

---

SUR

# QUELQUES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU SECOND ORDRE,

PAR M. J. CLAIRIN,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille.

---

Le problème que je me propose d'étudier dans ce travail est très particulier ; il m'a cependant semblé utile d'indiquer les résultats auxquels je suis parvenu. La théorie générale des transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre présente de nombreuses difficultés, la considération d'exemples intéressants peut rendre de très grands services.

Les transformations de Bäcklund permettent, dans certains cas, de remplacer une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes par une équation plus simple, dont l'étude soit plus aisée. Il est naturel tout d'abord de rechercher quelles sont les équations dont les transformées sont des équations linéaires : dans ce qui suit j'indiquerai quelques équations qui jouissent de cette propriété.

Soient

$$(\varepsilon) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

$$(\varepsilon_1) \quad F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1) = 0$$

deux équations aux dérivées partielles du second ordre écrites avec les notations ordinaires : dans la première  $x, y$  désignent les variables indépendantes,  $z$  représente la fonction inconnue, dont les dérivées premières prises respectivement par rapport à  $x$  et à  $y$  sont  $p$  et  $q$  ; on a, en outre,

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

dans la deuxième équation les lettres affectées d'un indice désignent des quantités analogues.

Supposons qu'il existe une transformation de Bäcklund (1) de deuxième espèce qui permette de passer de  $(\varepsilon)$  à  $(\varepsilon_1)$  et inversement, la transformation faisant correspondre à une intégrale de  $(\varepsilon_1)$  une infinité d'intégrales de  $(\varepsilon)$ , tandis qu'à une intégrale de  $(\varepsilon)$  il ne correspond qu'une intégrale de  $(\varepsilon_1)$ . S'il existe un invariant du premier ordre pour chacun des systèmes de caractéristiques de  $(\varepsilon_1)$ , chacun des deux systèmes de caractéristiques de  $(\varepsilon)$  possédera un invariant du premier ordre ou l'un d'entre eux seulement possédera un invariant du premier ordre, l'autre possédant un invariant du second ordre (2). En particulier, si l'équation  $(\varepsilon_1)$  est linéaire, on peut toujours supposer qu'elle soit mise sous la forme

$$s_1 = ap_1 + bz_1,$$

les deux systèmes de caractéristiques admettant respectivement les invariants  $x_1, y_1$ . A ces invariants correspondent deux invariants des systèmes de caractéristiques de  $(\varepsilon)$  dont l'un au moins est du premier ordre; nous allons étudier le cas où ces deux invariants sont du premier ordre. Si l'on effectue une transformation de contact convenable, ces invariants deviennent égaux à  $x$  et  $y$ ; dans ce cas, on peut imaginer que deux des équations qui définissent la transformation sont

$$x_1 = x, \quad y_1 = y;$$

nous n'écrivons nulle part ces équations pour abrégier un peu.

1. Les équations qui déterminent la transformation  $(B_2)$  par laquelle on peut passer de  $(\varepsilon)$  à  $(\varepsilon_1)$  sont résolubles par rapport à  $p$  et  $q$ ; elles deviennent, si l'on imagine la résolution effectuée,

$$\begin{aligned} p &= f(x, y, z; p_1, q_1, z_1), \\ q &= \varphi(x, y, z; p_1, q_1, z_1). \end{aligned}$$

Puisque la transformation ne fait correspondre à une intégrale de  $(\varepsilon)$  qu'une intégrale de  $(\varepsilon_1)$ , ces équations ne sont pas résolubles par rapport à  $p_1$  et  $q_1$ ; d'ailleurs, par hypothèse, en écrivant que les dérivées de  $p$  par rapport à  $y$  et de  $q$  par rapport à  $x$  sont égales, on doit trouver l'équation linéaire  $(\varepsilon_1)$ , c'est-à-dire une équation qui ne contient pas  $q_1, r_1$  ni  $t_1$ . Ces remarques montrent immédiatement que, en dehors de  $x, y, z, f$  ne peut dépendre que de  $p_1$  et  $\varphi$  que de  $z_1$ , en excluant naturellement le cas où  $f$  serait une fonction de  $x, y, z, z_1$  et  $\varphi$  une fonction de  $x, y, z, q_1$  qui se déduit du précédent en permutant  $x$  et  $y$  ainsi que  $x_1$  et  $y_1$ .

---

(1) J'ai étudié ces transformations et en particulier indiqué leur classification dans ma Thèse (*Annales de l'École normale supérieure*, t. XIX, Suppl.; 1902).

(2) Thèse, n° 18.

Cela posé, écrivons les équations de la transformation

$$\begin{aligned} p &= f(x, y, z, p_1), \\ q &= \varphi(x, y, z, z_1); \end{aligned}$$

la condition

$$\frac{df}{dy} = \frac{d\varphi}{dx}$$

équivalent à l'équation linéaire ( $\varepsilon_1$ ) si l'on a identiquement

$$(1) \quad \Omega(x, y, z, z_1, p_1) = \frac{df}{dp_1} (ap_1 + bz_1) + \frac{df}{dy} + \varphi \frac{df}{dz} - \frac{d\varphi}{dx} - f \frac{d\varphi}{dz} - p_1 \frac{d\varphi}{dz_1} = 0.$$

Par des dérivations successives, on trouve les équations

$$(2) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = b \frac{df}{dp_1} + \frac{d\varphi}{dz_1} \frac{df}{dz} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z_1} - f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial z_1} - p_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} = 0.$$

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z_1 \partial p_1} = b \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} + \frac{d\varphi}{dz_1} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_1} - \frac{df}{dp_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial z_1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} = 0,$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} \frac{df}{dz} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial z_1^2} - f \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial z_1^2} - p_1 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z_1^3} = 0,$$

$$(5) \quad \frac{\partial^3 \Omega}{\partial z_1^2 \partial p_1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p_1} - \frac{df}{dp_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial z_1^2} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z_1^3} = 0,$$

$$(6) \quad \frac{\partial^4 \Omega}{\partial z_1^3 \partial p_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial p_1^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial z_1^2} = 0.$$

