SUR LES

COURBES TRACÉES SUR LES SURFACES,

PAR K.-M. PETERSON.

Traduit du russe par MM. Eugène COSSERAT et Henri FRENKEL,
Professeurs à l'Université de Toulouse (1).

I. — SUR LES COURBES CONIQUES ET CYLINDRIQUES TRACÉES SUR LES SURFACES.

Par chaque courbe tracée sur une surface donnée, nous pouvons faire passer une surface développable de telle sorte qu'elle touche la surface donnée suivant la courbe donnée. De la forme de la courbe dépend évidemment la forme de la surface développable circonscrite; nous donnerons à la courbe le nom de *courbe conique* si cette surface circonscrite est un cône, de *courbe cylindrique* si c'est un cylindre.

Par conséquent, une courbe conique tracée sur une surface est évidemment le lieu géométrique des points de contact des tangentes menées à la surface d'un point (du sommet du cône). Des tangentes parallèles entre elles touchent la surface suivant une courbe cylindrique.

La surface développable circonscrite à la surface donnée suivant une courbe donnée est l'enveloppe d'un plan qui glisse le long de la courbe donnée en touchant la surface donnée.

Si le plan glisse ainsi sur une courbe conique, il passe constamment par un point fixe (le sommet du cône); dans son mouvement le long de la courbe cylindrique, le plan reste dans toutes ses positions parallèle à une droite fixe.

(1) Le Mémoire original intitulé : О кривыхъ на поверхностяхъ a paru dans le Tome II (p. 17-44) du Recueil mathématique (МАТЕМАТИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ) publié par la Société mathématique de Moscou; il est formé de deux Parties qui, d'après des indications adjointes à leurs titres, ont été lues respectivement le 19 novembre 1866 et le 18 mars 1867.

Il en résulte que les normales d'une surface le long d'une courbe cylindrique sont parallèles à un plan parce que ces normales étant perpendiculaires au plan glissant sont en même temps perpendiculaires à la droite fixe à laquelle le plan glissant reste parallèle.

Équations générales des courbes coniques et des courbes qui leur sont conjuguées.

Supposons que les coordonnées x, y, z des points de la surface soient exprimées en fonction de deux variables p et q telles que, aux valeurs constantes de la variable q, correspondent des courbes coniques $q = \text{const.}$ et aux valeurs constantes de la variable p des courbes $p = \text{const.}$ qui leur sont conjuguées. D'après la définition des courbes conjuguées $p = \text{const.}$ et $q = \text{const.}$, le plan tangent de la surface, qui glisse suivant une courbe quelconque $q = \text{const.}$, doit, dans deux positions successives, se couper suivant la tangente à la courbe $p = \text{const.}$, dont les cosinus sont proportionnels à

$$\frac{\partial x}{\partial q}; \quad \frac{\partial y}{\partial q}, \quad \frac{\partial z}{\partial q}.$$

D'après la définition des courbes coniques, le plan glissant enveloppe un cône et, par conséquent, dans deux positions successives, il se coupe suivant la génératrice du cône; d'où nous concluons que les cosinus de la génératrice du cône sont proportionnels à

$$\frac{\partial x}{\partial q}, \quad \frac{\partial y}{\partial q}, \quad \frac{\partial z}{\partial q}.$$

Désignons par α, β, γ les coordonnées du sommet du cône circonscrit à la surface suivant la courbe $q = \text{const.}$; les grandeurs α, β, γ seront constantes pour des valeurs constantes de la variable q, c'est-à-dire ce seront des fonctions arbitraires de q. Les cosinus de la génératrice du cône passant par le sommet α, β, γ et par le point x, y, z considéré sur la surface seront proportionnels à $\alpha - x$, $\beta - y$, $\gamma - z$, d'où nous concluons que :

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial q}}{\alpha - x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial q}}{\beta - y} = \frac{\frac{\partial z}{\partial q}}{\gamma - z}.$$

Désignant ce rapport par $\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial q}$, où u $\left(\text{et, par conséquent, aussi } \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial q}\right)$ est une fonction absolument arbitraire des variables p et q, nous avons

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial q}}{\alpha - x} = \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial q} \qquad \text{ou} \qquad x\frac{\partial u}{\partial q} + u\frac{\partial x}{\partial q} = \alpha\frac{\partial u}{\partial q},$$

ou, en intégrant par rapport à q,

$$xu = \int \alpha \frac{\partial u}{\partial q}\,dq + a,$$

où a est une fonction arbitraire de la variable p. De cette façon, nous avons les équations générales suivantes des courbes *coniques :*

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a + \int \alpha \frac{\partial u}{\partial q}\,dq}{u}, \\ y &= \frac{b + \int \beta \frac{\partial u}{\partial q}\,dq}{u}, \\ z &= \frac{c + \int \gamma \frac{\partial u}{\partial q}\,dq}{u}, \end{aligned} \right.$$

où α, β, γ sont des fonctions arbitraires de q; a, b, c des fonctions arbitraires de p et u une fonction arbitraire de p et q.

Les courbes $q =$ const. seront ici coniques, les courbes $p =$ const. leur seront conjuguées.

Donnons, dans les équations (1), à la fonction arbitraire $u = f(p, q)$ la valeur particulière

$$u = f(p) + \varphi(q),$$

ou, pour abréger,

$$u = e + \varepsilon,$$

et remarquons que

$$\int \alpha \frac{\partial u}{\partial q}\,dq = \int \alpha \frac{d\varepsilon}{dq}\,dq,$$

par suite de la fonction arbitraire α, sera une fonction arbitraire de q; en désignant cette intégrale simplement par α et de même en désignant $\int \beta \frac{d\varepsilon}{dq}\,dq$ par β, $\int \gamma \frac{d\varepsilon}{dq}\,dq$ par γ, nous obtenons les équations suivantes :

$$(2) \qquad x = \frac{a + \alpha}{e + \varepsilon}, \qquad y = \frac{b + \beta}{e + \varepsilon}, \qquad z = \frac{c + \gamma}{e + \varepsilon},$$

qui renferment huit fonctions arbitraires : a, b, c, e de la variable p et α, β, γ, ε de la variable q. De la symétrie de ces équations par rapport aux fonctions des deux variables, il résulte que non seulement les courbes $q = \text{const.}$, mais encore les courbes $p = \text{const.}$ seront coniques et il n'est pas difficile de s'assurer que cette symétrie ne peut être obtenue que par la substitution de $u = f(p) + \varphi(q)$ et que, par conséquent, les équations (2) seront les équations générales des surfaces sur lesquelles deux systèmes de courbes coniques sont mutuellement conjuguées.

Équations générales des courbes cylindriques et des courbes qui leur sont conjuguées.

