
PROBLÈME
DE
REFROIDISSEMENT D'UNE BARRE HÉTÉROGÈNE,

PAR M. W. STEKLOFF.

1. Il s'agit, dans ce Mémoire, d'étudier le problème classique de refroidissement d'une barre hétérogène et de généraliser certains théorèmes que j'ai énoncés en 1898 dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1).

Prenons la direction de la barre pour l'axe des ξ ; soient 0 et X les coordonnées des extrémités de la barre.

Le problème se ramène à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad g \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} n \frac{\partial U}{\partial \xi} - lU,$$

jointe aux conditions

$$(2) \quad \begin{cases} n \frac{\partial U}{\partial \xi} - h U = 0 & \text{pour } \xi = 0, \\ n \frac{\partial U}{\partial \xi} + H U = 0 & \text{pour } \xi = X, \end{cases}$$

$$(3) \quad U = f(\xi) \quad \text{pour } t = 0.$$

Dans ces équations, t désigne le temps, U la température de la barre, g la chaleur spécifique, n le coefficient de conductibilité, l le coefficient du pouvoir émissif dans chaque section transversale de la barre; h et H sont des constantes positives, $f(\xi)$ est une fonction donnée de la variable ξ dans l'intervalle de 0 à X.

Quant à g , n , l , ils restent positifs dans l'intervalle considéré.

Remarquons encore que g et n ne s'annulent pas dans cet intervalle.

(1) W. STEKLOFF, *Sur le problème de refroidissement d'une barre hétérogène* (*Comptes rendus*, 17 janvier 1898).

Voir aussi mon travail portant le même titre, inséré dans les *Communications de la Société mathématique de Kharkow* en 1896.

Posons

$$U = Ae^{-kt}V,$$

V étant une fonction ne dépendant pas de t , A étant une constante arbitraire, k étant un nombre positif.

Le problème se ramènera à l'intégration de l'équation

$$(4) \quad \frac{d}{d\xi} n \frac{dV}{d\xi} + (gk - l)V = 0,$$

jointe aux conditions aux limites

$$(5) \quad \begin{cases} n \frac{dV}{d\xi} - hV = 0 & \text{pour } \xi = 0, \\ n \frac{dV}{d\xi} + HV = 0 & \text{pour } \xi = X. \end{cases}$$

Il existe une infinité de nombres positifs

$$k_1, k_2, k_3, \dots, k_n, \dots,$$

et de fonctions correspondantes

$$V_1, V_2, V_3, \dots, V_n, \dots,$$

vérifiant les équations (4) et (5).

La solution du problème se représentera sous la forme de la série

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k_n t} V_n,$$

si nous choisissons les A_n ($n = 1, 2, \dots$) de façon que l'on ait

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n V_n = f(\xi)$$

dans l'intervalle de 0 à X .

L'existence des nombres k_n ($n = 1, 2, \dots$) a été démontrée pour la première fois par Liouville et Sturm (en 1836 dans le *Journal de Liouville*, t. I), mais le problème de développement d'une fonction arbitraire en série procédant suivant les fonctions V_n n'a encore été résolu en toute rigueur que dans quelques cas particuliers (1).

(1) Voir C. JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 394-412. Paris; 1887.

La solution générale de ce problème, sous certaines conditions assez générales par rapport à la fonction donnée f , fera l'objet du Mémoire qui va suivre.

2. Posons

$$dx = \frac{d\xi}{n},$$

et prenons x pour la nouvelle variable indépendante.

Posons encore

$$p_1(\xi) = ng, \quad q_1(\xi) = nl,$$

$p_1(\xi)$ et $q_1(\xi)$ étant les fonctions positives, dont la première ne s'annule pas dans l'intervalle $(0, X)$.

Désignons par p et q ce que deviennent $p_1(\xi)$ et $q_1(\xi)$, si l'on y remplace ξ par son expression en x .

L'équation (4) devient alors

$$(6) \quad \frac{d^2V}{dx^2} + (kp - q)V = 0.$$

Désignons par a et b les valeurs de x correspondantes à $\xi = 0$ et $\xi = X$.