2. Plusieurs cas sont à distinguer : si  $\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}$  n'est pas nul, non plus que  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2}$ , c'est-à-dire si  $f$  n'est pas une fonction linéaire de  $p_1$ , et si  $\varphi$  n'est pas une fonction linéaire de  $z_1$ , la dernière équation peut s'écrire

$$\frac{\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial p_1^2}}{\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}} = \frac{\frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial z_1^2}}{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2}} = \frac{\partial \mathbf{H}(x, y, z)}{\partial z} = \mathbf{H}(x, y, z).$$

On tire de là

$$\begin{aligned} f(x, y, z, p_1) &= \mathbf{H}(x, y, z) g(x, y, p_1) + l(x, y, z) p_1 + m(x, y, z), \\ \varphi(x, y, z, z_1) &= \mathbf{H}(x, y, z) \theta(x, y, z_1) + \lambda(x, y, z) z_1 + \mu(x, y, z); \end{aligned}$$

on peut toujours supposer que  $\mathbf{H}$  se réduise à l'unité, car on retrouve ce cas particulier si l'on fait un changement de variable défini par l'équation

$$dZ = \frac{dz}{\mathbf{H}(x, y, z)}.$$

Cette opération étant supposée faite <sup>(1)</sup> remplaçons dans l'équation (5)  $f$  et  $\varphi$  par les valeurs indiquées, nous trouvons

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_1^2} \frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial^3 \theta}{\partial z_1^3} = 0.$$

Si  $l$  n'est pas une fonction de  $x, y$  seulement, l'équation précédente donne

$$l = u(x, y)z,$$

$$\theta = \omega(x, y)e^{u(x, y)z},$$

en n'écrivant, comme nous le ferons constamment dans la suite, que les termes utiles. L'équation (7), par exemple, ne définit  $\theta$  qu'à une fonction linéaire de  $z_1$  près, mais il suffit de changer  $\lambda$  et  $\mu$  et l'on peut supposer cette fonction nulle.

Remplaçons dans l'équation (4)  $f$  et  $\varphi$  par leurs valeurs, après avoir remarqué qu'il est toujours permis de supposer  $\omega$  égale à 1,

$$f = g(x, y, p_1) + u(x, y)z p_1 + m(x, y, z),$$

$$\varphi = e^{u(x, y)z} + \lambda(x, y, z)z_1 + \mu(x, y, z),$$

nous aurons la condition

$$u^2 \frac{\partial m}{\partial z} - 2u \frac{\partial u}{\partial x} - u^2 z_1 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

de laquelle on déduit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial m}{\partial z} = 0.$$

$u$  sera donc une fonction de  $y$  seulement que nous représenterons par  $Y$  <sup>(2)</sup>;  $m$  ne dépendant pas de  $z$  peut être supposée nulle. Prenons comme nouvelle fonction inconnue  $Y z_1$ , cela revient à remplacer  $Y$  par l'unité dans les expressions de  $f$  et  $\varphi$  qui se réduisent à

$$f = g(x, y, p_1) + z p_1,$$

$$\varphi = e^{z_1} + \lambda(x, y, z)z_1 + \mu(x, y, z).$$

<sup>(1)</sup> Il serait trop compliqué de prendre de nouvelles lettres après chacun des changements de variables que nous aurons à effectuer. Nous conserverons les notations indiquées au commencement.

<sup>(2)</sup> Nous désignerons toujours par  $X, Y$ , ou par ces lettres affectées d'indices, des fonctions qui ne dépendent, la première que de  $x$ , la seconde que de  $y$ . Nous emploierons la notation de Lagrange pour représenter les dérivées de ces fonctions.

L'équation (3) devient

$$b \frac{\partial^2 g}{\partial p_1^2} + \lambda - \left( \frac{\partial g}{\partial p_1} + z \right) \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0.$$

En prenant la dérivée du premier membre par rapport à  $z$ , on trouve que  $\lambda$  doit être égale à une fonction linéaire de  $z$ :  $\rho(x, y)z + \sigma(x, y)$ . Nous avons donc, si  $\rho$  n'est pas nul,

$$(8) \quad \begin{cases} f = g(x, y, p_1) + zp_1, \\ \varphi = e^z + \rho(x, y) \left[ z + \frac{\sigma(x, y)}{\rho(x, y)} \right] z_1 + \mu(x, y, z); \end{cases}$$

nous prendrons, au lieu de  $z$ ,  $z + \frac{\sigma}{\rho}$  pour fonction inconnue, ce qui revient à supposer que  $\sigma$  est nulle.

Ecrivons maintenant que  $f$  et  $\varphi$  satisfont à l'équation (2)

$$b \left( \frac{\partial g}{\partial p_1} + z \right) - \rho g - z \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

cette équation exige que l'on ait

$$b = \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad \frac{\frac{\partial g}{\partial p_1}}{g} = \frac{\rho}{b} = A(x, y).$$

On en déduit

$$g = B(x, y)e^{Ap_1},$$

Développons l'équation (1) en remplaçant  $f$  et  $\varphi$  par leurs expressions, nous trouvons

$$(9) \quad \begin{aligned} (ABe^{Ap_1} + z)ap_1 + \frac{\partial B}{\partial y} e^{Ap_1} + p_1 B \frac{\partial A}{\partial y} e^{Ap_1} \\ + p_1 \mu - \rho z p_1 - \frac{\partial \mu}{\partial x} - B e^{Ap_1} \frac{\partial \mu}{\partial z} - p_1 z \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

En annulant les coefficients de  $p_1 e^{Ap_1}$  et  $e^{Ap_1}$  nous obtenons les conditions

$$(10) \quad Aa + \frac{\partial A}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial y} = B \frac{\partial \mu}{\partial z},$$

nous voyons que  $\mu$  est une fonction linéaire de  $z$  et il reste l'équation

$$ap_1 z + p_1 \mu - \rho p_1 z - \frac{\partial \mu}{\partial x} - p_1 z \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0.$$

