface donnée, et se détermine facilement par l'équation

$$(5)\qquad \mathrm{Q}^2 = \left[\frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial p}\right)^2 - 2\,\frac{1}{u}\,\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial p}\,\frac{1}{v}\,\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q}\cos\omega + \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q}\right)^2\right] : \sin^2\omega.$$

Supposons que $x$, $y$, $z$ et X, Y, Z désignent les coordonnées de deux surfaces; et que les coordonnées $x$, $y$, $z$ soient des fonctions des deux variables $p$ et $q$, les coordonnées X, Y, Z des fonctions des deux variables $l$ et $t$.

D'après ce qui précède, nous pouvons exprimer l'élément linéaire $ds$, le produit P et sa variation maxima Q sur la surface $x$, $y$, $z$, au moyen de $p$ et de $q$, et les quantités correspondantes $d\mathrm{S}$, $\mathrm{P}_1$, $\mathrm{Q}_1$ pour la surface X, Y, Z, au moyen de $l$ et de $t$.

Si les deux surfaces sont applicables, nous avons deux équations

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_1, \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{Q}_1,$$

au moyen desquelles nous pouvons exprimer $l$ et $t$ en fonction de $p$ et de $q$; autrement dit, nous pouvons déterminer le point $l$, $t$ de la surface X, Y, Z qui coïncide avec un point donné $p$, $q$ de la surface $x$, $y$, $z$, dans l'application des deux surfaces l'une sur l'autre.

Si les éléments $d\mathrm{S}$ et $ds$ sont identiques, nous appellerons la surface X, Y, Z une déformée de la surface $x$, $y$, $z$. En exprimant en fonction de $p$ et $q$ les limites des arguments $l$ et $t$, entre lesquelles la surface X, Y, Z est réelle, et en les comparant aux limites $p$ et $q$ entre lesquelles la surface $x$, $y$, $z$ est également réelle, nous obtiendrons les portions des deux surfaces qui viennent réellement en coïncidence; s'il n'y a pas de telles portions dans les deux surfaces, elles ne s'appliqueront pas l'une sur l'autre, mais seront des déformées en dehors des limites.

Quand les deux surfaces s'appliquent l'une sur l'autre, c'est en général seulement d'une manière déterminée. Des positions différentes de l'une des surfaces sur l'autre ne sont possibles que quand les équations $P = P_1$, $Q = Q_1$, par lesquelles sont déterminés les points correspondants des deux surfaces, admettent plusieurs solutions, pour lesquelles les éléments linéaires restent identiques.

Deux déformées d'une même surface de révolution se déplacent l'une suivant l'autre d'une manière continue; à savoir suivant les parallèles de la surface de révolution, quand on applique les deux déformées sur cette dernière surface. Le produit des rayons de courbure d'une surface de révolution ne change pas le long des parallèles, et les lignes de variation maximum de ce produit sont les méridiens, c'est-à-dire des géodésiques. D'autre part, la variation maximum Q du produit P ne change pas le long des parallèles, et par conséquent dépend seulement de P. Il en résulte que, pour toute surface qui s'applique sur une surface de révolution, les lignes de variation maximum du produit P doivent être des géodésiques et que la variation maximum Q est une fonction du produit P.

Quand nous avons deux surfaces de cette nature, les équations $P = P_1$, $Q = Q_1$, par lesquelles se déterminent les points correspondants des deux surfaces, si elles sont applicables, deviennent identiques, et les points correspondants ne sont plus déterminés par elles.

En prenant le produit P d'une surface quelconque, définie au moyen des arguments $p$ et $q$, pour nouvel argument, et en prenant l'argument R qui ne change pas suivant les lignes de variation maximum, de la fonction P, nous pouvons mettre l'élément linéaire de la surface sous la forme

$$ds^2 = \frac{dP^2}{Q^2} + \frac{dR^2}{T^2},$$

où T désigne le maximum de variation de la fonction R,

$$T = \max. \frac{dR}{ds}.$$

Si nous mettons l'élément linéaire $dS^2$ de la seconde surface, dont les arguments sont $l$ et $t$, sous la même forme

$$dS^2 = \frac{dP_1^2}{Q_1^2} + \frac{dR_1^2}{T_1^2},$$

où $P_1$, $Q_1$, $R_1$, $T_1$ sont des fonctions de $l$ et de $t$, alors, pour la détermination des points correspondants, dans l'application des deux surfaces l'une sur l'autre, nous aurons quatre équations

$$P = P_1, \qquad Q = Q_1, \qquad T = T_1, \qquad R = R_1 + \text{const.},$$

dont les deux premières déterminent en général les points correspondants, la troisième et la quatrième exprimant la possibilité ou l'impossibilité de l'application des deux surfaces l'une sur l'autre. Si les deux équations $P = P_1$, $Q = Q_1$ sont identiques, en général nous obtenons encore, au moyen de l'équation $T = T_1$, une position déterminée de l'une des surfaces sur l'autre; mais si, dans les deux surfaces, non seulement $Q$ ou $Q_1$, mais aussi $T$ ou $T_1$ dépendent de $P$ ou $P_1$, alors les équations $P = P_1$, $Q = Q_1$ expriment seulement la possibilité de l'application, et les points correspondants sont déterminés à l'aide de l'équation

$$R = R_1 + \text{const.},$$

c'est-à-dire avec une constante arbitraire de *translation*. Quand $Q$ ne dépend que de $P$, en désignant $\frac{dP}{Q}$ par $dp$, $dR$ par $dq$, $T$ par $\frac{1}{v}$, nous mettons l'élément linéaire des deux surfaces sous la forme

$$ds^2 = dp^2 + v^2\,dq^2,$$

et il résulte de là que les lignes $q = \text{const.}$, c'est-à-dire les lignes de variation maximum du produit $P$ des rayons de courbure, sont des *géodésiques*. Quand en outre $T$ dépend de $P$, $v$ est une fonction de $p$ et, dans ce cas, les deux surfaces s'appliquent sur la surface de révolution

$$(6) \qquad x = v\cos q, \qquad y = v\sin q, \qquad z = \int \sqrt{1 - \left(\frac{dv}{dp}\right)^2}\,dp,$$

pour laquelle nous obtenons l'élément linéaire

$$ds^2 = dp^2 + v^2\,dq^2.$$

Quand $Q$ dépend de $P$, et quand $T$ ne dépend pas de $P$, le produit des rayons de courbure, que nous déduisons de l'élément linéaire

$$ds^2 = dp^2 + v^2\,dq^2,$$

d'après l'équation (4), sous la forme

$$1 : P = -\frac{1}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2},$$

doit être fonction de $p$.

En intégrant l'équation $\frac{1}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} = Fp$, où $F$ est une fonction indéterminée, nous obtenons

$$v = \frac{\psi q(fp + \varphi q)^2}{f'p},$$

avec trois fonctions arbitraires $f$, $\varphi$, $\psi$, et par suite l'élément linéaire commun

$$(7) \qquad ds^2 = dp^2 + \frac{(fp+\varphi q)^2}{f'p}\,dq^2,$$

des surfaces sur lesquelles les lignes de variation maximum du produit des rayons de courbure sont des géodésiques.

Au moyen de l'élément linéaire (7), nous obtenons, d'après l'équation (4), ce produit sous la forme $\dfrac{\sqrt{f'p}}{2}\,\dfrac{d\dfrac{f''p}{\sqrt{(f'p)^3}}}{dp}$, qui montre qu'il ne dépend en effet que de $p$.

## IV. — Surfaces de révolution et surfaces hélicoïdes.

Une surface de révolution est représentée par les équations

$$(1) \qquad x = fp\cos q, \qquad y = fp\sin q, \qquad z = \varphi p$$

et nous déduirons de ces équations l'élément linéaire

$$(2) \qquad ds^2 = u^2\,dp^2 + v^2\,dq^2,$$

où

$$u^2 = (f'p)^2 + (\varphi'p)^2, \qquad v = fp.$$

Au moyen de l'élément linéaire donné

$$ds^2 = u^2\,dp^2 + v^2\,dq^2$$

d'une surface de révolution $x$, $y$, $z$, où $u$ et $v$ sont des fonctions de l'argument $p$, nous pouvons déterminer les coordonnées X, Y, Z de toutes les surfaces de révolution qui s'appliquent sur la surface donnée $x$, $y$, $z$. En effet, en posant

$$X = \alpha v\cos\frac{q}{\alpha}, \qquad Y = \alpha v\sin\frac{q}{\alpha},$$

nous pouvons déterminer Z par l'équation

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = u^2\,dp^2 + v^2\,dq^2,$$

pour une valeur arbitraire de la constante $\alpha$, et nous trouvons les équations

$$(3) \qquad X = \alpha v\cos\frac{q}{\alpha}, \qquad Y = \alpha v\sin\frac{q}{\alpha}, \qquad Z = \int\sqrt{u^2 - \alpha^2\left(\frac{dv}{dp}\right)^2}\,dp;$$

à chaque valeur de $\alpha$ correspond une déformée X, Y, Z; nous appellerons une telle constante, *constante de la déformation*.

Si la surface de révolution se compose de deux feuillets inflexibles et inextensibles, alors l'un des feuillets glisse librement sur l'autre.

L'équation de toutes les surfaces qui possèdent cette propriété est la suivante :

$$z = f(x^2 + y^2) + \alpha \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}; \tag{4}$$

elle devient l'équation d'une surface de révolution, si la constante arbitraire $\alpha$ est égale à zéro. En effet, l'équation (4) ne change pas, si l'on substitue $k + \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$ à $\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$, et $z + \alpha k$ à $z$, et l'on voit facilement qu'il n'y a pas d'autre équation entre les coordonnées qui ne change pas pour une telle variation de position.

Nous appellerons les surfaces représentées par l'équation (4) des *surfaces hélicoïdes*. Toute surface hélicoïde s'applique sur une surface de révolution, et à toute surface donnée de révolution nous pouvons, de différentes manières, donner la forme d'une surface hélicoïde.