Les conditions aux limites (5) seront transformées dans les suivantes

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{dV}{dx} - hV = 0 & \text{pour } x = a, \\ \frac{dV}{dx} + HV = 0 & \text{pour } x = b. \end{cases}$$

Il est clair que

$$a \geq 0, \quad b > 0, \quad b - a > 0.$$

3. Désignons, en général, par F' et F'' les dérivées du premier et du second ordre d'une fonction quelconque F .

Considérons l'équation

$$(8) \quad V'' - qV + f = 0, \quad a < x < b,$$

jointe aux conditions

$$(9) \quad \begin{aligned} V'(a) - hV(a) &= 0, \\ V'(b) + HV(b) &= 0, \end{aligned}$$

f étant une fonction quelconque, continue dans l'intervalle (a, b) .

Désignons par v_1, v_2 deux solutions indépendantes de l'équation

$$(10) \quad V'' - qV = 0.$$

L'intégrale générale de l'équation (8) sera donnée par la formule

$$V = M_1 v_1 + M_2 v_2,$$

où

$$M_1 = C_1 + \int_a^x \frac{f v_2}{\Delta} dx,$$

$$M_2 = C_2 - \int_a^x \frac{f v_1}{\Delta} dx,$$

C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires,

$$\Delta = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix} = \text{const.},$$

d'après le théorème de Liouville.

Il ne reste qu'à satisfaire aux conditions (9).

Posons, pour abrégier,

$$\Delta m(x) = v_1 \int_a^x f v_2 dx - v_2 \int_a^x f v_1 dx.$$

On peut écrire

$$V = C_1 v_1 + C_2 v_2 + m(x).$$

Il est évident que

$$m(a) = 0, \quad m'(a) = 0.$$

Substituant cette expression de V dans (9), il viendra

$$C_1 [v_1'(a) - h v_1(a)] + C_2 [v_2'(a) - h v_2(a)] = 0,$$

$$C_1 [v_1'(b) + H v_1(b)] + C_2 [v_2'(b) + H v_2(b)] = n(b),$$

où l'on a posé

$$-n(b) = m'(b) + H m(b).$$

On peut toujours supposer que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} v_1'(a) - h v_1(a) & v_2'(a) - h v_2(a) \\ v_1'(b) + H v_1(b) & v_2'(b) + H v_2(b) \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

On trouve alors

$$C_1 = - \frac{v_2'(a) - h v_2(a)}{D} n(b) = A_1 n(b),$$

$$C_2 = \frac{v_1'(a) - h v_1(a)}{D} n(b) = A_2 n(b).$$

L'intégrale cherchée de l'équation (8) se représentera sous la forme suivante

$$V = A_1 n(b) v_1 + A_2 n(b) v_2 + m(x).$$

Désignons par M le maximum des modules de v_1, v_2, v'_1 et v'_2 dans l'intervalle (a, b) .

On a

$$|m(x)| < \frac{2M^2}{|\Delta|} \int_a^x |f| dx < \frac{2M^2 \sqrt{b-a}}{|\Delta|} \left(\int_a^b f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|m'(x)| < \frac{2M^2}{|\Delta|} \int_a^x |f| dx < \frac{2M^2 \sqrt{b-a}}{|\Delta|} \left(\int_a^b f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part,

$$|A_1 n(b) v_1| < |A_1| M [|m'(b)| + H |m(b)|].$$

Par conséquent,

$$|A_1 n(b) v_1| < Q_1 \left(\int_a^b f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

Q_1 étant un nombre fixe ne dépendant pas de f .

Nous trouverons de même

$$|A_2 n(b) v_2| < Q_1 \left(\int_a^b f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il s'ensuit que

$$(11) \quad V^2 < Q \int_a^b f^2 dx,$$

Q étant un nombre de la même espèce que Q_1 .

4. Cela posé, considérons l'équation

$$(12) \quad V'' + (kp - q)V + f = 0,$$

jointe aux conditions

$$(13) \quad \begin{cases} V'(a) - hV(a) = 0, \\ V'(b) + HV(b) = 0. \end{cases}$$

Proposons-nous de développer V suivant les puissances croissantes de k

$$V = v_0 + kv_1 + k^2v_2 + \dots + k^nv_n + \dots$$

On trouve les équations

$$(14) \quad \begin{cases} v_0'' - q v_0 + f = 0 \\ v_n'' - q v_n + p v_{n-1} = 0 \end{cases} \quad (a < x < b).$$

avec les conditions aux limites

$$(15) \quad \begin{cases} v_n'(a) - h v_n(a) = 0 \\ v_n'(b) + H v_n(b) = 0 \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

On peut calculer tous les v_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) par la méthode indiquée dans le numéro précédent.

