ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

RECHERCHES SUR L'HYDRODYNAMIQUE,

PAR M. P. DUHEM.

TROISIÈME PARTIE.

SUR LES QUASI-ONDES [1].

---

§ 1. — DÉFINITION DES QUASI-ONDES. FORMULES ANALOGUES AUX FORMULES D'HUGONIOT.

Au sein d'un fluide non visqueux, on peut observer deux sortes d'ondes qui soient du premier ordre [2] par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse. Les unes sont des *ondes transversales* qui ne se propagent pas; les autres sont des *ondes longitudinales;* ce sont ces dernières qui vont nous occuper.

Pour ne pas introduire dans nos raisonnements de complications inutiles, nous supposerons que le fluide est soumis seulement à des actions newtoniennes; nous aurons alors deux cas à distinguer :

1° *Le fluide est doué de conductibilité :*

$$k > 0.$$

Les ondes longitudinales se propagent alors avec une vitesse donnée par la *loi*

---

[1] *Sur les quasi-ondes* (*Comptes rendus,* t. CXXXV, p. 761, séance du 10 novembre 1902).

[2] *Recherches sur l'Hydrodynamique;* deuxième Partie : *Sur la propagation des ondes,* Chapitre IV (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2e série, t. IV, 1902, p. 145).

de Newton [*Recherches sur l'Hydrodynamique,* IIe Partie, égalité (228 *bis*)]

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T}.$$

2° *Le fluide n'est pas conducteur :*

$$k = 0.$$

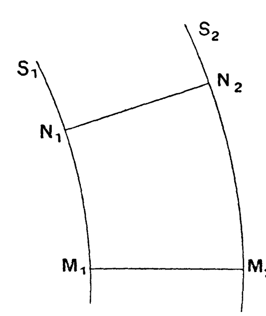
Les ondes longitudinales se propagent alors avec une vitesse donnée par la *loi de Laplace* [*Ibid.,* égalité (233)]

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T} \frac{C}{c}.$$

L'air est très peu conducteur de la chaleur; cependant sa conductibilité n'est pas rigoureusement nulle. Une onde du premier ordre par rapport aux composantes de la vitesse doit donc, si elle est longitudinale, s'y propager avec une vitesse donnée par la loi de Newton. Or l'expérience montre que la vitesse de propagation d'une onde sonore n'est nullement régie par la formule de Newton, mais bien par la formule de Laplace. Il y a là une apparence de contradiction qu'il nous faut examiner.

Considérons deux surfaces S_1, S_2 (*fig.* 1). Si, par un point M_1 de S_1, nous

Fig. 1.



élevons une normale à cette surface, elle rencontre la surface S_2 en M_2. Nous désignerons par ε la distance M_1M_2. Nous supposerons que la distance ε est une très petite quantité.

Nous supposerons que la région du fluide où sont tracées les surfaces S_1, S_2 n'est traversée par aucune onde; les quantités u, v, w, ρ, Π, T seront donc, dans toute cette région et pendant tout le laps de temps considéré, des fonctions analytiques de x, y, z, t.

Soit f une fonction quelconque de x, y, z; nous désignerons par $(f)_1^2$ l'excès $f(M_2) - f(M_1)$] de sa valeur au point M_2 sur sa valeur au point M_1.

Nous admettrons que les six quantités

$$(u)_1^2,\quad (v)_1^2,\quad (w)_1^2,\quad (\rho)_1^2,\quad (\Pi)_1^2,\quad (\mathrm{T})_1^2$$

sont des quantités très petites, du même ordre que ε, qui varient d'une manière continue lorsque M_1 décrit la surface S_1, tandis que parmi les quantités

$$\begin{array}{ccc}
\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2, & \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2, & \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2, \\
\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_1^2, & \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_1^2, & \left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)_1^2, \\
\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_1^2, & \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_1^2, & \left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_1^2
\end{array}$$

il en est au moins une qui a une valeur finie.

Lorsqu'il en sera ainsi, nous dirons que la tranche comprise entre les deux surfaces S_1, S_2 forme une *quasi-onde* du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse. Il est clair qu'au point de vue expérimental, une quasi-onde ne se distingue pas d'une onde véritable; au point de vue algébrique, au contraire, elle en est essentiellement distincte.

Sur la surface S_1, prenons un point quelconque N_1, voisin du point M_1; par ce point, menons une normale à la surface S_1; soit N_2 le point où cette normale rencontre la surface S_2. Visiblement, nous pourrons écrire

$$[u(N_2) - u(N_1)] - [u(M_2) - u(M_1)] = \lambda\varepsilon\overline{M_1N_1},$$

en désignant par λ une quantité finie.

Cette égalité peut encore s'écrire

$$(1)\qquad [u(M_1) - u(N_1)] - [u(M_2) - u(N_2)] = \lambda\varepsilon\overline{M_1N_1}.$$

Si, par le point M_1, on mène une tangente au chemin M_1N_1, et si l'on désigne par l, m, n les cosinus directeurs de cette tangente, on aura

$$(2)\qquad u(N_1) - u(M_1) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 l + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 m + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1 n\right]\overline{M_1N_1},$$

en désignant par $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_1, \cdots$ les valeurs des quantités $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \cdots$ au point M_1.

Si, de même, par le point M_2 on mène une tangente au chemin M_2N_2 et si l'on désigne par l', m', n' ses cosinus directeurs, on aura

$$(2\ bis)\qquad u(N_2) - u(M_2) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 l' + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 m' + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2 n'\right]\overline{M_2N_2},$$

en désignant par $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_2, \cdots$ les valeurs des quantités $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \cdots$ au point M_2.

Les quantités $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2, \cdots$ peuvent être finies; au contraire, les différences $l' - l$, $m' - m$, $n' - n$ sont sûrement de l'ordre de ε; il en est de même de la différence $\frac{M_2N_2}{M_1N_1} - 1$. Dès lors, les égalités (1), (2) et (2 *bis*) nous permettent d'écrire

$$(3) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2 l + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 m + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 n = \mu\varepsilon,$$

μ étant une quantité finie.

Cette égalité (3) doit avoir lieu pour tout système de valeurs de l, m, n assujetti aux égalités

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$
$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0.$$

L'une des trois quantités α, β, γ, soit α, est sûrement différente de zéro. Si l'on pose

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \mathfrak{V},$$

l'égalité (3) deviendra

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 - \beta \mathfrak{V}\right] m + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 - \gamma \mathfrak{V}\right] n = \mu\varepsilon.$$

Il nous est loisible de faire prendre à n la valeur zéro; cette égalité nous montrera alors que la différence $\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 - \beta \mathfrak{V}\right]$ a une valeur très petite de l'ordre de ε; nous pouvons, de même, donner à m la valeur zéro; nous voyons que la différence $\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 - \gamma \mathfrak{V}\right]$ a une valeur très petite de l'ordre de ε. En résumé, à chaque point M_1 de la surface S_1, on peut faire correspondre quatre quantités finies $\mathfrak{V}$, a, b, c, telles que l'on ait

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2 &= \alpha \mathfrak{V} + a\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 &= \beta \mathfrak{V} + b\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 &= \gamma \mathfrak{V} + c\varepsilon. \end{aligned}\right.$$

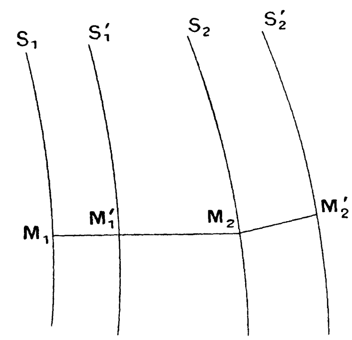
On justifierait de même les égalités

$$(4\ bis) \qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1^2 &= \alpha \mathfrak{Y} + a'\varepsilon, \qquad \ldots, \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1^2 &= \alpha \mathfrak{W} + a''\varepsilon, \qquad \ldots. \end{aligned}\right.$$

Ces égalités jouent pour les quasi-ondes le même rôle que le premier lemme d'Hugoniot pour les ondes proprement dites.

Considérons maintenant une quasi-onde *persistante;* limitée, à l'instant t, par les surfaces S_1, S_2, elle est limitée, à l'instant $(t+dt)$, par les surfaces S'_1, S'_2 (*fig.* 2). La normale à la surface S_1, menée par le point M_1, rencontre la sur-

Fig. 2.



face S'_1 en M'_1; la normale à la surface S_2, menée par le point M_2, rencontre la surface S'_2 en M'_2; on a

$$M_1M'_1 = \mathcal{N}\,dt, \qquad \overline{M_2M'_2} = \mathcal{N}_2\,dt,$$

$\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_2$ ayant, pour chaque point M_1 de la surface S_1, des valeurs déterminées; de plus, $(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N})$ est de l'ordre de ε.

Nous pouvons évidemment écrire

$$[u(M'_2) - u(M'_1)] - [u(M_2) - u(M_1)] = \lambda\varepsilon\,dt,$$

λ étant une quantité finie; ou bien encore

$$(5) \qquad [u(M'_2) - u(M_2)] - [u(M'_1) - u(M_1)] = \lambda\varepsilon\,dt.$$

Or on a

$$(6) \qquad u(M'_1) - u(M_1) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 \alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 \beta + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1 \gamma\right] \mathcal{N}\,dt + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_1 dt.$$

Si α_2, β_2, γ_2 sont les cosinus directeurs de la normale $M_2M'_2$, on a de même

$$(6\ bis) \qquad u(M'_2) - u(M_2) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 \alpha_2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 \beta_2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2 \gamma_2\right] \mathcal{N}_2\,dt + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_2 dt.$$

Mais, visiblement, les différences $(\alpha_2 - \alpha)$, $(\beta_2 - \beta)$, $(\gamma_2 - \gamma)$ sont des quantités très petites de l'ordre de ε. Les égalités (5), (6), (6 *bis*) donnent donc l'égalité

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2 \alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 \beta + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 \gamma\right] \mathfrak{M} + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_1^2 = \mu\varepsilon.$$

Comparée aux égalités (4), cette relation devient la première des égalités

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{M}\mathfrak{U} + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_1^2 &= d\,\varepsilon,\\ \mathfrak{M}\mathfrak{V} + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_1^2 &= d'\,\varepsilon,\\ \mathfrak{M}\mathfrak{W} + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_1^2 &= d''\,\varepsilon,\end{aligned}\right.$$

d, d', d'' étant trois quantités finies.

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue. Ces égalités (7) sont, pour les quasi-ondes, ce que le second lemme d'Hugoniot est pour les ondes.

§ 2. — Des quasi-ondes dans les fluides parfaits.

L'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

est vraie en tout point de l'espace; écrivons-la au point M_2, puis au point M_1, et retranchons membre à membre les deux égalités obtenues; nous trouvons

$$(8)\qquad \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1^2 + u\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1^2 + v\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1^2 + w\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1^2 + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)_1^2 = \lambda\varepsilon,$$

λ étant une quantité finie. Mais une démonstration semblable à celle qui a fourni les égalités (4), (4 *bis*) et (7) montre qu'à tout point M_1 de la surface S_1 correspondent cinq quantités finies A, B, C, D, $\mathfrak{R}$ telles que l'on ait

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1^2 &= \alpha\mathfrak{R} + A\varepsilon,\\ \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1^2 &= \beta\mathfrak{R} + B\varepsilon,\\ \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1^2 &= \gamma\mathfrak{R} + C\varepsilon,\\ \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1^2 + \mathfrak{M}\mathfrak{R} &= D\varepsilon.\end{aligned}\right.$$

En vertu des égalités (4), (4 *bis*) et (9), l'égalité (8) devient

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathfrak{R} - \rho(\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{V} + \gamma\mathfrak{W}) = \mathrm{E}\varepsilon, \tag{10}$$

E étant, en tout point M_1 de la surface S_1, une quantité finie.

Raisonnons de même sur les trois équations hydrodynamiques; écrivons la première

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho \mathrm{X} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$$

au point M_2, puis au point M_1, et retranchons membre à membre les deux égalités obtenues; la différence $[\mathrm{X}(M_2) - \mathrm{X}(M_1)]$ étant supposée très petite de l'ordre de ε, nous trouverons l'égalité

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)_1^2 + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_1^2 + \rho u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2 + \rho v\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 + \rho w\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 = \lambda\varepsilon, \tag{11}$$

où λ est une quantité finie.

Mais, en tout point M_1 de la surface S_1, il existe cinq quantités finies A', B', C', D', $\mathfrak{P}$ telles que l'on ait les égalités

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial \Pi}{\partial x}\right)_1^2 = \alpha\mathfrak{P} + \mathrm{A}'\varepsilon, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \left(\dfrac{\partial \Pi}{\partial t}\right)_1^2 + \mathfrak{N}\mathfrak{P} = \mathrm{D}'\varepsilon, \end{array}\right. \tag{12}$$

analogues aux égalités (9). Moyennant les égalités (4) et (12), et en désignant par F une quantité finie, l'égalité (11) devient la première des égalités

$$\left\{\begin{array}{l} \rho(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathfrak{U} - \alpha\mathfrak{P} = \mathrm{F}\varepsilon, \\ \rho(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathfrak{V} - \beta\mathfrak{P} = \mathrm{G}\varepsilon, \\ \rho(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathfrak{W} - \gamma\mathfrak{P} = \mathrm{H}\varepsilon. \end{array}\right. \tag{13}$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

En chaque point du fluide, nous avons l'équation de compressibilité [*Recherches,* Ire Partie, égalité (75)]

$$\Pi - \rho^2\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = 0,$$

qui nous permet d'écrire, en particulier,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \left(2\rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\,\partial \mathrm{T}}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} = 0.$$

Écrivons cette égalité pour le point M_2 et pour le point M_1, et retranchons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons l'égalité

$$(14) \qquad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)_1^2 - \left(2\rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1^2 - \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1^2 = 0.$$

Deux cas sont à distinguer :

1° La quasi-onde est du second ordre par rapport à la température T; $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1^2$, $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1^2$, $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1^2$ sont des quantités de l'ordre de ε; alors, en vertu des égalités (9) et (12), l'égalité (14) devient

$$(15) \qquad \mathfrak{P} - \left(2\rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right)\mathfrak{R} = J\varepsilon,$$

J étant une quantité finie.

2° La quasi-onde est du premier ordre par rapport à la température T; il existe alors cinq quantités A'', B'', C'', D'', $\mathfrak{T}$, finies en tout point de la surface S_1, telles que l'on ait

$$(16) \qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1^2 &= \alpha\mathfrak{T} + A''\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1^2 &= \beta\mathfrak{T} + B''\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1^2 &= \gamma\mathfrak{T} + C''\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_1^2 + \mathfrak{N}\mathfrak{T} &= D''\varepsilon. \end{aligned}\right.$$

En vertu de ces égalités (16) et des égalités analogues (9) et (12), l'égalité (14) devient

$$(17) \qquad \mathfrak{P} - \left(2\rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right)\mathfrak{R} - \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\mathfrak{T} = K\varepsilon,$$

K étant une quantité finie.

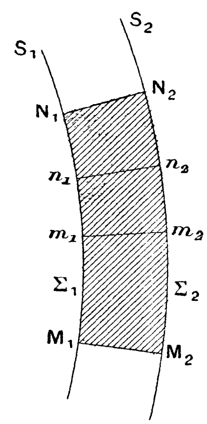
Pour connaître celui des deux cas auquel nous avons affaire, nous allons recourir à la considération de la conductibilité.

Sur la surface S_1, prenons (*fig.* 3) une aire d'étendue finie M_1N_1 ou Σ_1; par les divers points M_1, N_1, ... du contour de cette aire, menons des normales à la surface S_1 et prolongeons-les jusqu'à la surface S_2; elles y dessinent le contour M_2N_2 d'une aire finie Σ_2. Demandons à la théorie de la conductibilité l'expression de la quantité de chaleur dQ dégagée, dans le temps dt, par le volume $M_1N_1M_2N_2$. Si dS est un élément de la surface S qui limite ce volume, si ν est la normale à cet élément vers l'intérieur de ce volume, nous avons

$$dQ = dt \int k \frac{\partial T}{\partial \nu} dS.$$

La surface S se compose de trois parties : les deux aires Σ_1, Σ_2 et la surface réglée σ qui s'appuie sur leurs contours. Soit $m_1 n_1 = d\Sigma_1$ un élément de l'aire Σ_1 ; des normales à S_1, issues des divers points $m_1, n_1, \ldots$ du contour de cet élément,

Fig. 3.



découpent en l'aire Σ_2 un élément $m_2 n_2 = d\Sigma_2$, qui correspond à l'élément $d\Sigma_1$ α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale $m_1 m_2$ à la surface S_1 ; la normale menée en m_2 à la surface S_2, dirigée dans le même sens que la précédente, a pour cosinus directeurs α_2, β_2, γ_2. Nous aurons alors

$$\begin{aligned}dQ = dt \int_\sigma k \frac{\partial T}{\partial \nu} d\sigma + dt \int_{\Sigma_1} k(m_1) \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1 \alpha + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1 \beta + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1 \gamma \right] d\Sigma_1 \\ - dt \int_{\Sigma_2} k(m_2) \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_2 \alpha_2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_2 \beta_2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_2 \gamma_2 \right] d\Sigma_2,\end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\begin{aligned}(18)\quad dQ = &- dt \int_{\Sigma_1} k(m_1) \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1^2 \alpha + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1^2 \beta + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1^2 \gamma \right] d\Sigma_1 \\ &- dt \int_{\Sigma_1} \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_2 \left[\alpha_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \alpha k(m_1) \right] \right. \\ &\qquad + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_2 \left[\beta_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \beta k(m_1) \right] \\ &\qquad \left. + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_2 \left[\gamma_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \gamma k(m_1) \right] \right\} d\Sigma_1 + dt \int_\sigma k \frac{\partial T}{\partial \nu} d\sigma.\end{aligned}$$

L'aire σ est de l'ordre de ε; si le coefficient de conductibilité est très petit de l'ordre de χ, l'intégrale $\int_\sigma k \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \nu} d\sigma$ sera de l'ordre de $\varepsilon\chi$.