Les courbes cylindriques constituent un cas particulier des courbes coniques. Rappelons que, dans les équations (1), α, β, γ désignent les coordonnées du sommet du cône circonscrit, lequel doit s'éloigner à l'infini lorsque le cône se transforme en cylindre. Remplaçant, dans l'équation (1), α, β, γ par $k\alpha$, $k\beta$, $k\gamma$, et la fonction arbitraire u par $\frac{u}{k} + 1$, nous obtenons

$$x = \frac{a + \int \alpha \frac{\partial u}{\partial q} dq}{\frac{u}{k} + 1}, \qquad \dots$$

En supposant maintenant infinie la constante k, nous obtenons les équations générales suivantes des courbes cylindriques :

$$(3) \qquad x = a + \int \alpha \frac{\partial u}{\partial q} dq, \qquad y = b + \int \beta \frac{\partial u}{\partial q} dq, \qquad z = c + \int \gamma \frac{\partial u}{\partial q} dq,$$

où, comme auparavant, a, b, c sont des fonctions arbitraires de p, α, β, γ des fonctions arbitraires de q, et u une fonction arbitraire des deux variables p et q. Les courbes $q = \text{const.}$ sont cylindriques, les courbes $p = \text{const.}$ sont leurs conjuguées.

Les équations (3) ne se transforment en équations symétriques par rapport aux fonctions de p et de q que lorsque u, comme dans le cas des courbes coniques, aura la forme

$$u = f(p) + \varphi(q).$$

Dans ce cas, $\int \alpha \frac{\partial u}{\partial q} dq$, $\int \beta \frac{\partial u}{\partial q} dq$, $\int \gamma \frac{\partial u}{\partial q} dq$ se transforment en fonctions arbitraires de q que nous désignerons par α, β, γ. De cette façon, on obtient les équations générales suivantes des surfaces sur lesquelles deux systèmes de courbes cylindriques sont conjugués :

$$(4)\qquad x = a + \alpha, \qquad y = b + \beta, \qquad z = c + \gamma;$$

ici a, b, c sont des fonctions arbitraires de p, et α, β, γ des fonctions arbitraires de q. Les courbes $p = \text{const.}$ et $q = \text{const.}$ seront cylindriques et conjuguées.

Pour obtenir les équations générales des surfaces sur lesquelles les courbes cylindriques sont conjuguées aux courbes coniques, considérons les équations (2) des surfaces qui renferment deux systèmes de courbes coniques conjuguées et éloignons à l'infini les sommets d'un système. Rappelons que, d'après ce qui a été dit à propos des équations (2), $\frac{d\alpha}{dq} : \frac{\partial u}{\partial q}$, $\frac{d\beta}{dq} : \frac{\partial u}{\partial q}$, $\frac{d\gamma}{dq} : \frac{\partial u}{\partial q}$ représentent les coordonnées du sommet du cône passant par la courbe $q = \text{const.}$ Pour que ces expressions deviennent infinies, il est nécessaire que $\frac{\partial u}{\partial q}$ s'annule, c'est-à-dire que la fonction

$$u = f(p) + \varphi(q) = e + \varepsilon$$

se réduise à la fonction e de p.

De cette façon, les équations de telles surfaces seront

$$(5)\qquad x = \frac{a + \alpha}{e}, \qquad y = \frac{b + \beta}{e}, \qquad z = \frac{c + \gamma}{e}.$$

Ici les courbes $q = \text{const.}$ sont cylindriques, les courbes $p = \text{const.}$ sont coniques et les deux systèmes sont conjugués.

Courbes coniques et cylindriques tracées sur des surfaces du second ordre.

Toutes les tangentes menées d'un point à la surface donnée touchent cette surface le long d'une courbe conique; dans le cas de la courbe cylindrique, toutes les tangentes sont parallèles entre elles. Il n'est pas difficile d'en déduire : 1° que toutes les courbes coniques sur des surfaces du second ordre seront des courbes planes; 2° que toutes les courbes cylindriques seront des courbes planes dont les plans passent par le centre.

En effet, le point x, y, z de contact des droites passant par le point u, v, w et tangentes à la surface du second ordre $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ satisfont à l'équation

$$ax(x - u) + by(y - v) + cz(z - w) = 0,$$

c'est-à-dire à

$$1 = axu + byv + czw,$$

et ceci est l'équation d'un plan.

Inversement, nous trouvons, pour le sommet du cône circonscrit à la surface

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1,$$

suivant la courbe d'intersection avec le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon,$$

les coordonnées

$$u = \frac{\alpha}{\varepsilon a}, \qquad v = \frac{\beta}{\varepsilon b}, \qquad w = \frac{\gamma}{\varepsilon c};$$

ce sommet s'éloigne indéfiniment lorsque $\varepsilon = 0$ et, en même temps, le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon$$

passe par le centre.

Supposons les points X, Y, Z et x, y, z de deux surfaces dans une liaison telle qu'à chaque point x, y, z d'une surface correspond sur l'autre surface un point déterminé $X = \lambda x$, $Y = \mu y$, $Z = \nu z$, où λ, μ, ν sont constants; pour une telle liaison, nous aurons les théorèmes suivants :

1° *Aux courbes planes d'une surface correspondent des courbes planes de l'autre surface parce que de l'équation du plan*

$$ax + by + cz + e = 0$$

résulte l'équation du plan

$$\frac{a}{\lambda}X + \frac{b}{\mu}Y + \frac{c}{\nu}Z + e = 0.$$

2° *Aux courbes conjuguées d'une surface correspondent des courbes conjuguées de l'autre surface. En effet, supposons que les coordonnées* x, y, z *soient exprimées en fonction des variables* p *et* q *et désignons par* x', x_1, x'_1, x'', x_{11}, ... *les dérivées de* x *par rapport à* p, *à* q, *à* p *et à* q, *à* p *et à* p, *à* q *et à* q, ..., *alors la condition d'après laquelle les courbes* $p = \text{const.}$ *et* $q = \text{const.}$ *sur la surface* x, y, z *sont conjuguées, sera*

$$(y'z_1 - y_1z')x'_1 + (z'x_1 - z_1x')y'_1 + (x'y_1 - x_1y')z'_1 = 0;$$

en y substituant

$$x = \frac{X}{\lambda}, \qquad y = \frac{Y}{\mu}, \qquad z = \frac{Z}{\nu},$$

nous obtenons la même condition pour les coordonnées X, Y, Z.

3° *A des lignes asymptotiques d'une surface correspondent des lignes asymptotiques sur l'autre surface. En effet, de la condition d'après laquelle les courbes* $q =$ const. *sur la surface* x, y, z *sont asymptotiques*

$$(y'z_1 - y_1 z')x'' + (z'x_1 - z_1 x')y'' + (x'y_1 - x_1 y')z'' = 0,$$

on déduit la même condition pour les coordonnées X, Y, Z *par la substitution*

$$x = \frac{X}{\lambda}, \qquad y = \frac{Y}{\mu}, \qquad z = \frac{Z}{\nu}.$$

Rappelons que, dans une ligne asymptotique, le rayon de la section normale est infini; son plan osculateur coïncide avec le plan tangent de la surface. Suivant chaque ligne asymptotique, deux courbes conjuguées se confondent; l'angle de conjugaison est nul; une ligne asymptotique est conjuguée d'elle-même.

4° *Aux courbes coniques d'une surface correspondent des courbes coniques de l'autre surface.*

5° *Aux courbes cylindriques correspondent des courbes cylindriques.*

Ces deux théorèmes résultent de ce que, en remplaçant, dans les équations générales des courbes coniques (1) ou cylindriques (3), les fonctions arbitraires a et α par λa et $\lambda\alpha$, les fonctions b et β par μb et $\mu\beta$, les fonctions c et γ par νc et $\nu\gamma$, nous obtenons les mêmes équations pour les coordonnées X, Y, Z que pour les coordonnées x, y, z.