Considérons l'intégrale

$$W_{m,n} = \int_a^b p v_m v_n dx.$$

Il est aisé de prouver que

$$(16) \quad W_{m,n} = W_{m+1,n-1} = \dots = W_{m+s,n-s},$$

s étant un nombre entier quelconque, plus petit que n .

On a, en effet, en vertu de (14),

$$(17) \quad W_{m,n} = \int_a^b q v_{m+1} v_n dx - \int_a^b v_n v_{m+1}'' dx;$$

mais

$$\begin{aligned} \int_a^b v_n v_{m+1}'' dx &= [v_n v_{m+1}']_a^b - \int_a^b v_n' v_{m+1}' dx, \\ \int_a^b v_n' v_{m+1}' dx &= [v_n' v_{m+1}]_a^b - \int_a^b v_{m+1} v_n'' dx \\ &= [v_n' v_{m+1}]_a^b - \int_a^b q v_{m+1} v_n dx + \int_a^b p v_{m+1} v_n dx; \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b v_n v_{m+1}'' dx = \int_a^b q v_{m+1} v_n dx - \int_a^b p v_{m+1} v_n dx,$$

puisque, en vertu de (15),

$$[v_n' v_{m+1} - v_n v_{m+1}']_a^b = 0.$$

L'intégrale (17) deviendra donc

$$W_{m,n} = \int_a^b p v_{m+1} v_n dx = W_{m+1,n-1},$$

ce qui démontre les égalités (17).

Posons maintenant

$$m + n = 2s;$$

il viendra

$$W_{m,n} = \int_a^b p V_s^2 dx > 0.$$

Nous désignerons cette intégrale simplement par W_{2s} .

Posons ensuite

$$m + n = 2s - 1.$$

On aura

$$(18) \quad W_{m,n} = \int_a^b p v_{s-1} v_s dx.$$

Nous désignerons cette intégrale par W_{2s-1} .

Il est aisé de voir que *tous les* $W_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ *sont positifs.*

On a, en effet,

$$(18') \quad \begin{aligned} W_{2s-1} &= \int_a^b p v_{s-1} v_s dx = \int_a^b v_s (q v_s - v_s') dx \\ &= \int_a^b q v_s^2 dx - [v_s v_s']_a^b + \int_a^b (v_s')^2 dx > 0, \end{aligned}$$

puisque, en vertu de (15),

$$- [v_s v_s']_a^b = H v_s^2(b) + h v_s^2(a) > 0.$$

5. L'égalité (18) donne immédiatement

$$W_{2s}^2 < W_{2s+2} W_{2s-2}.$$

ou

$$\frac{\sqrt{W_{2s}}}{\sqrt{W_{2s-2}}} < \frac{\sqrt{W_{2s+2}}}{\sqrt{W_{2s}}},$$

et cela quel que soit l'indice s .

On a, d'autre part, en tenant compte de l'inégalité (11),

$$(19) \quad v_s^2 < Q \int_a^b p^2 v_{s-1}^2 dx < QB \int_a^b p v_{s-1}^2 dx = QBW_{2s-2},$$

B étant le maximum de p dans l'intervalle donné.

De cette inégalité on tire

$$W_{2s} < QB^2(b-a) W_{2s-2} = N^2 W_{2s-2},$$

et cela quel que soit l'indice s .