En effet, en posant

$$X = U \cos\left(\frac{q}{\alpha} + V\right), \qquad Y = U \sin\left(\frac{q}{\alpha} + V\right), \qquad Z = W + \beta q, \tag{5}$$

nous pouvons, au moyen de l'équation

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = u^2\, dp^2 + v^2\, dq^2,$$

résultant de l'élément donné

$$ds^2 = u^2\, dp^2 + v^2\, dq^2$$

d'une surface de révolution, déterminer toutes les fonctions inconnues U, V, W de l'argument $p$.

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} U &= \alpha\sqrt{v^2 - \beta^2}, \\ V &= -\frac{\beta}{\alpha}\int \frac{\sqrt{u^2\left(1 - \frac{\beta^2}{v^2}\right) - \alpha^2 v'^2}}{v^2 - \beta^2}\, dp, \\ W &= \int \sqrt{u^2\left(1 - \frac{\beta^2}{v^2}\right) - \alpha^2 v'^2}\, dp, \end{aligned}$$

où

$$v' = \frac{dv}{dp}.$$

En éliminant $q$ des équations (5), nous obtenons l'équation des surfaces hélicoïdes

$$Z = f(X^2 + Y^2) + \alpha\beta \operatorname{arc\,tang} \frac{Y}{X}.$$

Aux valeurs constantes de l'argument $p$ correspondent sur la surface hélicoïde (5) des hélices infinies qui, dans l'application de la surface hélicoïde sur la surface de révolution donnée, se transforment dans des parallèles fermés.

## V. — Les surfaces illimitées [1].

Nous appellerons *surface illimitée*, une surface qui est égale à toute surface qui lui est semblable, et qui ne change pas par conséquent quand on l'agrandit. Nous obtiendrons l'équation générale de ces surfaces en déterminant la forme d'équation entre les coordonnées $x$, $y$, $z$, pour laquelle la substitution de $kx$, $ky$, $kz$ à $x$, $y$, $z$ change seulement la position de la surface.

Cette équation est la suivante

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} - \alpha \log z = f \frac{x^2 + y^2}{z^2},$$

où $f$ est une fonction arbitraire, $\alpha$ une constante arbitraire. La substitution de $xe^k$, $ye^k$, $ze^k$ à $x$, $y$, $z$ produit une rotation autour de l'axe des $z$, d'un angle $\alpha k$, laquelle est détruite par le remplacement de $\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$ par $\alpha k + \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$.

En posant

$$\text{(2)} \qquad x = e^{q+u} \cos(\alpha q + v), \qquad y = e^{q+u} \sin(\alpha q + v), \qquad z = e^{q+w},$$

où $u$ et $w$ sont arbitraires, et $v$ une fonction inconnue de l'argument $p$, nous déduisons de l'équation (1)

$$\text{(3)} \qquad v = \alpha w + f e^{2(u-w)}$$

et, par conséquent, étant donnée l'équation (1) d'une surface illimitée, nous avons dans les équations (2) les expressions des coordonnées $x$, $y$, $z$ de cette surface en fonction des deux arguments $p$ et $q$, avec trois fonctions $u$, $v$, $w$ de l'argument $p$.

L'élément linéaire de la surface illimitée, que nous obtenons au moyen des équations (2), a la forme

$$\text{(4)} \qquad ds^2 = e^{2q}(U\,dp^2 + V\,dp\,dq + W\,dq^2),$$

---

(1) Peterson se sert de l'adjectif безмѣрный que l'on peut traduire, soit par le mot *illimité*, soit par le mot *incommensurable;* les surfaces illimitées de Peterson sont actuellement connues sous le nom de *surfaces spirales*. (*Note du traducteur.*)

où U, V, W sont des fonctions déterminées de l'argument $p$, exprimées par l'intermédiaire de $u$, $v$, $w$.

Si l'élément linéaire de la forme (4) d'une surface illimitée connue ou inconnue nous est donné, alors, pour une valeur arbitraire de la constante $\alpha$ que nous désignerons par $\beta$, nous pouvons, au moyen des fonctions données U, V, W, déterminer les fonctions inconnues $u$, $v$, $w$, et par conséquent obtenir sous la forme

$$\text{arc tang}\frac{y}{x} - \beta \log z = \mathrm{F}\frac{x^2+y^2}{z^2}$$

toutes les déformées illimitées de la surface illimitée donnée

$$\text{arc tang}\frac{y}{x} - \alpha \log z = f\frac{x^2+y^2}{z^2},$$

$\beta$ étant une constante arbitraire de déformation, à chaque valeur de laquelle correspond une déformée.

Toute surface, obtenue par déformation d'une surface illimitée, possède cette propriété que nous pouvons, par une déformation, en déduire la même surface agrandie un nombre arbitraire de fois.

Nous trouvons la substance d'une telle déformation, soit dans l'étendue infinie, soit dans les feuillets confondus de ces surfaces.

Nous pouvons déformer toute surface en une surface illimitée, quand son élément linéaire $ds$ possède cette propriété que, par substitution de $kp$ et $kq$ aux arguments $p$ et $q$, nous obtenons le même élément linéaire multiplié par une puissance quelconque $k^n$ de la constante $k$, car, après substitution dans un tel élément de $e^{\frac{q}{n}} fp$ et $e^{\frac{q}{n}} \varphi p$ à $p$ et $q$, nous obtenons un élément linéaire de la forme (4).

Nous appellerons un élément linéaire qui, par la substitution de $kp$ et $kq$ à $p$ et $q$, est multiplié par $k^n$, un élément homogène de degré $n$ par rapport aux arguments $p$ et $q$. Toute surface s'applique sur une surface de révolution, quand son élément linéaire est un élément homogène de degré zéro, car, après substitution de $e^q fp$ et $e^q \varphi p$ à $p$ et $q$ dans un tel élément, nous obtenons un élément linéaire dans lequel les coefficients de $dp^2$, $dp\,dq$, $dq^2$ ne dépendent que d'un argument $p$, $e^q$ disparaissant.

Seules les surfaces de révolution et leurs déformées ont un élément linéaire d'une telle forme.

## VI. — La déformation d'une surface du second ordre a axes infinis.

Une surface du second ordre n'est pas réelle pour toutes les valeurs de ses axes, mais nous avons vu, au paragraphe II, que, si nous prenons des quantités réelles pour les carrés des axes, il existe pour toutes les valeurs de ces axes des déformées réelles. Il est nécessaire toutefois de considérer encore les valeurs limites de ces axes.

Le carré de chaque axe a cinq valeurs limites : $+\infty$, $-\infty$, o et les deux égalités avec les carrés des autres axes, pour lesquelles la surface du second ordre, et par suite sa déformée, prennent des formes particulières. Pour ces valeurs limites, les coordonnées de la déformée peuvent devenir infinies, et alors cette déformée n'existe pas. Le produit des rayons de courbure, qui est en général fini, peut aussi devenir infini pour ces valeurs, et alors la surface du second ordre et toutes ses déformées s'appliquent sur un plan. Nous ne considérerons pas de telles déformées. En excluant ces déformées, nous pouvons partager en trois groupes toutes les déformées correspondant aux valeurs limites des axes, selon que la surface donnée du second ordre a des axes : 1° infinis ; 2° égaux ; ou 3° infiniment petits.

Nous allons nous occuper du premier groupe ; nous étudierons les deux autres dans les trois paragraphes suivants.

### *Les paraboloïdes.*

Nous appellerons *paraboloïde,* toute surface du second ordre ayant des axes infinis, quand elle a des déformées finies réelles qui ne s'appliquent pas sur un plan.

Pour déduire des équations générales d'une surface du second ordre les équations des paraboloïdes, il faut, par conséquent, rendre les axes infinis de telle façon que l'élément linéaire et le produit des rayons de courbure restent finis.

Les équations générales d'une surface du second ordre, dont les trois demi-axes sont $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, s'expriment, au moyen des arguments $p$ et $q$ des lignes de courbure, de la façon suivante

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a}=\frac{(a-p)(a-q)}{(a-b)(a-c)},\qquad \frac{y^2}{b}=\frac{(b-p)(b-q)}{(b-a)(b-c)},\qquad \frac{z^2}{c}=\frac{(c-p)(c-q)}{(c-a)(c-b)}$$

et nous en déduisons l'élément linéaire

$$(2)\qquad ds^2=\frac{(p-q)p\,dp^2}{4(a-p)(b-p)(c-p)}+\frac{(q-p)q\,dq^2}{4(a-q)(b-q)(c-q)}$$

et le produit des rayons de courbure

$$(3)\qquad \mathrm{P}=\frac{p^2q^2}{abc}.$$

Si les arguments $p$ et $q$ sont infinis, l'ordre d'infinitude des deux arguments est le même, sinon l'expression $p-q$ ne dépendrait que d'un argument et, dans ce cas, l'élément linéaire (2) se transformerait, d'après le paragraphe IV, en l'élément linéaire des surfaces de révolution. Nous considérerons ce cas, dans lequel deux axes doivent être égaux, dans le paragraphe suivant.

Si nous rendons infinis un, deux ou trois des demi-axes $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ d'une surface du second ordre donnée, alors, par suite de ce que l'expression $P = \frac{p^2q^2}{abc}$ reste finie, les deux arguments $p$ et $q$ se transforment en des infinis de même ordre, que nous appellerons *du premier ordre*. Si $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ désignent les ordres d'infinitude des carrés $a$, $b$, $c$ des demi-axes, nous obtenons, en raison de ce que l'expression $\frac{abc}{p^2q^2}$ reste finie,

$$\alpha + \beta + \gamma = 4.$$

En substituant, dans l'élément linéaire (2), $kp$, $kq$, $k^\alpha a$, $k^\beta b$, $k^\gamma c$ à $p$, $q$, $a$, $b$, $c$, où $k$ est une constante infinie du premier ordre, nous obtenons, après suppression de $k^4$ au dénominateur, l'expression

$$(4) \qquad (ak^{\alpha-1} - p)(bk^{\beta-1} - p)(ck^{\gamma-1} - p)k^{-1}$$

qui doit être finie pour $a$, $b$, $c$, $p$ finis.