Ces cinq théorèmes peuvent encore être rigoureusement démontrés pour la relation entre les points x, y, z et X, Y, Z de deux surfaces qui est définie par les équations suivantes :

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + e_1}{ax + by + cz + e}, \\ Y &= \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + e_2}{ax + by + cz + e}, \\ Z &= \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + e_3}{ax + by + cz + e}, \end{aligned}\right.$$

où $a, a_1, a_2, a_3, b, b_1, \ldots$ sont des constantes.

Ces équations représentent l'expression générale de la relation dans laquelle à toutes les courbes planes d'une surface correspondent des courbes planes de l'autre surface, parce que chaque équation linéaire

$$AX + BY + CZ + E = 0,$$

par la substitution des expressions (6), se transforme de nouveau en une équation également linéaire

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

Pour une telle relation, sont complètement valables les trois premiers théorèmes sur les courbes correspondantes planes, conjuguées et asymptotiques; quant aux quatrième et cinquième théorèmes sur les courbes correspondantes coniques et cylindriques, ils se confondent en un seul, parce que, dans la relation considérée, aux courbes coniques peuvent correspondre des courbes cylindriques et inversement.

Dans le Mémoire *Sur les relations et les affinités* (1), nous avons mentionné cette liaison sous le nom d'*affinité des plans correspondants,* et nous y avons démontré les deux premiers théorèmes pour le cas particulier où le dénominateur $ax + by + cz + e$ devient égal à l'unité.

Si nous connaissons les équations des courbes conjuguées, asymptotiques, coniques ou cylindriques sur une surface quelconque x, y, z, alors, à l'aide des cinq théorèmes que nous avons démontrés, nous obtenons directement les équations de ces courbes pour les surfaces X, Y, Z, en mettant, à la place de x, y, z, les expressions $\frac{X}{\lambda}$, $\frac{Y}{\mu}$, $\frac{Z}{\nu}$.

De cette façon, au moyen des équations des courbes conjuguées sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, nous obtiendrons les équations des courbes conjuguées sur l'ellipsoïde

$$\frac{X^2}{\lambda^2} + \frac{Y^2}{\mu^2} + \frac{Z^2}{\nu^2} = 1,$$

ou bien en général sur des surfaces du second ordre, si nous donnons aux fonctions et aux constantes qui entrent dans l'expression des coordonnées x, y, z en fonction de p et q des valeurs telles que X, Y, Z deviennent finis et réels pour des valeurs infinies ou négatives des expressions λ^2, μ^2 ou ν^2.

Deux systèmes de courbes qui se coupent à angles droits sur une sphère sont conjugués et, inversement, les courbes conjuguées se coupent ici sous des angles droits. En effet, la condition de la conjugaison des courbes $p = \text{const.}$ et $q = \text{const.}$ pour une surface quelconque x, y, z est

$$\xi x'_1 + \eta y'_1 + \zeta z'_1 = 0,$$

où ξ, η, ζ représentent les cosinus de la normale de cette surface et où x'_1, y'_1, z'_1 représentent les dérivées des coordonnées par rapport à p et à q. Cette condi-

(1) *Recueil mathématique,* t. I (la traduction de ce Mémoire a paru pages 5-43 du Tome VII de ces *Annales*).

tion, pour la sphère $x^2+y^2+z^2=1$, devient la suivante :

$$xx'_1+yy'_1+zz'_1=0;$$

mais, en différentiant l'équation $x^2+y^2+z^2=1$ par rapport à p et à q, nous obtenons

$$x'x_1+y'y_1+z'z_1+xx'_1+yy'_1+zz'_1=0;$$

il en résulte que la condition de la conjugaison

$$xx'_1+yy'_1+zz'_1=0$$

est identique à la condition

$$x'x_1+y'y_1+z'z_1=0,$$

dans laquelle les courbes $p=$ const. et $q=$ const. se coupent à angle droit.

Si donc

$$x=f(p,q),\qquad y=\varphi(p,q),\qquad z=\psi(p,q)$$

sont les équations générales des courbes $p=$ const. et $q=$ const. se coupant sur une sphère à angles droits, alors

$$\mathrm{X}=\lambda f(p,q),\qquad \mathrm{Y}=\mu\,\varphi(p,q),\qquad \mathrm{Z}=\nu\,\psi(p,q)$$

seront les équations générales des courbes conjuguées sur la surface du second ordre

$$\frac{\mathrm{X}^2}{\lambda^2}+\frac{\mathrm{Y}^2}{\mu^2}+\frac{\mathrm{Z}^2}{\nu^2}=1.$$

Soient α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' neuf fonctions d'une variable q satisfaisant aux équations

$$\begin{array}{lll}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, & \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1, & \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1,\\ \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0, & \alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma=0, & \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0.\end{array}$$

Ces fonctions, si elles sont réelles, désignent les cosinus de trois droites perpendiculaires deux à deux.

Posons

$$\begin{aligned}\alpha''\,d\alpha'+\beta''\,d\beta'+\gamma''\,d\gamma'&=\omega\;dq,\\ \alpha\;d\alpha''+\beta\;d\beta''+\gamma\;d\gamma''&=\omega'\,dq,\\ \alpha'\,d\alpha+\beta'\,d\beta+\gamma'\,d\gamma&=\omega''\,dq,\end{aligned}$$

et désignons sous le nom de *rotations* les trois fonctions nouvelles ω, ω', ω''; alors les différentielles des fonctions α, α', α'', β, ... prendront la forme suivante :

$$d\alpha = (\alpha'\omega'' - \alpha''\omega')\,dq, \qquad d\alpha' = (\alpha''\omega - \alpha\omega'')\,dq, \qquad \ldots .$$

Parmi toutes ces fonctions, trois seulement sont arbitraires. En annulant la rotation ω'' et en prenant α et β comme fonctions arbitraires, toutes les autres fonctions seront complètement définies. En effet, γ sera définie par l'équation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1;$$

en remplaçant $\omega' dq$ par $d\sigma$, $\omega\, dq$ par $d\sigma'$, nous trouverons ensuite

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{lll} d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = d\sigma^2, & d\alpha'^2 + d\beta'^2 + d\gamma'^2 = d\sigma'^2, & \\ \alpha'' = \dfrac{d\alpha}{d\sigma}, & \beta'' = \dfrac{d\beta}{d\sigma}, & \gamma'' = \dfrac{d\gamma}{d\sigma}, \\ \alpha' = \beta\gamma'' - \beta''\gamma, & \beta' = \gamma\alpha'' - \gamma''\alpha, & \gamma' = \alpha\beta'' - \alpha''\beta, \\ d\alpha' = \alpha''\, d\sigma', & d\beta' = \beta''\, d\sigma', & d\gamma' = \gamma''\, d\sigma'. \end{array}\right.$$

Nous prenons pour α et β des fonctions arbitraires, mais réelles, qui peuvent être supérieures à l'unité. Si $\alpha^2 + \beta^2$ est supérieur à l'unité, γ devient imaginaire et, par conséquent, γ'', α' et β' prennent aussi des valeurs imaginaires. En remplaçant dans ce cas ces quatre fonctions γ, γ'', α' et β' par γi, $\gamma'' i$, $\alpha' i$ et $\beta' i$, nous obtenons neuf fonctions réelles qui satisfont aux équations

$$\begin{array}{lll} \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 1, & \alpha'^2 + \beta'^2 - \gamma'^2 = -1, & \alpha''^2 + \beta''^2 - \gamma''^2 = 1, \\ \alpha''\alpha' + \beta''\beta' + \gamma''\gamma' = 0, & \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0, & \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \end{array}$$
$$\alpha'\, d\alpha + \beta'\, d\beta + \gamma'\, d\gamma = 0,$$

dans lesquelles α et β sont seules arbitraires, mais $\alpha^2 + \beta^2$ doit être supérieur à l'unité.