On obtient ainsi les inégalités suivantes

$$(20) \quad \frac{\sqrt{W_2}}{\sqrt{W_0}} < \frac{\sqrt{W_4}}{\sqrt{W_2}} < \dots < \frac{\sqrt{W_{2s}}}{\sqrt{W_{2s-2}}} < \dots < N.$$

6. Désignons maintenant par ρ le rayon de convergence de la série

$$v_0 + kv_1 + k^2v_2 + \dots + k^nv_n + \dots$$

L'inégalité (19) nous apprend que

$$\rho \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{W_{2n-2}}}{\sqrt{W_{2n}}}.$$

D'autre part, le même rayon ρ ne peut surpasser le rayon de convergence de la série

$$\int_a^b p v_0^2 dx + k \int_a^b p v_0 v_1 dx + \dots + k^n \int_a^b p v_0 v_n dx + \dots,$$

qu'on peut, en s'appuyant sur les égalités (16), présenter sous la forme suivante

$$W_0 + kW_1 + \dots + k^n W_n + \dots$$

Il s'ensuit que

$$\rho \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{W_{2n-2}}}{\sqrt{W_{2n}}}.$$

On a donc précisément

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{W_{2n-2}}}{\sqrt{W_{2n}}}.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *L'intégrale de l'équation (12) satisfaisant aux conditions aux limites (13), considérée comme fonction du paramètre k , est une fonction holomorphe en k à l'intérieur du cercle, décrit du point $k = 0$ comme centre, de rayon*

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{W_{2n-2}}}{\sqrt{W_{2n}}}.$$

7. Traitons maintenant le problème d'intégration de l'équation (12) à un autre point de vue.

Désignons par ω_1 et ω_2 deux solutions particulières indépendantes de l'équation

$$V'' + (kp - q)V = 0.$$

On sait que ω_1 et ω_2 sont des fonctions de x et de k , continues ainsi que leurs dérivées par rapport à x dans l'intervalle de a à b pour toutes les valeurs du paramètre k .

L'intégrale générale de l'équation (12) se représentera sous la forme

$$V = D_1\omega_1 + D_2\omega_2,$$

où

$$D_1 = C_1 + \int_a^x \frac{f\omega_2}{\Delta} dx,$$

$$D_2 = C_2 - \int_a^x \frac{f\omega_1}{\Delta} dx,$$

C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1' & \omega_2' \end{vmatrix} = \text{const.},$$

d'après le théorème de Liouville.

On peut donc écrire

$$V = C_1\omega_1 + C_2\omega_2 + \mathfrak{Z}(x),$$

où l'on a posé

$$\mathfrak{Z}(x) = \omega_1 \int_a^x \frac{f\omega_2}{\Delta} dx - \omega_2 \int_a^x \frac{f\omega_1}{\Delta} dx.$$

Cette expression de V satisfera aux conditions (13), si nous posons

$$C_1[\omega_1'(a) - h\omega_1(a)] + C_2[\omega_2'(a) - h\omega_2(a)] = 0,$$

$$C_1[\omega_1'(b) + H\omega_1(b)] + C_2[\omega_2'(b) + H\omega_2(b)] = k(b),$$

$$k(b) = -[\mathfrak{Z}'(b) + H\mathfrak{Z}(b)].$$

Ces équations donnent

$$C_1 = \frac{Q_1}{\varpi(k)}, \quad C_2 = \frac{Q_2}{\varpi(k)},$$

Q_1 et Q_2 étant les constantes bien déterminées,

$$\varpi(k) = \begin{vmatrix} \omega_1'(a) - h\omega_1(a) & \omega_2'(a) - h\omega_2(a) \\ \omega_1'(b) + H\omega_1(b) & \omega_2'(b) + H\omega_2(b) \end{vmatrix}.$$

On peut donc écrire

$$(21) \quad V = \frac{Q_1\omega_1 + Q_2\omega_2}{\varpi(k)} + \mathfrak{Z}(x) = \frac{W}{\varpi(k)},$$

W étant une fonction de x et de k , holomorphe en k , quelque grand que soit k .

On sait que l'équation

$$\varpi(k) = 0$$

n'admet qu'une infinité de racines simples, réelles et positives (1), que nous désignerons successivement par

$$(22) \quad k_1, k_2, k_3, \dots, k_n, \dots$$

Les fonctions p, q et les constantes h, H étant données, les nombres $k_n (n = 1, 2, \dots)$ ne dépendront que de l'intervalle (a, b) .