Les différences

$$\alpha_2 - \alpha, \quad \beta_2 - \beta, \quad \gamma_2 - \gamma, \quad \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - 1$$

sont assurément de l'ordre de ε; on a

$$k(m_2) - k(m_1) = k(\rho_2, \mathrm{T}_2) - k(\rho_1, \mathrm{T}_1),$$

et, comme les différences $(\rho_2 - \rho_1)$, $(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)$ sont de l'ordre de ε, la différence $k(m_2) - k(m_1)$ sera de l'ordre de $\varepsilon\chi$. Il en sera de même des différences

$$\alpha_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \alpha k(m_1),$$

$$\beta_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \beta k(m_1),$$

$$\gamma_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \gamma k(m_1),$$

et de la seconde intégrale en l'égalité (18). Cette égalité peut s'écrire

$$d\mathrm{Q} = - dt \int_{\Sigma_1} k(m_1) \left[\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\right)_1^2 \alpha + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}\right)_1^2 \beta + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\right)_1^2 \gamma \right] d\Sigma_1 + \lambda \varepsilon \chi \, dt,$$

λ étant une quantité finie. Mais les quantités

$$k(m_1)\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\right)_1^2 \alpha, \quad k(m_1)\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}\right)_1^2 \beta, \quad k(m_1)\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\right)_1^2 \gamma$$

sont d'ordre $\varepsilon\chi$ si la quasi-onde est du premier ordre en T, et d'ordre $\varepsilon^2\chi$ si la quasi-onde est du deuxième ordre en T; on peut donc écrire, en toute circonstance,

$$d\mathrm{Q} = \lambda \varepsilon \chi \, dt. \tag{19}$$

λ étant une quantité finie.

La quantité de chaleur $d\mathrm{Q}$ peut encore s'exprimer d'une autre manière; on a [*Recherches*, I^re Partie, égalité (90)]

$$\mathrm{E}\, d\mathrm{Q} = dt \int \left[\mathrm{T}\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \mathrm{T}^2} \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z} w + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} \right) - \mathrm{T}\rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial \mathrm{T}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] d\varpi,$$

l'intégrale s'étendant au volume $\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1\mathrm{N}_2\mathrm{M}_2$. Ce volume est de l'ordre de ε; on voit alors que la quantité sous le signe $\int$ doit, selon l'égalité (19), être de l'ordre de χ :

$$\mathrm{T}\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\mathrm{T}^2}\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial x}u+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial y}v+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial z}w+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\right)-\mathrm{T}\rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial\mathrm{T}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\mu\chi,$$

μ étant une quantité finie. Si nous écrivons cette égalité au point m_1, puis au point m_2, et si nous retranchons membre à membre les résultats obtenus, nous trouverons sans peine l'égalité

$$(20)\qquad \begin{aligned}&\mathrm{T}\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\mathrm{T}^2}\left[\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial x}\right)_1^2u+\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial y}\right)_1^2v+\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial z}\right)_1^2w+\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\right)_1^2\right]\\&\qquad-\mathrm{T}\rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial\mathrm{T}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_1^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_1^2\right]=\nu\chi+\varpi\varepsilon,\end{aligned}$$

ν et ϖ étant deux quantités finies.

Si la quasi-onde considérée est du premier ordre par rapport à T, les égalités (4), (4 *bis*) et (16) transformeront l'égalité (20) en

$$(21)\qquad \mathrm{T}\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\mathrm{T}^2}(\mathfrak{N}-\alpha u-\beta v-\gamma w)\mathfrak{E}+\mathrm{T}\rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial\mathrm{T}}(\alpha\mathfrak{U}+\beta\mathfrak{V}+\gamma\mathfrak{W})=\nu\chi+\theta\varepsilon,$$

θ étant une quantité finie.

En chaque point du fluide, on peut écrire la relation supplémentaire [*Recherches,* Ire Partie, égalité (94)]

$$(22)\qquad \begin{aligned}&k\,\Delta\mathrm{T}+\frac{\partial k}{\partial\mathrm{T}}\left[\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial z}\right)^2\right]\\&\quad+\frac{\partial k}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\\&\quad+\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\mathrm{T}^2}\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial x}u+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial y}v+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial z}w+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\right)\\&\qquad-\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial\mathrm{T}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0.\end{aligned}$$

Le premier membre se compose de cinq termes; en toutes circonstances, le quatrième et le cinquième sont au plus finis, le deuxième et le troisième sont de l'ordre de χ.

Si la quasi-onde est du premier ordre par rapport à la température T, les dérivées partielles du second ordre de T en x, y, z, seront, en général, d'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$ à l'intérieur de cette quasi-onde; il en sera de même de $\Delta\mathrm{T}$; $k\,\Delta\mathrm{T}$ sera donc de l'ordre de grandeur $\frac{\chi}{\varepsilon}$. Si, au contraire, la quasi-onde est, en T, d'ordre supérieur au premier, ΔT est fini et $k\,\Delta T$ est de l'ordre de χ.

L'égalité précédente nous enseigne donc que, *pour qu'une quasi-onde, du premier ordre en u, v, w, ρ, Π, puisse être du premier ordre en* T, *il faut que $\frac{\chi}{\varepsilon}$ soit fini, ou que son épaisseur soit du même ordre de grandeur que le coefficient de conductibilité; si, au contraire, son épaisseur ε est très petite par rapport au coefficient de conductibilité, la quasi-onde est d'ordre supérieur au premier par rapport à* T.

Dans ce dernier cas, on a

$$\mathfrak{T} = 0. \tag{23}$$

Dans le premier, l'égalité (21) peut s'écrire

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathfrak{T} + \rho\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}(\alpha \mathfrak{U} + \beta \mathfrak{V} + \gamma \mathfrak{W}) = \eta\varepsilon, \tag{24}$$

η étant une quantité finie.

Les égalités (10), (13), (15), (17), (24) ne diffèrent que par des termes de l'ordre de ε des équations qui nous ont permis de traiter la propagation des ondes proprement dites dans les fluides parfaits (*Recherches*, 2[e] Partie, Chap. IV). Nous parvenons donc sans peine aux résultats suivants :

Au sein d'un fluide parfait très peu conducteur, on peut observer :

1° *Des quasi-ondes sensiblement transversales. Elles ne se propagent pas, en sorte que l'on a sensiblement*

$$\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w = 0.$$

2° *Des quasi-ondes sensiblement longitudinales. Celles-ci sont de deux sortes :*

A. *Les unes ont une épaisseur très petite par rapport au coefficient de conductibilité du fluide; leur vitesse de propagation est donnée sensiblement par la formule de Newton*

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T}.$$

B. *Les autres ont une épaisseur du même ordre de grandeur que le coefficient de conductibilité du fluide; leur vitesse de propagation est sensible-*

ment donnée par la formule de Laplace

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T} \frac{C}{c}.$$

Les ondes proprement dites, dont l'épaisseur est rigoureusement nulle, doivent être regardées comme la forme limite des premières ondes.

Nous voyons maintenant que les observations faites sur la propagation du son dans l'air et les autres gaz concordent avec les résultats de la théorie, pourvu que l'on admette la proposition suivante :

En aucun cas on n'observe, au sein de l'air ou d'un gaz peu conducteur, ni la propagation d'une onde proprement dite, ni la propagation d'une quasi-onde dont l'épaisseur soit très petite par rapport au coefficient de conductibilité.

§ 3. — Des quasi-ondes au sein des fluides visqueux.

Il reste à rechercher les raisons que l'on peut avoir d'admettre l'exactitude d'une telle proposition. Ces raisons vont être tirées de la remarque suivante : *Ni l'air, ni les autres gaz ne sont des fluides parfaits; leurs coefficients de viscosité ne sont pas rigoureusement nuls; ils sont seulement très petits.*

Or, ce que nous savons déjà (*Recherches,* IIe Partie, Chap. III) nous enseigne qu'*aucune onde proprement dite ne peut se propager dans un fluide visqueux, quelque petits que soient les coefficients de viscosité.*

Mais il y a plus. Nous allons voir que l'existence de la viscosité, si faible soit-elle, impose une limite inférieure à l'épaisseur d'une quasi-onde capable de se propager.

Considérons une quasi-onde $S_1 S_2$ du premier ordre par rapport à u, v, w, ρ, Π. Par cet énoncé, nous excluons les quasi-ondes qui seraient du premier ordre par rapport à certains de ces éléments et du second ordre par rapport à d'autres; comme les ondes proprement dites jouissant de telles propriétés, de semblables quasi-ondes sont possibles, mais elles ne se propagent pas.

Au sein de la quasi-onde $S_1 S_2$, découpons le volume $M_1 N_1 N_2 M_2$ représenté par la figure 3. Donnons un déplacement virtuel à la masse fluide que renferme ce volume. Nous supposerons que lorsqu'on traverse ce volume suivant une normale $m_1 m_2$ à la surface S_1, les composantes δx, δy, δz varient de telle sorte que leurs dérivées partielles $\frac{\partial\, \delta x}{\partial x}$, ..., soient du même ordre de grandeur que δx, ...;

dès lors, du point m_1 au point m_2, δx subit une variation $(\delta x_2 - \delta x_1)$ qui est du même ordre de grandeur que $\varepsilon\,\delta x$.

Pour ce déplacement virtuel, nous pourrons écrire

$$d\mathfrak{T}_e + d\mathfrak{T}_j + d\mathfrak{T}_v - \delta_{\mathrm{T}}\mathfrak{F} + \int_{\mathrm{S}} [\mathrm{P}_x\,\delta x + \mathrm{P}_y\,\delta y + \mathrm{P}_z\,\delta z] = 0. \tag{25}$$

Dans cette égalité,

$d\mathfrak{T}_e$ représente le travail virtuel des forces extérieures appliquées aux divers éléments de masse du fluide déplacé,
$d\mathfrak{T}_j$ le travail des forces d'inertie appliquées aux mêmes éléments,
$d\mathfrak{T}_v$ le travail des actions de viscosité appliquées aux mêmes éléments,
$\mathfrak{F}$ le potentiel interne de la masse fluide,
S la surface qui la limite,

enfin P_x, P_y, P_z ont les valeurs suivantes [*Recherches sur l'Hydrodynamique*, Ire Partie, égalités (77)]

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{P}_x = (\Pi + \nu_x)\cos(n_i, x) + \tau_z \cos(n_i, y) + \tau_y \cos(n_i, z), \\ \mathrm{P}_y = \tau_z \cos(n_i, x) + (\Pi + \nu_y)\cos(n_i, y) + \tau_x \cos(n_i, z), \\ \mathrm{P}_z = \tau_y \cos(n_i, x) + \tau_x \cos(n_i, y) + (\Pi + \nu_z)\cos(n_i, z). \end{array}\right. \tag{26}$$

$d\mathfrak{T}_e$, $d\mathfrak{T}_j$, $\delta_{\mathrm{T}}\mathfrak{F}$ sont visiblement des quantités infiniment petites du même ordre de grandeur que $\varepsilon\,\delta x$.

Il est facile de voir qu'il en est de même de $d\mathfrak{T}_v$. Cette quantité, en effet, a pour valeur [*Recherches*, 1re Partie, égalité (46)]

$$\begin{aligned} d\mathfrak{T}_v = \int \Bigg[& \nu_x \frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \nu_z \frac{\partial\,\delta z}{\partial z} + \tau_x\left(\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right) \\ & + \tau_y\left(\frac{\partial\,\delta z}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta x}{\partial z}\right) + \tau_z\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial x}\right)\Bigg] d\varpi, \end{aligned}$$

tandis que ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z sont donnés par les égalités [*Recherches*, Ire Partie, égalités (51)]

$$\left\{\begin{array}{ll} \nu_x = -\lambda(\rho, \mathrm{T})\theta - 2\mu(\rho, \mathrm{T})\dfrac{\partial u}{\partial x}, & \tau_x = -\mu(\rho, \mathrm{T})\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \multicolumn{2}{c}{\theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}.} \end{array}\right. \tag{27}$$

Les quantités ν_i, τ_i sont visiblement finies; $d\mathfrak{T}_v$ est donc une quantité infiniment petite de l'ordre de $\varepsilon\,\delta x$, même si les coefficients de viscosité λ, μ ne sont pas très petits.

La surface S se décompose en trois parties que nous avons désignées par σ, Σ_1, Σ_2. Il est clair que, dans l'égalité (25), la partie de l'intégrale $\int_S$ qui se rapporte à la surface σ est infiniment petite de l'ordre de $\varepsilon\,\delta x$.

Si donc nous désignons par K une quantité du même ordre de grandeur que les déplacements virtuels δx, δy, δz, l'égalité (25) pourra s'écrire

$$(28)\qquad \begin{aligned}&\int_{\Sigma_1}[P_x(m_1)\,\delta x_1+P_y(m_1)\,\delta y_1+P_z(m_1)\,\delta z_1]\,d\Sigma_1\\&+\int_{\Sigma_2}[P_x(m_2)\,\delta x_2+P_y(m_2)\,\delta y_2+P_z(m_2)\,\delta z_2]\,d\Sigma_2=K\varepsilon.\end{aligned}$$

Considérons la somme

$$P_x(m_1)\,\delta x_1\,d\Sigma_1+P_x(m_2)\,\delta x_2\,d\Sigma_2.$$

On peut l'écrire

$$(29)\qquad [P_x(m_2)+P_x(m_1)]\,\delta x_1\,d\Sigma_1+P_x(m_2)[\delta x_2\,d\Sigma_2-\delta x_1\,d\Sigma_1].$$

La quantité $P_x(m_2)$ est finie; la différence $(\delta x_2\,d\Sigma_2-\delta x_1\,d\Sigma_1)$ est de l'ordre de grandeur de $\varepsilon\,\delta x_1\,d\Sigma_1$; il en est donc de même du second terme de l'expression (29).

Considérons le premier terme.

En m_1,

$$\cos(n_i, x)=\alpha,\qquad \cos(n_i, y)=\beta,\qquad \cos(n_i, z)=\gamma,$$

En m_2,

$$\cos(n_i, x)=-\alpha_2,\qquad \cos(n_i, y)=-\beta_2,\qquad \cos(n_i, z)=-\gamma_2.$$

Nous pourrons donc écrire en vertu des égalités (26),

$$\begin{aligned}P_x(m_2)+P_x(m_1)=(\Pi_1-\Pi_2+\nu_{x1}-\nu_{x2})\alpha+(\tau_{z1}-\tau_{z2})\beta+(\tau_{y1}-\tau_{y2})\gamma\\-(\Pi_2+\nu_{x2})(\alpha_2-\alpha)-\tau_{z2}(\beta_2-\beta)-\tau_{y2}(\gamma_2-\gamma).\end{aligned}$$

Les quantités $(\Pi_2-\Pi_1)$, $(\alpha_2-\alpha)$, $(\beta_2-\beta)$, $(\gamma_2-\gamma)$ étant des quantités très petites de l'ordre de ε, nous pourrons réduire $P_x(m_2)+P_x(m_1)$ à

$$(\nu_{x1}-\nu_{x2})\alpha+(\tau_{z1}-\tau_{z2})\beta+(\tau_{y1}-\tau_{y2})\gamma,$$

augmenté d'une quantité très petite de l'ordre de ε.

Par ces raisonnements et par des raisonnements analogues, on voit que l'égalité (28) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_1}\Big\{ & [(\nu_{x2}-\nu_{x1})\alpha+(\tau_{z2}-\tau_{z1})\beta+(\tau_{y2}-\tau_{y1})\gamma]\,\delta x_1\\ &+[(\tau_{z2}-\tau_{z1})\alpha+(\nu_{y2}-\nu_{y1})\beta+(\tau_{x2}-\tau_{x1})\gamma]\,\delta y_1\\ &+[(\tau_{y2}-\tau_{y1})\alpha+(\tau_{x2}-\tau_{x1})\beta+(\nu_{z2}-\nu_{z1})\gamma]\,\delta z_1\Big\}\,d\Sigma_1=\mathrm{L}\,\varepsilon,\end{aligned}$$

L étant une quantité du même ordre de grandeur que δx, δy, δz.

Cette égalité devant avoir lieu quels que soient δx_1, δy_1, δz_1, on doit avoir, en tout point de la surface Σ_1,

$$(30)\qquad\left\{\begin{aligned}&(\nu_{x2}-\nu_{x1})\alpha+(\tau_{z2}-\tau_{z1})\beta+(\tau_{y2}-\tau_{y1})\gamma=\mathrm{G}\,\varepsilon,\\&(\tau_{z2}-\tau_{z1})\alpha+(\nu_{y2}-\nu_{y1})\beta+(\tau_{z2}-\tau_{z1})\gamma=\mathrm{G}'\,\varepsilon,\\&(\tau_{y2}-\tau_{y1})\alpha+(\tau_{x2}-\tau_{x1})\beta+(\nu_{z2}-\nu_{z1})\gamma=\mathrm{G}''\,\varepsilon,\end{aligned}\right.$$

G, G′, G″ étant trois quantités finies.

Selon la première égalité (27), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\nu_{x2}-\nu_{x1}=&-\lambda(\rho_1,\mathrm{T}_1)(\theta)_1^2-2\mu(\rho_1,\mathrm{T}_1)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2\\&-\theta_2[\lambda(\rho_2,\mathrm{T}_2)-\lambda(\rho_1,\mathrm{T}_1)]-2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2[\mu(\rho_2,\mathrm{T}_2)-\mu(\rho_1,\mathrm{T}_1)].\end{aligned}$$

Lors même que les coefficients de viscosité λ, μ ne seraient pas très petits, les différences

$$\lambda(\rho_2,\mathrm{T}_2)-\lambda(\rho_1,\mathrm{T}_1),\quad \mu(\rho_2,\mathrm{T}_2)-\mu(\rho_1,\mathrm{T}_1)$$

sont des quantités très petites de l'ordre de ε; il en est donc de même des deux derniers termes de l'égalité précédente.

Par ce raisonnement et par des raisonnements analogues, nous pourrons, au lieu des égalités (30), écrire les égalités

$$(31)\qquad\left\{\begin{aligned}&\left\{\lambda\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_1^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_1^2\right]+2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2\right\}\alpha\\&\quad+\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1^2\right]\beta+\mu\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2\right]\gamma=\mathrm{H}\,\varepsilon,\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\end{aligned}\right.$$

λ, μ étant mis respectivement pour $\lambda(\rho_1, \mathrm{T}_1)$, $\mu(\rho_1, \mathrm{T}_1)$ et H, H′, H″ étant trois quantités finies.

Moyennant les égalités (4) et (4 *bis*), ces égalités (31) deviennent

$$(32)\quad \begin{cases} (\lambda+\mu)(\alpha\mathfrak{U}+\beta\mathfrak{V}+\gamma\mathfrak{W})\alpha+\mu\mathfrak{U}=h\ \varepsilon, \\ (\lambda+\mu)(\alpha\mathfrak{U}+\beta\mathfrak{V}+\gamma\mathfrak{W})\beta+\mu\mathfrak{V}=h'\varepsilon, \\ (\lambda+\mu)(\alpha\mathfrak{U}+\beta\mathfrak{V}+\gamma\mathfrak{W})\gamma\ +\mu\mathfrak{W}=h''\varepsilon, \end{cases}$$

h, h', h'' étant trois quantités finies.