Il en résulte qu'aucune des quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ne peut être inférieure à l'unité, car si $\alpha < 1$, l'expression (4) prend la forme

$$-p(bk^{\beta-1} - p)(ck^{\gamma-1} - p)k^{-1}$$

et le terme $-pbck^{\beta+\gamma-3}$ qui, pour $p$ variable, ne peut se réduire avec les autres termes, devient infini, puisque $\beta + \gamma > 3$, par suite de $\alpha + \beta + \gamma = 4$ et $\alpha < 1$. Et ainsi l'expression (4) pour $\alpha < 1$ serait infinie.

Il en résulte que tous les cas possibles où les axes deviennent infinis se ramènent aux trois cas suivants :

($a$) Deux des quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont égales à l'unité;
($b$) Une de ces quantités est égale à l'unité;
($c$) Aucune d'elles n'est égale à l'unité.

Considérons quelles formes prend l'élément linéaire (2) dans ces trois cas.

($a$) Si $\alpha = 1$, $\beta = 1$, alors $\gamma = 2$, par suite de $\alpha + \beta + \gamma = 4$.

Nous avons désigné les demi-axes par $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$; désignons $\frac{a}{\sqrt{c}}$ par $u$ et $\frac{b}{\sqrt{c}}$ par $v$.

L'ordre d'infinitude des demi-axes $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ est égal à $\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$; le demi-axe $\sqrt{c}$ est un infini de premier ordre, puisque $\frac{\gamma}{2} = 1$. Il en résulte que $u$ et $v$ sont finis; nous les appellerons des *paramètres*. L'élément (2), après substitution de $p\sqrt{c}$, $q\sqrt{c}$, $u\sqrt{c}$, $v\sqrt{c}$ à $p$, $q$, $a$, $b$, prend dans ce cas, pour $c = \infty$, une première forme finie déterminée

$$(5) \qquad ds^2 = \frac{p-q}{4}\left[\frac{p\,dp^2}{(u-p)(v-p)} - \frac{q\,dq^2}{(u-q)(v-q)}\right],$$

où $p$ et $q$ sont des arguments finis.

($b$) Dans le second cas, quand seulement $\alpha = 1$, nous obtenons $\beta > 1$, $\gamma > 1$, $\beta + \gamma = 3$, par suite de $\alpha + \beta + \gamma = 4$. Il en résulte que dans ce cas les demi-axes $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ deviennent infinis, de sorte que le rapport $\sqrt{\frac{a^3}{bc}}$ du cube d'un demi-axe au produit des deux autres reste fini, puisque $\beta + \gamma = 3\alpha$. Nous appellerons la ligne finie déterminée

$$w = \sqrt{\frac{a^3}{bc}}$$

un *paramètre*.

Dans ce cas, l'élément linéaire (2), après substitution de $pa$ et $qa$ à $p$ et $q$, prend la seconde forme finie déterminée :

$$(6) \qquad ds^2 = w^2\,\frac{p-q}{4}\left(\frac{p\,dp^2}{1-p} - \frac{q\,dq^2}{1-q}\right).$$

($c$) Dans le troisième cas, quand ni $\alpha$, ni $\beta$, ni $\gamma$ ne sont égaux à l'unité, nous obtenons $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $\gamma > 1$, par suite de $\alpha + \beta + \gamma = 4$. Nous pouvons transformer les trois demi-axes $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ en un infini du même ordre. En désignant $\sqrt[4]{abc}$ par $u$, nous concluons que l'ordre de l'expression $u$ sera 1, comme l'ordre des arguments $p$ et $q$, et que l'ordre de chacune des quantités $a$, $b$, $c$ sera supérieur à 1, savoir $\frac{4}{3}$. Par conséquent, en substituant $up$ et $uq$ à $p$ et $q$, dans l'élément linéaire (2), nous obtenons le troisième élément linéaire fini déterminé

$$(7) \qquad ds^2 = \frac{p-q}{4}(p\,dp^2 - q\,dq^2).$$

($a$) Nous appellerons les paraboloïdes du premier groupe, des *paraboloïdes à deux paramètres*. En désignant ces paramètres $u$ et $v$ par $\alpha$ et $\beta$, les demi-axes infinis $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ par $a$, $b$, $c$ et en substituant, dans l'élément (5), $-q$ à $q$, nous obtenons l'élément linéaire de ces paraboloïdes sous la forme suivante

$$(8) \qquad ds^2 = \frac{p+q}{4}\left[\frac{p\,dp^2}{(\alpha-p)(\beta-p)} + \frac{q\,dq^2}{(\alpha+q)(\beta+q)}\right],$$

où $\alpha = \frac{a^2}{c}$, $\beta = \frac{b^2}{c}$ sont les deux paramètres.

($b$) Nous appellerons les paraboloïdes du second groupe des *paraboloïdes à un seul paramètre*. Leur élément linéaire (6), après substitution de $-q$ à $q$, prend la forme

$$ds^2 = \gamma^2 \frac{p+q}{4}\left(\frac{p\,dp^2}{1-p} + \frac{q\,dq^2}{1+q}\right), \tag{9}$$

où $\gamma = \dfrac{a^3}{bc}$ est le paramètre.

Nous obtenons un paraboloïde de ce groupe quand les axes d'une surface du second ordre deviennent infinis de telle sorte que le rapport du cube d'un axe au produit des deux autres axes reste fini.

Mais nous pouvons aussi considérer ce paraboloïde comme un paraboloïde à deux paramètres qui deviendraient infinis de telle sorte que le rapport du cube $\alpha^3$ d'un paramètre à l'autre paramètre $\beta$ demeurerait fini et ce rapport fini

$$\frac{\alpha^3}{\beta} = \frac{a^6}{b^2c^2} = \gamma^2$$

est égal au carré du nouveau paramètre $\gamma$.

($c$) Le troisième groupe se compose d'un paraboloïde seulement. L'élément linéaire de ce groupe, après substitution, dans l'équation (7), de $p\sqrt{2}$ et $-q\sqrt{2}$ à $p$ et $q$, prend la forme

$$ds^2 = (p+q)(p\,dp^2 + q\,dq^2) \tag{10}$$

et ne contient aucune ligne servant de mesure au paraboloïde correspondant. Nous appellerons ce paraboloïde un *paraboloïde illimité*, puisque l'équation (10) exprime un élément linéaire homogène auquel, d'après le paragraphe V, correspondent des surfaces illimitées.

On obtient un paraboloïde illimité quand les axes d'une surface du second ordre deviennent infinis du même ordre; mais nous pouvons également considérer ce paraboloïde comme un paraboloïde à un paramètre qui devient infini, puisque $\gamma = \dfrac{a^3}{bc}$ devient infini quand $a$, $b$ et $c$ sont des infinis du même ordre.

($a$) *Paraboloïdes à deux paramètres.* — Si, dans les équations générales d'une surface du second ordre

$$x = a \sin p, \qquad y = b \cos p \sin q, \qquad z = c \cos p \cos q,$$

nous substituons $\dfrac{ap}{c}$, $\dfrac{bq}{c}$, $c - z$ à $p$, $q$, $z$ et, si nous rendons infinis les demi-axes $a$, $b$, $c$ de telle sorte que $\alpha = \frac{a^2}{c}$, $\beta = \frac{b^2}{c}$ restent finis, nous obtenons les équations générales des paraboloïdes à deux paramètres $\alpha$ et $\beta$

$$x = \alpha p, \qquad y = \beta q, \qquad 2z = \alpha p^2 + \beta q^2 \tag{11}$$

et, par suite, l'élément linéaire

$$ds^2 = \alpha^2(1 + p^2)\,dp^2 + 2\alpha\beta pq\,dp\,dq + \beta^2(1 + q^2)\,dq^2 \tag{12}$$

qui, après substitution de $\sqrt{\frac{(p-\alpha)(q-\alpha)}{\alpha(\alpha-\beta)}}$ et $\sqrt{\frac{(p-\beta)(q-\beta)}{\beta(\beta-\alpha)}}$ à $p$ et $q$, se transforme, en effet, dans l'élément linéaire (8).

Suivant les signes des carrés $a^2$, $b^2$, $c^2$, par lesquels sont déterminés les paramètres $\alpha = \frac{a^2}{c}$ et $\beta = \frac{b^2}{c}$, nous avons quatre paraboloïdes à deux paramètres :

(1) Le paraboloïde elliptique, quand $c^2$ est positif, ainsi que $a^2$ et $b^2$, quand, par conséquent, les paramètres sont réels et de même signe;

(2) Le paraboloïde hyperbolique quand les paramètres sont réels, mais de signes contraires;

(3) Le paraboloïde elliptique imaginaire, quand $c^2$ est négatif, de même que $a^2$ et $b^2$, c'est-à-dire quand les paramètres sont imaginaires et de même signe;

(4) Le paraboloïde hyperbolique imaginaire, quand les paramètres sont imaginaires et de signes contraires.

Les deux premiers paraboloïdes s'expriment par les équations (11); les deux derniers n'existent pas réellement.

La déformée de ces paraboloïdes, qui est réelle pour toutes les valeurs des paramètres $\alpha$ et $\beta$, est représentée, par conséquent, par les équations

$$\left\{\begin{aligned} x &= \alpha \int \sqrt{1 + (1 - e^2)p^2}\,dp, \\ y &= \beta \int \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)q^2}\,dq, \\ 2z &= e\alpha p^2 + \frac{\beta}{e} q^2, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

d'où nous déduisons, pour une valeur arbitraire de la constante de déformation $e$, l'élément linéaire des paraboloïdes, que nous avons exprimé par l'équation (12). Si les paramètres sont réels, la déformée (13) s'applique sur les paraboloïdes réels (11), mais ne couvre pas entièrement le paraboloïde hyperbolique ou tous les feuillets du paraboloïde elliptique, tandis qu'une des nappes de cette déformée, correspondant à des arguments imaginaires, n'est pas couverte par les paraboloïdes.