En développant on aperçoit immédiatement que  $\mu$  ne contient pas  $x$  et ne renferme pas de terme indépendant de  $z$ ; on pourra donc écrire, en tenant compte en outre de la deuxième équation (10),

$$\mu = \frac{Y'}{Y} z, \quad B = XY.$$

Nous prendrons pour fonction inconnue  $\frac{z}{Y}$  au lieu de  $z$  et pour variables indépendantes  $\int X dx$  et  $\int \frac{dy}{Y}$  au lieu de  $x$  et de  $y$ , les équations de la transformation (B<sub>2</sub>) se réduisent à

$$\begin{aligned} p &= e^{\Lambda(x,y)p_1} + z p_1, \\ q &= e^{z_1} + \rho(x, y) z z_1. \end{aligned}$$

Pour que  $z_1$  satisfasse à une équation linéaire il faut et il suffit que l'on ait

$$A\rho + \frac{\partial A}{\partial y} = 0, \quad A \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho = 0.$$

On peut obtenir ces conditions en écrivant les équations trouvées dans le cours de la discussion précédente et non utilisées, ou directement en considérant les équations de la transformation telles qu'elles viennent d'être écrites. On satisfera à ces conditions en posant

$$\Lambda = -\frac{X+Y}{X'}, \quad \rho = -\frac{Y'}{X+Y}.$$

Les équations de la transformation sont donc

$$(11) \quad \begin{cases} p = e^{-\frac{X+Y}{X'} p_1} + z p_1, \\ q = e^{z_1} - \frac{Y'}{X+Y} z z_1, \end{cases}$$

l'équation qui donne  $z_1$  étant

$$(12) \quad z_1 + \frac{Y'}{X+Y} p_1 - \frac{X' Y'}{(X+Y)^2} z_1 = 0.$$

L'intégrale générale de cette dernière équation peut être déterminée sans difficulté :

$$z_1 = \frac{X_0 + Y_0}{X + Y} - \frac{Y'_0}{Y},$$

$X_0$  représentant une fonction quelconque de  $x$  et  $Y_0$  une fonction quelconque

de  $y$ . Remplaçons  $z_1$  par  $z_1 + \frac{X_0 + Y_0}{X + Y} - \frac{Y_0}{Y}$  et  $z$  par  $e^{z + \frac{X_0 + Y_0}{X + Y}}$ ,  $X_0$  et  $Y_0$  étant définies par les conditions

$$X' e^{\frac{X'}{X_0}} = 1, \quad Y' e^{\frac{Y'}{Y_0}} = 1,$$

et prenons pour variables indépendantes  $-X$ ,  $-Y$ , les équations (11) et (12) deviennent

$$(11)' \quad \begin{cases} p = -e^{-(x+y)p_1 - z} + p_1, \\ q = -e^{z_1 - z} - \frac{z_1}{(x+y)}, \end{cases}$$

$$(12)' \quad s_1 + \frac{p_1}{x+y} - \frac{z_1}{(x+y)^2} = 0.$$

Reste à trouver l'équation correspondante. Remarquons que si l'on pose  $z - z_1 = \zeta$  et si l'on remplace ensuite  $z$  par  $-\frac{z}{x+y}$  on peut mettre la première équation (11)' sous la forme suivante

$$(13) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -e^{(x+y)\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + p;$$

quant à la deuxième équation on peut l'écrire

$$(14) \quad q = (x+y)e^{-\zeta} - \zeta$$

ou

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = -e^{-\zeta} - \frac{z_1}{x+y} - q_1.$$

L'équation (12)' exprime que  $q_1 + \frac{z_1}{x+y}$  est une fonction de  $y$  seulement, la dernière équation écrite montre que  $\zeta$  est une fonction de la forme  $\log\left(-\frac{X+Y}{Y'}\right)$ , c'est-à-dire que  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$  et  $-e^{-\zeta}$  sont les dérivées par rapport à  $x$  et à  $y$  d'une même fonction  $\log(X+Y) = -\xi(x, y)$ . Écrivons avec ces nouvelles notations les équations (13) et (14)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= e^{p-(x+y)\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= e^{q-(x+y)\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y}. \end{aligned}$$

Remplaçons  $z$  par  $z - (x + y) \log(x + y)$ , ces équations deviennent

$$\begin{aligned} 1 + (x + y) \frac{\partial \xi}{\partial x} &= 1 + e^{p - \left[ 1 + (x + y) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right]}, \\ 1 + (x + y) \frac{\partial \xi}{\partial y} &= 1 + e^{q - \left[ 1 + (x + y) \frac{\partial \xi}{\partial y} \right]}. \end{aligned}$$

Nous en tirons

$$(15) \quad 1 + (x + y) \frac{\partial \xi}{\partial x} = \Phi(p), \quad 1 + (x + y) \frac{\partial \xi}{\partial y} = \Psi(q),$$

$\Phi$  et  $\Psi$  étant des fonctions implicites définies par les équations transcendentes

$$\Phi(p) = 1 + e^{p - \Phi(p)}, \quad \Psi(q) = 1 + e^{q - \Psi(q)}.$$

En prenant les dérivées des deux membres des équations (15), respectivement par rapport à  $y$  et par rapport à  $x$ , on trouve

$$\begin{aligned} (x + y) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{d\Phi}{dp} s, \\ (x + y) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{d\Psi}{dq} s. \end{aligned}$$

Retranchons membre à membre et remplaçons  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial y}$  par leurs valeurs, nous obtenons

$$\Phi(p) - \Psi(q) = \left( \frac{d\Phi}{dp} - \frac{d\Psi}{dq} \right) (x + y) s.$$