Si nous multiplions respectivement ces égalités par α, β, γ et si nous les ajoutons membre à membre, nous trouvons l'égalité

$$(\lambda+2\mu)(\alpha\mathfrak{U}+\beta\mathfrak{V}+\gamma\mathfrak{W})=(\alpha h+\beta h'+\gamma h'')\varepsilon$$

qui permet de leur donner la forme suivante :

$$(33)\quad \begin{cases} \mathfrak{U}=\left[h\ -(\alpha h+\beta h'+\gamma h'')\alpha\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right]\dfrac{\varepsilon}{\mu}, \\ \mathfrak{V}=\left[h'-(\alpha h+\beta h'+\gamma h'')\beta\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right]\dfrac{\varepsilon}{\mu}, \\ \mathfrak{W}=\left[h''-(\alpha h+\beta h'+\gamma h'')\gamma\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right]\dfrac{\varepsilon}{\mu}. \end{cases}$$

Pour que la quasi-onde considérée soit réellement du premier ordre en u, v, w, il faut que $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ soient des quantités finies, et non pas des quantités très petites; il ne faut donc pas que $\frac{\varepsilon}{\mu}$ soit une quantité très petite. Nous pouvons, dès lors, énoncer les propositions suivantes :

Un fluide dont le coefficient de viscosité μ n'est pas très petit ne permet la propagation d'aucune quasi-onde très mince.

Un fluide dont le coefficient de viscosité μ est très petit ne permet la propagation d'une quasi-onde que si l'épaisseur ε de cette quasi-onde est au moins de l'ordre de μ; si l'épaisseur ε de la quasi-onde était très petite par rapport à μ, cette quasi-onde ne pourrait se propager.

Cette proposition nous donne déjà la raison de celle qui a été admise à la fin du paragraphe précédent.

Mais une question se pose maintenant : L'existence d'une faible viscosité ne modifie-t-elle pas d'une manière notable les lois de la propagation d'une quasi-onde établie au § 1? C'est cette question que nous allons examiner.

Les termes de viscosité n'intervenant ni dans l'équation de continuité, ni dans l'équation de compressibilité, rien n'est changé à l'établissement des équations (10) et (17); il nous faut au contraire reprendre les raisonnements qui ont donné les équations (13), (21), (23) et (24).

En tout point du milieu, nous devons écrire les égalités

$$
(34)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho X + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\
&\quad -(\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial x} - \mu\,\Delta u - \theta\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\right)\\
&\quad -\left[2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \rho}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial \rho}{\partial z}\right]\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\\
&\quad -\left[2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial T}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial T}{\partial z}\right]\frac{\partial \mu}{\partial T} = 0,\\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Au sein de la quasi-onde, les dérivées du second ordre $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ... sont très grandes, comme $\frac{1}{\varepsilon}$; il en est donc de même, en général, de $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$, $\frac{\partial \theta}{\partial z}$, Δu. Nous supposerons que μ soit une quantité très petite de l'ordre de ε, sans quoi, nous l'avons vu, aucune quasi-onde ne pourrait se propager; dès lors, aux premiers membres des équations (34), tous les termes sont assurément finis, sauf peut-être les termes

$$\lambda\frac{\partial \theta}{\partial x},\quad \lambda\frac{\partial \theta}{\partial y},\quad \lambda\frac{\partial \theta}{\partial z}.$$

Les équations (34) ne peuvent avoir lieu que si ces termes sont aussi finis.

Supposons d'abord λ fini; il faudra que $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$, $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ soient, dans toute l'étendue de la quasi-onde, non pas des quantités très grandes de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$, mais simplement des quantités finies. Dès lors, $\theta(m_2) - \theta(m_1)$, au lieu d'être une quantité finie, sera une quantité très petite de l'ordre de ε.

Mais les égalités (4) et (4 *bis*) donnent

$$\theta(m_2) - \theta(m_1) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_1^2 = (\alpha\mathfrak{V} + \beta\mathfrak{V} + \gamma\mathfrak{W}) + (a + b' + c'')\varepsilon.$$

On voit donc que si λ est fini, $(\alpha\mathfrak{V} + \beta\mathfrak{V} + \gamma\mathfrak{W})$ devra être une quantité très petite de l'ordre de ε; toute quasi-onde sera sensiblement transversale. Laissons de côté cette onde transversale, dont l'existence était prévue et dont la vitesse de propagation est nulle.

Nous ne pourrons observer une quasi-onde autre que celle-là, à moins que λ ne soit une quantité très petite du même ordre que ε, et partant que μ.

Tous les termes qui figurent aux premiers membres des égalités (34) seront maintenant des termes finis. Nous pourrons donc écrire ces équations au point m_2, puis au point m_1, et retrancher membre à membre les équations correspondantes; mais, auparavant, nous devrons prendre une précaution qui, jusqu'ici, était inutile.

Les dérivées partielles telles que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots$ sont, à l'intérieur de la quasi-onde, très grandes de l'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$; en dehors de la quasi-onde, elles redeviennent finies. On aura soin de tracer les surfaces S_1, S_2 dans les parties de l'espace où ces dérivées du second ordre ont des valeurs finies.

Moyennant cette précaution, l'opération indiquée redonnera les équations (11) et (13).

Venons maintenant à l'équation (20) et au raisonnement qui l'a fournie.

Il devra être modifié ainsi qu'il suit :

On a [*Recherches*, Ire Partie, égalité (90)]

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,d\mathrm{Q} = dt \int \Big\{ & \mathrm{T}\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \mathrm{T}^2} \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z} w + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} \right) \\ & - \mathrm{T}\rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial \mathrm{T}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\ & + 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \Big\} d\varpi, \end{aligned}$$

l'intégrale s'étendant au volume $M_1 N_1 N_2 M_2$.

Si l'on observe que ce volume est de l'ordre de ε et que dQ doit, selon l'égalité (19), être de l'ordre $\varepsilon \chi\, dt$, on voit que la quantité sous le signe $\int$ doit être de l'ordre de χ. Si l'on observe, d'ailleurs, que λ et μ sont des quantités du même ordre de grandeur que ε, on voit que l'on peut écrire

$$\mathrm{T}\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \mathrm{T}^2} \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z} w + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} \right) - \mathrm{T}\rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial \mathrm{T}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \sigma\chi + \xi\varepsilon.$$

Écrivons cette égalité pour le point m_1, puis pour le point m_2, et retranchons membre à membre les résultats obtenus; nous retrouvons l'égalité

$$\begin{aligned} (20) \qquad & \mathrm{T}\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \mathrm{T}^2} \left[\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} \right)_1^2 u + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} \right)_1^2 v + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z} \right)_1^2 w + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} \right)_1^2 \right] \\ & - \mathrm{T}\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial \mathrm{T}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_1^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_1^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_1^2 \right] = \nu\chi + \varpi\varepsilon. \end{aligned}$$

Quant à l'égalité (22), elle devra être complétée en ajoutant au premier membre [*Recherches*, Ire Partie, égalité (94)] les termes

$$\frac{\lambda}{E}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$
$$+\frac{2\mu}{E}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right].$$

Ces termes, qui ont en facteur λ ou μ, sont de l'ordre de ε; il ne modifient donc rien aux conclusions tirées de l'égalité (22).

En résumé, *dans un milieu très peu visqueux, une quasi-onde dont l'épaisseur* ε *est du même ordre de grandeur que les coefficients de viscosité* λ *et* μ, *se propage sensiblement suivant les mêmes lois qu'en un fluide parfait.*

CONCLUSION DE LA TROISIÈME PARTIE.

Nous voyons, par ce qui précède, que dans l'air ou dans tout autre gaz très peu conducteur et très peu visqueux, on n'a jamais observé la propagation d'une onde proprement dite; ce qui semble une onde à l'expérimentateur apparaît au mathématicien comme une quasi-onde.

L'étude de la propagation du son avait si bien familiarisé les physiciens avec la notion d'onde et de vitesse de propagation d'une onde, que ce mode de propagation semblait à beaucoup d'entre eux le seul possible; ils répugnaient à admettre que certaines propriétés, telle la température au sein d'une masse conductrice, pussent dépendre exclusivement de fonctions analytiques de x, y, z, t, en sorte qu'il n'y eût, dans l'acte de leur propagation, ni onde, ni vitesse. Il est piquant de constater que ce mode de propagation est précisément celui qui convient au mouvement sonore dans l'air et que, même dans ce cas, l'existence d'ondes, l'existence d'une vitesse de propagation sont seulement des apparences et des approximations.

QUATRIÈME PARTIE.

DES CONDITIONS AUX LIMITES.

CHAPITRE I.

SUR LE FROTTEMENT.

§ 1. — Du frottement en général.

Le principe de d'Alembert a longtemps été regardé comme fournissant les équations les plus générales du mouvement d'un système; puis il a été nécessaire de généraliser ces équations en y introduisant les actions de viscosité; cette introduction nous a conduits aux équations générales de l'Hydrodynamique, étudiées en la première Partie de ces *Recherches* (¹).

Cette généralisation ne suffit pas à mettre en équations tous les problèmes mécaniques; pour traiter plusieurs d'entre eux il est nécessaire d'introduire dans les formules de la Dynamique de nouveaux termes, les termes de frottement; c'est cette introduction, dont nous avons, en un autre endroit (²), approfondi les principes, qu'il nous faut étudier à nouveau afin de préciser certains points demeurés obscurs ou incomplets.

Considérons un système dénué de frottement, mais qui peut être affecté de viscosité; supposons que la déformation virtuelle la plus générale de ce système soit définie par des *variations normales*. Les équations du mouvement de ce système s'obtiendront en écrivant que l'on a, en toute modification virtuelle,

$$d\mathfrak{T}_e - \delta_T \mathfrak{F} + d\mathfrak{T}_j + d\mathfrak{T}_v = 0. \tag{1}$$

Dans cette égalité, $d\mathfrak{T}_e$ est le travail virtuel des actions extérieures; $d\mathfrak{T}_j$ est le

(¹) *Recherches sur l'Hydrodynamique*, Iʳᵉ Partie : *Sur les Principes fondamentaux de l'Hydrodynamique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2ᵉ série, t. III, 1901, p. 315).

(²) *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5ᵉ série, t. II, 1896).

travail virtuel des forces d'inertie; $d\mathfrak{T}_v$ est le travail virtuel des actions de viscosité; enfin $\delta_T \mathfrak{F}$ est la variation subie par le potentiel interne dans une modification virtuelle qui diffère en un seul point de la modification considérée : elle laisse invariable la température en chacun des éléments matériels du système.

C'est cette égalité fondamentale (1) que nous allons modifier par l'introduction d'un nouveau terme en son premier membre; nous la remplacerons par l'égalité

$$(2) \qquad d\mathfrak{T}_e - \delta_T \mathfrak{F} + d\mathfrak{T}_j + d\mathfrak{T}_v + d\mathfrak{T}_f = 0,$$

où $d\mathfrak{T}_f$ sera le *travail virtuel du frottement;* à l'égard de ce travail, nous allons formuler une suite d'hypothèses.

Nous admettrons tout d'abord que toute modification virtuelle du système peut être représentée au moyen d'un système particulier de variations normales que nous nommerons les *variations privilégiées;* celles-ci, d'ailleurs, se partageront en deux groupes : le premier groupe sera formé par les *variations à frottement* $\delta a, \delta b, \ldots, \delta l$; le second groupe sera formé par les *variations sans frottement* $\delta m, \ldots, \delta n$.

La modification réelle éprouvée par le système dans le temps dt sera représentée par les variations privilégiées

$$\delta a = a'\,dt, \quad \delta b = b'\,dt, \quad \ldots, \quad \delta l = l'\,dt, \quad \delta m = m'\,dt, \quad \ldots, \quad \delta n = n'\,dt.$$

$a', b', \ldots, l', m', \ldots, n'$ seront les *vitesses privilégiées* qui correspondent respectivement aux variations privilégiées $\delta a, \delta b, \ldots, \delta l, \delta m, \ldots, \delta n$.

Cela posé, le travail virtuel des actions de frottement sera supposé de la forme suivante :

$$(3) \qquad d\mathfrak{T}_f = g_a \frac{a'}{|a'|}\delta a + g_b \frac{b'}{|b'|}\delta b + \ldots + g_l \frac{l'}{|l'|}\delta l.$$

Les quantités $g_a, g_b, \ldots, g_l$ dépendent :

1° De l'état du système à l'instant considéré, y compris la température en chaque point;

2° Des vitesses privilégiées, parmi lesquelles ne se trouve pas la vitesse de variation de la température en chaque point;

3° Des actions extérieures qui sollicitent le système à l'instant considéré.

Lorsque les vitesses privilégiées $a', b', \ldots, l', m', \ldots, n'$ tendent vers 0, les quantités $g_a, g_b, \ldots, g_l$ ne tendent pas vers 0, mais vers des limites finies γ_a, $\gamma_b, \ldots, \gamma_l$ qui dépendent de l'état du système à l'instant considéré, y compris la distribution des températures sur le système, et des actions extérieures qui sollicitent ce système.

Enfin les quantités $g_a, g_b, \ldots, g_l$ sont essentiellement négatives :

$$(4) \qquad g_a < 0, \quad g_b < 0, \quad \ldots, \quad g_l < 0.$$

Soient P_{ij} des quantités qui dépendent de l'état du système à l'instant t, mais point de la distribution des températures sur ce système. Supposons que le déterminant

$$\begin{vmatrix} P_{mm} & \ldots & P_{mn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{nm} & \ldots & P_{nn} \end{vmatrix}$$

soit différent de o. Les équations

$$\begin{aligned} \delta m &= P_{mm}\delta m' + \ldots + P_{mn}\delta n', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta n &= P_{nm}\,\delta m' + \ldots + P_{nn}\,\delta n' \end{aligned}$$

définissent les quantités $\delta m'$, ..., $\delta n'$ fonctions linéaires et homogènes de δm, ..., δn. Il est clair que

$$\delta a,\quad \delta b,\quad \ldots,\quad \delta l,\quad \delta m',\quad \ldots,\quad \delta n'$$

forment un nouveau système de variations privilégiées, où δa, δb, ..., δl continuent à être les variations à frottement et où $\delta m'$, ..., $\delta n'$ représentent les nouvelles variations sans frottement. Celles-ci sont donc susceptibles de changements dont les variations à frottement ne sont pas, en général, susceptibles.

Parmi les variations privilégiées qui définissent la modification virtuelle la plus générale d'un système, il en existe toujours au moins 6 qui sont des variations sans frottement; on peut toujours choisir les variations sans frottement de telle sorte que ces six variations-là définissent le déplacement d'ensemble le plus général du système dans l'espace. Un simple déplacement d'ensemble du système dans l'espace n'entraîne donc aucun travail des actions de frottement.

Les six variations dont nous venons de parler peuvent n'être pas les seules variations sans frottement. Il peut arriver que la vitesse m' qui correspond à une certaine variation privilégiée δm soit identiquement nulle par définition; dans ce cas la variation δm sera sûrement une variation sans frottement.

Donnons-en un exemple :

Un point matériel M se meut sur une surface P que l'on suppose immobile. A l'instant t, ce point est animé d'une certaine vitesse s' suivant une certaine direction tangente à la surface P. Le déplacement virtuel le plus général du point M, qui doit demeurer sur la surface P, se compose d'un déplacement δs dans la direction de la vitesse s' et d'un autre déplacement δm normal au précédent et tangent à la surface P. Nous admettrons que ce sont là les variations privilégiées du système. Or, en la modification réelle que le système éprouve pendant le temps dt, on a

$$\delta s = s'\,dt, \qquad \delta m = o.$$

La variation privilégiée δm correspond, par définition, à une vitesse m' identiquement nulle; dès lors, ce doit être une variation sans frottement; le travail virtuel de frottement se réduit à

$$(5) \qquad d\mathfrak{C}_f = g_s \frac{s'}{|s'|} \delta s.$$

Le frottement équivaut, dans ce cas, à une force appliquée au point M, qui aurait pour valeur absolue $-g_s$ et qui serait dirigée en sens contraire de la vitesse du point M. C'est ce qu'on admet dans les Traités élémentaires de Mécanique.

Il faut bien observer, dans l'application de ce postulat important, que si la vitesse m' qui correspond à la variation privilégiée δm est nulle par définition, il n'en doit pas être de même de la variation virtuelle δm; si, par suite des liaisons imposées au système, on avait non seulement $m' = 0$, mais encore $\delta m = 0$, le postulat précédent deviendrait un simple truisme, car, grâce à l'égalité $\delta m = 0$, l'expression de $d\mathfrak{C}_f$ ne renfermerait sûrement aucun terme en δm.

Bien des questions pourraient être développées à partir des principes que nous venons de poser; nous renverrons à l'exposé que nous en avons donné ailleurs ([1]); nous nous contenterons d'étudier ici ce qui arrive lorsqu'on associe plusieurs systèmes primitivement indépendants.

Nous considérerons d'abord un système formé de plusieurs parties indépendantes et, pour simplifier les notations sans inconvénient réel au point de vue de la généralité, nous supposerons qu'il n'existe que deux telles parties, les parties 1 et 2.

Nous supposerons que, pour définir la modification virtuelle la plus générale de la partie 1, il faille joindre, aux variations que subit la température des diverses portions du corps 1, les variations normales privilégiées

$$\delta a_1, \quad \delta b_1, \quad \ldots, \quad \delta l_1, \quad \delta m_1, \quad \ldots, \quad \delta n_1,$$

les unes affectées de frottement, les autres dénuées de frottement. Pour la partie 2, nous adopterons les notations analogues

$$\delta a_2, \quad \delta b_2, \quad \ldots, \quad \delta l_2, \quad \delta m_2, \quad \ldots, \quad \delta n_2.$$

Le potentiel interne de la partie 1 sera représenté par $\mathfrak{F}_1$, le potentiel interne de la partie 2 par $\mathfrak{F}_2$ et le potentiel interne du système que forment ces deux parties par

$$(6) \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \mathrm{E}\Psi.$$

([1]) *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques* (*Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 5e série, t. II, 1896).

Nous écrirons

$$-\delta_T\mathcal{F}_1 = \mathrm{A}_1\,\delta a_1 + \mathrm{B}_1\,\delta a_1 + \ldots + \mathrm{L}_1\,\delta l_1 + \mathrm{M}_1\,\delta m_1 + \ldots + \mathrm{N}_1\,\delta n_1,$$
$$-\delta_T\mathcal{F}_2 = \mathrm{A}_2\,\delta a_2 + \mathrm{B}_2\,\delta a_2 + \ldots + \mathrm{L}_2\,\delta l_2 + \mathrm{M}_2\,\delta m_2 + \ldots + \mathrm{N}_2\,\delta n_2,$$

$$\begin{aligned}-\mathrm{E}\,\delta\Psi = {} & \mathcal{A}'_1\,\delta a_1 + \mathcal{B}'_1\,\delta b_1 + \ldots + \mathcal{L}'_1\,\delta l_1 + \mathcal{M}'_1\,\delta m_1 + \ldots + \mathcal{N}'_1\,\delta n_1 \\ & + \mathcal{A}'_2\,\delta a_2 + \mathcal{B}'_2\,\delta b_2 + \ldots + \mathcal{L}'_2\,\delta l_2 + \mathcal{M}'_2\,\delta m_2 + \ldots + \mathcal{N}'_2\,\delta n_2.\end{aligned}$$

Les quantités $\mathcal{A}'_1, \mathcal{B}'_1, \ldots, \mathcal{L}'_1, \mathcal{M}'_1, \ldots, \mathcal{N}'_1$ sont les actions du corps 2 sur le corps 1; les quantités $\mathcal{A}'_2, \mathcal{B}'_2, \ldots, \mathcal{L}'_2, \mathcal{M}'_2, \ldots. \mathcal{N}'_2$ sont les actions du corps 1 sur le corps 2.