Si les paramètres $\alpha$ et $\beta$ sont imaginaires, en substituant, dans les équations (13), $\alpha i$, $\beta i$, $ei$, $pi$, $qi$ à $\alpha$, $\beta$, $e$, $p$, $q$, nous obtenons les équations

$$(14)\qquad \begin{cases} x = \alpha \int \sqrt{1 - p^2(1+e^2)}\, dp, \\ y = \beta \int \sqrt{1 - q^2\left(1 + \frac{1}{e^2}\right)}\, dq, \\ 2z = e\alpha p^2 + \frac{\beta}{e} q^2, \end{cases}$$

qui, pour des valeurs réelles des lettres qui y entrent, représentent des déformées réelles des deux paraboloïdes imaginaires.

Toutes les surfaces représentées par les équations (13) et (14) sont décrites par une cycloïde plus ou moins allongée, par un déplacement sans rotation.

En faisant $e = 1$ dans les équations (14), nous obtenons la surface

$$(15)\qquad x = a\int \sqrt{1 - 2p^2}\, dp, \qquad y = \beta \int \sqrt{1 - 2q^2}\, dq, \qquad 2z = \alpha p^2 + \beta q^2,$$

que nous considérons comme la déformée la plus simple d'un paraboloïde imaginaire, elliptique ou hyperbolique, suivant que $\alpha$ et $\beta$ ont le même signe ou des signes contraires.

(*b*) *Paraboloïdes à un paramètre.* — Nous avons vu qu'un paraboloïde à deux paramètres $\alpha$ et $\beta$ se transforme en un paraboloïde à un paramètre $\gamma$ quand ses paramètres deviennent infinis pour un rapport fini $\frac{\alpha^2}{\beta} = \gamma^2$.

Parmi les déformées (13) du premier paraboloïde se trouvent des déformées du second paraboloïde comme cas particulier. En effet, en substituant, dans les équations (13), $\frac{\gamma p}{\alpha}$, $\left(\frac{q\gamma^2}{\alpha^2} + 1\right)i$, $\frac{\alpha e}{\gamma}$, $2z - \frac{\alpha^2}{e\gamma}$ à $p$, $q$, $e$, $2z$, en remplaçant $\beta$ par $\frac{\alpha^3}{\gamma^2}$ et en rendant $\alpha$ infini, nous obtenons les équations

$$(16)\qquad x = \gamma \int \sqrt{1 - e^2p^2}\, dp, \qquad y = \gamma \int \sqrt{2q - \frac{1}{e^2}}\, dq, \qquad 2z = \gamma\left(ep^2 - \frac{2q}{e}\right)$$

qui, sous une forme finie, pour une valeur arbitraire de la constante de déformation $e$, représentent des déformées du paraboloïde à un paramètre $\gamma = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\beta}}$.

L'élément linéaire

$$(17)\qquad ds^2 = \gamma^2(dp^2 - 2p\, dp\, dq + 2q\, dq^2)$$

que nous déduisons des équations (16) ne dépend pas, en effet, de $e$ et se change en l'élément linéaire des paraboloïdes du second groupe, que nous avons exprimé par l'équation (9), après substitution de $\sqrt{(1-p)(1+q)}$ à $p$ et de $\frac{1+q-p}{2}$ à $q$.

Suivant le signe de $\gamma^2$, nous avons deux paraboloïdes à un paramètre $\gamma$ qui, tous deux, n'existent réellement pas comme surface du second ordre :

(1) Un paraboloïde à un paramètre réel;
(2) Un paraboloïde à paramètre imaginaire.

Les déformées du premier paraboloïde sont représentées par les équations (16); en y substituant $\gamma i$, $ei$, $pi$, $-q$ à $\gamma$, $e$, $p$, $q$, nous obtenons les déformées du second paraboloïde

$$(18)\qquad x=\gamma\int\sqrt{1-e^2p^2}\,dp,\qquad y=\gamma\int\sqrt{2q-\frac{1}{e^2}}\,dq,\qquad 2z=\gamma\left(ep^2+\frac{2q}{e}\right)$$

sous une forme réelle, pour $p$, $q$, $\gamma$, $e$ réels et, par suite, l'élément linéaire

$$(19)\qquad ds^2=\gamma^2(dp^2+2p\,dp\,dq+2q\,dq^2).$$

En égalant dans les équations (16) et (18), $\gamma$ et $e$ à l'unité et en substituant $q^2+1$, $2z\pm 1$ à $2q$, $2z$, nous obtenons la déformée la plus simple des deux paraboloïdes à paramètre $1$ ou $\sqrt{-1}$

$$(20)\qquad x=\int\sqrt{1-p^2}\,dp,\qquad y=\frac{q^3}{3},\qquad 2z=p^2\mp q^2.$$

Le signe —, dans l'expression $p^2\mp q^2$, correspond au paramètre réel; le signe + au paramètre imaginaire.

Les deux paraboloïdes sont décrits par une cycloïde, par un déplacement sans rotation.

(c) *Paraboloïde illimité.* — Nous pouvons considérer un paraboloïde illimité comme une surface du second ordre, dont les axes deviendraient infinis du même ordre, ou comme un paraboloïde à paramètre infini.

Son élément linéaire (10)

$$ds^2=(p+q)(p\,dp^2-q\,dq^2)$$

a la forme homogène et, par suite, d'après le paragraphe V, nous pouvons trouver toutes les déformées illimitées de ce paraboloïde. Mais, comme ces déformées sont assez compliquées, nous prendrons la déformée suivante, comme étant la plus simple,

$$(21)\qquad \begin{cases} x = \cos t \cosh l + \dfrac{t \sin t}{\cosh l}, \\ y = \sin t \cosh l - \dfrac{t \cos t}{\cosh l}, \\ z = \dfrac{\sinh l \cosh l - l}{2} + t^2 \operatorname{tangh} l. \end{cases}$$

Si, dans l'élément linéaire que nous en déduisons, nous remplaçons $l$ et $t$ par $p$ et $q$, au moyen des équations

$$\sinh^2 l + t^2 = p + q, \qquad t \operatorname{tangh} l = p - q,$$

nous obtenons l'élément linéaire

$$ds^2 = (p+q)(p\,dp^2 + q\,dq^2).$$

Nous considérerons plus loin l'équation de toutes les déformées de ce paraboloïde.

## VII. — Les déformées des surfaces du second ordre a deux axes égaux.

Une surface du second ordre, dont deux axes sont égaux entre eux, a la forme d'une surface de révolution; mais ses déformées se divisent en deux groupes dont l'un seulement possède les propriétés par lesquelles, d'après le paragraphe III, se distinguent toutes les déformées d'une surface de révolution donnée. Cette division provient de ce que l'élément linéaire d'une surface du second ordre prend deux formes limites, quand la différence des deux axes devient nulle. En effet, si nous exprimons les équations d'une surface du second ordre, dont les demi-axes sont $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, où $a < b < c$, au moyen des arguments $p$ et $q$ des lignes de courbure [*voir* § VI, équat. (1)], cette surface n'est réelle qu'entre les limites $a < q < b$, $b < p < c$, c'est-à-dire quand un argument est compris entre les deux plus petits carrés des demi-axes, l'autre, entre les deux plus grands. Mais l'élément linéaire

$$(1)\qquad ds^2 = \frac{p-q}{4}\left[\frac{p\,dp^2}{(a-p)(b-p)(c-p)} - \frac{q\,dq^2}{(a-q)(b-q)(c-q)}\right]$$

a aussi une forme réelle pour les autres valeurs de ces arguments. Quand, par conséquent, la différence $(a-b)$ de deux demi-axes devient nulle, toute surface réelle correspond seulement à une valeur constante $a$ de l'argument $q$, puisque $a < q < b$.

En substituant dans l'élément linéaire (1)

$$
(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{b+a}{2} - \dfrac{b-a}{2}\cos 2q_1 & \text{à} \quad q, \\ \dfrac{c+a}{2} - \dfrac{c-a}{2}\cos 2p_1 & \text{à} \quad p, \end{cases}
$$

et en égalant $a - b$ à zéro, nous obtenons l'élément linéaire fini

$$
(3) \qquad ds^2 = (a\sin^2 p_1 + c\cos^2 p_1)\,dp_1^2 + a\cos p_1\,dq_1^2,
$$

où le nouvel argument $q_1$ correspond, pour toutes ses valeurs, à une valeur constante $a$ de l'argument $q$, par suite de la substitution de $\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2}\cos 2q_1$ à $q$, puisque $b - a = 0$. Il en résulte que, pour toutes les valeurs de $p_1$ et $q_1$, l'équation (3) exprime l'élément linéaire d'une surface donnée, dans toute l'étendue de cette surface.

L'élément linéaire (3), d'après le paragraphe III, est l'élément linéaire des surfaces de révolution, et nous pouvons le déduire directement des équations des surfaces de révolution du second ordre,

$$
x = \sqrt{a}\cos p_1 \cos q_1, \qquad y = \sqrt{a}\cos p_1 \sin q_1, \qquad z = \sqrt{c}\sin p_1.
$$

Nous pouvons nommer toutes les surfaces correspondant à cet élément linéaire, des déformées d'une surface de révolution du second ordre donnée. Elles se déforment dans des surfaces de révolution.