Nous avons vu (théorème du n° 6) que la fonction V ne peut être holomorphe que pour les valeurs de k plus petites que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{W_{2n-2}}}{\sqrt{W_{2n}}}.$$

D'autre part, W est une fonction holomorphe en k quelque grand que soit k .

On en déduit immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME. — *L'intégrale de l'équation (12) satisfaisant aux conditions (13), considérée comme fonction de k , est une fonction méromorphe en k n'ayant que des pôles simples, réels et positifs qui font toute partie de la suite de nombres $k_n (n = 1, 2, \dots)$.*

8. La fonction W [dans la formule (21)] satisfait évidemment à l'équation

$$W'' + (kp - q)W + f\varpi(k) = 0,$$

et aux conditions aux limites

$$W'(a) - hW(a) = 0,$$

$$W'(b) + HW(b) = 0.$$

Si l'on pose

$$k = k_n,$$

k_n étant un nombre quelconque de la suite (22), on obtient une fonction V_n satisfaisant aux conditions

$$V_n'' + (k_n p - q)V_n = 0, \quad a < x < b,$$

$$V_n'(a) - hV_n(a) = 0,$$

$$V_n'(b) + hV_n(b) = 0.$$

(1) Voir, par exemple, C. JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 394-412, Paris; 1887.

On retrouve ainsi ce théorème connu :

THÉORÈME. — *Tout intervalle donné a, b donne lieu à une infinité de nombres positifs*

$$k_1, k_2, \dots, k_n, \dots,$$

et de fonctions correspondantes

$$V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$$

vérifiant les équations

$$(23) \quad V_n'' + (k_n p - q) V_n = 0, \quad a < x < b \quad (n = 1, 2, \dots)$$

jointes aux conditions aux limites

$$(24) \quad \begin{cases} V_n'(a) - h V_n(a) = 0 \\ V_n'(b) + H V_n(b) = 0 \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Les constantes h, H et les fonctions p, q étant données, les nombres $k_n (n = 1, 2, \dots)$ ne dépendront que de l'intervalle (a, b) .

Chacune des fonctions V_n sera bien déterminée, si nous ajoutons encore la condition suivante

$$(25) \quad \int_a^b p V_n^2 dx = 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Les fonctions $V_n (n = 1, 2, \dots)$ satisfont aux conditions

$$(26) \quad \int_a^b p V_n V_m dx = 0 \quad \text{si } m \geq n.$$

9. Reprenons maintenant les solutions particulières v_1 et v_2 de l'équation (10).

Il est aisé de voir que l'intégrale générale de l'équation (23) peut être représentée sous la forme suivante :

$$V_n = D_1 v_1 + D_2 v_2,$$

si l'on pose

$$D_1 = C_1 + k_n \int_a^b \frac{p v_2 V_n}{\Delta} dx,$$

$$D_2 = C_2 - k_n \int_a^b \frac{p v_1 V_n}{\Delta} dx.$$

Posons encore

$$r(x) = k_n \left(v_1 \int_a^x \frac{p v_2 V_n}{\Delta} dx - v_2 \int_a^x \frac{p v_1 V_n}{\Delta} dx \right);$$

on aura

$$(27) \quad V_n = C_1 v_1 + C_2 v_2 + r(x).$$

Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} a_1 &= v_1'(a) - h v_1(a), & a_2 &= v_2'(a) - h v_2(a), \\ b_1 &= v_1'(b) + H v_1(b), & b_2 &= v_2'(b) + H v_2(b), \\ -s(b) &= r'(b) + H r(b). \end{aligned}$$

Il est évident qu'il suffit de poser

$$\begin{aligned} C_1 a_1 + C_2 a_2 &= 0, \\ C_1 b_1 + C_2 b_2 &= s(b) \end{aligned}$$

pour que les conditions (24) soient satisfaites.