Les courbes cylindriques sur une sphère sont des grands cercles; ces courbes et leurs conjuguées se définissent par les équations suivantes :

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = \alpha \cos p + \alpha' \sin p, \\ y = \beta \cos p + \beta' \sin p, \\ z = \gamma \cos p + \gamma' \sin p, \end{array}\right.$$

où

$$\alpha^2 + \beta^2 < 1.$$

En effet, nous en déduisons les équations suivantes :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = 0,$$
$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q} = 0,$$

qui montrent que la courbe $q=$ const. est un grand cercle arbitraire sur la sphère et que les courbes $p=$ const. et $q=$ const. se coupent à angles droits. De ce qui précède résulte que les équations (8) seront les équations générales des courbes cylindriques $q=$ const. et de leurs courbes conjuguées $p=$ const. sur la sphère.

Les équations générales de telles courbes sur l'ellipsoïde

$$\frac{X^2}{\lambda^2}+\frac{Y^2}{\mu^2}+\frac{Z^2}{\nu^2}=1$$

seront donc

$$(9)\qquad \begin{cases} X=\lambda(\alpha\cos p+\alpha'\sin p), \\ Y=\mu(\beta\cos p+\beta'\sin p), \\ Z=\nu(\gamma\cos p+\gamma'\sin p). \end{cases}$$

En remplaçant ici α', β', γ, ν et p par $-\alpha' i$, $-\beta' i$, $-\gamma i$, νi et pi, nous obtenons pour l'hyperboloïde

$$\frac{X^2}{\lambda^2}+\frac{Y^2}{\mu^2}-\frac{Z^2}{\nu^2}=1,$$

les équations suivantes :

$$(10)\qquad \begin{cases} X=\lambda(\alpha\cosh p+\alpha'\sinh p), \\ Y=\mu(\beta\cosh p+\beta'\sinh p), \\ Z=\nu(\gamma\cosh p-\gamma'\sinh p), \end{cases}$$

avec la condition $\alpha^2+\beta^2>1$. En remplaçant, dans les équations (9), α', β', γ, λ, μ et p par $-\alpha' i$, $-\beta' i$, $-\gamma i$, $-\lambda i$, $-\mu i$ et $pi-\frac{\pi}{2}$, pour l'hyperboloïde

$$\frac{X^2}{\lambda^2}+\frac{Y^2}{\mu^2}-\frac{Z^2}{\nu^2}=-1,$$

nous obtenons

$$(11)\qquad \begin{cases} X=\lambda(\alpha\sinh p+\alpha'\cosh p), \\ Y=\mu(\beta\sinh p+\beta'\cosh p), \\ Z=\nu(\gamma\sinh p-\gamma'\cosh p), \end{cases}$$

où de nouveau $\alpha^2+\beta^2>1$.

Dans toutes ces équations α et β sont deux fonctions réelles arbitraires assujetties seulement dans les équations (8) et (9) à la condition $\alpha^2+\beta^2<1$, et dans les équations (10) et (11) à la condition $\alpha^2+\beta^2>1$; les autres fonctions sont définies par les équations (7).

On peut appliquer le même procédé aux paraboloïdes en assujettissant α et β à la condition que la somme $\alpha^2+\beta^2$ se rapproche indéfiniment de l'unité.

Dans ce cas, nous remplaçons, dans les équations (7), α^2, β^2 et γ^2 par $(1+k^2\alpha)^2$,

$k^2\beta^2$ et $\pm k^2\gamma^2$. En annulant k, au lieu de l'équation $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, nous obtenons

$$2\alpha+\beta^2\pm\gamma^2=0, \quad \ldots .$$

En remplaçant, dans les équations (9), λ^2, μ^2, ν^2 et p^2 par $\frac{\lambda^2}{k^4}$, $\frac{\mu^2}{k^2}$, $\pm\frac{\nu^2}{k^2}$ et $\pm k^2p^2$ nous obtenons pour les courbes cylindriques $q=$ const. et les courbes qui leur sont conjuguées $p=$ const. sur le paraboloïde

$$\frac{2X}{\lambda}+\frac{Y^2}{\mu^2}\pm\frac{Z^2}{\nu^2}=0,$$

les équations suivantes :

$$(12) \qquad X=\lambda\left(\alpha+\alpha'p\mp\frac{p^2}{2}\right), \qquad Y=\mu(\beta+\beta'p), \qquad Z=\nu(\gamma+\gamma'p),$$

où les fonctions β et γ peuvent être prises arbitraires et où les autres fonctions α, α', β' et γ' sont déterminées par les équations suivantes :

$$\beta'=\frac{d\gamma}{\sqrt{d\beta^2\pm d\gamma^2}}, \qquad \gamma'=\frac{\mp d\beta}{\sqrt{d\beta^2\pm d\gamma^2}},$$

$$2\alpha+\beta^2\pm\gamma^2=0, \qquad \alpha'+\beta\beta'\pm\gamma\gamma'=0.$$

Lignes de courbure cylindriques et coniques.

Une ligne de courbure cylindrique est toujours une ligne plane courbe et géodésique. En effet, une ligne de courbure coupe les courbes qui lui sont conjuguées à angle droit; par conséquent, la ligne de courbure cylindrique coupe les génératrices du cylindre circonscrit à angle droit. Sur le cylindre, une telle courbe est nécessairement une ligne plane et géodésique; par conséquent, elle jouit des mêmes propriétés aussi pour la surface à laquelle le cylindre est circonscrit. Le plan de cette courbe est normal au cylindre et à la surface.

Une ligne de courbure conique est toujours une courbe sphérique dont la sphère coupe la surface à angle droit. En effet, de ce que la ligne de courbure coupe à angle droit les courbes qui lui sont conjuguées, nous concluons que la ligne de courbure conique coupe à angle droit les génératrices du cône circonscrit. Une telle courbe sur le cône n'est autre chose que l'intersection de ce cône avec une sphère dont le centre coïncide avec le sommet du cône; cette sphère coupe à angle droit le cône et, par conséquent aussi, la surface à laquelle le cône est circonscrit.

Les équations des lignes de courbure cylindriques et coniques ou, comme on dit habituellement, l'équation des surfaces pour lesquelles les lignes de courbure d'un système sont des courbes coniques ou cylindriques, s'obtiennent à l'aide de considérations plus générales exposées dans la seconde Partie de ce Mémoire.