Le travail des actions extérieures appliquées au corps 1 peut, en une modification virtuelle quelconque, s'écrire

$$d\mathcal{C}_{e1} = (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1)\,\delta a_1 + \ldots + (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}'_1)\,\delta l_1 + \ldots + (\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}'_1)\,\delta n_1,$$

$\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{N}_1$ étant les actions extérieures, non émanées du corps 2, qui s'exercent sur le corps 1.

De même, le travail virtuel des actions extérieures appliquées au corps 2 peut s'écrire

$$d\mathcal{C}_{e2} = (\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}'_2)\,\delta a_2 + \ldots + (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}'_2)\,\delta l_2 + \ldots + (\mathcal{N}_2 + \mathcal{N}'_2)\,\delta n_2,$$

$\mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{N}_2$ étant les actions extérieures, non émanées du corps 1, qui s'exercent sur le corps 2.

Enfin désignons, pour le corps 1, les travaux virtuels d'inertie, de viscosité et de frottement par

$$d\mathcal{C}_{j1} = \mathrm{J}_{a1}\,\delta a_1 + \ldots + \mathrm{J}_{l1}\,\delta l_1 + \mathrm{J}_{m1}\,\delta m_1 + \ldots + \mathrm{J}_{n1}\,\delta n_1,$$
$$d\mathcal{C}_{v1} = f_{a1}\,\delta a_1 + \ldots + f_{l1}\,\delta l_1 + f_{m1}\,\delta m_1 + \ldots + f_{n1}\,\delta n_1,$$

$$d\mathcal{C}_{f1} = g_{a1}\,\frac{a'_1}{|a'_1|}\,\delta a_1 + g_{b1}\,\frac{b'_1}{|b'_1|}\,\delta b_1 + \ldots + g_{l1}\,\frac{l'_1}{|l'_1|}\,\delta l_1.$$

Dans la dernière égalité, chacune des quantités g dépend de l'état du système 1, des vitesses $a'_1, b'_1, \ldots, l'_1, m'_1, \ldots, n'_1$, enfin de

$$(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1), \quad \ldots, \quad (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}'_1), \quad \ldots, \quad (\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}'_1).$$

Pour la partie 2, adoptons des notations analogues.

A la partie 1, appliquons l'identité (2). Nous aurons

$$
(7) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1 + A_1 + J_{a1} + f_{a1} + g_{a1}\frac{a'_1}{|a'_1|} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}'_1 + L_1 + J_{l1} + f_{l1} + g_{l1}\frac{l'_1}{|l'_1|} = 0,\\
&\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}'_1 + M_1 + J_{m1} + f_{m1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}'_1 + N_1 + J_{n1} + f_{n1} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Si, à la partie 2, nous appliquons de même l'identité (2), nous obtiendrons des égalités analogues aux précédentes, qu'il est inutile d'écrire et que nous nous contenterons de désigner par (7 *bis*).

Multiplions respectivement les égalités (7) par $\delta a_1, \ldots, \delta l_1, \delta m_1, \ldots, \delta n_1$, les égalités (7 *bis*) par $\delta a_2, \ldots, \delta l_2, \delta m_2, \ldots, \delta n_2$ et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; si nous désignons par $d\mathfrak{T}_e$, $d\mathfrak{T}_j$, $d\mathfrak{T}_v$ le travail virtuel des actions extérieures, des forces d'inertie et des actions de viscosité pour le système 1-2 tout entier, nous trouverons sans peine l'égalité

$$
(8) \qquad
\begin{aligned}
0 = {} & d\mathfrak{T}_e - \delta_T(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + E\Psi) + d\mathfrak{T}_j + d\mathfrak{T}_v \\
& + g_{a1}\frac{a'_1}{|a'_1|}\delta a_1 + \ldots + g_{l1}\frac{l'_1}{|l'_1|}\delta l_1 + g_{a2}\frac{a'_2}{|a'_2|}\delta a_2 + \ldots + g_{l2}\frac{l'_2}{|l'_2|}\delta l_2.
\end{aligned}
$$

Si l'on tient compte de l'égalité (6), cette égalité a, comme on devait s'y attendre, la forme de l'égalité (2). On voit que, dans un système formé de plusieurs parties indépendantes 1, 2, ..., les variations privilégiées à frottement comprennent :

1° Les variations privilégiées à frottement qui définiraient les modifications virtuelles de la partie 1, considérée comme un système isolé;

2° Les variations privilégiées à frottement qui définiraient les modifications virtuelles de la partie 2, considérée comme un système indépendant, etc.

La quantité g_{a1} dépend de l'état du système 1, des vitesses $a'_1, \ldots, n'_1$, enfin des actions $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1), \ldots, (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}'_1), \ldots, (\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}'_1)$; mais les actions $\mathcal{A}'_1, \ldots, \mathcal{L}'_1, \ldots, \mathcal{N}'_1$ dépendent de l'état du système formé par les parties 1 et 2; on peut donc dire que la quantité g_{a1}, dépend de l'état de tout le système formé par les parties indépendantes 1 et 2, des vitesses $a'_1, \ldots, n'_1$, enfin des actions extérieures $\mathcal{A}'_1, \ldots, \mathcal{N}'_1$. Les quantités $g_{b1}, \ldots, g_{l1}, g_{a2}, \ldots, g_{l2}$ prêtent à des considérations analogues qui s'accordent pleinement avec ce qui a été dit à propos de l'égalité (2).

Considérons maintenant une suite continue de systèmes, formés de deux parties indépendantes 1 et 2, et supposons que cette suite ait pour limite un système où les parties 1 et 2 présentent un ou plusieurs contacts correspondant à une liaison bilatérale exprimée par des égalités de la forme

$$(9)\quad \begin{cases} P_{a1}\,\delta a_1 + \ldots + P_{n1}\,\delta n_1 + P_{a2}\,\delta a_2 + \ldots + P_{n2}\,\delta n_2 = 0, \\ P'_{a1}\,\delta a_1 + \ldots + P'_{n1}\,\delta n_1 + P'_{a2}\,\delta a_2 + \ldots + P'_{n2}\,\delta n_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ces égalités s'obtiennent en exprimant que les parties 1 et 2, qui sont en contact avant le déplacement virtuel $\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2$, sont encore en contact après; pour les former, il suffit donc de connaître la figure et la position des parties 1 et 2 avant ce déplacement virtuel et le changement que cette modification virtuelle apporte à cette figure et à cette position. Dès lors, si certaines variations, dites *variations sans inertie,* définissent des modifications virtuelles où chacune des parties du système change de propriétés, mais sans changer de figure ni d'état, ces variations ne figurent pas dans les conditions (9) et une modification où ces variations diffèrent seules de 0 n'altère pas la valeur des quantités P, P'.

Les variations $\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2$ étant supposées normales, la figure et la position des diverses parties du système ne varient pas lorsque les températures varient seules. Dès lors, les considérations précédentes montrent que les températures des diverses parties du système ne peuvent influer sur les valeurs des coefficients P, P'.

Nous supposerons que lorsque le système formé de deux parties indépendantes tend vers cette forme limite, les diverses grandeurs que nous avons eu à considérer dans l'étude de ce système tendent vers des limites bien déterminées.

Nous admettrons alors qu'une égalité analogue à l'égalité (2) *est vérifiée, non pas en toute modification virtuelle du système* 1-2, *mais en toute modification virtuelle qui vérifie les conditions de liaison* (9).

Dans cette équation dont nous admettons l'existence, les termes $d\mathfrak{T}_e$, $\delta_T\mathfrak{F}$, $d\mathfrak{T}_i$ sont simplement les limites vers lesquelles tendent les termes analogues relatifs au système formé de deux parties indépendantes; mais il n'en est pas de même des termes $d\mathfrak{T}_v$ et $d\mathfrak{T}_f$.

Le terme $d\mathfrak{T}_v$ sera la somme de trois autres :

1° La limite $d\mathfrak{T}_{v1}$ du travail virtuel des actions de viscosité relatives à la partie 1;

2° La limite $d\mathfrak{T}_{v2}$ du travail virtuel des actions de viscosité relatives à la partie 2;

3° Un terme $d\mathfrak{T}_w$, travail virtuel de la *viscosité au contact* des parties 1 et 2. Les suppositions à faire au sujet de ce terme vont arrêter un instant notre attention.

Au moyen des variations normales $\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2$, on peut former des combinaisons linéaires et homogènes dont les coefficients dépendent de l'état du système 1-2, mais point de la distribution des températures sur ce système ; on peut évidemment choisir ces combinaisons $\delta f, \ldots, \delta g, \delta h, \ldots, \delta k$ de telle sorte qu'elles soient déterminées lorsque l'on connaît le déplacement virtuel relatif des parties 1 et 2 au voisinage de leurs points de contact et réciproquement; en outre, de telle sorte que, dans le cas où le déplacement relatif en question s'annule, on ait

$$\delta f = 0, \qquad \ldots, \qquad \delta g = 0, \qquad \delta h = 0, \qquad \ldots, \qquad \delta k = 0.$$

Dès lors, il est clair que les conditions de liaisons (9) peuvent toujours se mettre sous la forme

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{l} p_f \delta f + \ldots + p_g \delta g + p_h \delta h + \ldots + p_k \delta k = 0, \\ p'_f \delta f + \ldots + p'_g \delta g + p'_h \delta h + \ldots + p'_k \delta k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Les quantités $p, p', \ldots$ dépendent de l'état des corps 1 et 2 au voisinage de leurs contacts, mais point de leur température.

Pour repasser de la forme (10) des équations de liaison à la forme (9), il suffit de remplacer $\delta f, \ldots, \delta g, \delta h, \ldots, \delta k$ par leurs expressions en fonctions de $\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2$. On voit alors que les quantités P, P′, ... sont des fonctions linéaires et homogènes des quantités $p, p', \ldots$, les coefficients dépendant de l'état des deux corps en contact, mais point de la distribution des températures.

Dans le temps dt, les parties des corps 1 et 2 qui avoisinent les contacts éprouvent un déplacement relatif réel dans lequel

$$\delta f = f'\,dt, \qquad \ldots, \qquad \delta g = g'\,dt, \qquad \delta h = h'\,dt, \qquad \ldots, \qquad \delta k = k'\,dt.$$

$f', \ldots, g', h', \ldots, k'$ sont les *vitesses relatives au voisinage du contact.*

Si ces vitesses sont constamment nulles

$$(11) \qquad f' = 0, \qquad \ldots, \qquad g' = 0, \qquad h' = 0, \qquad \ldots, \qquad k' = 0,$$

la liaison considérée est une *soudure.*

Ces préliminaires posés, nous admettrons que $d\varpi_w$ est de la forme suivante :

$$(12) \qquad d\varpi_w = F_f \delta f + \ldots + F_g \delta g + F_h \delta h + \ldots + F_k \delta k.$$

Les quantités F dépendent de l'état des parties 1 et 2 au voisinage des contacts, y compris la température de ces parties; elles dépendent en outre des vitesses relatives f', ..., g', h', ..., k'; elles s'annulent lorsque toutes ces vitesses sont nulles, en sorte que les égalités (11) entraînent les égalités

$$(13) \qquad F_f = 0, \qquad F_g = 0, \qquad F_h = 0, \qquad \ldots, \qquad F_k = 0.$$

Lorsque la liaison établie entre deux corps est une soudure, les actions de viscosité au contact de ces deux corps sont identiquement nulles. C'est une proposition que nous avons énoncée et dont nous avons fait usage en la première Partie de ces *Recherches*.

Enfin, lorsque les égalités (11) ne sont pas simultanément vérifiées, on a

$$(14) \qquad F_f f' + \ldots + F_g g' + F_h h' + \ldots + F_k k' \leqq 0.$$

Aux propositions précédentes on peut en adjoindre d'autres si l'on admet l'hypothèse de lord Rayleigh aux termes de laquelle il existe, pour tout système indépendant, une *fonction dissipative*.

Le corps 1, en effet, tant qu'il demeure indépendant, doit, selon cette hypothèse, admettre une fonction dissipative; les actions de viscosité qui figurent dans $d\mathfrak{T}_{v1}$ doivent donc dériver d'une telle fonction. Il doit en être de même des actions qui figurent dans $d\mathfrak{T}_{v2}$. Dès lors, pour que le système tout entier dérive d'une fonction dissipative, *il faut et il suffit que les actions de viscosité qui figurent dans $d\mathfrak{T}_w$ dérivent d'une fonction dissipative qui sera forcément une forme quadratique en f', ..., g', h', ..., k'.*

Supposons qu'à l'une des variations virtuelles δf, ..., δg, δh, ..., δk, soit la variation δk, corresponde une vitesse k' identiquement nulle; la fonction dissipative dont nous venons de parler ne renfermera pas de terme en k', en sorte que F_k sera égal à 0 et que $d\mathfrak{T}_w$ ne renfermera pas de terme en δk.

Occupons-nous maintenant du terme $d\mathfrak{T}_f$.

Ce terme, lui aussi, est la somme de trois autres :

1° Du terme

$$(15) \qquad d\mathfrak{T}_{\varphi 1} = \mathcal{G}_{a1} \frac{a'_1}{|a'_1|} \delta a_1 + \ldots + \mathcal{G}_{l1} \frac{l'_1}{|l'_1|} \delta l_1.$$

Les termes $\mathcal{G}_{a1}$, ..., $\mathcal{G}_{l1}$ dépendent de l'état de tout le système formé par les parties 1 et 2, y compris la distribution des températures sur ce système; des actions extérieures appliquées à ce système; enfin des vitesses des diverses parties de ce système.

Le terme $\mathcal{G}_{a1}$ n'est pas la limite vers laquelle tend le terme g_{a1} lorsque les deux parties 1 et 2 viennent au contact. Nous verrons tout à l'heure quelle relation existe entre les quantités g_{a1} et $\mathcal{G}_{a1}$.

On a d'ailleurs

$$(16)\qquad \mathcal{G}_{a1} < 0, \qquad \ldots, \qquad \mathcal{G}_{l1} < 0.$$

2° Du terme

$$(15\ bis)\qquad d\mathcal{C}_{\varphi 2} = \mathcal{G}_{a2}\frac{a'_2}{|a'_2|}\delta a_2 + \ldots + \mathcal{G}_{l2}\frac{l'_2}{|l'_2|}\delta l_2,$$

analogue au terme $d\mathcal{C}_{\varphi 1}$.

3° Du terme $d\mathcal{C}_\psi$, travail virtuel du *frottement au contact des corps* **1** *et* **2**. Ce terme va être étudié de près.

Parmi les diverses manières de déterminer les variations virtuelles $\delta f, \ldots, \delta g, \delta h, \ldots, \delta k$, nous supposerons qu'il en existe au moins une telle que l'on puisse écrire

$$(17)\qquad d\mathcal{C}_\psi = G_f\frac{f'}{|f'|}\delta f + \ldots + G_g\frac{g'}{|g'|}\delta g,$$

le travail virtuel $d\mathcal{C}_\psi$ ne renfermant aucun terme en $\delta h, \ldots, \delta k$; il se peut, du reste, qu'il n'existe aucune variation telle que $\delta h, \ldots, \delta k$.

Si l'une des quantités $\delta f, \ldots, \delta g, \delta h, \ldots, \delta k$ correspond à une valeur nulle de celle des quantités $f', \ldots, g', h', \ldots, k'$ qui lui correspond, le facteur G correspondant est supposé égal à 0; la variation correspondante est une des variations $\delta h, \ldots, \delta k$. Dans l'étude du mouvement d'un point matériel sur une surface, nous avons déjà trouvé une occasion d'appliquer cette remarque.

Si l'une des quantités δf est nulle *par liaison*, elle cesse évidemment de figurer dans l'expression de $d\mathcal{C}_\psi$, ce qui revient au même que si l'on supposait $G_f = 0$; si la liaison établie par les égalités (10) ou les égalités (11), qui leur sont équivalentes, est telle que

$$\delta f = 0, \qquad \ldots, \qquad \delta g = 0,$$

$d\mathcal{C}_\psi$ est identiquement nul; le résultat est alors le même que si l'on supposait

$$(18)\qquad G_f = 0, \qquad \ldots, \qquad G_g = 0.$$

Les quantités G qui ne sont pas nulles sont négatives :

$$(19)\qquad G_f < 0, \qquad \ldots, \qquad G_g < 0.$$

Les quantités G dépendent de l'état du système, des actions extérieures qui le sollicitent, des vitesses de ses diverses parties.

On voit qu'en somme, pour passer de ce que nous avons dit au sujet du frottement en général à ce que nous venons de dire au sujet du frottement au contact de deux corps qui présentent une liaison bilatérale, il suffit de formuler une seule hypothèse qui est la suivante :

Les variations privilégiées à frottement du système formé par les corps 1 et 2 se composent :

1° *Des variations privilégiées à frottement* $\delta a_1, \ldots, \delta l_1$ *de la partie* 1 *considérée comme un système indépendant;*

2° *Des variations privilégiées à frottement* $\delta a_2, \ldots, \delta l_2$ *de la partie* 2 *considérée comme un système indépendant;*

3° *De certaines variations* $\delta f, \ldots, \delta g$ *qui sont déterminées lorsqu'on connaît le déplacement virtuel relatif des parties voisines du ou des points de contact, et qui s'annulent avec ce déplacement.*

Poussant plus loin, nous allons introduire deux autres hypothèses, auxquelles vont nous conduire les considérations suivantes :

Nous admettons, avons-nous dit, qu'une égalité analogue à l'égalité (2) doit être vérifiée. D'après ce qui vient d'être exposé, cette égalité s'écrira

$$(20)\qquad \begin{aligned} &d\mathfrak{T}_e - \delta_T \mathfrak{F} + d\mathfrak{T}_{i1} + d\mathfrak{T}_{i2} + d\mathfrak{T}_{v1} + d\mathfrak{T}_{v2} + d\mathfrak{T}_{\varphi 1} + d\mathfrak{T}_{\varphi 2} \\ &\quad + F_f \delta f + \ldots + F_g \delta g + F_h \delta h + \ldots + F_k \delta k \\ &\quad + G_f \frac{f'}{|f'|}\delta f + \ldots + G_g \frac{g'}{|g'|}\delta g = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité (20) doit avoir lieu, non pas identiquement, mais pour toutes les modifications virtuelles qui vérifient les égalités (9) ou, ce qui revient au même, les égalités (10).