Ces équations donnent

$$C_1 = -\frac{a_2}{D} s(b), \quad C_2 = \frac{a_1}{D} s(b),$$

où l'on a posé

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Substituant les valeurs trouvées de C_1 et C_2 dans (27), il viendra

$$(28) \quad V_n = k_n \left(M_1 \int_a^b p v_2 V_n dx - M_2 \int_a^b p v_1 V_n dx + \frac{v_1}{\Delta} \int_a^x p v_2 V_n dx - \frac{v_2}{\Delta} \int_a^x p v_1 V_n dx \right),$$

où

$$M_1 = \frac{b_1(a_1 v_2 - a_2 v_1)}{D\Delta}, \quad M_2 = \frac{b_2(a_1 v_2 - a_2 v_1)}{D\Delta}.$$

De l'égalité (28) on tire, en répétant les raisonnements du n° 3,

$$(29) \quad |V_n| < N k_n,$$

N étant un nombre fixe.

10. Soient u et V deux fonctions de x , continues dans l'intervalle (a, b) .

Supposons encore que V ne s'annule pas dans cet intervalle.

Envisageons l'identité de M. E. Picard

$$(30) \quad \frac{(V u' - V' u)^2}{V^2} + \frac{d}{dx} \left(\frac{u^2 V'}{V} \right) - \frac{u^2}{V} (V'' + k^2 V) = u'^2 - k^2 u^2,$$

k étant une constante quelconque.

Posons

$$V = \frac{\sin k(b-x) - \sin k(a-x)}{\sin k(b-a)}.$$

La fonction V satisfait aux conditions

$$\begin{aligned} V'' + k^2 V &= 0, & a < x < b, \\ V(a) &= 1, & V(b) &= 1, \end{aligned}$$

reste continue, positive et ne s'annule pas dans l'intervalle (a, b) pour toutes les valeurs positives de k , plus petites que

$$\frac{\pi}{b-a}.$$

L'identité (30) se réduit à

$$\frac{(Vu' - V'u)^2}{V^2} + \frac{d}{dx} \left(\frac{u^2 V'}{V} \right) = u'^2 - k^2 u^2,$$

ayant lieu quelle que soit la fonction u .

Cette identité donne

$$\int_a^b \frac{(Vu' - V'u)^2}{V^2} dx + \left[\frac{u^2 V'}{V} \right]_a^b = \int_a^b u'^2 dx - k^2 \int_a^b u^2 dx.$$

Supposons que u s'annule pour $x = a$ et pour $x = b$.

On aura, d'après ce que nous avons dit,

$$\int_a^b u'^2 dx - k^2 \int_a^b u^2 dx > 0$$

pour toutes les valeurs de k^2 , plus petites que

$$\frac{\pi^2}{(b-a)^2},$$

c'est-à-dire

$$K = \frac{\int_a^b u'^2 dx}{\int_a^b u^2 dx} \geq \frac{\pi^2}{(b-a)^2}.$$

Il est aisé de prouver que le nombre

$$\frac{\pi^2}{(b-a)^2}$$

représente la limite inférieure *précise* du rapport K .

Pour s'en assurer, il suffit de prendre pour u la fonction satisfaisant aux conditions

$$u'' + \frac{\pi^2}{(b-a)^2} u = 0, \quad a < x < b,$$

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0,$$

c'est-à-dire la fonction

$$u = B \sin \frac{\pi(x-a)}{b-a},$$

B étant une constante arbitraire.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La limite inférieure PRÉCISE du rapport*

$$\frac{\int_a^b u'^2 dx}{\int_a^b u^2 dx}$$

est égale à

$$\frac{\pi^2}{(b-a)^2},$$

quelle que soit la fonction u , continue et admettant la dérivée dans l'intervalle de a à b et s'annulant pour a et b .

11. Soit maintenant u une fonction satisfaisant à la condition

$$(31) \quad \int_a^b u dx = 0.$$

Posons

$$w = \int_a^x u dx.$$

Il est clair que w reste continue, admet la dérivée dans l'intervalle (b, a) et s'annule pour a et b .

On a, d'après le théorème précédent,

$$(32) \quad \frac{\int_a^b w'^2 dx}{\int_a^b w^2 dx} \geq \frac{\pi^2}{(b-a)^2}.$$

D'autre part, en supposant que u admette la dérivée dans l'intervalle (a, b) ,

$$\int_a^b u^2 dx = - \int_a^b w u' dx,$$

d'où

$$\frac{\int_a^b u^2 dx}{\int_a^b w^2 dx} = \frac{\int_a^b w'^2 dx}{\int_a^b w^2 dx} \leq \frac{\int_a^b u'^2 dx}{\int_a^b u^2 dx}.$$

On a donc, en vertu de (32),

$$K = \frac{\int_a^b u'^2 dx}{\int_a^b u^2 dx} \geq \frac{\pi^2}{(b-a)^2}.$$

Il est aisé de prouver que le nombre

$$\frac{\pi^2}{(b-a)^2}$$

représente la limite inférieure *précise* du rapport considéré.