II. — Sur les lignes de courbure (parallélisme sur une base rectangulaire).

Entre les points de deux surfaces complètement arbitraires $f(x, y, z) = 0$ et $F(X, Y, Z) = 0$, est toujours possible une relation telle que les plans tangents des deux surfaces aux points correspondants sont parallèles. Dans le Mémoire *Sur les relations et les affinités entre les surfaces* [1] nous avons appelé cette relation *parallélisme* et nous avons exposé les propositions suivantes :

Dans une telle relation, à chaque point et à chaque courbe d'une surface correspondent un point et une courbe déterminés de l'autre surface. Parmi toutes les courbes qui passent par un point d'une surface, deux courbes ont des tangentes parallèles à celles des courbes correspondantes de l'autre surface; ces courbes sont conjuguées sur les deux surfaces.

En exprimant les coordonnées x, y, z et X, Y, Z de deux surfaces en fonction des variables p et q, aux valeurs constantes desquelles correspondent ces courbes, nous avons les équations

$$\frac{X'}{x'} = \frac{Y'}{y'} = \frac{Z'}{z'}, \qquad \frac{X_1}{x_1} = \frac{Y_1}{y_1} = \frac{Z_1}{z_1},$$

qui expriment la condition que les tangentes aux courbes $p =$ const. et $q =$ const. sur les surfaces x, y, z et X, Y, Z sont parallèles.

Nous appelons *parallèles* les surfaces X, Y, Z et x, y, z et nous appelons *base de parallélisme* le réseau des courbes $p =$ const. et $q =$ const.

Si les coordonnées x, y, z d'une surface arbitraire sont données en fonctions de deux variables conjuguées p et q (c'est-à-dire telles que les courbes $p =$ const. et $q =$ const. sont conjuguées), alors les équations

$$(13) \qquad \begin{cases} X = \int (ex'\,dp + \varepsilon x_1\,dq), \\ Y = \int (ey'\,dp + \varepsilon y_1\,dq), \\ Z = \int (ez'\,dp + \varepsilon z_1\,dq) \end{cases}$$

---

(1) *Recueil mathématique*, t. I. (La traduction de ce Mémoire a paru pages 5-43 du Tome VII de ces *Annales*.)

seront les équations générales des surfaces X, Y, Z *parallèles* à la surface donnée *sur la base des courbes* $p=$ const. et $q=$ const. Ici, les deux fonctions e et ε doivent satisfaire aux conditions d'intégrabilité des expressions X, Y, Z, à savoir :

$$(14)\qquad \frac{\partial(ex')}{\partial q}=\frac{\partial(\varepsilon x_1)}{\partial p},\qquad \frac{\partial(ey')}{\partial q}=\frac{\partial(\varepsilon y_1)}{\partial p},\qquad \frac{\partial(ez')}{\partial q}=\frac{\partial(\varepsilon z_1)}{\partial p};$$

par suite de la condition

$$\xi x'_1+\eta y'_1+\zeta z_1=0,$$

qui exprime que les courbes $p=$ const. et $q=$ const. sont conjuguées sur la surface x, y, z, les trois équations (14) se ramènent à deux équations linéaires simultanées dont l'intégration détermine e et ε avec deux fonctions arbitraires.

Pour ramener ces équations linéaires à la plus simple expression, remarquons qu'on peut toujours déterminer deux fonctions m et n telles qu'elles satisferont aux équations

$$(15)\qquad x'_1=mx'+nx_1,\qquad y'_1=my'+ny_1,\qquad z'_1=mz'+nz_1,$$

parce que, par suite, des conditions

$$\xi x'_1+\eta y'_1+\zeta z'_1=0,\qquad \xi x'+\eta y'+\zeta z'=0,\qquad \xi x_1+\eta y_1+\zeta z_1=0,$$

chacune de ces équations sera la conséquence des deux autres. Ayant déterminé de cette façon m et n, nous réduirons les trois équations (14) aux deux suivantes

$$(16)\qquad \frac{\partial e}{\partial q}+m(e-\varepsilon)=0,\qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial p}+n(\varepsilon-e)=0.$$

Les plans tangents aux points p, q à toutes les surfaces X, Y, Z définies par les équations (13), y compris la surface donnée x, y, z, seront parallèles. Les tangentes aux courbes $p=$ const. et $q=$ const. seront également parallèles. Il en résulte que les angles finis et infiniment petits, qui dépendent de la direction des tangentes ou de la situation du plan tangent, seront les mêmes pour toutes ces surfaces. Si donc une des courbes $p=$ const. ou $q=$ const., sur la surface donnée x, y, z, est plane ou géodésique, ou ligne de courbure, ou ligne de déformation, ou ligne asymptotique, ou courbe cylindrique, alors les courbes qui lui correspondent sur toutes les surfaces X, Y, Z seront également des courbes planes, ou géodésiques, etc., parce que les caractères distinctifs de toutes ces courbes ne dépendent, comme on sait, que de la direction des tangentes.

Appliquons ces propositions générales au parallélisme sur base rectangulaire. Considérons une surface arbitraire X, Y, Z se trouvant en relation de parallélisme avec la sphère $x^2+y^2+z^2=1$; dans ce cas, la base du parallélisme doit être rectangulaire, parce que, sur une sphère, toutes les courbes conjuguées se coupent à angles droits. Les courbes correspondantes de base sur la surface X, Y, Z se coupent sous les mêmes angles; elles seront, par conséquent, des courbes conjuguées se coupant à angles droits, c'est-à-dire des lignes de courbure.

Si donc

$$x = f(p, q), \qquad y = \psi(p, q), \qquad z = \varphi(p, q)$$

sont les équations générales des courbes $p = \text{const.}$ et $q = \text{const.}$, se coupant sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ à angles droits, alors les équations

$$(13)\qquad \begin{cases} X = \int (ex'\,dp + \varepsilon x_1\,dq), \\ Y = \int (ey'\,dp + \varepsilon y_1\,dq), \\ Z = \int (ez'\,dp + \varepsilon z_1\,dq) \end{cases}$$

représentent toutes les surfaces parallèles à la sphère; par conséquent, toutes les surfaces sans exception. Les courbes $p = \text{const.}$ et $q = \text{const.}$ seront des lignes de courbure sur ces surfaces; donc les équations (13) seront les équations générales des lignes de courbure sur toutes les surfaces.

Les fonctions e et ε doivent satisfaire aux conditions d'intégrabilité des expressions (13) de X, Y, Z, savoir :

$$(14)\qquad \frac{\partial(ex')}{\partial q} = \frac{\partial(\varepsilon x_1)}{\partial p}, \qquad \frac{\partial(ey')}{\partial q} = \frac{\partial(\varepsilon y_1)}{\partial p}, \qquad \frac{\partial(ez')}{\partial q} = \frac{\partial(\varepsilon z_1)}{\partial p};$$

nous avons montré plus haut que deux de ces équations servent à déterminer les fonctions e et ε et que la troisième en est une conséquence. Dans le cas examiné, e et ε se déterminent aisément de la façon suivante :

Désignons

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad \text{par} \quad u^2,$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \quad \text{par} \quad v^2,$$

d'où

$$x'x'_1 + y'y'_1 + z'z'_1 = u\frac{\partial u}{\partial q}, \qquad x_1x'_1 + y_1y'_1 + z_1z'_1 = v\frac{\partial v}{\partial p},$$

et remarquons que

$$x'x_1 + y'y_1 + z'z_1 = 0,$$

parce que le réseau des courbes $p = \text{const.}$ et $q = \text{const.}$ sur la sphère est supposé rectangulaire; en additionnant les conditions (14) après les avoir multipliées d'abord par x', y' et z', ensuite par x_1, y_1, et z_1, nous obtenons les deux équations suivantes

$$(17) \qquad \frac{\partial e}{\partial q} + (e - \varepsilon)\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} + (\varepsilon - e)\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p} = 0,$$

à l'aide desquelles on détermine e et ε.