D'après les équations qui définissent  $\Phi$  et  $\Psi$  on a

$$\frac{d\Phi}{dp} = \frac{\Phi - 1}{\Phi}, \quad \frac{d\Psi}{dq} = \frac{\Psi - 1}{\Psi},$$

et il reste simplement

$$s(x + y) = \Phi(p) \Psi(q).$$

C'est l'une des équations que nous nous proposons de déterminer; on passera de cette équation à l'équation (12)' par la transformation

$$\begin{aligned} p &= e^{-\frac{(x+y)p_1 + \frac{z}{x+y}}{x+y}} - p_1(x + y) + \frac{z}{x + y} + 1, \\ q &= e^{\frac{z_1 + \frac{z}{x+y}}{x+y}} + z_1 + \frac{z}{x + y} + 1. \end{aligned}$$

L'équation (12)' étant intégrable par la méthode de Laplace, l'équation



transformée est intégrable par la méthode de M. Darboux; cette dernière équation a du reste été déjà étudiée à ce point de vue par M. Goursat dans un intéressant Mémoire (1).

3. Nous avons simplifié les équations (8) qui donnent les expressions de  $f$  et  $\varphi$  en fonction de  $x, y, z, z_1, p_1$  en supposant que  $\varphi(x, y)$  n'était pas identiquement nulle : nous allons maintenant étudier ce cas particulier. Les équations qui définissent la transformation de Bäcklund étant

$$\begin{aligned} p &= g(x, y, p_1) + zp_1, \\ q &= e^{z_1} + \sigma(x, y)z_1 + \mu(x, y, z), \end{aligned}$$

cherchons à quelles conditions  $z_1$  sera déterminée par une équation linéaire. La condition (2) devient

$$b \frac{\partial g}{\partial p_1} + bz + \sigma p_1 - \frac{\partial \sigma}{\partial x} z_1 = 0,$$

il faut donc que l'on ait

$$b = 0, \quad \sigma = 0.$$

$f$  se réduit à  $g(x, y, p_1) + zp_1$  et  $\varphi$  à  $e^{z_1} + \mu(x, y, z)$  : portons ces valeurs dans (1), il vient

$$(16) \quad \left( \frac{\partial g}{\partial p_1} + z \right) ap_1 + \frac{\partial g}{\partial y} + p_1 \mu - \frac{\partial \mu}{\partial x} - g \frac{\partial \mu}{\partial z} - zp_1 \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0.$$

En annulant la dérivée du premier membre par rapport à  $z$ , nous obtenons l'équation

$$ap_1 - \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} - g \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} - zp_1 \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} = 0.$$

$g$  n'étant pas une fonction linéaire de  $p_1$ , nous voyons immédiatement que  $\mu$  doit être une fonction linéaire de  $z$ , le coefficient de  $z$  ne dépendant pas de  $x$ . Nous écrirons donc

$$\mu = \frac{Y'}{Y} z + M(x, y),$$

mais en remplaçant  $z$  par  $z + \varpi(x, y)$ ,  $\varpi$  satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial \varpi}{\partial y} = \frac{Y'}{Y} \varpi + M,$$

nous pouvons toujours revenir au cas où  $M$  est nul.

(1) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2<sup>e</sup> série, t. I, 1899.

Prenons enfin  $\frac{z}{Y}$  pour nouvelle fonction inconnue et remplaçons  $y$  par  $\int \frac{dy}{Y}$ , nous trouvons

$$f = g(x, y, p_1) + z p_1, \quad \varphi = e^{z};$$

pour satisfaire à l'équation (16), il suffit de supposer que  $g$  ne contient pas  $y$ .

Les équations de la transformation (B<sub>2</sub>) sont donc

$$p = g(x, p_1) + z p_1, \quad q = e^z,$$

$z_1$  est une intégrale de

$$s_1 = 0,$$

l'équation qui donne  $z$  est

$$p - z \frac{s}{q} = g\left(x, \frac{s}{q}\right).$$

Comme l'équation trouvée plus haut, cette équation a été étudiée par M. Goursat dans le Mémoire que nous avons cité.

4. En étudiant l'équation (7), nous avons supposé que  $l(x, y, z)$  dépendait effectivement de  $z$ . Si cette fonction ne contient que  $x$  et  $y$ , on peut imaginer qu'elle s'annule à condition de modifier  $g(x, y, p_1)$ , et (7) exprime que  $\theta$  est un polynôme du deuxième degré en  $z_1$ ; nous écrirons donc

$$\begin{aligned} p &= g(x, y, p_1) + m(x, y, z), \\ q &= \omega(x, y) z_1^2 + \lambda(x, y, z) z_1 + \mu(x, y, z). \end{aligned}$$

Dans ces équations nous remplacerons  $z$  par  $\omega(x, y) z$ , ce qui revient à supposer  $\omega$  égale à l'unité.

Écrivons la condition (1)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g}{\partial p_1} (a p_1 + b z_1) + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial z} (z_1^2 + \lambda z_1 + \mu) \\ &- 2 z_1 p_1 - \lambda p_1 - \frac{\partial \lambda}{\partial x} z_1 - \frac{\partial \mu}{\partial x} - \left( z_1 \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) (g + m) = 0. \end{aligned}$$

Le coefficient de  $z_1^2$  étant  $\frac{\partial m}{\partial z}$ , cette quantité doit s'annuler,  $m$  désigne donc une fonction de  $x, y$  seulement, qu'il est permis de supposer nulle. Nous écrivons que le coefficient de  $z_1$  et le terme indépendant de  $z_1$  sont aussi égaux à zéro, et nous obtiendrons ainsi deux équations

$$(17) \quad \begin{cases} b \frac{\partial g}{\partial p_1} - 2 p_1 - \frac{\partial \lambda}{\partial x} - g \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0, \\ a p_1 \frac{\partial g}{\partial p_1} + \frac{\partial g}{\partial y} - \lambda p_1 - \frac{\partial \mu}{\partial x} - g \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

On aura encore, en dérivant par rapport à  $z$ ,

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial z} p_1 - \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} - g \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} = 0.$$

Les deux dernières égalités permettent d'écrire

$$\mu = \frac{Y'}{Y} z + M(x, y).$$

En opérant comme plus haut, on voit d'abord que l'on peut négliger  $M$ , puis on prend  $\frac{z}{Y}$  pour fonction inconnue et  $\int \frac{dy}{Y}$  pour seconde variable indépendante, ce qui revient à supposer la fonction  $\mu$  identiquement nulle. Remarquons, en outre, que  $\lambda$  ne dépend que de  $x$  et de  $y$ .