Or les quantités $\delta f, \ldots, \delta g, \delta h, \ldots, \delta k$ étant des fonctions linéaires et homogènes de $\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2$, le premier membre de l'égalité (20) est, en définitive, une forme linéaire et homogène des variations

$$\delta a_1, \quad \ldots, \quad \delta n_1, \quad \delta a_2, \quad \ldots, \quad \delta n_2,$$

forme que nous désignerons par

$$\Delta(\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2).$$

Les coefficients de cette forme dépendent de l'état du système formé par les parties 1 et 2, des actions extérieures exercées sur ce système et des vitesses $a_1', \ldots, n_1', a_2', \ldots, n_2'$.

L'égalité (20) ou

$$\Delta(\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2) = 0 \tag{21}$$

doit être vérifiée toutes les fois que $\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2$ vérifient les égalités (9). Pour cela, il faut et il suffit qu'il existe des quantités $\Pi, \Pi', \ldots$, fonctions des coefficients de la forme Δ et des quantités $P, P', \ldots$ qui figurent dans les égalités (9), telles que l'on ait *identiquement*

$$\begin{aligned}\Delta(&\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2)\\ &+\Pi\,(P_{a1}\,\delta a_1 + \ldots + P_{n1}\,\delta n_1 + P_{a2}\,\delta a_2 + \ldots + P_{n2}\,\delta n_2)\\ &+\Pi'(P'_{a1}\,\delta a_1 + \ldots + P'_{n1}\,\delta n_1 + P'_{a2}\,\delta a_2 + \ldots + P'_{n2}\,\delta n_2)\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.\end{aligned} \tag{22}$$

Il résulte de ce qui va être supposé que des équations permettent de déterminer les quantités $\Pi, \Pi', \ldots$ lorsqu'on connaît l'état du système 1-2, les actions extérieures qui le sollicitent, enfin les vitesses $a'_1, \ldots, n'_1, a'_2, \ldots, n'_2$. Il est nécessaire de faire cette remarque avant d'énoncer les deux hypothèses que voici :

I. Si la partie 1 formait un système indépendant, le travail virtuel du frottement relatif à ce système serait de la forme

$$g_{a1}\frac{a'_1}{|a'_1|}\,\delta a_1 + \ldots + g_{l1}\frac{l'_1}{|l'_1|}\,\delta l_1.$$

Les fonctions $g_{a1}, \ldots, g_{l1}$ dépendraient, d'une manière bien déterminée :

1° De l'état du système, y compris la température en ses divers points;

2° Des vitesses $a'_1, \ldots, n'_1, a'_2, \ldots, n'_2$;

3° Des actions extérieures $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{N}_1$. Nous mettrons ces dernières variables en évidence en écrivant

$$\begin{gathered} g_{a1} = g_{a1}(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{N}_1),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ g_{l1} = g_{l1}(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{N}_1).\end{gathered}$$

Or, *nous supposerons que les fonctions $\mathcal{G}_{a1}, \ldots, \mathcal{G}_{l1}$ se tirent simplement des fonctions $g_{a1}, \ldots, g_{l1}$ en y remplaçant respectivement $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{N}_1$ par*

$$\begin{gathered} \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1 + \Pi P_{a1} + \Pi' P'_{a1} + \ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}'_1 + \Pi P_{n1} + \Pi' P'_{n1} + \ldots,\end{gathered}$$

de telle sorte que l'on ait

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{G}_{a1} = g_{a1}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1 + \Pi P_{a1} + \Pi' P'_{a1} + \ldots,\ \ldots,\ \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}'_1 + \Pi P_{n1} + \Pi' P'_{n1} + \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathcal{G}_{l1} = g_{l1}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1 + \Pi P_{a1} + \Pi' P'_{a1} + \ldots,\ \ldots,\ \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}'_1 + \Pi P_{n1} + \Pi' P'_{n1} + \ldots). \end{array}\right.$$

On peut énoncer cette hypothèse sous la forme que voici :

Le travail virtuel $d\mathcal{T}_{f1}$ *se calcule exactement comme se calculerait le travail virtuel du frottement au sein d'un système indépendant qui serait identique au corps* 1, *mais qui serait soumis aux actions extérieures*

$$\begin{array}{l} \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1 + \Pi P_{a1} + \Pi' P'_{a1} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}'_1 + \Pi P_{n1} + \Pi' P'_{n1} + \ldots. \end{array}$$

Naturellement, cette hypothèse s'étend, *mutatis mutandis,* au travail virtuel $d\mathcal{T}_{f2}$.

II. *Nous supposerons que les fonctions* $G_f, \ldots, G_g$ *s'obtiennent en remplaçant* $\Pi, \Pi', \ldots$ *par leurs valeurs dans certaines fonctions*

$$\mathfrak{G}_f(\Pi, \Pi', \ldots), \quad \ldots, \quad \mathfrak{G}_g(\Pi, \Pi', \ldots)$$

qui, outre $\Pi, \Pi', \ldots,$ *dépendent exclusivement de l'état des corps* 1 *et* 2 *au voisinage immédiat des parties que la liaison* (9) *met en contact et des vitesses* $f', \ldots, g', h', \ldots, k'$:

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l} G_f = \mathfrak{G}_f(\Pi, \Pi', \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ G_g = \mathfrak{G}_g(\Pi, \Pi', \ldots). \end{array}\right.$$

D'après ce qui a été dit sur le passage des égalités (9) aux égalités (10), on a identiquement

$$\begin{array}{l} P_{a1}\,\delta a_1 + \ldots + P_{n1}\,\delta n_1 = p_f\,\delta f + \ldots + p_h\,\delta h, \\ P'_{a1}\,\delta a_1 + \ldots + P'_{n1}\,\delta n_1 = p'_f\,\delta f + \ldots + p'_h\,\delta h, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Dès lors, en vertu des égalités (12), (15), (15 *bis*), (17), (22), (23) et (24), on peut énoncer la proposition suivante :

En nombre égal aux équations de liaisons (9), *il existe des quantités*

$\Pi, \Pi', \ldots,$ *telles que l'on ait identiquement*

$$(25)\quad \begin{aligned} & d\mathfrak{S}_e - \delta_T \mathcal{F} + d\mathfrak{S}_{i1} + d\mathfrak{S}_{i2} + d\mathfrak{S}_{v1} + d\mathfrak{S}_{v2} \\ & + F_f \delta f + \ldots + F_g \delta g + F_h \delta h + \ldots + F_k \delta k \\ & + g_{a1}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1 + \Pi P_{a1} + \Pi' P'_{a1} + \ldots, \ldots) \frac{a'_1}{|a'_1|} \delta a_1 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + g_{l1}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1 + \Pi P_{a1} + \Pi' P'_{a1} + \ldots, \ldots) \frac{l'_1}{|l'_1|} \delta l_1 \\ & + g_{a2}(\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}'_2 + \Pi P_{a2} + \Pi' P'_{a2} + \ldots, \ldots) \frac{a'_2}{|a'_2|} \delta a_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + g_{l2}(\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}'_2 + \Pi P_{a2} + \Pi' P'_{a2} + \ldots, \ldots) \frac{l'_2}{|l'_2|} \delta l_2 \\ & + \mathfrak{G}_f(\Pi, \Pi', \ldots) \frac{f'}{|f'|} \delta f + \ldots + \mathfrak{G}_g(\Pi, \Pi', \ldots) \frac{g'}{|g'|} \delta g \\ & + \Pi (P_{a1} \delta a_1 + \ldots + P_{n1} \delta n_1 + P_{a2} \delta a_2 + \ldots + P_{n2} \delta n_2) \\ & + \Pi' (P'_{a1} \delta a_1 + \ldots + P'_{n1} \delta n_1 + P'_{a2} \delta a_2 + \ldots + P'_{n2} \delta n_2) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned}$$

Si, dans cette égalité, nous remplaçons les quantités $\delta f, \ldots, \delta g, \delta h, \ldots, \delta k$ par leurs expressions linéaires et homogènes en $\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2$, nous trouvons une égalité dont le premier membre est une forme linéaire et homogène par rapport aux ν_1 quantités $\delta a_1, \ldots, \delta n_1$ et aux ν_2 quantités $\delta a_2, \ldots, \delta n_2$. Cette égalité devant avoir lieu quelles que soient ces $(\nu_1 + \nu_2)$ variations, nous trouvons $(\nu_1 + \nu_2)$ égalités indépendantes de ces variations.

Parmi ces variations, il peut se faire qu'il en existe un certain nombre ρ qui soient *sans inertie,* c'est-à-dire telles que les quantités J correspondantes soient identiquement nulles; les $\sigma = \nu_1 + \nu_2 - \rho$ autres sont affectées d'inertie.

Les ρ premières sont telles que les modifications virtuelles qu'elles représentent n'entraînent, pour les diverses masses qui composent les parties 1 et 2, aucun déplacement dans l'espace. Dès lors, comme nous l'avons vu, il est certain qu'elles ne figurent pas dans les conditions (9) et, de plus, que les coefficients P ne varieraient pas dans une modification virtuelle où ces seules variations seraient différentes de o. Ce que nous venons de dire de ces ρ variations peut se répéter de la température T.

Les conditions (9), dont nous désignerons le nombre par ϖ, appliquées à la modification réelle que le système subit dans le temps dt, donnent les relations

$$\begin{aligned} & P_{a1} a'_1 + \ldots + P_{n1} n'_1 + P_{a2} a'_2 + \ldots + P_{n2} n'_2 = 0, \\ & P'_{a1} a'_1 + \ldots + P'_{n1} n'_1 + P'_{a2} a'_2 + \ldots + P'_{n2} n'_2 = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En différentiant ces relations par rapport à t, nous obtiendrons ϖ nouvelles relations où figureront celles des accélérations $a''_1, \ldots, n''_1, a''_2, \ldots, n''_2$ qui correspondent à des variations à inertie; σ en sera le nombre; ni les températures, ni leurs dérivées par rapport à t n'y figureront.

Nous obtenons ainsi $(\sigma + \varpi)$ relations linéaires par rapport aux σ accélérations qui correspondent aux variations à inertie. Ces relations dépendent, en outre, des ϖ facteurs $\Pi, \Pi', \ldots$, de l'état du système, y compris la température de ses diverses parties, des actions extérieures et des vitesses $a'_1, \ldots, n'_1, a'_2, \ldots, n'_2$; les vitesses de variation de la température des diverses parties n'y figurent pas. Ces $(\sigma + \varpi)$ relations sont ce que nous nommerons les *relations du premier groupe*.

Nous avons, en outre, fournies par les variations sans inertie, ρ *relations du second groupe,* où figurent les ϖ facteurs $\Pi, \Pi', \ldots$ et qui dépendent de l'état du système à l'instant t, y compris sa température aux divers points, des actions extérieures et des vitesses, sauf de la vitesse de variation de la température.

Entre les $(\sigma + \varpi)$ relations du premier groupe, éliminons les σ accélérations qui y figurent et qui se rapportent toutes aux variations à inertie. Il nous restera ϖ équations permettant de déterminer les ϖ facteurs $\Pi, \Pi', \ldots$ en fonctions de l'état du système, y compris la température aux divers points, des actions extérieures et des vitesses $a'_1, \ldots, n'_1, a'_2, \ldots, n'_2$. Ce premier résultat rend légitime les hypothèses formulées tout à l'heure.

Dans les $(\rho + \sigma)$ relations qui fournit l'identité (25), remplaçons $\Pi, \Pi', \ldots$ par les valeurs ainsi déterminées. Il nous restera $(\rho + \sigma)$ équations dépendant de l'état du système, *y compris la température* T en ses diverses parties, des actions extérieures et des vitesses $a'_1, \ldots, n'_1, a'_2, \ldots, n'_2$; en outre, σ de ces équations, celles qui proviennent des σ variations à inertie, contiendront les σ accélérations correspondantes.

Si l'on connaissait la loi de variation des actions extérieures et de la température T en fonction de t, ces équations détermineraient les lois du mouvement du système, pourvu que l'on connût son état initial et les vitesses initiales qui correspondent aux variations à inertie. Mais, comme la variation des températures T en fonction de t n'est pas, en général, connue, il faudra, aux équations précédentes, joindre autant de *relations supplémentaires* qu'il y a, dans le système, de températures indépendantes.

Pour terminer ces considérations générales sur le frottement, il nous reste à faire la remarque suivante :

La méthode qui nous a servi à passer d'un système formé de parties indépendantes à un système où ces parties présentent une liaison, permet également de passer d'un système où figure une liaison à un système où figurent deux liaisons, et ainsi de suite.

A chaque liaison correspondra un système de variations à frottement telles que $\delta f, \ldots, \delta g$; des facteurs analogues à $\Pi, \Pi', \ldots$; un travail virtuel de frottement analogue à $d\mathfrak{T}_w$. *Le travail virtuel des actions de frottement qui s'exercent aux divers contacts est la somme de ces quantités analogues à* $d\mathfrak{T}_w$.

§ 2. — Frottement au contact de deux corps solides.

Avant d'étendre ces considérations aux systèmes composés d'un solide indéformable et d'un fluide, ou bien aux systèmes composés de deux fluides, nous allons les appliquer au cas bien connu de deux solides indéformables qui se touchent en un point.

Pour un solide indépendant, le potentiel interne dépend exclusivement de la température. On a donc

$$\delta_T \mathcal{F}_1 = 0, \qquad \delta_T \mathcal{F}_2 = 0$$

et, partant,

$$\delta_T \mathcal{F} = E\, \delta\Psi.$$

Le mouvement virtuel le plus général d'un solide invariable n'entraîne aucun travail de viscosité ni de frottement; on a donc

$$d\mathfrak{T}_{v1} = 0, \qquad d\mathfrak{T}_{v2} = 0,$$
$$d\mathfrak{T}_{\varphi 1} = 0, \qquad d\mathfrak{T}_{\varphi 2} = 0.$$

Le corps 1 et le corps 2 se touchent en un point O. Le déplacement relatif virtuel le plus général du corps 2 par rapport au corps 1 peut toujours se ramener à une rotation autour d'un axe passant par le point O et à une translation. Il en est de même du déplacement relatif réel du corps 2 par rapport au corps 1 pendant le temps dt. Mais ici, comme on doit supposer les deux corps 1 et 2 en contact aussi bien à l'instant $(t + dt)$ qu'à l'instant t, la translation devra être parallèle au plan tangent commun aux deux corps 1 et 2.

Le déplacement relatif réel du corps 2 par rapport au corps 1, dans le temps dt, peut donc se décomposer en trois :

1° Une rotation $p' dt$ autour de la normale commune ON aux deux corps; cette rotation constitue le *pivotement* pendant le temps dt;

2° Une rotation $r' dt$ autour d'une droite OR menée dans le plan tangent commun; cette rotation constitue le *roulement* pendant le temps dt et OR est l'*axe de roulement*.

3° Une translation $g' dt$ suivant une droite OG située dans le plan tangent commun; cette translation constitue le *glissement* pendant le temps dt et OG est la *direction du glissement*.

Un déplacement relatif virtuel du corps 2 par rapport au corps 1 peut toujours se décomposer en six autres :

1° Une rotation δp autour de la normale commune ON;

2° Une rotation δr autour de l'axe de roulement OR;

3° Une rotation $\delta \rho$ autour d'une droite $O\mathfrak{R}$, située dans le plan tangent commun et perpendiculaire à OR;

4° Une translation δn parallèle à la normale commune ON;

5° Une translation δg parallèle à la direction de glissement OG;

6° Une translation $\delta \gamma$ parallèle à une direction $O\mathcal{G}$ située dans le plan tangent commun et perpendiculaire à OG.

Nous admettrons que les six variations

$$\delta p, \quad \delta r, \quad \delta \rho, \quad \delta n, \quad \delta g, \quad \delta \gamma$$

jouent ici le rôle qui est attribué, dans la théorie générale, aux quantités

$$\delta f, \quad \ldots, \quad \delta g, \quad \delta h, \quad \ldots, \quad \delta k.$$

En la modification réelle qui se produit pendant le temps dt, on a

$$\delta p = p'\,dt, \qquad \delta r = r'\,dt, \qquad \delta \rho = 0,$$
$$\delta n = 0, \qquad \delta g = g'\,dt, \qquad \delta \gamma = 0.$$

D'après ce que nous avons vu, les variations virtuelles $\delta \rho$, $\delta \gamma$, δn ne figureront pas dans le travail virtuel de la viscosité de contact qui aura pour expression

$$d\mathfrak{T}_w = \mathrm{F}_p\,\delta p + \mathrm{F}_r\,\delta r + \mathrm{F}_g\,\delta g, \tag{26}$$

les fonctions F_p, F_r, F_g dépendant de la nature et de l'état des corps en contact et, en outre, des vitesses p', r', g'.

Les vitesses ρ' et γ' étant nulles par définition et δn étant nul par liaison, $d\mathfrak{T}_\psi$ ne renferme aucun terme en $\delta \rho$, $\delta \gamma$, δn :

$$d\mathfrak{T}_\psi = \mathrm{G}_p \frac{p'}{|p'|}\,\delta p + \mathrm{G}_r \frac{r'}{|r'|}\,\delta r + \mathrm{G}_g \frac{g'}{|g'|}\,\delta g. \tag{27}$$

Pour définir le déplacement virtuel le plus général du système, il suffit d'adjoindre aux six variations

$$\delta p, \quad \delta r, \quad \delta \rho, \quad \delta n, \quad \delta g, \quad \delta \gamma$$

six autres variations définissant un mouvement d'ensemble du système, d'ailleurs identique au déplacement d'ensemble le plus général du corps 1. Ces six variations peuvent toujours se ramener aux trois composantes $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ d'une rotation et aux trois composantes $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ d'une translation.

On pourra toujours écrire

$$
(28) \qquad \begin{aligned} d\mathfrak{T}_e - \mathrm{E}\,\delta\Psi = {} & \mathrm{X}\,\delta\xi + \mathrm{Y}\,\delta\eta + \mathrm{Z}\,\delta\zeta \\ & + \mathrm{L}\,\delta\lambda + \mathrm{M}\,\delta\mu + \mathrm{N}\,\delta\nu \\ & + \mathcal{A}\,\delta p + \mathcal{B}\,\delta r + \mathcal{C}\,\delta\rho + \mathcal{O}\,\delta n + \mathcal{E}\,\delta g + \mathcal{F}\,\delta\gamma. \end{aligned}
$$

Le travail des forces d'inertie $d\mathfrak{T}_j$ sera une fonction linéaire et homogène des douze mêmes variations indépendantes.