Si l'on a besoin de l'équation des surfaces dont les lignes de courbure se distinguent par une propriété qui dépend des angles, alors, d'après ce qui précède, il suffit pour cela de déterminer sur la sphère le réseau rectangulaire ayant cette propriété et de déduire l'équation des surfaces parallèles sur la base de ces réseaux.

Équations générales des lignes de courbure cylindriques.

Nous avons les équations générales (8) des courbes cylindriques $q =$ const. sur la sphère

$$(8) \quad x = \alpha \cos p + \alpha' \sin p, \qquad y = \beta \cos p + \beta' \sin p, \qquad z = \gamma \cos p + \gamma' \sin p.$$

Le réseau sphérique étant ici rectangulaire, les équations générales des lignes de courbure cylindriques $q =$ const. ou des surfaces dans lesquelles un système de lignes de courbure se compose de courbes cylindriques seront

$$X = \int (e x' \, dp + \varepsilon x_1 \, dq), \qquad Y = \int (e y' \, dp + \varepsilon y_1 \, dq), \qquad Z = \int (e z' \, dp + \varepsilon z_1 \, dq),$$

où e et ε se déterminent par les équations

$$\frac{\partial e}{\partial q} + (e - \varepsilon)\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} + (\varepsilon - e)\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p} = 0;$$

mais, comme dans ce cas,

$$u^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2 = 1,$$

$$v^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2 = \left(\cos p \frac{\partial \sigma}{\partial q} + \sin p \frac{\partial \sigma'}{\partial q}\right)^2,$$

nous obtenons

$$e = f(p), \qquad \varepsilon v = \frac{\partial \sigma}{\partial q}\int f(p)\, d\cos p + \frac{\partial \sigma'}{\partial q}\int f(p)\, d\sin p + \varphi(q),$$

où $f(p)$ et $\varphi(q)$ sont deux fonctions arbitraires. Nous pouvons considérer les intégrales $\int f(p)\, d\cos p$ et $\int f(p)\, d\sin p$ comme des fonctions parfaitement arbitraires de p, parce que, d'une part, $f(p)$ est arbitraire et, d'autre part, la variable p elle-même peut être remplacée par telle fonction que l'on veut de p. En désignant ces intégrales par λ et μ et en remarquant que

$$x' = \alpha \frac{d\cos p}{dp} + \alpha' \frac{d\sin p}{p}, \qquad x_1 = \alpha''\left(\cos p \frac{d\sigma}{dq} + \sin p \frac{d\sigma'}{dq}\right) = \alpha'' v, \qquad \ldots,$$

nous obtenons

$$dX = ex'\,dp + \varepsilon x_1\,dq = f(p)\,(\alpha d\cos p + \alpha' d\sin p) + \alpha''\left[\lambda \frac{d\sigma}{dq} + \mu \frac{d\sigma'}{dq} + \varphi(q)\right] dq.$$

En posant

$$(18) \qquad \int \alpha''\,\varphi(q)\,dq = a, \qquad \int \beta''\,\varphi(q)\,dq = b, \qquad \int \gamma''\,\varphi(q)\,dq = c,$$

et intégrant, nous obtenons

$$(19) \qquad \left\{\begin{aligned} &X = \alpha\lambda + \alpha'\mu + a, \\ &\text{et, de la même façon,} \\ &Y = \beta\lambda + \beta'\mu + b, \\ &Z = \gamma\lambda + \gamma'\mu + c. \end{aligned}\right.$$

Ce sont les équations générales des surfaces dont les lignes de courbure d'un système $q =$ const. sont des courbes cylindriques. Ces équations renferment cinq fonctions arbitraires λ et μ de p; α, β et a de q; toutes les autres sont définies par les équations (7) et (18).

Équations générales des lignes de courbure coniques.

Dans le Tome I du *Recueil mathématique,* nous avons examiné sous le nom de *perspective graphique* une liaison entre les points x, y, z et X, Y, Z de deux surfaces qui est déterminée par les équations

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad Y = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad Z = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Cette affinité (¹) est caractérisée par les propriétés suivantes :

(¹) Nous appelons *relation* une liaison entre les points de deux surfaces dans laquelle ces surfaces peuvent être prises arbitrairement; et *affinité* une liaison dans laquelle la forme d'une surface détermine la forme de l'autre.

1° *Les points correspondants de deux surfaces sont situés sur une même droite avec le point de vue (avec l'origine des coordonnées);*

2° *Toutes les courbes d'une surface se coupent sous les mêmes angles que les courbes correspondantes de l'autre surface.*

Ces deux propriétés prises ensemble déterminent l'affinité graphico-perspective; et prises isolément elles déterminent deux relations : la perspective et la relation graphique.

De ces deux propriétés nous avons encore déduit les propriétés suivantes :

3° *Aux lignes de courbure d'une surface correspondent les lignes de courbure de l'autre;*

4° *Aux courbes sphériques d'une surface correspondent les courbes sphériques de l'autre. En même temps, si la sphère de la courbe sphérique sur une surface passe par le point de vue, alors la sphère de la courbe correspondante de l'autre surface devient un plan, et inversement à une courbe plane d'une surface correspond une courbe sphérique de l'autre surface dont la sphère passe par le point de vue. Les sphères de deux courbes sphériques correspondantes sur les deux surfaces coupent ces surfaces sous des angles égaux.*

Supposons que X, Y, Z désignent les coordonnées des surfaces (19). En désignant

$$X^2+Y^2+Z^2=(\alpha\lambda+\alpha'\mu+a)^2+(\beta\lambda+\beta'\mu+b)^2+(\gamma\lambda+\gamma'\mu+c)^2$$

par r, nous obtenons les équations suivantes des surfaces graphico-perspectives,

$$x=\frac{X}{r},\qquad y=\frac{Y}{r},\qquad z=\frac{Z}{r}$$

ou

$$(20)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{\alpha\lambda+\alpha'\mu+a}{r}, \\ y=\dfrac{\beta\lambda+\beta'\mu+b}{r}, \\ z=\dfrac{\gamma\lambda+\gamma'\mu+c}{r}. \end{cases}$$

En nous basant sur ce qui précède, nous déduisons les propriétés suivantes de ces surfaces :

1° *Les courbes* $p=$ const. *et* $q=$ const. *sont des lignes de courbure, parce que les courbes qui leur correspondent* $p=$ const. *et* $q=$ const. *sur les surfaces* (19) *sont des lignes de courbure;*

2° *Les courbes* $q = \text{const.}$ *sont des courbes sphériques dont les sphères passent par le point de vue, parce que les courbes* $q = \text{const.}$ *qui leur correspondent dans les équations* (19) *sont planes.*

3° *Les sphères des courbes sphériques* $q = \text{const.}$ *coupent les surfaces* (20) *à angle droit, parce que les plans des courbes planes* $q = \text{const.}$ *coupent les surfaces* (19) *à angle droit.*

Les équations (20) seront de cette façon les équations générales des lignes de courbure sphériques dont les sphères passent par un point et coupent la surface à angle droit. Ces équations renferment, de même que les équations (19), cinq fonctions arbitraires.