Mais l'élément linéaire général (1) des surfaces du second ordre, pour $a = b$, après substitution de $-q$ à $q$, prend la forme

$$
(4) \qquad ds^2 = \frac{p+q}{4}\left[\frac{p\,dp^2}{(p-a)^2(c-p)} + \frac{q\,dq^2}{(q+a)^2(c+q)}\right]
$$

qui est réelle, non seulement pour $-q = a$, mais aussi pour $q$ variable, et nous pouvons nommer toutes les surfaces correspondant à cet élément linéaire (4), d'après son origine, des déformées d'une surface du second ordre à deux axes égaux. Elles ne se déforment pas dans des surfaces de révolution, parce que, en déterminant P et Q, d'après le paragraphe III, au moyen de l'élément linéaire (4), nous voyons que Q n'est pas une fonction de P. Nous ne pouvons pas, par conséquent, considérer les surfaces de ce groupe, comme des déformées en dehors des limites des surfaces du premier groupe. Toute portion de surface du premier groupe correspond à une valeur constante $a$ de l'argument $q$, et à cette valeur correspond, sur une surface du second groupe, seulement la courbe $q = a$, qui toutefois se trouve à l'infini.

Si nous appliquons la surface donnée sur une des surfaces du premier groupe, les portions réelles des deux surfaces coïncident, ou se rencontrent suivant une courbe, ou ne coïncident pas.

Mais, si nous appliquons la surface donnée sur des surfaces du second groupe, en considérant l'une et l'autre surfaces comme des surfaces limites, alors, quand $a - b$ tend vers zéro, toute portion de la surface donnée se contracte en une courbe $q = a$ de l'autre surface, et, avec elle, s'éloigne à l'infini.

Toute déformée d'une surface du second ordre, dont les deux axes sont égaux, appartient au premier ou au second groupe, c'est-à-dire se déforme ou ne se déforme pas en une surface de révolution.

Nous pouvons considérer un paraboloïde illimité comme une surface du second ordre à trois axes égaux, parce qu'il se forme toujours, quand les trois axes de la surface du second ordre deviennent infinis du même ordre. Toutes ses déformées appartiennent au second groupe, car, d'après le paragraphe III, de l'élément linéaire (10) résulte qu'elles ne se déforment pas en des surfaces de révolution.

Nous pouvons considérer le paraboloïde à un paramètre $\gamma = \sqrt{\dfrac{a^3}{bc}}$ comme une surface du second ordre avec deux demi-axes infinis égaux, $\sqrt{b} = \sqrt{c}$. Ses déformées appartiennent aussi au second groupe et ne se déforment pas en des surfaces de révolution.

Le paraboloïde à deux paramètres $\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{c}}$, $\beta = \dfrac{b}{\sqrt{c}}$ a deux axes égaux, quand ces deux paramètres sont égaux entre eux ($\sqrt{a} = \sqrt{b}$, quand $\alpha = \beta$). Ses déformées appartiennent aux deux groupes.

En effet, en substituant dans l'élément linéaire (3), $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{p}{i\sqrt{c}}$, $\dfrac{q}{\sqrt{c}}$ à $p_1, q_1$, en posant $a = \alpha\sqrt{c}$, et en rendant $c$ infini, nous obtenons son premier élément linéaire,

$$ds^2 = \alpha^2[(1+p^2)\,dp^2 + q^2\,dq^2]. \tag{5}$$

Les surfaces correspondant à cet élément se déforment, d'après le paragraphe III, en des surfaces de révolution, et nous les appellerons des *déformées d'un paraboloïde de révolution.*

En substituant, dans l'élément linéaire (4), $ap$ et $aq$ à $p$ et $q$, et en posant $\dfrac{a^2}{c} = \alpha^2$, nous obtenons son second élément linéaire

$$ds^2 = \alpha^2\frac{p+q}{4}\left[\frac{p\,dp^2}{(p-1)^2} + \frac{q\,dq^2}{(q+1)^2}\right]. \tag{6}$$

Les surfaces correspondant à cet élément ne se déforment pas en des surfaces de révolution, et nous les appellerons des *déformées d'un paraboloïde à deux paramètres égaux.*

Dans le paragraphe II, nous avons vu que par les équations (5) :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{b^2-a^2}\sin q\cos p,\\ &\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = \frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arc\,tangh}(\cos q),\\ &z = \int\sqrt{c^2\cos^2 p + a^2\sin^2 p}\,dp \end{aligned}\right.$$

est représentée une déformée d'une surface du second ordre de la forme générale

$$(8)\qquad x = a\cos p\cos q,\qquad y = b\cos p\sin q,\qquad z = c\sin p$$

où $a$, $b$, $c$ sont les demi-axes de la surface.

Quand, pour $p$ et $q$ finis, nous égalons à o la différence de deux axes, alors, par les équations (8) est représentée une surface de révolution, par conséquent, par les équations (7) une déformée du premier groupe. Nous avons deux telles déformées. En égalant $c-b$ à o, nous obtenons la première déformée d'une surface générale de révolution du second ordre; en égalant $c-a$ à o, nous obtenons la deuxième. Cette deuxième déformée s'exprime sans fonctions elliptiques, car la troisième des équations (7) prend la forme $z = ap$.

### *Déformées d'une surface du second ordre à deux axes égaux.*

Les déformées, exprimées par les équations (7) pour $c-b=0$ et pour $c-a=0$, se déforment en des surfaces de révolution; mais nous pouvons égaler $b-a$ à o dans les équations (7) seulement pour $q$ infini, savoir, en substituant

$$\left(q+\log\frac{2a}{\sqrt{b^2-a^2}}\right)i \quad \text{à} \quad q.$$

Les équations (7) prennent alors la forme

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{x^2+y^2} = aie^q\cos p,\\ &\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = e^{-q},\\ &z = \int\sqrt{c^2\cos^2 p + a^2\sin^2 p}\,dp \end{aligned}\right.$$

et représentent la troisième déformée de la surface générale du second ordre, dont deux axes sont égaux; mais cette déformée appartient au second groupe, car nous pouvons voir, d'après le paragraphe III, qu'elle ne se déforme pas en des surfaces de révolution.

Nous prendrons cette déformée, si elle est réelle, pour la déformée la plus simple d'une surface du second ordre à deux axes égaux.

(1) Si $a$ et $c$ sont réels, en substituant $\frac{\pi}{2} - pi$ à $p$ dans les équations (9), nous obtenons la déformée la plus simple

$$(10)\qquad \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = ae^q \sinh p, \\ \operatorname{arc\,tang} \dfrac{y}{x} = e^{-q}, \\ z = \displaystyle\int \sqrt{c^2 \sinh^2 p - a^2 \cosh^2 p}\, dp \end{cases}$$

d'un ellipsoïde réel à deux axes égaux.

(2) Si $a$ et $c$ sont imaginaires, en substituant $ai$ et $pi$ à $a$ et $p$ dans les équations (9), nous obtenons la déformée la plus simple

$$(11)\qquad \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = ae^q \cosh p, \\ \operatorname{arc\,tang} \dfrac{y}{x} = e^{-q}, \\ z = \displaystyle\int \sqrt{c^2 \cosh^2 p - a^2 \sinh^2 p}\, dp \end{cases}$$

d'un ellipsoïde imaginaire à deux axes égaux.

(3) Si $a$ est imaginaire, $c$ réel, en substituant $ai$ à $a$, dans les équations (9), nous obtenons la déformée la plus simple

$$(12)\qquad \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = ae^q \cos p, \\ \operatorname{arc\,tang} \dfrac{y}{x} = e^{-q}, \\ z = \displaystyle\int \sqrt{c^2 \cos^2 p - a^2 \sin^2 p}\, dp \end{cases}$$

d'un hyperboloïde à deux axes imaginaires égaux.

(4) Si $a$ est réel, $c$ imaginaire, les équations (9) ne prennent pas une forme réelle et nous n'obtenons pas de déformée d'un hyperboloïde à deux axes réels égaux.

Au second groupe de déformées d'une surface du second ordre dont deux axes sont égaux, appartiennent encore les déformées d'un paraboloïde illimité, des paraboloïdes à un paramètre et des deux paraboloïdes à deux paramètres égaux. Nous avons déjà exprimé au paragraphe VI les déformées les plus simples des trois premiers paraboloïdes, par les équations (20) et (21).

Nous obtenons les déformées les plus simples des paraboloïdes à paramètres égaux $\alpha = \frac{a^2}{c}$, $\alpha = \frac{b^2}{c}$, au moyen des équations (9), en substituant $\frac{\pi}{2} - \frac{ap}{c}$ à $p$ et en rendant $a$ et $c$ infinis, de telle sorte que le rapport $\alpha = \frac{a^2}{c}$ reste fini. Les équations (9) prennent alors la forme

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{x^2+y^2} = \alpha i e^q p,\\ &\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = e^{-q},\\ &z = \alpha \int \sqrt{p^2+1}\, dp. \end{aligned}\right.$$

(5) Si $\alpha$ est réel, en substituant $pi$ à $p$, nous obtenons la déformée la plus simple

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{x^2+y^2} = \alpha e^q p,\\ &\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = e^{-q},\\ &z = \alpha \int \sqrt{p^2-1}\, dp \end{aligned}\right.$$

d'un paraboloïde à deux paramètres réels égaux.

(6) Si $\alpha$ est imaginaire, nous n'obtenons pas de déformée réelle d'un paraboloïde à deux paramètres imaginaires égaux.

Nous donnerons plus loin les déformées les plus simples d'un hyperboloïde à deux axes réels égaux et d'un paraboloïde à deux axes imaginaires égaux.

## *Déformées d'une surface de révolution du second ordre.*

Des équations d'une surface de révolution du second ordre

$$x = a\cos p \cos q, \qquad y = a \cos p \sin q, \qquad z = c \sin p,$$

nous déduisons l'élément linéaire

$$ds^2 = (a^2 \sin^2 p + c^2 \cos^2 p)\, dp^2 + a^2 \cos^2 p\, dq^2$$

et, par suite, d'après le paragraphe IV, toutes les surfaces de révolution

$$(15)\qquad \begin{cases} x = \alpha a \cos p \cos \dfrac{q}{\alpha}, \\ y = \alpha a \cos p \sin \dfrac{q}{\alpha}, \\ z = \displaystyle\int \sqrt{c^2 + [a^2(1-\alpha^2) + c^2] \sin^2 p}\, dp, \end{cases}$$

qui correspondent à cet élément linéaire.