Enfin la liaison qui existe entre les deux corps s'exprimera par l'égalité

$$
(29) \qquad \delta n = 0.
$$

Dès lors, d'après ce que nous avons vu, il existera une grandeur Π dépendant de l'état des deux corps 1 et 2, de leurs vitesses et des actions qui s'exercent sur eux, telle qu'on ait l'égalité

$$
(30) \qquad d\mathfrak{T}_e - \mathrm{E}\,\delta\Psi + d\mathfrak{T}_i + d\mathfrak{T}_w + d\mathfrak{T}_\psi + \Pi\,\delta n = 0,
$$

quelles que soient les variations

$$
\begin{array}{cccccc} \delta\xi, & \delta\eta, & \delta\zeta, & \delta\lambda, & \delta\mu, & \delta\nu, \\ \delta p, & \delta r, & \delta\rho, & \delta n, & \delta g, & \delta\gamma. \end{array}
$$

D'ailleurs les coefficients G_p, G_r, G_g peuvent être ramenés à ne dépendre que de l'état des corps 1 et 2, des vitesses p', r', g' et de Π :

$$
(31) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{G}_p &= \mathfrak{G}_p(\Pi, p', r', g'), \\ \mathrm{G}_r &= \mathfrak{G}_r(\Pi, p', r', g'), \\ \mathrm{G}_g &= \mathfrak{G}_g(\Pi, p', r', g'). \end{aligned} \right.
$$

Dès lors, l'égalité (30), jointe aux égalités (26), (27), (28) et (31), nous fournit les douze relations suivantes :

$$
(32) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{X} + \mathrm{J}_\xi = 0, & \mathrm{Y} + \mathrm{J}_\eta = 0, & \mathrm{Z} + \mathrm{J}_\zeta = 0, \\ \mathrm{L} + \mathrm{J}_\lambda = 0, & \mathrm{M} + \mathrm{J}_\mu = 0, & \mathrm{N} + \mathrm{J}_\nu = 0, \end{array} \right.
$$

$$
(33) \qquad \mathcal{O} + \mathrm{J}_n + \Pi = 0,
$$

$$
(34) \qquad \mathcal{C} + \mathrm{J}_\rho = 0, \qquad \mathcal{F} + \mathrm{J}_\gamma = 0,
$$

$$
(35) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathcal{A} + \mathrm{J}_p + \mathrm{F}_p + \mathfrak{G}_p \frac{p'}{|p'|} = 0, \\ & \mathcal{B} + \mathrm{J}_r + \mathrm{F}_r + \mathfrak{G}_r \frac{r'}{|r'|} = 0, \\ & \mathcal{E} + \mathrm{J}_g + \mathrm{F}_g + \mathfrak{G}_g \frac{g'}{|g'|} = 0, \end{aligned} \right.
$$

auxquelles il faut joindre la treizième équation

$$n' = 0, \tag{36}$$

qui résulte de la liaison (29), pour obtenir les treize équations du mouvement du système.

Les trois équations (35) n'ont de sens que si les trois quantités p', r', g' sont différentes de 0. Si l'une d'elles, p' par exemple, devenait égale à 0, la première n'aurait plus de sens.

Mais, d'autre part, l'hypothèse selon laquelle p' est différent de 0 peut fort bien, elle aussi, conduire à des résultats inacceptables.

En effet, la première équation (35) équivaut, en réalité, à deux équations distinctes, savoir : L'équation

$$\mathcal{A} + \mathrm{J}_p + \mathrm{F}_p + \mathfrak{G}_p = 0, \tag{35 bis}$$

que l'on ne doit employer que si p' est positif, et l'équation

$$\mathcal{A} + \mathrm{J}_p + \mathrm{F}_p - \mathfrak{G}_p = 0, \tag{35 ter}$$

que l'on ne doit point employer à moins que p' ne soit négatif.

Or, on peut fort bien se trouver dans les conjonctures suivantes : Si l'on remplace la première équation (35) par l'équation (35 *bis*), les équations du mouvement du système donnent pour p' une valeur négative; si, au contraire, on remplace la première équation (35) par l'équation (35 *ter*), les équations du mouvement du système fournissent pour p' une valeur positive.

Dans ce cas, l'hypothèse qu'il existe une vitesse de pivotement différente de 0 conduit, on le voit, à une contradiction; on est contraint de supposer que le corps **2** ne pivote pas sur le corps **1**, de poser constamment

$$p' = 0. \tag{36}$$

Mais alors, la mise en équation du problème doit être modifiée.

Doit-on considérer l'hypothèse (36) de la manière suivante :

La vitesse p' est nulle identiquement, mais la variation virtuelle δp n'est pas nécessairement nulle?

Dans ce cas, d'après le postulat que nous avons formulé, il suffira d'égaler F_p, G_p et, partant, $\mathfrak{G}_p$ à zéro.

Dès lors, la première équation (35) deviendra

$$\mathcal{A} + \mathrm{J}_p = 0. \tag{35$_{\text{IV}}$}$$

Mais alors, à la seule première équation (35), nous nous trouvons avoir substitué les deux équations (35_{IV}) et (36); comme le nombre des inconnues n'a pas changé, il est à prévoir que le nombre des équations sera devenu surabondant et que le nouveau problème conduira encore à des impossibilités.

Par conséquent, on doit regarder l'égalité (36) comme résultant de l'hypothèse suivante :

*Au problème primitif, reconnu impossible, nous substituons un nouveau problème qui diffère du précédent par l'*INTRODUCTION DE L'ÉQUATION DE LIAISON

$$\delta p = 0. \tag{36 bis}$$

Dans ce cas, on doit bien encore égaler à o les coefficients F_p, $G_{p'}$, $\mathfrak{G}_{p'}$; mais l'égalité (30) ne doit plus avoir lieu identiquement, elle doit avoir lieu seulement en vertu de la condition (36 *bis*); il doit donc exister une grandeur P dépendant de l'état des deux corps 1 et 2, de leurs vitesses et des actions qui s'exercent sur eux, telle que l'on ait identiquement

$$d\mathfrak{T}_e - \mathrm{E}\,\delta\Psi + d\mathfrak{T}_i + d\mathfrak{T}_w + d\mathfrak{T}_\psi - \Pi\,\delta n - \mathrm{P}\,\delta p = 0. \tag{30 bis}$$

Alors les coefficients G_r, G_g peuvent être ramenés à ne dépendre que de l'état des corps 1 et 2, des valeurs r' et g' *et des grandeurs* Π *et* P :

$$\left\{\begin{aligned} G_r &= \mathfrak{G}'_r(\Pi, \mathrm{P}, r', g'), \\ G_g &= \mathfrak{G}'_g(\Pi, \mathrm{P}, r', g'). \end{aligned}\right. \tag{31 bis}$$

La première égalité (35) est remplacée non par l'égalité (35_{IV}), mais par l'égalité

$$\mathcal{A} + \mathrm{J}_p + \mathrm{P} = 0. \tag{35_{V}}$$

La première égalité (35) est donc remplacée par les équations (35_{V}) et (36), ce qui augmente encore d'une unité le nombre des équations du problème; mais l'introduction de la nouvelle action de liaison P augmente aussi d'une unité le nombre des inconnues. Cette manière nouvelle d'envisager l'introduction de la relation (36) ne conduit donc plus à une impossibilité, comme la précédente méthode.

Ce que nous venons de dire au sujet du pivotement peut se répéter au sujet du roulement et du glissement.

Habituellement, on fait, au sujet du frottement entre solides, des hypothèses plus restreintes que celles dont nous avons donné l'exposé; on suppose que l'on a

$$(37)\qquad \begin{cases} F_p = 0, & F_r = 0, & F_g = 0, \\ \mathfrak{G}_p = H_p \Pi, & \mathfrak{G}_r = H_r \Pi, & \mathfrak{G}_g = H_g \Pi, \end{cases}$$

les quantités H_p, H_r, H_g dépendant exclusivement de l'état des corps 1 et 2, mais point des vitesses p', r', g' de pivotement, de roulement et de glissement, ni de pression Π.

CHAPITRE II.

ÉTABLISSEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES.

§ 1. — Viscosité et frottement a la surface de contact de deux corps, dont l'un au moins est fluide.

Au Chapitre précédent, nous avons supposé qu'il existait entre les corps 1 et 2 un nombre limité de liaisons dont chacune correspondait à un nombre également fini de conditions; nous avons été amenés alors à regarder les quantités $d\mathfrak{T}_w$, $d\mathfrak{T}_\psi$ comme la somme d'autant de termes distincts qu'il y avait de liaisons indépendantes et nous avons étudié en détail la forme d'un de ces termes.

Nous allons aborder maintenant un cas un peu plus compliqué.

Supposons que deux corps 1 et 2, dont l'un au moins est fluide, soient assujettis à demeurer en contact tout le long d'une certaine surface S. Si δx_1, δy_1, δz_1 sont les composantes du déplacement virtuel d'un point du corps 1, tandis que δx_2, δy_2, δz_2 sont les composantes du déplacement virtuel d'un point du corps 2, nous devrons avoir, à tout instant et en tout point de la surface S,

$$(38)\quad (\delta x_1 - \delta x_2)\cos(N, x) + (\delta y_1 - \delta y_2)\cos(N, y) + (\delta z_1 - \delta z_2)\cos(N, z) = 0,$$

N étant la normale à la surface S dirigée, par exemple, vers l'intérieur du corps 2.

La liaison imposée ici s'exprime non par un nombre limité de conditions, mais par une condition vérifiée en tous les points de la surface S, c'est-à-dire par une infinité d'équations; ou mieux, on peut dire que nous imposons aux corps 1 et 2 une infinité de liaisons bilatérales dont chacune se rapporte à un point de la surface S et s'exprime par la condition (38) qui se rapporte à ce point.

Nous sommes amenés ainsi à penser que le travail de viscosité et le travail de frottement au contact des corps 1 et 2 peuvent se mettre sous la forme

$$d\mathfrak{T}_w = \int d\tau_w \, dS, \qquad d\mathfrak{T}_\psi = \int d\tau_\psi \, dS, \tag{39}$$

$d\tau_w$, $d\tau_\psi$ vérifiant des hypothèses analogues à celles que nous avons énoncées, au Chapitre précédent, pour $d\mathfrak{T}_w$, $d\mathfrak{T}_\psi$.

Soient u_1, v_1, w_1 les composantes de la vitesse en un point du corps 1 et u_2, v_2, w_2 les composantes de la vitesse en un point du corps 2. La condition (38) exige que l'on ait, à tout instant et en tout point de la surface S,

$$(u_1 - u_2)\cos(N, x) + (v_1 - v_2)\cos(N, y) + (w_1 - w_2)\cos(N, z) = 0. \tag{40}$$

La vitesse relative est donc tangente à la surface S; en chaque point M de la surface S et à chaque instant, nous désignerons par Mr la tangente à la surface S qui marque la direction de la vitesse relative, dont $(u_1 - u_2)$, $(v_1 - v_2)$, $(w_1 - w_2)$ sont les composantes, et par r' cette vitesse relative, comptée positivement suivant Mr.

Soit Ms une ligne tangente en M à la surface S et perpendiculaire à Mr; par définition, nous aurons

$$(u_1 - u_2)\cos(s, x) + (v_1 - v_2)\cos(s, y) + (w_1 - w_2)\cos(s, z) = 0. \tag{41}$$

Considérons, pour les corps 1 et 2, un déplacement virtuel quelconque, soumis on non à la condition (38); dans cette modification, le déplacement relatif des corps 1 et 2, au voisinage du point M, est déterminé si l'on connaît les trois quantités

$$\left\{\begin{aligned} \delta N &= (\delta x_1 - \delta x_2)\cos(N, x) + (\delta y_1 - \delta y_2)\cos(N, y) + (\delta z_1 - \delta z_2)\cos(N, z), \\ \delta r &= (\delta x_1 - \delta x_2)\cos(r, x) + (\delta y_1 - \delta y_2)\cos(r, y) + (\delta z_1 - \delta z_2)\cos(r, z), \\ \delta s &= (\delta x_1 - \delta x_2)\cos(s, x) + (\delta y_1 - \delta y_2)\cos(s, y) + (\delta z_1 - \delta z_2)\cos(s, z). \end{aligned}\right. \tag{42}$$

Si les corps 1 et 2 sont isotropes, nous admettrons que ces quantités δN, δr, δs sont les variations normales privilégiées dont dépendent $d\tau_w$ et $d\tau_\psi$.

Dans le temps dt se produit une modification réelle pour laquelle on a

$$\delta N = N' \, dt, \qquad \delta r = r' \, dt, \qquad \delta s = s' \, dt.$$

Mais les égalités (40), (42), (41) donnent sans peine

$$N' = 0, \qquad s' = 0.$$

Les quantités $d\tau_w$, $d\tau_\psi$ ne doivent donc renfermer ni terme en δN, ni terme en δs, en sorte que l'on aura

$$(43)\qquad d\mathcal{E}_w = \int \mathrm{F}\,\delta r\,d\mathrm{S},$$

$$(44)\qquad d\mathcal{E}_\psi = \int \mathrm{G}\,\frac{r'}{|r'|}\,\delta r\,d\mathrm{S}.$$

Ces égalités vont se mettre sous une forme un peu différente.

F dépend de l'état des corps 1 et 2 au voisinage du point M et de la vitesse r'; nulle avec r', cette quantité est toujours de signe contraire à r'; on peut donc écrire

$$(45)\qquad \mathrm{F} = f r',$$

f étant une fonction de r' et de l'état des corps 1 et 2 au voisinage du point M; cette quantité est toujours négative :

$$(46)\qquad f < 0.$$

D'autre part, la seconde égalité (42) donne

$$(47)\qquad r'\,\delta r = (u_1 - u_2)(\delta x_1 - \delta x_2) + (v_1 - v_2)(\delta y_1 - \delta y_2) + (w_1 - w_2)(\delta z_1 - \delta z_2).$$

Les égalités (43), (45) et (47) donnent

$$(48)\qquad d\mathcal{E}_w = \int f\,[(u_1 - u_2)(\delta x_1 - \delta x_2) + (v_1 - v_2)(\delta y_1 - \delta y_2) + (w_1 - w_2)(\delta z_1 - \delta z_2)]\,d\mathrm{S}.$$

Si l'on observe que

$$(49)\qquad |r'| = [(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2]^{\frac{1}{2}},$$

les égalités (44) et (47) donnent

$$(50)\qquad d\mathcal{E}_\psi = \int \mathrm{G}\,\frac{[(u_1 - u_2)(\delta x_1 - \delta x_2) + (v_1 - v_2)(\delta y_1 - \delta y_2) + (w_1 - w_2)(\delta z_1 - \delta z_2)]}{[(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2]^{\frac{1}{2}}}\,d\mathrm{S}.$$

L'équation générale du mouvement du système peut désormais s'écrire sans difficulté.

La quantité $-\mathrm{E}\,\delta\Psi$ est la somme de deux termes; l'un est le travail virtuel des actions que le corps 2 exerce sur le corps 1, l'autre est le travail virtuel des actions que le corps 1 exerce sur le corps 2; si donc on désigne par $d\mathcal{E}_{e1}$ le travail virtuel des actions que le corps 1 subit de la part des corps extérieurs, *y compris le corps* 2, par $d\mathcal{E}_{e2}$ le travail virtuel des actions que le corps 2 subit de la part des corps extérieurs, *y compris le corps* 1, on pourra écrire

$$d\mathfrak{T}_e - \mathrm{E}\,\delta\Psi = d\mathfrak{T}_{e1} + d\mathfrak{T}_{e2}$$

et l'égalité (20) pourra s'écrire

$$(51)\qquad \begin{aligned} & d\mathfrak{T}_{e1} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F}_1 + d\mathfrak{T}_{i1} + d\mathfrak{T}_{v1} + d\mathfrak{T}_{\varphi 1} \\ & + d\mathfrak{T}_{e2} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F}_2 + d\mathfrak{T}_{i2} + d\mathfrak{T}_{v2} + d\mathfrak{T}_{\varphi 2} \\ & \qquad + d\mathfrak{T}_w + d\mathfrak{T}_\psi = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité ne doit pas avoir lieu quelles que soient les modifications virtuelles imposées aux corps 1 et 2, mais seulement pour les modifications virtuelles qui respectent la condition de liaison (38). Dès lors, les principes du calcul des variations nous enseignent qu'il existe une quantité ϖ, variable d'une manière continue le long de la surface S, telle que l'égalité

$$(52)\qquad \begin{aligned} & d\mathfrak{T}_{e1} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F}_1 + d\mathfrak{T}_{i1} + d\mathfrak{T}_{v1} + d\mathfrak{T}_{\varphi 1} \\ & + d\mathfrak{T}_{e2} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F}_2 + d\mathfrak{T}_{i2} + d\mathfrak{T}_{v2} + d\mathfrak{T}_{\varphi 2} \\ & \qquad + d\mathfrak{T}_w + d\mathfrak{T}_\psi \\ & - \int \varpi[(\delta x_1 - \delta x_2)\cos(\mathrm{N}, x) + (\delta y_1 - \delta y_2)\cos(\mathrm{N}, y) + (\delta z_1 - \delta z_2)\cos(\mathrm{N}, z)]\,d\mathrm{S} = 0 \end{aligned}$$

ait lieu quelle que soit la modification virtuelle imposée à chacun des corps 1 et 2.

En outre, la quantité G pourra s'exprimer en fonction de l'état des corps 1 et 2 au voisinage du point M auquel elle se rapporte, de r' et de ϖ.

Les corps 1 et 2 étant supposées isotropes, l'état de chacun d'eux en un point est déterminé lorsqu'on connaît sa densité et sa température en ce point. Soient ρ_1, ρ_2 les densités des corps 1 et 2 au voisinage du point M; soit T leur commune température au voisinage de ce point; nous pourrons écrire

$$(53)\qquad \mathrm{G} = \mathfrak{G}(\rho_1, \rho_2, \mathrm{T}, r', \varpi) < 0.$$

Nous aurons aussi

$$(46\ bis)\qquad f = f(\rho_1, \rho_2, \mathrm{T}, r') < 0.$$

§ 2. — Conditions vérifiées a la surface de contact de deux fluides.

Supposons que le corps 1 soit un corps fluide. Nous aurons alors, en conservant les hypothèses faites dans la première Partie de ces *Recherches,*

$$d\mathfrak{T}_{\varphi 1} = 0.$$

En outre, $d\mathfrak{T}_{v1}$ sera donné par ce que nous avons dit, en cette première Partie, sur la viscosité au sein des fluides.