Prenons, en effet, pour u une fonction satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} u'' + k^2 u &= 0, & a < x < b, \\ u'(a) &= 0, & u'(b) &= 0. \end{aligned}$$

Une telle fonction existe pour

$$k^2 = \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$$

et satisfait évidemment à la condition (31).

On trouve dans ce cas

$$K = \frac{\pi^2}{(b-a)^2}.$$

On arrive ainsi au théorème suivant :

THÉORÈME. — *La limite inférieure précise du rapport*

$$\frac{\int_a^b u'^2 dx}{\int_a^b u^2 dx}$$

est égale à

$$\frac{\pi^2}{(b-a)^2},$$

quelle que soit la fonction u , continue, admettant la dérivée dans l'inter-

valle (a, b) et satisfaisant à la condition

$$\int_a^b u \, dx = 0.$$

Remarquons qu'on pourra, par la méthode indiquée, calculer la limite inférieure précise du rapport considéré dans beaucoup d'autres cas, mais ici nous ne traiterons pas cette question.

12. Décomposons l'intervalle donné (a, b) en n intervalles partiels

$$(a, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_s, a_{s+1}), \dots, (a_{n-1}, b).$$

Supposons que u satisfasse aux conditions

$$\int_a^{a_1} u \, dx = 0, \quad \dots, \quad \int_{a_s}^{a_{s+1}} u \, dx = 0, \quad \dots, \quad \int_{a_{n-1}}^b u \, dx = 0.$$

D'après le théorème précédent

$$(33) \quad \frac{\int_{a_s}^{a_{s+1}} u'^2 \, dx}{\int_{a_s}^{a_{s+1}} u^2 \, dx} \geq \frac{\pi^2}{(a_{s+1} - a_s)^2} = \frac{\pi^2}{l_s^2}.$$

D'autre part,

$$\frac{\int_a^b u'^2 \, dx}{\int_a^b u^2 \, dx} = \frac{\int_a^{a_1} u'^2 \, dx + \int_{a_1}^{a_2} u'^2 \, dx + \dots + \int_{a_{n-1}}^b u'^2 \, dx}{\int_a^{a_1} u^2 \, dx + \int_{a_1}^{a_2} u^2 \, dx + \dots + \int_{a_{n-1}}^b u^2 \, dx}.$$

Il s'ensuit, en vertu de (33), que

$$\frac{\int_a^b u'^2 \, dx}{\int_a^b u^2 \, dx} > \frac{\pi_2^2}{l^2},$$

l étant le plus grand des nombres $l_s (s = 1, 2, \dots, n)$.

Le théorème suivant est donc démontré :

THÉORÈME. — Soit u une fonction, continue et admettant la dérivée dans l'intervalle donné (a_0, a_n) . Décomposons cet intervalle en n intervalles partiels

$$(a_s, a_{s+1}) \quad (s = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Si la fonction u satisfait aux conditions

$$\int_{a_s}^{a_{s+1}} u dx = 0 \quad (s = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

le rapport

$$\frac{\int_a^b u'^2 dx}{\int_a^b u^2 dx}$$

sera plus grand que $\frac{\pi^2}{l^2}$, l désignant le plus grand des nombres

$$a_{s+1} - a_s \quad (s = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Si nous supposons, pour plus de simplicité, que tous les intervalles partiels soient égaux les uns aux autres, on aurait

$$(34) \quad \frac{\int_a^b u'^2 dx}{\int_a^b u^2 dx} > \frac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2}.$$

13. Reprenons l'équation (12) du n° 4.

On sait que V sera holomorphe en k , pourvu que

$$|k| < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{W_{2n-2}}}{\sqrt{W_{2n}}}.$$

Remplaçons f par la fonction suivante

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_{n+1} f_{n+1},$$

$f_s (s = 1, 2, \dots, n+1)$ étant des fonctions quelconques, continues dans l'intervalle (a, b) , $\alpha_s (s = 1, 2, \dots, n+1)$ étant des constantes indéterminées.