Suivant les signes de $a^2$ et de $c^2$, ces déformées se partagent en quatre groupes. Nous obtenons les déformées les plus simples pour $\alpha = 1$.

(1) Ellipsoïde de révolution avec les demi-axes $a$, $a$, $c$,

$$x = a \cos p \cos q, \qquad y = a \cos p \sin q, \qquad z = c \sin p.$$

(2) Hyperboloïde de révolution à une nappe avec les demi-axes $a$, $a$, $ci$,

$$x = a \cosh p \cos q, \qquad y = a \cosh p \sin q, \qquad z = c \sinh p.$$

(3) Hyperboloïde de révolution à deux nappes avec les demi-axes $ai$, $ai$, $c$.

$$x = a \sinh p \cos q, \qquad y = a \sinh p \sin q, \qquad z = c \cosh p.$$

(4) Ellipsoïde de révolution imaginaire avec les demi-axes $ai$, $ai$, $ci$, n'existant pas comme surface du second ordre. Nous obtenons sa déformée la plus simple, au moyen des équations (2), pour $\alpha = \dfrac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$, après substitution de $ai$, $ci$, $pi$ ou $\dfrac{\pi}{2} - pi$ à $a$, $c$, $p$, dans les deux formes les plus simples,

$$(16)\qquad \begin{cases} x = \sqrt{c^2 - a^2} \cosh p \cos q, \qquad y = \sqrt{c^2 - a^2} \cosh p \sin q, \qquad z = cp, \\ x = \sqrt{a^2 - c^2} \sinh p \cos q, \qquad y = \sqrt{a^2 - c^2} \sinh p \sin q, \qquad z = cp, \end{cases}$$

suivant que $c$ sera plus grand ou plus petit que $a$.

Ces déformées (16), après élimination des arguments $p$ et $q$, prennent la forme

$$(17)\qquad x^2 + y^2 = (c^2 - a^2) \cosh^2\left(\frac{z}{c}\right), \qquad x^2 + y^2 = (a^2 - c^2) \sinh^2\left(\frac{z}{c}\right),$$

et les déformées de cette forme qui sont décrites, quand la ligne des sinus

$$y = \alpha \sin(\beta x + \gamma)$$

tourne autour de l'axe des $x$, ont encore un ellipsoïde réel sous la forme

$$x^2+y^2=(a^2-c^2)\cos^2\left(\frac{z}{c}\right)$$

et un hyperboloïde à une nappe sous la forme

$$x^2+y^2=(a^2+c^2)\cosh^2\left(\frac{z}{c}\right).$$

## VIII. — Les déformées d'une surface du second ordre a trois axes égaux.

Une surface du second ordre, dont tous les axes sont égaux, devient une sphère, quand ces axes sont réels.

Une surface du second ordre, dont les équations sont exprimées au moyen des arguments des lignes de courbure $p$ et $q$ (*voir* § VI, éq. 1) est réelle entre les limites $a<q<b$, $b<p<c$. Il en résulte que toute la sphère, pour laquelle $a=b=c$, correspond seulement à une valeur constante $a$ des deux arguments $p$ et $q$.

Quand les deux demi-axes $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont égaux entre eux, alors, au moyen de l'élément linéaire général

$$(1)\qquad ds^2=\frac{p+q}{4}\left[\frac{p\,dp^2}{(a-p)(b-p)(c-p)}-\frac{q\,dq^2}{(a-q)(b-q)(c-q)}\right],$$

après substitution de

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{b+a}{2}-\dfrac{b-a}{2}\cos 2q_1 & \text{à } q,\\[2ex] \dfrac{c+a}{2}-\dfrac{c-a}{2}\cos 2p_1 & \text{à } p,\end{cases}$$

nous avons obtenu au paragraphe VII l'élément linéaire

$$(3)\qquad ds^2=(a\sin^2p_1+b\cos^2p_1)\,dp_1^2+a\cos^2p_1\,dq_1^2$$

des surfaces de révolution du second ordre.

En égalant $b-a$ à zéro, nous obtenons, par suite, l'élément linéaire

$$(4)\qquad ds^2=a(dp_1^2+\cos p_1\,dq_1^2)$$

d'une surface du second ordre, dont tous les axes sont égaux. Les arguments $p_1$ et $q_1$, par suite des équations (2), correspondent, pour toutes leurs valeurs, à une valeur constante $a$ des deux arguments $p$ et $q$, puisque $b-a=0$, $c-a=0$. Il en résulte que l'équation (4) exprime l'élément linéaire de la sphère dans toute son étendue, et nous appellerons toutes les surfaces correspondant à cet élément linéaire (4), des *déformées de la sphère*. Ces déformées s'appliquent sur des surfaces de révolution, et le produit des rayons de courbure que nous obtenons, d'après le paragraphe III, au moyen de l'élément linéaire (4), a une valeur constante et égale à $a^2$.

Quand $a = b = c$, l'élément linéaire (1) prend seulement pour $p = a$ et $q = a$ la forme (4); mais il reste aussi réel pour $p$ et $q$ variables, sans prendre cette forme (4).

Si nous introduisons seulement un argument $q_1$, correspondant à une valeur constante $a$ de l'argument $q$, en admettant des variations arbitraires de l'autre argument $p_1$, alors, en substituant $\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2}\cos 2q_1$ à $q$ dans l'élément linéaire (1) et en égalant $a - b$ à zéro, nous obtiendrons l'élément linéaire

$$ds^2 = \frac{p\,dp^2}{4(p-a)(c-p)} + \frac{a(a-p)\,dq_1^2}{c-a}$$

qui, après substitution de $a(1-p^2)$ à $p$, $\frac{(c-a)q^2}{a}$ à $q_1^2$, et pour $c - a = 0$, prend la forme

$$ds^2 = a\left(\frac{p^2-1}{p^2}\,dp^2 + p^2\,dq^2\right). \tag{5}$$

Par cette équation (5) s'exprime une seconde forme de l'élément linéaire de la surface du second ordre dont tous les axes sont égaux.

Parmi les déformées que nous en déduisons, se trouvent, d'après le paragraphe III, des surfaces de révolution; mais il ne se trouve pas de sphère, car le produit des rayons de courbure que nous en tirons sous la forme $a^2(p^2-1)^2$ est ici une quantité variable et non constante comme dans les déformées de la sphère; nous appellerons toutes les surfaces correspondant à cet élément linéaire (5) des *déformées de surface du second ordre à trois axes égaux*.

Outre ces deux formes, l'élément linéaire général (1) prend encore, pour $a = b = c$, après substitution de $ap$ et $-aq$ à $p$ et $q$, la troisième forme

$$ds^2 = \frac{a(p+q)}{4}\left[\frac{p\,dp^2}{(1-p)^3} + \frac{q\,dq^2}{(1+q)^3}\right]. \tag{6}$$

Nous appellerons toutes les surfaces correspondant à cet élément linéaire (6) *des déformées d'une surface du second ordre à trois axes égaux*. Ces surfaces ne se déforment pas en des surfaces de révolution.

Toutes les déformées d'une surface du second ordre, dont les trois axes sont égaux, se partagent par conséquent en trois groupes. Mais, d'après le signe du carré des axes, chacun de ces trois groupes se partage à nouveau en deux groupes. En outre, l'élément linéaire de chaque groupe peut prendre différentes formes réelles entre différentes limites, mais les surfaces correspondant à de telles formes différentes sont des déformées en dehors des limites d'une même surface.

(1) *Déformées d'une sphère réelle.* — Les surfaces de révolution qui, d'après le paragraphe IV, correspondent à l'élément linéaire de la sphère

$$(4)\qquad ds^2 = a^2(dp^2 + \cos^2 p\, dq^2)$$

sont représentées par les équations suivantes :

$$(7)\qquad x = \alpha a \cos p \cos\frac{q}{\alpha},\qquad y = \alpha a \cos p \sin\frac{q}{\alpha},\qquad z = a\int\sqrt{1-\alpha^2\sin^2 p}\, dp.$$

Elles s'appliquent entièrement sur la sphère

$$x = a\cos p\cos q,\qquad y = a\cos p\sin q,\qquad z = a\sin p,$$

mais ne couvrent pas deux segments de cette dernière si $\alpha > 1$.

(2) *Déformées d'une sphère imaginaire.* — L'élément linéaire d'une sphère imaginaire, dont les trois axes sont $ai$, $ai$ et $ai$, a trois formes réelles que nous obtenons au moyen de l'équation (4) :

$$(1)\qquad ds^2 = a^2(dp^2 + e^{2p}\, dq^2),$$

après substitution de $ai$, $(p+k)i$, $2qe^{-k}$ à $a$, $p$, $q$, où $k = \infty$;

$$(2)\qquad ds^2 = a^2(dp^2 + \cosh^2 p\, dq^2),$$

après substitution de $ai$, $pi$, $qi$ à $a$, $p$ et $q$ dans l'équation (4);

$$(3)\qquad ds^2 = a^2(dp^2 + \sinh^2 p\, dq^2),$$

après substitution de $ai$, $\frac{\pi}{2} - pi$ à $a$ et $p$ dans l'équation (4).

A ces trois éléments linéaires correspondent, d'après le paragraphe IV, trois groupes de surfaces de révolution.

Les équations du premier groupe

$$x = \alpha a e^p \cos\frac{q}{\alpha},\quad y = \alpha a e^p \sin\frac{q}{\alpha},\quad z = a\int\sqrt{1-\alpha^2 e^{2p}}\, dp,\quad ds^2 = a^2(dp^2 + e^{2p}\, dq^2)$$

représentent cependant, pour toutes les valeurs de la constante de déformation $\alpha$, une même surface qui, après substitution de $\frac{1}{\alpha \cosh p}$ et $\alpha q$ à $e^p$ et $q$, prend la forme

$$(8) \qquad x = \frac{a\cos q}{\cosh p}, \qquad y = \frac{a\sin q}{\cosh p}, \qquad z = a(p - \operatorname{tangh} p).$$

Nous prendrons cette surface pour la déformée la plus simple d'une sphère imaginaire.