D'après la première équation (17),  $g$  est un polynôme du second degré en  $p_1$  :

$$g = \frac{1}{b} p_1^2 + \frac{1}{b} \frac{\partial \lambda}{\partial x} p_1 + \rho(x, y).$$

Écrivons donc les équations de la transformation

$$p = \frac{1}{b} p_1^2 + \frac{1}{b} \frac{\partial \lambda}{\partial x} p_1 + \rho(x, y) = \frac{1}{b} \left( p_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \rho(x, y) - \frac{1}{4b} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2,$$

$$q = z_1^2 + \lambda(x, y) z_1 = \left( z_1 + \frac{\lambda}{2} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{4}.$$

Remplaçons  $z_1$  par  $z_1 - \frac{\lambda}{2}$ , ces équations deviennent

$$p = \frac{1}{b} p_1^2 + \rho(x, y) - \frac{1}{4b} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2,$$

$$q = z_1^2 - \frac{\lambda^2}{4}.$$

En écrivant que l'équation qui définit  $z_1$  est linéaire, on voit que

$$\rho(x, y) - \frac{1}{4b} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 \quad \text{et} \quad -\frac{\lambda^2}{4}$$

sont les dérivées, par rapport à  $x$  et à  $y$ , d'une même fonction  $\gamma(x, y)$ .

Si nous remplaçons  $z$  par  $z + \gamma(x, y)$ , nous voyons que les équations de la transformation se réduisent à

$$p = \frac{1}{b} p_1^2,$$

$$q = z_1^2.$$

Cette transformation a été étudiée par M. Goursat (<sup>1</sup>), elle permet de passer de l'équation

$$s = 2\sqrt{b(x, y)pq}$$

à l'équation linéaire

$$s_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \log b}{\partial y} p_1 - b z_1 = 0.$$

§. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que  $f$  n'était pas une fonction linéaire de  $p_1$  et que  $\varphi$  n'était pas une fonction linéaire de  $z_1$  : nous allons rechercher ce qui se passe lorsque  $f$  est linéaire par rapport à  $p_1$  sans que  $\varphi$  le soit par rapport à  $z_1$ . Nous supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, le coefficient de  $p_1$  dans  $f$  égal à l'unité; nous avons donc

$$p = f(x, y, z, p_1) = p_1 + \mu(x, y, z),$$

$$q = \varphi(x, y, z, z_1).$$

L'équation (5) s'écrit alors

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial z_1^3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial z_1^2} = 0$$

et, en intégrant, on trouve

$$\varphi(x, y, z, z_1) = \psi(x, y, z_1 - z) + \mathbf{A}(x, y, z)z_1 + \mathbf{B}(x, y, z).$$

Posons  $z_1 - z = u$ , l'équation (4) devient

$$(18) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial u^2} + \mu \frac{\partial^3 \psi}{\partial u^3} = 0;$$

la dérivée par rapport à  $z$  du premier membre doit être nulle, on a, par conséquent,

$$(19) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial u^3} = 0.$$

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}$  ne s'annule pas, si  $\mu$  n'est pas une fonction de  $x, y$  seulement, on peut

---

(<sup>1</sup>) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXV, 1897, p. 36. — *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 252.

écrire

$$\frac{\frac{\partial^3 \psi}{\partial u^3}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}} = - \frac{\frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2}}{\frac{\partial \mu}{\partial z}} = \omega(x, y),$$

et l'on tire de là

$$\psi = \alpha(x, y) e^{\omega(x, y)u}, \quad \mu = \beta(x, y) e^{-\omega(x, y)z} + \gamma(x, y).$$

Portons ces valeurs de  $\psi$  et de  $\mu$  dans (18), cette équation se réduit à

$$(18)' \quad \frac{\partial}{\partial x} (\alpha \omega^2 e^{\omega u}) - \alpha \gamma \omega^3 e^{\omega u} = 0.$$

En développant, on trouve d'abord que  $\omega$  est une fonction de  $y$  seulement; on peut remplacer cette fonction par l'unité, en opérant comme nous avons déjà fait plusieurs fois; l'équation (18)' donne alors

$$\gamma = \frac{\partial \log \alpha}{\partial x}.$$

Cette égalité montre qu'il suffit de remplacer  $z$  par  $z - \log \alpha$  pour revenir au cas où l'on a

$$\alpha = 1, \quad \gamma = 0.$$

Les équations de la transformation sont donc

$$p = p_1 + \beta(x, y) e^{-z}, \\ q = e^{z_1 - z} + A(x, y, z) z_1 + B(x, y, z).$$

Écrivons la condition (1)

$$(ap_1 + bz_1) + \frac{\partial \beta}{\partial y} e^{-z} - \beta e^{-z} (A z_1 + B) \\ - Ap_1 - \frac{\partial A}{\partial x} z_1 - \frac{\partial B}{\partial x} - \left( \frac{\partial A}{\partial z} z_1 + \frac{\partial B}{\partial z} \right) (p_1 + \beta e^{-z}) = 0;$$

en annulant les coefficients de  $p_1 z_1$  et de  $z_1 e^{-z}$ , on voit que  $A$  doit se réduire identiquement à zéro et il reste les équations

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} - B\beta - \beta \frac{\partial B}{\partial z} = 0, \\ a = \frac{\partial B}{\partial z}, \quad b = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial x} = 0.$$