Nous avons démontré que les lignes de courbure cylindriques sont des courbes planes dont les plans coupent la surface à angle droit, que les lignes de courbure coniques sont des courbes sphériques dont les sphères coupent la surface à angle droit. Il en résulte que les équations (20) présentent un cas particulier des lignes de courbure coniques. Pour la généralité, il leur manque évidemment une fonction arbitraire supprimant la condition qui consiste en ce que les sphères $q = \text{const.}$ dans les équations (20) passent par un même point. Nous déterminerons cette fonction arbitraire à l'aide du parallélisme.

A l'aide des équations (13) du parallélisme nous pouvons, au moyen des coordonnées données x, y, z des surfaces (20), déduire les coordonnées X, Y, Z des surfaces qui leur sont parallèles.

Posant

$$f(q) + \int r\psi(p)\,dp = \mathrm{R}, \qquad a\beta'' + b\beta'' + c\gamma'' = \mathrm{C}, \tag{21}$$

où $f(p)$ et $\psi(p)$ sont deux fonctions arbitraires nouvelles [la signification des autres lettres a été expliquée dans l'exposé des équations (19) et (20)], on peut, en intégrant les équations (13) et (17) du parallélisme, déduire les équations des surfaces parallèles aux surfaces x, y, z (20) sous la forme suivante

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= x\mathrm{R} - \int \frac{\alpha''}{\mathrm{C}}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial q}\,dq, \\ \mathrm{Y} &= y\mathrm{R} - \int \frac{\beta''}{\mathrm{C}}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial q}\,dq, \\ \mathrm{Z} &= z\,\mathrm{R} - \int \frac{\gamma''}{\mathrm{C}}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial q}\,dq. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Mais, même sans intégrer, nous pouvons nous assurer de l'exactitude de ces équations en vérifiant, à l'aide de la différentiation, les conditions

$$\frac{\mathrm{X}'}{x'} = \frac{\mathrm{Y}'}{y'} = \frac{\mathrm{Z}'}{z'} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{X}_1}{x_1} = \frac{\mathrm{Y}_1}{y_1} = \frac{\mathrm{Z}_1}{z_1}.$$

Démontrons que les équations (22) renferment comme cas particuliers : 1° les équations générales des lignes de courbure coniques et 2° les équations générales des lignes de courbure planes.

En annulant $\psi(p)$, ce qui fait que

$$R = f(q) + \int r\psi(p)\,dp$$

se transforme en $f(q)$, et posant

$$(23) \qquad \int \frac{\alpha''}{C} f'(q)\,dq = a_1, \qquad \int \frac{\beta''}{C} f'(q)\,dq = b_1, \qquad \int \frac{\gamma''}{C} f'(q)\,dq = c_1,$$

les équations (22) deviennent les suivantes

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{\alpha\lambda + \alpha'\mu + a}{r} f(q) - a_1, \\ Y &= \frac{\beta\lambda + \beta'\mu + b}{r} f(q) - b_1, \\ Z &= \frac{\gamma\lambda + \gamma'\mu + c}{r} f(q) - c_1; \end{aligned} \right.$$

ici λ et μ désignent des fonctions arbitraires de p; α, β, a et $f(q)$ désignent des fonctions arbitraires de q; les autres fonctions sont données à l'aide des équations (7), (18), (23); et

$$r = (\alpha\lambda + \alpha'\mu + a)^2 + (\beta\lambda + \beta'\mu + b)^2 + (\gamma\lambda + \gamma'\mu + c)^2.$$

Si nous additionnons les équations (24) après multiplication par α'', β'' et γ'', nous obtenons

$$(X + a_1)\alpha'' + (Y + b_1)\beta'' + (Z + c_1)\gamma'' = \frac{a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma''}{r} f(q) = \frac{C f(q)}{r}.$$

En additionnant les mêmes équations, après élévation au carré, nous trouvons

$$(X + a_1)^2 + (Y + b_1)^2 + (Z + c_1)^2 = \frac{[f(q)]^2 r}{r^2} = \frac{[f(q)]^2}{r};$$

d'où

$$(X + a_1)^2 + (Y + b_1)^2 + (Z + c_1)^2 = \frac{f(q)}{C} [(X + a_1)\alpha'' + (Y + b_1)\beta'' + (Z + c_1)\gamma''].$$

Cette équation, q étant constant, représente une sphère arbitraire, parce qu'elle renferme quatre fonctions arbitraires de q : α, β, a et $f(q)$. Les coordonnées du centre de cette sphère seront

$$\frac{\alpha'' f(q)}{2C} - a_1, \quad \frac{\beta'' f(q)}{2C} - b_1, \quad \frac{\gamma'' f(q)}{2C} - c_1;$$

par conséquent, les cosinus du rayon mené au point X, Y, Z de la surface sont proportionnels à

$$\left[X + a_1 - \frac{\alpha'' f(q)}{2C}\right], \qquad \left[Y + b_1 - \frac{\beta'' f(q)}{2C}\right], \qquad \left[Z + c_1 - \frac{\gamma'' f(q)}{2C}\right].$$

Par suite des équations (24), $f(q)$ sera ici en facteur et pourra se supprimer, et nous en concluons que, pour les surfaces parallèles (24) qui se distinguent entre elles par les valeurs différentes de la fonction arbitraire $f(q)$, les sphères des lignes de courbure sphériques, dans les points correspondants X, Y, Z, seront parallèles, parce que leurs rayons seront parallèles en ces points.

Remarquons que parmi les surfaces (24), X, Y, Z est contenue aussi, comme cas particulier, correspondant à $f(q) = 1$, la surface donnée (20), et, comme les surfaces X, Y, Z et x, y, z sont parallèles dans les points correspondants, et, comme, en outre, la surface x, y, z est coupée par les sphères $q =$ const. à angles droits, nous en concluons que les surfaces X, Y, Z sont coupées par les sphères correspondantes $q =$ const. également à angles droits. Les équations (24) seront donc les équations générales des lignes de courbure sphériques dont les sphères coupent les surfaces à angles droits, c'est-à-dire qu'elles seront, comme nous l'avons démontré, les équations générales des lignes de courbure coniques; elles renferment six fonctions arbitraires : λ, μ, α, β, a et $f(q)$.

Équations générales des lignes de courbure planes.