Donnons d'abord au fluide 1 une modification virtuelle telle que δx_1, δy_1, δz_1 s'annulent tout le long de la surface S; laissons le corps 2 invariable. L'égalité (52) deviendra

$$d\mathfrak{T}_{e1} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathfrak{F}_1 + d\mathfrak{T}_{i1} + d\mathfrak{T}_{v1} = 0.$$

C'est l'équation (2) de la première Partie de ces *Recherches*. Elle entraîne comme conséquence l'existence, au sein du fluide 1, des équations de l'Hydrodynamique.

Celles-ci admises, on peut obtenir, par un calcul que nous avons déjà fait [1], le résultat suivant:

Dans une modification virtuelle *absolument quelconque* du fluide 1, on a

$$(54)\qquad \begin{aligned} d\mathfrak{T}_{e1} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathfrak{F}_1 + d\mathfrak{T}_{i1} + d\mathfrak{T}_{v1} \\ = \int \Big\{ [\Pi_1 \cos(\mathrm{N}, x) + p_{x1}]\,\delta x_1 + [\Pi_1 \cos(\mathrm{N}, y) + p_{y1}]\,\delta y_1 \\ + [\Pi_1 \cos(\mathrm{N}, z) + p_{z1}]\,\delta z_1 \Big\}\, d\mathrm{S}, \end{aligned}$$

Π_1 étant la pression à l'intérieur du fluide 1 et p_{x1}, p_{y1}, p_{z1} étant, pour ce fluide, les composantes de la pression de viscosité, telles que les déterminent les égalités (48) et (51), en la première Partie de ces *Recherches*.

Supposons maintenant que le corps 2 soit, lui aussi, un fluide; en raisonnant comme nous venons de le faire, nous prouverons, en premier lieu, que les équations de l'Hydrodynamique doivent être vérifiées en tous les points de ce fluide; en second lieu, que l'on a, en toute modification virtuelle du fluide 2,

$$(54\ bis)\qquad \begin{aligned} d\mathfrak{T}_{e2} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathfrak{F}_2 + d\mathfrak{T}_{i2} + d\mathfrak{T}_{v2} \\ = -\int \Big\{ [\Pi_2 \cos(\mathrm{N}, x) - p_{x2}]\,\delta x_2 + [\Pi_2 \cos(\mathrm{N}, y) - p_{y2}]\,\delta y_2 \\ + [\Pi_2 \cos(\mathrm{N}, z) - p_{z2}]\,\delta z_2 \Big\}\, d\mathrm{S}. \end{aligned}$$

Dès lors, en vertu des égalités (48), (50), (53), (54) et (54 *bis*), l'égalité (52)

---

[1] *Recherches sur l'Hydrodynamique*, II^{e} Partie, Chapitre I, § 2.

devient

$$(55)\quad \int \left\{ \begin{aligned} &\left[(\Pi_1-\varpi)\cos(N,x)+p_{x1}+f(u_1-u_2)+\mathfrak{G}\frac{u_1-u_2}{|r'|}\right]\delta x_1 \\ &+\left[(\Pi_1-\varpi)\cos(N,y)+p_{y1}+f(v_1-v_2)+\mathfrak{G}\frac{v_1-v_2}{|r'|}\right]\delta y_1 \\ &+\left[(\Pi_1-\varpi)\cos(N,z)+p_{z1}+f(w_1-w_2)+\mathfrak{G}\frac{w_1-w_2}{|r'|}\right]\delta z_1 \\ &-\left[(\Pi_2-\varpi)\cos(N,x)+p_{x2}+f(u_1-u_2)+\mathfrak{G}\frac{u_1-u_2}{|r'|}\right]\delta x_2 \\ &-\left[(\Pi_2-\varpi)\cos(N,y)+p_{y2}+f(v_1-v_2)+\mathfrak{G}\frac{v_1-v_2}{|r'|}\right]\delta y_2 \\ &-\left[(\Pi_2-\varpi)\cos(N,z)+p_{z2}+f(w_1-w_2)+\mathfrak{G}\frac{w_1-w_2}{|r'|}\right]\delta z_2 \end{aligned} \right\} dS = 0.$$

Les six quantités δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, δy_2, δz_2 sont entièrement arbitraires; donc, en chaque point de la surface S, les coefficients qui, sous le signe $\int$, affectent ces six quantités, doivent être égaux à o. On obtient ainsi six équations qui doivent être vérifiées en tout point de la surface S. Au lieu de transcrire simplement ces six équations, nous allons leur donner une forme symétrique.

Dans ce but, nous désignerons par n_1 la normale dirigée vers l'intérieur du fluide 1 et par n_2 la normale dirigée vers l'intérieur du fluide 2; n_2 coïncidera avec N et n_1 sera opposé à N; en outre, nous aurons [I^re Partie, égalités (48)]

$$(56)\quad \left\{ \begin{aligned} &p_{x1}=-[\nu_{x1}\cos(n_1,x)+\tau_{z1}\cos(n_1,y)+\tau_{y1}\cos(n_1,z)], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &p_{x2}=-[\nu_{x2}\cos(n_2,x)+\tau_{z2}\cos(n_2,y)+\tau_{y2}\cos(n_2,z)], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Dès lors, nos six équations pourront s'écrire

$$(57)\quad \left\{ \begin{aligned} &(\Pi_1+\nu_{x1}-\varpi)\cos(n_1,x)+\tau_{z1}\cos(n_1,y)+\tau_{y1}\cos(n_1,z)=\left(f+\frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(u_1-u_2), \\ &\tau_{z1}\cos(n_1,x)+(\Pi_1+\nu_{y1}-\varpi)\cos(n_1,y)+\tau_{x1}\cos(n_1,z)=\left(f+\frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(v_1-v_2), \\ &\tau_{y1}\cos(n_1,x)+\tau_{x1}\cos(n_1,y)+(\Pi_1+\nu_{z1}-\varpi)\cos(n_1,z)=\left(f+\frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(w_1-w_2), \\ &(\Pi_2+\nu_{x2}-\varpi)\cos(n_2,x)+\tau_{z2}\cos(n_2,y)+\tau_{y2}\cos(n_2,z)=\left(f+\frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(u_2-u_1), \\ &\tau_{z2}\cos(n_2,x)+(\Pi_2+\nu_{y2}-\varpi)\cos(n_2,y)+\tau_{x2}\cos(n_2,z)=\left(f+\frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(v_2-v_1), \\ &\tau_{y2}\cos(n_2,x)+\tau_{x2}\cos(n_2,y)+(\Pi_2+\nu_{z2}-\varpi)\cos(n_2,z)=\left(f+\frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(w_2-w_1). \end{aligned} \right.$$

A ces égalités il faut joindre la condition (40) qui peut s'écrire indifféremment sous l'une des deux formes

$$(40\ bis)\quad \begin{cases} (u_1-u_2)\cos(n_1,x)+(v_1-v_2)\cos(n_1,y)+(w_1-w_2)\cos(n_1,z)=0, \\ (u_2-u_1)\cos(n_2,x)+(v_2-v_1)\cos(n_2,y)+(w_2-w_1)\cos(n_2,z)=0. \end{cases}$$

De ces égalités tirons quelques conséquences.

Si nous remarquons que

$$\cos(n_1,x)+\cos(n_2,x)=0,$$
$$\cos(n_1,y)+\cos(n_2,y)=0,$$
$$\cos(n_1,z)+\cos(n_2,z)=0$$

et si nous tenons compte des égalités (56), nous voyons que les égalités (57) donnent

$$(58)\quad \begin{cases} p_{x1}+p_{x2}=(\Pi_1-\Pi_2)\cos(n_1,x), \\ p_{y1}+p_{y2}=(\Pi_1-\Pi_2)\cos(n_1,y), \\ p_{z1}+p_{z2}=(\Pi_1-\Pi_2)\cos(n_1,z). \end{cases}$$

Le vecteur p_1, *dont les composantes sont* p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}, *et le vecteur* p_2, *dont les composantes sont* p_{x2}, p_{y2}, p_{z2}, *ont une résultante dirigée suivant la normale* n_1 *et ayant pour grandeur* $(\Pi_1-\Pi_2)$; *le plan de ces deux vecteurs est donc normal à la surface* S.

Ce plan est facile à déterminer.

Multiplions respectivement les trois premières égalités (57) par $\cos(s,x)$, $\cos(s,y)$, $\cos(s,z)$; ajoutons membre à membre les résultats obtenus; observons que l'on a

$$\cos(n_1,x)\cos(s,x)+\cos(n_1,y)\cos(s,y)+\cos(n_1,z)\cos(s,z)=0$$

et

$$(u_1-u_2)\cos(s,x)+(v_1-v_2)\cos(s,y)+(w_1-w_2)\cos(s,z)=0.$$

Nous trouvons la première égalité

$$(59)\quad \begin{cases} p_{x1}\cos(s,x)+p_{y1}\cos(s,y)+p_{z1}\cos(s,z)=0, \\ p_{x2}\cos(s,x)+p_{y2}\cos(s,y)+p_{z2}\cos(s,z)=0. \end{cases}$$

La seconde se démontre d'une manière analogue.

Le plan des deux vecteurs p_1, p_2 *est le plan normal à la surface* S, *mené par la vitesse relative* v' *dont* (u_1-u_2), (v_1-v_2), (w_1-w_2) *sont les composantes.*

Multiplions respectivement les trois premières égalités (57) par $\cos(r, x)$, $\cos(r, y)$, $\cos(r, z)$ et ajoutons-les membre à membre en observant que

$$\cos(n_1, x)\cos(r, x) + \cos(n_1, y)\cos(r, y) + \cos(n_1, z)\cos(r, z) = 0,$$
$$(u_1 - u_2)\cos(r, x) + (v_1 - v_2)\cos(r, y) + (w_1 - w_2)\cos(r, z) = r'.$$

Nous trouvons la première égalité

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} p_{x1}\cos(r, x) + p_{y1}\cos(r, y) + p_{z1}\cos(r, z) &= -\,\mathfrak{G}(r', \varpi)\frac{r'}{|r'|} - fr', \\ p_{x1}\cos(r, x) + p_{y1}\cos(r, y) + p_{z1}\cos(r, z) &= \,\mathfrak{G}(r', \varpi)\frac{r'}{|r'|} + fr'. \end{aligned} \right.$$

La seconde se démontre de même.

Ces égalités nous montrent, en premier lieu, que *les vecteurs p_1, p_2 ont, sur la surface* S, *des projections égales et directement opposées.*

D'ailleurs, si l'on tient compte des inégalités (46) et (53), on voit que *la projection sur la surface* S *du vecteur p_1 est dirigée comme la vitesse relative r', tandis que la projection du vecteur p_2 est dirigée en sens contraire.*

La quantité ϖ, qui figure dans l'expression de $\mathfrak{G}$, est facile à déterminer. Multiplions la première des égalités (57) par $\cos(n_1, x)$, la seconde par $\cos(n_1, y)$, la troisième par $\cos(n_1, z)$, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte de la première condition (40 *bis*); nous trouvons la première des égalités

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} \varpi &= \Pi_1 - p_{x1}\cos(n_1, x) - p_{y1}\cos(n_1, y) - p_{z1}\cos(n_1, z), \\ \varpi &= \Pi_2 - p_{x2}\cos(n_2, x) - p_{y2}\cos(n_2, y) - p_{z2}\cos(n_2, z). \end{aligned} \right.$$

La seconde se démontre de même.

La quantité ϖ s'obtient en retranchant de la pression Π_1 la projection du vecteur p_1 sur la normale n_1; ou bien en retranchant de la pression Π_2 la projection du vecteur p_2 sur la normale n_2.

Soient

$$p_{n1} = p_{x1}\cos(n_1, x) + p_{y1}\cos(n_1, y) + p_{z1}\cos(n_1, z)$$

la projection du vecteur p_1 sur la normale n_1 et

$$p_{n2} = p_{x2}\cos(n_2, x) + p_{y2}\cos(n_2, y) + p_{z2}\cos(n_2, z)$$

la projection du vecteur p_2 sur la normale n_2. Les égalités (61) deviendront

$$(61\ bis) \qquad \Pi_1 - \varpi = p_{n1}, \qquad \Pi_2 - \varpi = p_{n2}$$

et les égalités (57) pourront s'écrire :

$$(57\ bis)\quad \begin{cases} p_{n1}\cos(n_1, x) - p_{x1} = \left(f + \dfrac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(u_1 - u_2), \\ p_{n1}\cos(n_1, y) - p_{y1} = \left(f + \dfrac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(v_1 - v_2), \\ p_{n1}\cos(n_1, z) - p_{z1} = \left(f + \dfrac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(w_1 - w_2), \\ p_{n2}\cos(n_2, x) - p_{x2} = \left(f + \dfrac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(u_2 - u_1), \\ p_{n2}\cos(n_2, y) - p_{y2} = \left(f + \dfrac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(v_2 - v_1), \\ p_{n2}\cos(n_2, z) - p_{z2} = \left(f + \dfrac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(w_2 - w_1). \end{cases}$$

Les auxiliaires Π_1, Π_2, ϖ sont éliminées des conditions aux limites mises sous cette forme.

Tous ces théorèmes n'ont de sens qu'autant que la vitesse relative r' est différente de o. Or il peut arriver que cette supposition implique contradiction ; nous allons en donner un exemple.

La fonction $\mathfrak{G}(\rho_1, \rho_2, T, r', \varpi)$, qui est toujours négative, selon l'inégalité (53), peut dépendre de r' ; supposons, ce qui paraît conforme à tous les enseignements de l'expérience, qu'elle soit indépendante de r', ou bien que sa valeur absolue croisse en même temps que la valeur absolue de r' ; si nous posons

$$\mathfrak{G}(\rho_1, \rho_2, T, 0, \varpi) = \Gamma(\rho', \rho_2, T, \varpi),$$

nous aurons

$$(62)\qquad \mathfrak{G}(\rho_1, \rho_2, T, r', \varpi) \leqq \Gamma(\rho_1, \rho_2, T, \varpi).$$

En vertu des inégalités (46 *bis*) et (53), le second membre de chacune des égalités (60) a une valeur absolue qui ne peut être inférieure à $-\Gamma(\rho_1, \rho_2, T, \varpi)$. Dès lors, les égalités (60) nous donnent la proposition suivante :

Si la valeur absolue commune des projections des deux vecteurs p_1, p_2 sur la surface S *est inférieure à* $-\Gamma(\rho_1, \rho_2, T, \varpi)$, *la vitesse relative r' des deux fluides le long de la surface* S *ne peut différer de* o ; *les deux fluides sont alors soudés le long de cette surface.*

On est assuré, en particulier, que les deux fluides demeurent sans cesse soudés l'un à l'autre le long de leur surface de contact lorsqu'on suppose nulle la viscosité intrinsèque de chacun d'eux sans supposer nul le frottement au contact.

Dans ce cas, en effet, les deux vecteurs p_1, p_2 sont identiquement nuls; leurs projections sur la surface S sont donc inférieures à $-\Gamma(\rho_1, \rho_2, T, \varpi)$.

Il en est encore de même si l'on suppose nul le frottement, mais non la viscosité, au contact des deux fluides sans viscosité intrinsèque :

$$\mathfrak{G} = 0, \qquad f < 0.$$

Dans ce cas, en effet, si les deux fluides n'étaient pas soudés l'un à l'autre, on pourrait écrire les égalités (57) réduites à

$$(63)\quad \left\{ \begin{array}{ll} (\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, x) = f(u_1 - u_2), & (\Pi_2 - \varpi)\cos(n_2, x) = f(u_2 - u_1), \\ (\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, y) = f(v_1 - v_2), & (\Pi_2 - \varpi)\cos(n_2, y) = f(v_2 - v_1), \\ (\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, z) = f(w_1 - w_2), & (\Pi_2 - \varpi)\cos(n_2, z) = f(w_2 - w_1). \end{array} \right.$$

Multiplions respectivement les trois premières égalités (67) par $\cos(r, x)$, $\cos(r, y)$, $\cos(r, z)$, et ajoutons-les membre à membre; nous trouvons

$$fr' = 0 \qquad \text{ou} \qquad r' = 0,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Donc, *deux fluides sans viscosité intrinsèque sont forcément soudés l'un à l'autre le long de la surface de contact, à moins que la viscosité de contact et le frottement de contact ne soient nuls tous deux.*

Supposons maintenant que l'un des deux fluides, le fluide 1, soit dénué de viscosité intérieure, tandis que le fluide 2 est visqueux. Le vecteur p_1 sera encore nul, tandis que le vecteur p_2 sera, en général, différent de 0.

En répétant les raisonnements précédents, nous démontrerons encore les propositions suivantes :

Si deux fluides, dont l'un n'a aucune viscosité intérieure, sont en contact, ils sont soudés le long de la surface de contact, à moins que la viscosité de contact et le frottement de contact ne soient nuls tous deux.

Comment faut-il modifier les conditions aux limites dans le cas où le glissement des deux fluides l'un sur l'autre est une impossibilité?

En tout point de la surface d'adhérence des deux fluides, nous devons écrire $r' = 0$, ce qui, joint aux égalités (40 *bis*), équivaut à

$$(64)\qquad u_2 - u_1 = 0, \qquad v_2 - v_1 = 0, \qquad w_2 - w_1 = 0.$$

Si nous ne regardions pas l'adhérence des deux fluides comme constituant une nouvelle liaison qui entraîne, en même temps que les égalités (64), les conditions

$$\delta x_2 - \delta x_1 = 0, \qquad \delta y_2 - \delta y_1 = 0, \qquad \delta z_2 - \delta z_1 = 0, \tag{65}$$

nous devrions faire simplement

$$f = 0, \qquad \mathfrak{G} = 0, \tag{66}$$

sans apporter dans nos équations aucune autre modification.

Suivons les conséquences de cette manière de voir.

Si on l'adopte, on doit encore écrire les équations (57), mais à la condition de remplacer par o tous les seconds membres, ce qui donnera

$$\left\{\begin{array}{ll} (\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, x) = p_{x1}, & (\Pi_2 - \varpi)\cos(n_2, x) = p_{x2}, \\ (\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, y) = p_{y1}, & (\Pi_2 - \varpi)\cos(n_2, y) = p_{y2}, \\ (\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, z) = p_{z1}, & (\Pi_2 - \varpi)\cos(n_2, z) = p_{z2}. \end{array}\right. \tag{67}$$

Soit d une direction quelconque tangente à la surface S; multiplions respectivement les trois premières équations (67) par $\cos(d, x)$, $\cos(d, y)$, $\cos(d, z)$, et ajoutons-les membre à membre en observant que

$$\cos(n_1, x)\cos(d, x) + \cos(n_1, y)\cos(d, y) + \cos(n_1, z)\cos(d, z) = 0;$$

nous trouvons la première des égalités

$$\left\{\begin{array}{l} p_{x1}\cos(d, x) + p_{y1}\cos(d, y) + p_{z1}\cos(d, z) = 0, \\ p_{x2}\cos(d, x) + p_{y2}\cos(d, y) + p_{z2}\cos(d, z) = 0. \end{array}\right. \tag{68}$$

La seconde se démontre d'une manière analogue.