Les surfaces de révolution du deuxième et du troisième groupes

$$\begin{aligned} x &= \alpha a \cosh p \cos\frac{q}{\alpha}, & x &= \alpha a \sinh p \cos\frac{q}{\alpha}, \\ y &= \alpha a \cosh p \sin\frac{q}{\alpha}, & y &= \alpha a \sinh p \sin\frac{q}{\alpha}, \\ z &= a\int\sqrt{1-\alpha^2 \sinh^2 p}\, dp, & z &= a\int\sqrt{1-\alpha^2\cosh^2 p}\, dp, \\ ds^2 &= a^2(dp^2 + \cosh^2 p\, dq^2), & ds^2 &= a^2(dp^2 + \sinh^2 p\, dq^2), \end{aligned}$$

sont non seulement des déformées en dehors des limites de la déformée la plus simple, mais s'appliquent réellement l'une sur l'autre, et sur la déformée la plus simple, de différentes manières. Pour la détermination des points correspondants, nous avons les équations suivantes :

L'élément linéaire de la déformée la plus simple

$$du^2 + e^{2u}\, dv^2$$

se transforme, après substitution de

$$\log[\sinh p + \cosh p \cosh(q+\beta)] \quad \text{à} \quad u,$$

$$\frac{\cosh p \sinh(q+\beta)}{\sinh p + \cosh p\cosh(q+\beta)} + \gamma \quad \text{à} \quad v,$$

en l'élément linéaire du second groupe

$$ds^2 = dp^2 + \cosh^2 p\, dq^2,$$

et, après substitution de

$$\log[\cosh p + \sinh p \cos(q+\beta)] \quad \text{à} \quad u,$$

$$\frac{\cosh p \sin(q+\beta)}{\cosh p + \sinh p\cos(q+\beta)} + \gamma \quad \text{à} \quad v,$$

en l'élément linéaire du troisième groupe

$$ds^2 = dp^2 + \sinh^2 p\, dq^2.$$

Par là nous pouvons, pour des valeurs arbitraires des deux constantes $\beta$ et $\gamma$ des déplacements, déterminer le point $u$, $v$ de la déformée la plus simple, qui correspond à un point quelconque $p$, $q$ d'une déformée quelconque.

(3) *Déformées d'une surface de révolution du second ordre à trois demi-axes réels égaux $a$, $a$, $a$.* — Nous obtenons l'élément linéaire de ces déformées au moyen de l'équation (5), après substitution de $a^2$ à $a$, sous la forme

$$ds^2 = a^2\left(\frac{p^2-1}{p^2}\,dp^2 + p^2\,dq^2\right). \tag{9}$$

Les surfaces de révolution qui, d'après le paragraphe IV, correspondent à cet élément linéaire, après substitution de $\dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}\cos p}$, $\alpha q$ à $p$ et $q$, prennent la forme

$$x = b\,\frac{\cos q}{\cos p}, \qquad y = b\,\frac{\sin q}{\cos p}, \qquad z = a(\operatorname{tang} p - p), \tag{10}$$

où $b = \dfrac{a\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ est une constante de déformation.

Nous obtenons la plus simple de ces déformées, pour $\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$, sous la forme

$$x = a\,\frac{\cos q}{\cos p}, \qquad y = a\,\frac{\sin q}{\cos p}, \qquad z = a(\operatorname{tang} p - p). \tag{11}$$

(4) *Déformées d'une surface de révolution du second ordre à trois demi-axes imaginaires égaux $ai$, $ai$, $ai$.* — Nous obtenons l'élément linéaire réel de ces déformées, après substitution de $ai$, $pi$ à $a$, $p$, dans l'élément linéaire (9), sous la forme

$$ds^2 = a^2\left(\frac{p^2+1}{p^2}\,dp^2 + p^2\,dq^2\right). \tag{12}$$

Les surfaces de révolution qui, d'après le paragraphe IV, correspondent à cet élément linéaire, après substitution de $\dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}\sinh p}$ et $\alpha q$ à $p$ et $q$, prennent la forme

$$x = b\,\frac{\cos q}{\sinh p}, \qquad y = b\,\frac{\sin q}{\sinh p}, \qquad z = a(\coth p + p), \tag{13}$$

où $b = \dfrac{a\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ est une constante de déformation.

La déformée la plus simple s'obtient, pour $\alpha = 1$, sous la forme

$$x = ap\cos q, \qquad y = ap\sin q, \qquad z = a\log p, \tag{14}$$

ou, par élimination des arguments, sous la forme

$$z = \log\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nous appellerons cette surface *une surface de révolution logarithmique.*

(5) *Déformées d'une surface du second ordre à trois axes imaginaires égaux.* — Nous obtenons la déformée la plus simple d'une surface du second ordre à trois demi-axes imaginaires égaux $ai$, $ai$, $ai$, au moyen des équations [(11), § 7] d'un ellipsoïde imaginaire à deux axes égaux, en égalant à zéro $c - a$, sous la forme suivante :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ae^q\cosh p, \qquad \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = e^{-q}, \qquad z = ap, \tag{15}$$

ou, après élimination des arguments, et pour $\alpha = 1$, sous la forme

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\cdot\sqrt{x^2 + y^2} = \cosh z.$$

(6) Les déformées d'une surface du second ordre à trois axes réels égaux correspondent à l'élément linéaire que nous avons exprimé par l'équation (6) et auquel se ramène l'élément linéaire (15) du groupe précédent.

Nous obtiendrons, au paragraphe X, la déformée la plus simple de ce groupe.

## IX. — Les déformées des surfaces du second ordre à axes infiniment petits.

Une surface du second ordre

$$x = a\cos p\cos q, \qquad y = b\cos p\sin q, \qquad z = c\sin p, \tag{1}$$

dont les demi-axes sont $a$, $b$, $c$, se transforme, pour toutes les valeurs finies des arguments :

(1) Dans un plan, si nous égalons un axe à zéro;
(2) En une ligne droite, si nous égalons deux axes à zéro;
(3) En un point, si nous égalons les trois axes à zéro.

Il en résulte que, s'il existe des déformées de surface du second ordre à axes nuls, ne s'appliquant pas sur un plan, ces déformées doivent correspondre à des valeurs infinies de l'un au moins des arguments.

Pour des axes infiniment petits, l'élément linéaire

$$(2)\quad ds^2 = \left\{\sin^2 p[a^2 + (b^2 - a^2)\sin^2 q] + c^2\cos^2 p\right\} dp^2 + 2(a^2 - b^2)\sin p\cos p\sin q\cos q\, dp\, dq + \cos^2 p[a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2 q]\, dq^2,$$

que nous obtenons au moyen des équations (1), doit prendre une forme finie déterminée, et le produit des rayons de courbure qu'on en déduit, doit être fini.

Les fonctions trigonométriques d'un argument infini deviennent indéterminées. Par conséquent, dans l'élément linéaire (2), les fonctions trigonométriques d'au moins un argument doivent disparaître avant que les axes deviennent nuls. Ceci ne peut évidemment avoir lieu que quand $a^2 - b^2 = 0$, et, dans ce cas, l'élément (2) prend la forme

$$(3)\qquad ds^2 = (a^2\sin^2 p + c^2\cos^2 p)\, dp^2 + a^2\cos^2 p\, dq^2,$$

qui ne contient pas de fonctions trigonométriques de l'argument $q$. A cet élément linéaire correspondent des surfaces de révolution.

En égalant $c$ à zéro, nous obtiendrons l'élément linéaire d'un plan. En laissant ce cas de côté, et en égalant $a$ à zéro, nous obtenons, après substitution dans (2) de $\frac{cq}{a}$ à $q$, l'élément linéaire fini et déterminé

$$(4)\qquad ds^2 = c^2\cos^2 p(dp^2 + dq^2)$$

d'une surface du second ordre, dont deux demi-axes sont égaux à zéro, et le troisième demi-axe est $c$.

Le produit des rayons de courbure

$$c^2\cos^2 p$$

que nous en déduisons, d'après le paragraphe VII, est, en effet, fini.

Le demi-axe $c$, qui entre dans l'élément linéaire (4), ne peut être nul; mais son carré peut être :

($\alpha$) inférieur à zéro, ($\beta$) supérieur à zéro, ($\gamma$) infini; c'est pourquoi les déformées d'une surface du second ordre avec axes infiniment petits se partagent en trois groupes de caténoïdes.

($\alpha$) Si $c^2$ est inférieur à zéro, en substituant $ci$, $pi$, $qi$ à $c$, $p$, $q$ dans (4), nous obtenons l'élément linéaire

$$(5)\qquad ds^2 = c^2\cosh^2 p(dp^2 + dq^2)$$

d'une surface du second ordre dont les trois demi-axes sont $o$, $o$, $ci$. Parmi toutes les surfaces de révolution qu'on en déduit, d'après l'équation (3) du paragraphe III, on distingue la surface

$$(6)\qquad x = c \cosh p \cos q, \qquad y = c \cosh p \sin q, \qquad z = cp,$$

que nous appellerons *caténoïde*, parce qu'elle est engendrée par une chaînette $x = c \cosh p$, $z = cp$, qui tourne autour de l'axe des $z$.

Nous nommerons toutes les surfaces correspondant à l'élément linéaire (5) des déformées d'une caténoïde dont le paramètre est $c$, ou des déformées d'une surface du second ordre dont les trois demi-axes sont $o$, $o$, $ci$.

($\beta$) Si $c^2$ est supérieur à zéro, alors, outre l'élément linéaire (4), nous en déduisons, après substitution de $\frac{\pi}{2} - pi$, $qi$ à la place de $p$ et $q$, encore un second élément linéaire de forme réelle,

$$(7)\qquad ds^2 = c^2 \sinh^2 p (dp^2 + dq^2).$$

Les deux séries de surfaces de révolution que nous obtenons, d'après le paragraphe IX, au moyen des éléments linéaires (4) et (6), sont des déformées en dehors des limites.