Elles montrent d'abord que  $B$  est une fonction linéaire de  $z$  indépendante

de  $x$ , c'est-à-dire que l'on peut poser

$$B = Y_0 z + \frac{Y'}{Y}.$$

En portant dans la première équation, on voit que  $Y_0$  s'annule et que  $\beta$  est égale à  $XY$ . Si l'on remplace  $z$  par  $z + \log Y$ , et si l'on prend  $\int X dx$  et  $\int \frac{dy}{Y}$  pour variables indépendantes, les équations de la transformation se réduisent à

$$\begin{aligned} p &= p_1 + e^{-z}, \\ q &= e^{z_1 - z}. \end{aligned}$$

Les deux équations qui se correspondent par cette transformation sont

$$\begin{aligned} s_1 &= 0, \\ s + qe^{-z} &= 0. \end{aligned}$$

6. Dans la discussion précédente nous avons écarté le cas où  $\mu$  est une fonction de  $x, y$  seulement, cas que nous allons examiner maintenant. Comme on peut ajouter à  $z$  une fonction quelconque de  $x, y$ , il est permis de supposer que  $\mu$  s'annule.

En écrivant la condition (1), nous trouvons

$$(20) \quad ap_1 + bz_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x} - \Lambda p_1 - \frac{\partial \Lambda}{\partial x} z_1 - \frac{\partial \Lambda}{\partial z} z_1 p_1 - \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial z} p_1 = 0.$$

Il faut d'abord que l'on ait

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0;$$

nous supposerons nulle la fonction  $\Lambda$  qui ne dépend pas de  $z$ . On peut, en effet, dans ce cas, écrire

$$\varphi(x, y, z, z_1) = \psi(x, y, z_1 - z) + \Lambda(x, y)(z_1 - z) + B(x, y, z) + \Lambda(x, y)z,$$

ce qui montre que  $\varphi$  est la somme d'une fonction de  $x, y, z_1 - z$  et d'une fonction de  $x, y, z$ .

L'équation (20) se décompose en deux autres

$$a = \frac{\partial B}{\partial z}, \quad bz_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x}.$$

D'après la première il est permis de poser

$$B = a(x, y)z + \alpha(x, y);$$

en portant dans la seconde, il vient

$$(21) \quad b z_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial x} z + \frac{\partial z}{\partial x}.$$

$\psi$  ne dépendant que de  $x, y, u$  ( $z_1 - z = u$ ), nous devons avoir

$$b = \frac{\partial a}{\partial x}.$$

Supposons qu'il en soit ainsi, on trouve en intégrant (21)

$$\psi(x, y, u) = \omega(y, u) + au - x.$$

Il suffit de remplacer  $u$  par sa valeur pour déduire de là les équations de la transformation de Bäcklund

$$p = p_1, \\ q = \omega(y, z_1 - z) + a(x, y) z_1.$$

On trouve sans aucune difficulté les équations qui définissent  $z$  et  $z_1$  :

$$q = \omega\left(y, \frac{s - ap}{\frac{\partial a}{\partial x}} - z\right) + a(x, y) \frac{s - ap}{\frac{\partial a}{\partial x}}, \\ s_1 - ap_1 - \frac{\partial a}{\partial x} z_1 = 0.$$

On peut encore satisfaire à l'équation (19) en prenant pour  $\mu$  une fonction linéaire de  $z$  et pour  $\psi$  un polynôme du second degré en  $u$ ; je ne développerai pas les calculs parce que cette étude ne fournit rien de nouveau : les transformations de Bäcklund que l'on obtient ne sont que des cas particuliers de celles que nous avons trouvées en dernier lieu.

7. Il reste à étudier le cas où  $\varphi$  est une fonction linéaire de  $z_1$ ,  $f$  n'étant pas linéaire par rapport à  $p_1$ . Nous pouvons, ici encore, supposer le coefficient de  $z_1$  dans  $\varphi$  égal à l'unité et écrire

$$p = f(x, y, z, p_1), \\ q = z_1 + \theta(x, y, z).$$

L'équation (2) donne

$$b \frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

et, en intégrant, il vient

$$f = g(x, y, p_1 - bz).$$

Posons  $p_1 - bz = u$  et écrivons la condition (1)

$$au \frac{\partial g}{\partial u} + abz \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y} - b\theta \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial x} - u - bz - g \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

En dérivant d'abord deux fois par rapport à  $z$ , puis une fois par rapport à  $u$ , nous trouvons

$$(22) \quad b \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial z^2} + g \frac{\partial^3 \theta}{\partial z^3} = 0,$$

$$(23) \quad b \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial^3 \theta}{\partial z^3} = 0.$$

$\frac{\partial g}{\partial u}$  est certainement différent de zéro; s'il en est de même de  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$ , nous pouvons écrire la dernière équation

$$-\frac{\frac{\partial^3 \theta}{\partial z^3}}{b \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}} = \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}}{\frac{\partial g}{\partial u}} = \alpha(x, y),$$

et en déduire

$$\begin{aligned} p &= g(x, y, p_1 - bz) = \omega(x, y) e^{\alpha(x, y)(p_1 - bz)} + \tau(x, y), \\ q &= z_1 + \theta(x, y, z) = z_1 + \omega(x, y) e^{-\alpha(x, y)bz} + \rho(x, y)z + \sigma(x, y). \end{aligned}$$

En remplaçant  $z$  par  $z + \zeta(x, y)$ ,  $\zeta$  satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \rho \zeta + \sigma,$$

nous substituons au système précédent un système analogue où l'on aurait supprimé  $\sigma$ . Quant à l'équation (22) elle devient

$$\frac{\partial}{\partial x} (\omega \alpha^2 b^2) - \omega \tau \alpha^3 b^3 - \omega \alpha^2 b^2 z \frac{\partial(\alpha b)}{\partial x} = 0.$$