Ces deux égalités entraînent la conséquence suivante :

Lorsque deux fluides sont soudés l'un à l'autre le long de la surface S, *les deux vecteurs* p_1, p_2 *sont normaux en chaque point à la surface* S.

Soit p_1 la valeur du premier vecteur, comptée positivement suivant la normale n_1; soit p_2 la valeur du second vecteur, comptée positivement selon la normale n_2; nous aurons

$$p_{x1}\cos(n_1, x) + p_{y1}\cos(n_1, y) + p_{z1}\cos(n_1, z) = p_1,$$

$$p_{x2}\cos(n_2, x) + p_{y2}\cos(n_2, y) + p_{z2}\cos(n_2, z) = p_2.$$

Ces égalités, jointes aux égalités (61), nous montrent que *lorsque les deux fluides sont soudés l'un à l'autre le long de la surface* S, *on a les deux éga-*

lités

$$\Pi_1 - \varpi = p, \qquad \Pi_2 - \varpi = p_2, \tag{69}$$

d'où l'on tire la troisième égalité

$$\Pi_1 - \Pi_2 = p_1 - p_2. \tag{70}$$

Supposons maintenant, à l'imitation de ce qui a été dit au Chapitre I, § 2, qu'au lieu d'admettre, tout le long de la surface d'adhérence, les égalités (64) sans admettre les conditions (65), nous regardions cette adhérence comme constituant une nouvelle liaison qui impose aux modifications virtuelles, en tout point de la surface d'adhérence, les conditions (65). Nous devrons encore poser, dans nos formules,

$$f = 0, \qquad \mathfrak{G} = 0. \tag{66}$$

Dès lors, l'égalité (51) devra avoir lieu, non plus pour toutes les modifications virtuelles qui respectent la condition (38), mais seulement pour toutes les modifications virtuelles qui respectent les trois conditions (65). Il devra exister trois fonctions ϖ_x, ϖ_y, ϖ_z, variables d'une manière continue le long de la surface de contact, telles que l'égalité

$$\begin{aligned} &d\mathfrak{T}_{e1} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathfrak{F}_1 + d\mathfrak{T}_{i1} + d\mathfrak{T}_{v1} + d\mathfrak{T}_{\varphi 1} \\ &+ d\mathfrak{T}_{e2} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathfrak{F}_2 + d\mathfrak{T}_{i2} + d\mathfrak{T}_{v2} + d\mathfrak{T}_{\varphi 2} \\ &- \int [\varpi_x(\delta x_1 - \delta x_2) + \varpi_y(\delta y_1 - \delta y_2) + \varpi_z(\delta z_1 - \delta z_2)]\, d\mathrm{S} = 0 \end{aligned} \tag{52 bis}$$

ait lieu quelle que soit la modification virtuelle imposée aux corps 1 et 2.

Nous n'avons pas fait figurer dans cette égalité les quantités $d\mathfrak{T}_w$ et $d\mathfrak{T}_\psi$, qui sont nulles en vertu des égalités (66).

La substitution de l'égalité (52 *bis*) à l'égalité (52) transforme l'égalité (55) en

$$\begin{aligned} \int \Big\{ & [\Pi_1 \cos(\mathrm{N}, x) - \varpi_x + p_{x1}]\,\delta x_1 + [\Pi_1 \cos(\mathrm{N}, y) - \varpi_y + p_{y1}]\,\delta y_1 \\ & + [\Pi_1 \cos(\mathrm{N}, z) - \varpi_z + p_{z1}]\,\delta z_1 \\ & - [\Pi_2 \cos(\mathrm{N}, x) - \varpi_x + p_{x2}]\,\delta x_2 - [\Pi_2 \cos(\mathrm{N}, y) - \varpi_y + p_{y2}]\,\delta y_2 \\ & - [\Pi_2 \cos(\mathrm{N}, z) - \varpi_z + p_{z2}]\,\delta z_2 \Big\}\, d\mathrm{S} = 0. \end{aligned} \tag{55 bis}$$

Cette égalité entraîne, en tout point de la surface d'adhérence, les égalités

$$\left\{ \begin{aligned} &\Pi_1 \cos(n_1, x) + \varpi_x = p_{x1}, \qquad \Pi_2 \cos(n_2, x) - \varpi_x = p_{x2}, \\ &\Pi_1 \cos(n_1, y) + \varpi_y = p_{y1}, \qquad \Pi_2 \cos(n_2, y) - \varpi_y = p_{y2}, \\ &\Pi_1 \cos(n_1, z) + \varpi_z = p_{z1}, \qquad \Pi_2 \cos(n_2, z) - \varpi_z = p_{z2}. \end{aligned} \right. \tag{71}$$

Ces égalités (71) ont encore pour conséquence les relations (58) et le théorème qui les traduit.

On voit en outre que si l'on désigne par t une direction quelconque tangente à la surface d'adhérence, on tire des égalités (71) les égalités

$$
\begin{aligned}
(72)\qquad & p_{x1}\cos(t,x)+p_{y1}\cos(t,y)+p_{z1}\cos(t,z) \\
&= -p_{x2}\cos(t,x)-p_{y2}\cos(t,y)-p_{z2}\cos(t,z) \\
&= \varpi_x\cos(t,x)+\varpi_y\cos(t,y)+\varpi_z\cos(t,z).
\end{aligned}
$$

Le vecteur (p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}) *et le vecteur* (p_{x2}, p_{y2}, p_{z2}) *ont encore, sur la surface de contact des deux fluides, des projections égales et directement opposées.*

§ 3. — Conditions vérifiées a la surface de contact d'un solide et d'un fluide.

Nous imaginerons maintenant que le corps 1 continue à être un fluide, mais que le corps 2 soit un solide invariable et isotrope.

Le déplacement virtuel le plus général de ce solide consistera en trois rotations $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ autour des axes Ox, Oy, Oz, et en trois translations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ suivant ces trois axes. Les composantes δx_2, δy_2, δz_2 du déplacement virtuel le plus général d'un point x_2, y_2, z_2 de ce solide seront

$$
(73)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\delta x_2 &= \delta\xi - z_2\,\delta\mu + y_2\,\delta\nu, \\
\delta y_2 &= \delta\eta - x_2\,\delta\nu + z_2\,\delta\lambda, \\
\delta z_2 &= \delta\zeta - y_2\,\delta\lambda + x_2\,\delta\mu.
\end{aligned}
\right.
$$

Les composantes de la vitesse du même point seront

$$
(74)\qquad \left\{
\begin{aligned}
u_2 &= \xi' - z_2\,\mu' + y_2\,\nu', \\
v_2 &= \eta' - x_2\,\nu' + z_2\,\lambda', \\
w_2 &= \zeta' - y_2\,\lambda' + x_2\,\mu'.
\end{aligned}
\right.
$$

Par des calculs connus, on mettra $d\mathfrak{T}_{e2}$ et $d\mathfrak{T}_{i2}$ sous les formes

$$(75)\qquad d\mathfrak{T}_{e2} = \mathrm{X}\,\delta\xi + \mathrm{Y}\,\delta\eta + \mathrm{Z}\,\delta\zeta + \mathrm{L}\,\delta\lambda + \mathrm{M}\,\delta\mu + \mathrm{N}\,\delta\nu,$$

$$(76)\qquad d\mathfrak{T}_{i2} = \mathrm{J}_x\,\delta\xi + \mathrm{J}_y\,\delta\eta + \mathrm{J}_z\,\delta\zeta + \mathrm{J}_l\,\delta\lambda + \mathrm{J}_m\,\delta\mu + \mathrm{J}_n\,\delta\nu,$$

tandis que, le corps considéré étant un solide invariable, l'on aura

$$(77)\qquad \delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F}_2 = 0, \qquad d\mathfrak{T}_{v2} = 0, \qquad d\mathfrak{T}_{\varphi 2} = 0.$$

Ces valeurs (75), (76), (77) devront être reportées dans l'égalité (52).

En raisonnant comme nous l'avons fait au paragraphe précédent pour obtenir l'égalité (54), nous trouverons que l'on a, en une modification quelconque du fluide,

$$(78)\quad d\mathfrak{G}_{e1} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F}_1 + d\mathfrak{G}_{i1} + d\mathfrak{G}_{v1} = -\int \Big\{ [\Pi_1\cos(n_1,x) - p_{x1}]\,\delta x_1 + [\Pi_1\cos(n_1,y) - p_{y1}]\,\delta y_1 + [\Pi_1\cos(n_1,z) - p_{z1}]\,\delta z_1 \Big\}\,dS,$$

S étant la surface de contact du solide et du fluide et n_1 étant, en chaque point de cette surface, la demi-normale dirigée vers l'intérieur du fluide.

En vertu des égalités (73), (75), (76), (77), (78), (48), (50) et (53), l'égalité (52) pourra s'écrire

$$
\begin{aligned}
(79)\quad \int \Big\{ & \left[(\varpi - \Pi_1)\cos(n_1,x) + p_{x1} + f(u_1 - u_2) + \mathfrak{G}\frac{u_1 - u_2}{|r'|}\right]\delta x_1 \\
& + \left[(\varpi - \Pi_1)\cos(n_1,y) + p_{y1} + f(v_1 - v_2) + \mathfrak{G}\frac{v_1 - v_2}{|r'|}\right]\delta y_1 \\
& + \left[(\varpi - \Pi_1)\cos(n_1,z) + p_{z1} + f(w_1 - w_2) + \mathfrak{G}\frac{w_1 - w_2}{|r'|}\right]\delta z_1 \Big\}\,dS \\
& + \Big\{ \mathrm{X} + \mathrm{J}_x + \int\left[f(u_2 - u_1) + \mathfrak{G}\frac{u_2 - u_1}{|r'|} - \varpi\cos(n_1,x)\right]dS \Big\}\,\delta\xi \\
& + \Big\{ \mathrm{Y} + \mathrm{J}_y + \int\left[f(v_2 - v_1) + \mathfrak{G}\frac{v_2 - v_1}{|r'|} - \varpi\cos(n_1,y)\right]dS \Big\}\,\delta\eta \\
& + \Big\{ \mathrm{Z} + \mathrm{J}_z + \int\left[f(w_2 - w_1) + \mathfrak{G}\frac{w_2 - w_1}{|r'|} - \varpi\cos(n_1,z)\right]dS \Big\}\,\delta\zeta \\
& + \left(\mathrm{L} + \mathrm{J}_l - \int\Big\{\left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)[(w_2 - w_1)y_2 - (v_2 - v_1)z_2] - \varpi[y_2\cos(n_1,z) - z_2\cos(n_1,y)]\Big\}dS\right)\delta\lambda \\
& + \left(\mathrm{M} + \mathrm{J}_m - \int\Big\{\left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)[(u_2 - u_1)z_2 - (w_2 - w_1)x_2] - \varpi[z_2\cos(n_1,x) - x_2\cos(n_1,z)]\Big\}dS\right)\delta\mu \\
& + \left(\mathrm{N} + \mathrm{J}_n - \int\Big\{\left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)[(v_2 - v_1)x_2 - (u_2 - u_1)y_2] - \varpi[x_2\cos(n_1,y) - y_2\cos(n_1,x)]\Big\}dS\right)\delta\nu = 0.
\end{aligned}
$$

Cette égalité doit avoir lieu quels que soient $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ et, en outre, quels que soient, aux divers points de la surface S, δx_1, δy_1, δz_1. On a donc

1° En tout point de la surface S, les trois égalités

$$(80)\quad \begin{cases} (\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, x) - p_{x1} = \left(f + \dfrac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(u_1 - u_2), \\ (\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, y) - p_{y1} = \left(f + \dfrac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(v_1 - v_2), \\ (\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, z) - p_{z1} = \left(f + \dfrac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(w_1 - w_2), \end{cases}$$

identiques aux trois premières égalités (57);

2° Les six égalités

$$(81)\quad \begin{cases} X + J_x + \displaystyle\int \left[f(u_2 - u_1) + \dfrac{\mathfrak{G}(u_2 - u_1)}{|r'|} - \varpi\cos(n_1, x)\right] dS = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ L + J_l - \displaystyle\int \left\{\left(f + \dfrac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)[(w_2 - w_1)y_2 - (v_2 - v_1)z_2] - \varpi[y_2\cos(n_1, z) - z_2\cos(n_1, y)]\right\} dS = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

qui peuvent encore s'écrire, en vertu des égalités (80),

$$(82)\quad \begin{cases} X + J_x - \displaystyle\int [\Pi_1\cos(n_1, x) - p_{x1}]\, dS = 0, \\ Y + J_y - \displaystyle\int [\Pi_1\cos(n_1, y) - p_{y1}]\, dS = 0, \\ Z + J_z - \displaystyle\int [\Pi_1\cos(n_1, z) - p_{z1}]\, dS = 0, \\ L + J_l + \displaystyle\int \{\Pi_1[y_2\cos(n_1, z) - z_2\cos(n_1, y)] - (y_2 p_{z1} - z_2 p_{y1})\}\, dS = 0, \\ M + J_m + \displaystyle\int \{\Pi_1[z_2\cos(n_1, x) - x_2\cos(n_1, z)] - (z_2 p_{x1} - x_2 p_{z1})\}\, dS = 0, \\ N + J_n + \displaystyle\int \{\Pi_1[x_2\cos(n_1, y) - y_2\cos(n_1, x)] - (x_2 p_{y1} - y_2 p_{x1})\}\, dS = 0. \end{cases}$$

Ces dernières équations feraient connaître le mouvement du corps solide si l'on connaissait Π_1, p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}.

Les équations (80) peuvent être traitées comme les trois premières équations (57); elles nous enseignent que *l'on a, en tout point de la surface* S,

$$(83)\qquad \varpi = \Pi_1 - p_{x1}\cos(n_1, x) - p_{y1}\cos(n_1, y) - p_{z1}\cos(n_1, z).$$

Elles nous montrent, en outre, que *la projection du vecteur* p_1 *sur la surface* S *coïncide avec la direction* r *de la vitesse relative* r'. *Cette projection* *est donnée par l'égalité*

$$p_{x1}\cos(r, x) + p_{y1}\cos(r, y) + p_{z1}\cos(r, z) = -\left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right) r'. \tag{84}$$

Tout ce que nous venons de dire suppose que le solide et le fluide ne sont pas soudés le long de leur surface de contact.

Dans le cas où ils seraient soudés en une région de leur surface de contact *et où cette soudure ne serait pas regardée comme une liaison nouvelle* [1], on aurait, en tout point de cette région,

$$u_1 - u_2 = 0, \qquad v_1 - v_2 = 0, \qquad w_1 - w_2 = 0, \qquad \mathfrak{G} = 0, \qquad f = 0.$$

On devrait donc, pour tout point de cette région, remplacer par o le second membre des égalités (80) et, dans les égalités (81), restreindre les intégrales aux parties de la surface de contact qui ne sont pas des soudures.

Les égalités (82) *resteront vraies, même si le solide et le fluide sont soudés tout le long de la surface de contact ou le long d'une partie de cette surface. Mais, en tout point de la surface* S *où les deux corps sont soudés l'un à l'autre, le vecteur* p_1 *est normal à la surface* S; *si l'on désigne par* p_1 *sa valeur comptée positivement dans le sens de la normale* n_1, *on a, en un tel point,*

$$\varpi = \Pi_1 - p_1. \tag{85}$$

Ce que nous venons de dire cesse d'être exact *si l'on regarde la condition imposée au fluide d'adhérer au solide comme constituant une nouvelle liaison* [2]. Dans ce cas, on doit avoir, en tout point de la surface d'adhérence, non seulement les égalités

$$u_2 - u_1 = 0, \qquad v_2 - v_1 = 0, \qquad w_2 - w_1 = 0, \tag{64}$$

mais encore les conditions, imposées à tout déplacement virtuel,

$$\delta x_2 - \delta x_1 = 0, \qquad \delta y_2 - \delta y_1 = 0, \qquad \delta z_2 - \delta z_1 = 0. \tag{65}$$

Dès lors, il ne suffit plus de poser, dans nos équations,

$$f = 0, \qquad \mathfrak{G} = 0.$$

---

(1) *Sur les conditions aux limites en Hydrodynamique* (*Comptes rendus,* t. CXXXIV, p. 149; 20 janvier 1902).

(2) *Sur l'extension du théorème de Lagrange aux liquides visqueux* (*Comptes rendus,* t. CXXXIV, p. 580; 10 mars 1902).

Il faut encore remplacer l'égalité (52) par l'égalité (52 *bis*). L'égalité (79) est alors remplacée par l'égalité

$$(86)\quad \begin{aligned} \int \big\{ [\varpi_x + \Pi_1 \cos(n_1, x) - p_{x1}]\, \delta x_1 + [\varpi_y - \Pi_1 \cos(n_1, y) + p_{y1}]\, \delta y_1 \\ + [\varpi_z - \Pi_1 \cos(n_1, z) + p_{z1}]\, \delta z_1 \big\}\, dS \\ - \left[X + J_x + \int \varpi_x\, dS\right] \delta\xi - \left[Y + J_y + \int \varpi_y\, dS\right] \delta\eta - \left[Z + J_y + \int \varpi_z\, dS\right] \delta\zeta \\ - \left[L + J_l + \int (\varpi_y z_2 - \varpi_z y_2)\, dS\right] \delta\lambda - \left[M + J_m + \int (\varpi_z x_2 - \varpi_x z_2)\, dS\right] \delta\mu \\ - \left[N + J_n + \int (\varpi_x y_2 - \varpi_y x_2)\, dS\right] \delta\nu = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité doit avoir lieu quels que soient $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ et, en outre, quels que soient δx_1, δy_1, δz_1 aux divers points de la surface S.

On a donc :

1° En tout point de la surface S, les trois égalités

$$(87)\quad \begin{cases} \Pi_1 \cos(n_1, x) + \varpi_x = p_{x1}, \\ \Pi_1 \cos(n_1, y) + \varpi_y = p_{y1}, \\ \Pi_1 \cos(n_1, z) + \varpi_z = p_{z1}, \end{cases}$$

identiques aux premières égalités (71);

2° Les égalités

$$(88)\quad \begin{cases} X + J_x + \int \varpi_x\, dS = 0, \qquad Y + J_y + \int \varpi_y\, dS = 0, \qquad Z + J_z + \int \varpi_z\, dS = 0, \\ L + J_l + \int (\varpi_y z_2 - \varpi_z y_2)\, dS = 0, \\ M + J_m + \int (\varpi_z x_2 - \varpi_x z_2)\, dS = 0, \\ N + J_n + \int (\varpi_x y_2 - \omega_y x_2)\, dS = 0. \end{cases}$$

Cette seconde manière de voir est celle que les considérations développées au Chapitre I, § 2, nous présentent comme vraisemblable. Nous verrons qu'elle s'impose.