Nous appellerons toutes les déformées de ce groupe, des déformées de la caténoïde imaginaire (7) dont le paramètre est $ci$, ou des déformées d'une surface du second ordre dont les demi-axes sont $o$, $o$, $c$.

Nous obtenons la déformée la plus simple de ce groupe, de l'élément linéaire (4), d'après le paragraphe IV, pour $\alpha = 1$, sous la forme suivante

$$x = c \cos p \cos q, \qquad y = c \cos p \sin q, \qquad z = c \int \sqrt{\cos 2p}\, dp.$$

($\gamma$) Si, dans l'élément linéaire (4), $c^2 = \infty$, en substituant $\frac{\pi}{2} - \frac{p}{\sqrt{c}}$ et $\frac{q}{\sqrt{c}}$ à $p$ et $q$, nous obtenons l'élément linéaire homogène

$$(8)\qquad ds^2 = p^2 (dp^2 + dq^2),$$

auquel, d'après le paragraphe V, correspondent des surfaces illimitées et leurs déformées.

Nous appellerons toutes les surfaces correspondant à cet élément linéaire (8) des déformées de caténoïde illimitée, ou des déformées d'une surface du second ordre dont les demi-axes sont $o$, $o$, $\infty$.

Nous obtenons, d'après le paragraphe V, toutes les déformées illimitées de ce groupe; leurs équations sont assez compliquées.

Toutes les surfaces de révolution de ce groupe, que nous obtenons d'après le paragraphe IV, forment une même surface à échelle arbitraire. Les équations de cette surface

$$x = \alpha p \cos\frac{q}{\alpha}, \qquad y = \alpha p \sin\frac{q}{\alpha}, \qquad z = \int\sqrt{p^2 - \alpha^2}\,dp,$$

après substitution de $\alpha \cosh p$, $\alpha q$ à $p$ et $q$, prennent la forme

$$(9) \quad x = \alpha^2 \cosh p \cos q, \qquad y = \alpha^2 \sinh p \sin q, \qquad 2z = \alpha^2(\sinh p \cosh p - p)$$

où $\alpha$ est une constante arbitraire de déformation. Nous prendrons cette surface (9) pour la déformée la plus simple d'une caténoïde illimitée.

## X. — Les déformées d'une surface du second ordre réelle pour toutes les valeurs des axes.

Si la surface est représentée par les équations

$$(1) \qquad x = um, \qquad y = un, \qquad z = v,$$

où $u$ et $v$ sont des fonctions arbitraires de l'argument $p$, $m$ et $n$ des fonctions arbitraires de l'autre argument $q$, nous obtenons, pour élément linéaire de cette surface,

$$(2) \quad ds^2 = (m^2 + n^2)(u'^2 + v'^2)\,dp^2 + 2(mm_1 + nn_1)uu'\,dp\,dq + u^2(m_1^2 + n_1^2)\,dp^2,$$

où

$$u' = \frac{du}{dp}, \qquad v' = \frac{dv}{dp}; \qquad m_1 = \frac{dm}{dq}, \qquad n_1 = \frac{dn}{dq}.$$

Si, par les équations

$$(3) \qquad M^2 + N^2 = m^2 + n^2 - \alpha, \qquad M_1^2 + N_1^2 = m_1^2 + n_1^2,$$

nous déterminons deux nouvelles fonctions M et N de l'argument $q$, où $\alpha$ est une constante, et par l'équation

$$(4) \qquad V'^2 = v'^2 - \alpha u'^2$$

une nouvelle fonction V de l'argument $p$, alors, après substitution des fonctions M, N, V à $m$, $n$, $v$, dans l'équation (2), nous obtenons le même élément linéaire, dans lequel $\alpha$ a disparu.

Il en résulte que, par les équations

$$(5)\qquad X = uM, \qquad Y = uN, \qquad Z = V,$$

s'exprime une surface qui, pour toutes les valeurs de la constante de la déformation $\alpha$, s'applique sur la surface donnée $x, y, z$.

En déterminant V, M et N au moyen des équations (3) et (4), nous obtenons

$$V = \int \sqrt{v'^2 - \alpha u'^2}\, dp, \qquad M = r\cos\varphi, \qquad N = r\sin\varphi,$$

où

$$r = \sqrt{m^2 + n^2 + \alpha}, \qquad \varphi = \int \frac{\sqrt{(mn_1 - m_1 n)^2 + \alpha(m_1^2 + n_1^2)}}{m^2 + n^2 + \alpha}\, dq.$$

En faisant, dans les équations données (1),

$$u = \cos p, \qquad v = c\sin p; \qquad m = a\cos q, \qquad n = b\sin q,$$

nous obtenons les équations d'une surface générale du second ordre

$$x = a\cos p\cos q, \qquad y = b\cos p\sin q, \qquad z = c\sin p,$$

et, par suite, sa déformée

$$X = r\cos\varphi\cos p, \qquad Y = r\sin\varphi\cos p, \qquad Z = \int \sqrt{c^2\cos^2 p - \alpha\sin^2 p}\, dp,$$

$$r = \sqrt{a^2\cos^2 q + b^2\sin^2 q + \alpha}, \qquad \varphi = \int \frac{\sqrt{a^2 b^2 + \alpha(a^2\sin^2 q + b^2\cos^2 q)}}{c^2\cos^2 q + b^2\sin^2 q + \alpha}\, dq.$$

En posant $\alpha = -a^2$ dans l'équation (7), nous obtenons la déformée que nous avons exprimée au paragraphe II par les équations (5), ou au paragraphe VII par les équations (7).

En égalant à zéro $a - b$ pour $p$ et $q$ finis, nous obtenons des déformées d'une surface de révolution du second ordre.

En égalant à zéro $a - b$, après substitution de $\left(q + \log\frac{2a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) i$ à $q$, $a^2(\alpha - 1)$ à $\alpha$, nous obtenons les déformées

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & X = r\cos\varphi\cos p, \qquad Y = r\sin\varphi\cos p, \qquad Z = \int \sqrt{c^2\cos^2 p - a^2(\alpha - 1)\sin^2 p}\, dp, \\ & \qquad r = a\sqrt{\alpha + e^{2q}}, \qquad \varphi = \int \frac{\sqrt{(\alpha - 1)e^{2q} - \alpha}}{\alpha + e^{2q}}\, dq \end{aligned}\right.$$

de toutes les surfaces du second ordre à deux demi-axes égaux finis $a = b$.

En substituant, dans les équations (8), $\frac{\pi}{2} - \frac{ap}{c}$ à $p$ et en rendant $a$ et $c$ infinis, de telle sorte que le rapport $\frac{a^2}{c} = \gamma$ reste fini, nous obtenons les déformées

$$
(9) \quad \left\{
\begin{aligned}
&X = \gamma pr \cos\varphi, \qquad Y = \gamma pr \sin\varphi, \qquad Z = \gamma \int \sqrt{p^2 + 1 - \alpha}\, dp, \\
&r = \sqrt{\alpha + e^{2q}}, \qquad \varphi = \int \frac{\sqrt{(\alpha - 1) e^{2q} - \alpha}}{\alpha + e^{2q}}\, dq
\end{aligned}
\right.
$$

de tous les paraboloïdes à deux paramètres égaux $\gamma = \frac{a^2}{c}$, $\gamma = \frac{b^2}{c}$.

En égalant $\alpha$ à zéro, et en substituant $-e^{2q}$ à $e^{2q}$ dans les équations (8) et (9), nous obtenons les déformées que nous avons exprimées par les équations (9) et (13) au paragraphe VII, et par les équations (14) au paragraphe VII. Au moyen de ces équations, nous avons obtenu les déformées les plus simples de toutes les surfaces du second ordre à deux axes égaux, en laissant de côté les trois surfaces qui, pour $\alpha = 0$, deviennent imaginaires. Les déformées réelles de ces trois surfaces sont les suivantes :

(1) En égalant à zéro $c - a$ dans les équations (8), nous obtenons des déformées réelles d'une surface du second ordre à trois axes réels égaux

$$
(10) \quad \left\{
\begin{aligned}
&X = r \cos\varphi \cos p, \qquad Y = r \sin\varphi \cos p, \qquad Z = a \int \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 p}\, dp, \\
&r = a\sqrt{\alpha + e^{2q}}, \qquad \varphi = \int \frac{\sqrt{(\alpha - 1) e^{2q} - \alpha}}{\alpha + e^{2q}}\, dq.
\end{aligned}
\right.
$$

(2) En substituant $pi$ et $ci$ à $p$ et $a$ dans les équations (8), nous obtenons des déformées d'hyperboloïde à deux axes réels égaux

$$
\begin{aligned}
&X = r \cos\varphi \cosh p, \\
&Y = r \sin\varphi \cosh p, \\
&Z = \int \sqrt{c^2 \cosh^2 p - a^2(\alpha - 1) \sinh^2 p}\, dp, \\
&r = a\sqrt{\alpha + e^{2q}}, \qquad \varphi = \int \frac{\sqrt{(\alpha - 1) e^{2q} - \alpha}}{\alpha + e^{2q}}.
\end{aligned}
$$

(3) Nous obtenons, au moyen des équations (9), des déformées réelles d'un pa-

raboloïde à deux paramètres imaginaires égaux $\gamma i$, seulement pour $q$ infini, après substitution de $qi - \infty$, $pi$, $\alpha^2$, $\gamma i$ à $q$, $p$, $\alpha$, $\gamma$, sous la forme

$$X = \alpha\gamma p \cos\frac{q}{\alpha}, \qquad Y = \alpha\gamma p \sin\frac{q}{\alpha}, \qquad Z = \gamma\int\sqrt{1 - p^2 - \alpha^2}\,dp;$$

mais, dans ce cas, le paraboloïde à deux paramètres imaginaires égaux se transforme en un paraboloïde imaginaire de révolution.