Les équations générales des lignes de courbure planes renferment également six fonctions arbitraires, parce que la condition, d'après laquelle l'inclinaison des sphères sur les surfaces est égale à 90°, est remplacée ici par la condition que les rayons des sphères sont infinis; nous verrons que, pour ce second cas particulier, il faut annuler la fonction μ (ou λ) dans les équations (22), de même que, dans le premier cas précédent, il fallait annuler $\psi(p)$. Les équations (20) avec $\mu = 0$ deviennent les suivantes

$$(25) \qquad x = \frac{\alpha\lambda + a}{r}, \qquad y = \frac{\beta\lambda + b}{r}, \qquad z = \frac{\gamma\lambda + c}{r},$$

où

$$r = (\alpha\lambda + a)^2 + (\beta\lambda + b)^2 + (\gamma\lambda + c)^2.$$

Additionnant ces équations après multiplication par α', β', γ' et α'', β'', γ'', nous obtenons

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \frac{a\alpha' + b\beta' + c\gamma'}{r},$$

$$\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = \frac{a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma''}{r};$$

d'où

$$(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)(a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'') = (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)(a\alpha' + b\beta' + c\gamma').$$

Cette équation avec $q = \text{const.}$ sera l'équation d'un plan; donc les courbes $q = \text{const.}$, dans les équations (25) ou dans les équations (20) avec $\mu = 0$ seront planes.

Les équations (22) représentent les surfaces parallèles aux surfaces des équations (20) sur la base des courbes $p = \text{const.}$ et $q = \text{const.}$; nous avons démontré qu'aux courbes planes de la base dans le parallélisme correspondent des courbes planes, par conséquent les courbes $q = \text{const.}$ dans l'équation (22) avec $\mu = 0$ seront planes.

En annulant μ dans les équations (22) et en substituant

$$r = (\alpha\lambda + a)^2 + (\beta\lambda + b)^2 + (\gamma\lambda + c)^2,$$

$$R = f(q) + \int r\,\psi(p)\,dp,$$

nous obtenons les équations générales des lignes de courbure planes $q = \text{const.}$

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= (\alpha\lambda + a)\frac{R}{r} - \int \frac{\alpha''}{C}\frac{\partial R}{\partial q}\,dq,\\ Y &= (\beta\lambda + b)\frac{R}{r} - \int \frac{\beta''}{C}\frac{\partial R}{\partial q}\,dq,\\ Z &= (\gamma\lambda + c)\frac{R}{r} - \int \frac{\gamma''}{C}\frac{\partial R}{\partial q}\,dq.\end{aligned}\right.$$

Monge, Joachimsthal et d'autres géomètres ont également obtenu des équations générales des lignes de courbure planes, mais dans une forme telle que les fonctions arbitraires y sont liées avec les autres à l'aide d'équations différentielles qui ne sauraient être intégrées sous une forme générale ou ne sont intégrées que dans le cas de certaines intégrales particulières. Dans les équations (24), de même que dans toutes les précédentes, toutes les fonctions non arbitraires s'expriment par des quadratures mécaniques. En effet, dans les équations (26), α et β sont deux fonctions arbitraires de q à l'aide desquelles dans l'équation (7) sont déterminées les fonctions γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' à l'aide de la différentiation; de là on obtient ensuite

$$(18)\qquad a = \int \alpha''\varphi(q)\,dq,\qquad b = \int \beta''\varphi(q)\,dq,\qquad c = \int \gamma''\varphi(q)\,dq,$$

où $\varphi(q)$ est une nouvelle fonction arbitraire; ensuite

$$C = a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'';$$

en introduisant ensuite la fonction arbitraire λ de p, nous avons obtenu

$$r = (\alpha\lambda + a)^2 + (\beta\lambda + b)^2 + (\gamma\lambda + c)^2,$$

$$R = f(q) + \int r\,\psi(p)\,dp,$$

où $f(q)$ et $\psi(p)$ sont de nouvelles fonctions arbitraires.

Nous pouvons simplifier les équations (26) des lignes de courbure planes de la façon suivante :

En désignant $a\alpha + b\beta + c\gamma$ par A, $a\alpha' + b\beta' + c\gamma'$ par B, $a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma''$ par C, $a^2 + b^2 + c^2$ par E, nous obtenons

$$r = (\alpha\lambda + a)^2 + (\beta\lambda + b)^2 + (\gamma\lambda + c)^2 = \lambda^2 + 2\mathrm{A}\lambda + \mathrm{E},$$

$$R = f(q) + \int r\,\psi(p)\,dp = f(q) + l + 2\mathrm{A}m + \mathrm{E}n,$$

où

$$l = \int \lambda^2\psi(p)\,dp, \qquad m = \int \lambda\,\psi(p)\,dp, \qquad n = \int \psi(p)\,dp.$$

En se rappellant que, d'après les équations (18),

$$da = \alpha''\varphi(q)\,dq, \qquad db = \beta''\varphi(q)\,dq, \qquad dc = \gamma''\varphi(q)\,dq,$$

nous obtenons

$$d\mathrm{A} = (a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'')\,d\sigma = \mathrm{C}\,d\sigma, \qquad d\mathrm{E} = 2\mathrm{C}\,\varphi(q)\,dq;$$

d'où

$$\int \frac{\alpha''}{\mathrm{C}}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial q}\,dq = \int \frac{\alpha''}{\mathrm{C}} f'(q)\,dq + 2\alpha m + 2an.$$

En désignant $\int \frac{\alpha''}{\mathrm{C}} f'(q)\,dq$, $\int \frac{\beta''}{\mathrm{C}} f'(q)\,dq$, $\int \frac{\gamma''}{\mathrm{C}} f'(q)\,dq$ par $2a_1$, $2b_1$, $2c_1$, nous obtenons les équations suivantes

$$(27) \quad \begin{cases} \mathrm{X} = (\alpha\lambda + a)\dfrac{\mathrm{R}}{r} - 2(\alpha m + an + a_1), \\[2ex] \mathrm{Y} = (\beta\lambda + b)\dfrac{\mathrm{R}}{r} - 2(\beta m + bn + b_1), \\[2ex] \mathrm{Z} = (\gamma\lambda + c)\dfrac{\mathrm{R}}{r} - 2(\gamma m + cn + c_1). \end{cases}$$

Les courbes $q =$ const. seront des lignes de courbure planes.

Sur les lignes de courbure sphériques.

Les lignes de courbure coniques (24) présentent ce cas particulier des lignes de courbure sphériques dans lequel les sphères de ces courbes coupent la surface à angles droits.

Les lignes de courbure planes (26) présentent le cas dans lequel les rayons des sphères deviennent infinis.

Nous obtenons un troisième cas particulier des lignes de courbure sphériques tiré des équations (26), à l'aide de la perspective graphique, lorsque toutes les sphères de ces courbes passent par un point. En nous rappelant que dans cette affinité aux courbes planes d'une surface correspondent sur l'autre surface des courbes sphériques dont les sphères passent par le point de vue, et qu'aux lignes de courbure d'une surface correspondent les lignes de courbure de l'autre surface, nous obtenons les équations des courbes cherchées sous la forme suivante

$$(28) \qquad x = \frac{X}{X^2+Y^2+Z^2}, \qquad y = \frac{Y}{X^2+Y^2+Z^2}, \qquad z = \frac{Z}{X^2+Y^2+Z^2},$$

où X, Y, Z désignent les coordonnées des surfaces (26) ou (27).

Les constantes que nous aurions dû ajouter aux coordonnées X, Y, Z, pour que la position du point de vue puisse être arbitraire, sont contenues déjà dans la forme générale de ces coordonnées (27).

Les équations (28) seront de cette façon les équations générales des lignes de courbure sphériques dont les sphères passent par le même point.