Nous avons d'abord  $\alpha b = Y$ . En remplaçant  $\alpha$  par sa valeur, les équations de la transformation deviennent

$$\begin{aligned} p &= \omega(x, y) e^{\frac{Y}{b} p_1 - Yz} + \tau(x, y), \\ q &= z_1 + \omega(x, y) e^{-Yz} + \rho z, \end{aligned}$$

et, en prenant  $Yz$  et  $Yz_1$  pour nouvelles fonctions inconnues, nous leur donnons la forme plus simple

$$(24) \quad \begin{cases} p = \omega e^{\frac{p_1 - z}{b}} + \tau, \\ q = z_1 + \omega e^{-z} + \rho z. \end{cases}$$



Écrivons la condition (1),

$$\frac{\varpi}{b} e^{\frac{p_1}{b} - z} (ap_1 + bz_1) + \frac{\partial \varpi}{\partial y} e^{\frac{p_1}{b} - z} - \frac{\varpi}{b^2} \frac{\partial b}{\partial y} p_1 e^{\frac{p_1}{b} - z} + \frac{\partial \tau}{\partial y} - \varpi e^{\frac{p_1}{b} - z} (z_1 + \rho z) - p_1 - \frac{\partial \omega}{\partial x} e^{-z} - \frac{\partial \rho}{\partial x} z + \omega \tau e^{-z} - \rho \left( \varpi e^{\frac{p_1}{b} - z} + \tau \right) = 0.$$

On aperçoit qu'il y a un terme en  $p_1$  qui ne peut pas disparaître quelles que soient les expressions des fonctions  $\varpi, \tau, \omega, \rho$ ; les équations (24) ne peuvent donc dans aucun cas définir une transformation (B<sub>2</sub>) telle que  $z_1$  satisfasse à une équation linéaire.

8. On peut encore satisfaire à la condition (23) en supposant que  $\theta$  soit une fonction linéaire de  $z$  ou en supposant que l'on ait

$$(25) \quad b = 0, \quad \frac{\partial^3 \theta}{\partial z^3} = 0.$$

Examinons le premier cas : en raisonnant comme nous avons fait à plusieurs reprises, on voit que l'on peut supprimer dans  $\theta$  le terme indépendant de  $z$  et écrire

$$p = g(x, y, p_1 - bz), \\ q = z_1 + \alpha(x, y)z.$$

L'équation (1) devient, en remplaçant  $p_1$  par  $u + bz$ ,

$$(26) \quad a(u + bz) \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y} - z \frac{\partial b}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial u} - \alpha bz \frac{\partial g}{\partial u} - u - bz - \alpha g - z \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0,$$

et, en annulant le coefficient de  $z$ , nous trouvons

$$\left( ab - \frac{\partial b}{\partial y} - \alpha b \right) \frac{\partial g}{\partial u} - b - \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$(27) \quad ab - \frac{\partial b}{\partial y} - \alpha b = 0, \quad b + \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0,$$

puisque, par hypothèse,  $f$  n'est pas une fonction linéaire de  $p_1$ , c'est-à-dire  $g$  n'est pas une fonction linéaire de  $u$

Posons

$$\alpha = - \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

il vient

$$b = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}, \quad a = -\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}.$$

Quant à l'équation (26) elle se réduit à

$$au \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y} - u - \alpha g = 0;$$

cette équation s'intègre facilement si l'on remplace  $a$  et  $\alpha$  par leurs expressions et l'on a, en désignant par  $\omega$  une fonction arbitraire,

$$g(x, y, u) = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} u + e^{-\eta} \omega \left( x, \frac{e^\eta u}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} \right).$$

Écrivons maintenant  $p_1 - bz$  au lieu de  $u$ ,  $b$  ayant la valeur indiquée plus haut, et nous avons les équations de la transformation de Bäcklund

$$p = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} p_1 - \frac{\partial \eta}{\partial x} z + e^{-\eta} \omega \left( x, \frac{e^\eta p_1}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} - e^\eta z \right),$$

$$q = z_1 - \frac{\partial \eta}{\partial y} z.$$

En prenant  $e^\eta z$  comme nouvelle fonction inconnue, on met ces équations sous la forme un peu plus simple

$$(28) \quad \begin{cases} p = e^\eta \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} p_1 + \omega \left( x, \frac{e^\eta p_1}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} - z \right), \\ q = e^\eta z_1. \end{cases}$$

$z_1$  satisfait à l'équation linéaire

$$s_1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \log \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}}{\partial y} \right) p_1 - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} z_1 = 0,$$

à laquelle la transformation précédente fait correspondre

$$p = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} \left( s - q \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \omega \left( x, \frac{s - q \frac{\partial \eta}{\partial x}}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} - z \right).$$

Remarquons que, si après avoir permuté  $x$  et  $y$  on remplace  $\frac{\partial \eta}{\partial y}$  par  $\alpha(x, y)$ , cette dernière équation devient

$$(29) \quad q = \frac{\alpha}{\frac{\partial \alpha}{\partial x}} (s - ap) + \omega \left( y, \frac{s - ap}{\frac{\partial \alpha}{\partial x}} - z \right),$$

c'est-à-dire que l'on retrouve l'équation obtenue plus haut (n° 6). De chacun des deux systèmes de caractéristiques de cette équation on peut déduire une transformation  $(B_2)$  <sup>(1)</sup> qui permet de la remplacer par une équation linéaire. En échangeant  $x$  et  $y$  dans les équations (28) on trouve

$$(30) \quad \begin{cases} p = e^\eta z'_1, \\ q = e^\eta \frac{\frac{\partial \eta}{\partial y}}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} q'_1 + \omega \left( y, \frac{e^\eta q'_1}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}} - z \right). \end{cases}$$

A l'aide de cette transformation on passe de l'équation (29) à

$$s'_1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \log \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}}{\partial x} \right) q'_1 - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} z'_1 = 0,$$

$\alpha$  étant toujours égale à  $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ .

La transformation (30) de l'équation (29) est déduite du système de caractéristiques qui possède l'invariant  $y$  tandis que la transformation du n° 6 était déduite du système qui possède l'invariant  $x$ .

9. Nous avons laissé de côté les équations (25). La deuxième de ces équations exprime que  $\theta$  est un polynôme du second degré en  $z$ ; en formant les fonctions  $f$  et  $\varphi$  et en écrivant qu'elles satisfont à la condition (1) on voit de suite que le coefficient de  $z^2$  est nul et il semble que nous soyons immédiatement ramenés au cas précédent; mais,  $b$  étant nul, la première équation (27) ne donne plus  $\alpha$ , il faut reprendre l'étude de cette question.

On a

$$\begin{aligned} p &= g(x, y, p_1), \\ q &= z_1 + \alpha(x, y) z, \end{aligned}$$

---

(1) Thèse, n° 4.

et la condition (1) s'écrit

$$ap_1 \frac{\partial g}{\partial p_1} + \frac{\partial g}{\partial y} - p_1 - \frac{\partial \alpha}{\partial x} z - \alpha g = 0;$$

$\alpha$  est une fonction  $\frac{Y'}{Y}$  de  $y$  seulement. Si l'on prend  $\frac{z}{Y}$  pour nouvelle fonction et  $\int \frac{dy}{Y}$  pour nouvelle variable à la place de  $y$ , on donne aux équations de la transformation la forme

$$p = g(x, y, p_1),$$

$$q = z_1,$$

$g$  devant satisfaire à

$$ap_1 \frac{\partial g}{\partial p_1} + \frac{\partial g}{\partial y} - p_1 = 0.$$

En intégrant, on trouve

$$g = \frac{\eta}{\frac{\partial \eta}{\partial y}} p_1 + \psi\left(\frac{p_1}{\frac{\partial \eta}{\partial y}}, x\right),$$

$\psi$  étant une fonction arbitraire, si l'on a posé

$$a = \frac{\partial \log \frac{\partial \eta}{\partial y}}{\partial y}.$$

La transformation

$$p = \frac{\eta}{\frac{\partial \eta}{\partial y}} p_1 + \psi\left(\frac{p_1}{\frac{\partial \eta}{\partial y}}, x\right),$$

$$q = z_1$$

établit une correspondance entre les intégrales de l'équation

$$p - \frac{\eta}{\frac{\partial \eta}{\partial y}} s = \psi\left(\frac{s}{\frac{\partial \eta}{\partial y}}, x\right)$$

et celles de l'équation linéaire

$$s_1 - \frac{\partial \log \frac{\partial \eta}{\partial y}}{\partial y} p_1 = 0.$$

En particulier, si  $\eta$  est égale à  $y$ , on voit que l'équation

$$p - sy = \psi(s, x),$$

intégrée par M. Goursat, a pour transformée

$$s_1 = 0.$$

10. Il faudrait encore considérer le cas où  $f$  est une fonction linéaire de  $p_1$  et  $\varphi$  une fonction linéaire de  $z_1$  : cette étude ne présente pas de difficulté ; on trouve ainsi les transformations étudiées par M. Lucien Lévy qui permettent de déduire d'une équation linéaire une autre équation également linéaire dès que l'on connaît une intégrale de l'équation donnée.

En résumé, abstraction faite des équations linéaires, les équations que nous nous sommes proposé de déterminer sont les suivantes :

$$(I) \quad s(x+y) = \Phi(p) \Psi(q),$$

$$[\Phi(p) = 1 + e^{p-\Phi(p)}, \quad \Psi(q) = 1 + e^{q-\Psi(q)}],$$

$$(II) \quad p - z \frac{s}{q} = g\left(x, \frac{s}{q}\right),$$

$$(III) \quad s = 2\sqrt{b(x,y)pq},$$

$$(IV) \quad s + qe^{-z} = 0,$$

$$(V) \quad p - \frac{\eta}{\frac{\partial \eta}{\partial y}} s = \psi\left(\frac{s}{\frac{\partial \eta}{\partial y}}, x\right),$$

$$(VI) \quad q = \omega\left(y, \frac{s-ap}{\frac{\partial a}{\partial x}} - z\right) + a(x,y) \frac{s-ap}{\frac{\partial a}{\partial x}}.$$

Les équations qui leur correspondent sont

$$(I)' \quad s_1 + \frac{p_1}{x+y} - \frac{z_1}{(x+y)^2} = 0,$$

$$(II)' \quad s_1 = 0,$$

$$(III)' \quad s_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \log b}{\partial y} p_1 - bz_1 = 0,$$

$$(IV)' \quad s_1 = 0,$$

$$(V)' \quad s_1 - \frac{\partial \log \frac{\partial \eta}{\partial y}}{\partial y} p_1 = 0;$$

à l'équation (VI) on peut faire correspondre soit l'équation

$$(VI)' \quad s_1 - ap_1 - \frac{\partial a}{\partial x} z_1 = 0,$$

soit l'équation

$$(VI)'' \quad s_1 + \left[ \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \log \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right)}{\partial x} \right] q_1 - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} z_1 = 0,$$

$$\left( a = \frac{\partial \eta}{\partial y} \right).$$

On peut passer de l'équation (VI)' à (VI)'' par une transformation de Laplace. Les équations (I) et (III) sont aussi telles que des deux systèmes de caractéristiques on puisse déduire une transformation ( $B_2$ ) qui permette de passer de l'équation donnée à une équation linéaire, mais si l'on permute  $x$  et  $y$  chacune de ces équations est remplacée par une équation de même forme; les deux transformations ne sont donc pas essentiellement différentes comme celles dont dérivent (VI)' et (VI)''.

Remarquons encore que, si l'on excepte (III)' et (VI)'', toutes les équations linéaires que nous avons trouvées ont au moins un invariant nul <sup>(1)</sup>.

---

<sup>(1)</sup> Cf. un Mémoire de M. Goursat (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2<sup>e</sup> série, t. IV, 1902, p. 334).