Tous les $v_n (n = 1, 2, \dots)$ dans la série (n° 4)

$$(35) \quad v_0 + k v_1 + \dots + k^n v_n + \dots$$

seront les fonctions linéaires des constantes α_s .

On peut écrire

$$v_s = \alpha_1 v_{s1} + \alpha_2 v_{s2} + \dots + \alpha_{n+1} v_{s,n+1}.$$

Décomposons l'intervalle donné en intervalles partiels

$$(a, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{n-1}, b).$$

On peut toujours disposer les α_s de façon que l'on ait

$$\alpha_1 \int_{a_s}^{a_{s+1}} v_{s1} dx + \alpha_2 \int_{a_s}^{a_{s+1}} v_{s2} dx + \dots + \alpha_{n+1} \int_{a_s}^{a_{s+1}} v_{s,n+1} dx = 0 \quad (s=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Ces conditions étant remplies, on trouve, en choisissant convenablement les intervalles partiels et s'appuyant sur le théorème du numéro précédent,

$$(36) \quad \frac{\int_a^b v_s'^2 dx}{\int_a^b v_s^2 dx} > \frac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2}.$$

Reprenons l'intégrale W_{2s} .

On a, en tenant compte de (18),

$$W_s < \beta \int_a^b v_s^2 dx, \quad W_{2s-1} > \int_a^b v_s'^2 dx.$$

On a donc, en vertu de (36),

$$\frac{W_{2s-1}}{W_{2s}} > \frac{\pi^2 n^2}{\beta(b-a)^2} = Kn^2,$$

K étant un nombre assignable.

D'autre part,

$$\frac{W_{2s-1}}{W_{2s}} < \frac{\sqrt{W_{2s-2}}}{W_{2s}}.$$

On peut donc disposer les α_s de façon que l'on ait

$$\frac{\sqrt{W_{2s}}}{\sqrt{W_{2s-2}}} < \frac{1}{Kn^2}.$$

Mais cette inégalité entraîne les inégalités [voir la formule (20)]

$$\frac{\sqrt{W_2}}{\sqrt{W_0}} < \frac{\sqrt{W_4}}{\sqrt{W_2}} < \dots < \frac{\sqrt{W_{2n-2}}}{\sqrt{W_{2n-4}}} < \frac{1}{Kn^2}.$$

Il s'ensuit qu'on peut choisir les α_s de sorte que l'on ait

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{W_{2n}}}{\sqrt{W_{2n-2}}} < \frac{1}{Kn^2}.$$

Mais, d'après le théorème du n° 6, ρ est le rayon de convergence de la série (35).

On arrive ainsi au théorème suivant :

THÉORÈME. — On peut toujours choisir la fonction f dans l'équation (12) de telle façon que la fonction V , satisfaisant aux conditions (12) et (13), soit holomorphe en k pour les valeurs de k aussi grandes que l'on veut.

14. On peut déduire de ces théorèmes quelques conséquences importantes : on peut démontrer, par exemple, le théorème connu que la fonction $\varpi(k)$ admet une *infinité* de racines réelles, mais nous n'insistons pas sur ce point.

Nous nous bornerons à la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME. — Les racines k_n de la fonction $\varpi(k)$, à partir d'un certain nombre n assez grand, satisfont aux inégalités suivantes

$$k_n > Mn^2,$$

M étant un nombre assignable.

Posons

$$U = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n,$$

$\alpha_s (s = 1, 2, \dots, n + 1)$ étant des constantes indéterminées,

$$W = \int_a^b U'^2 dx, \quad V = \int_a^b U^2 dx.$$

On trouve

$$W = \sum \alpha_s^2 \int_a^b V_s'^2 dx + 2 \sum \alpha_m \alpha_n \int_a^b V_m' V_n' dx.$$

Or on a, en tenant compte des propriétés connues des fonctions V_n ,

$$\int_a^b V_s'^2 dx = -[H V_s^2(b) + h V_s^2(a)] - \int_a^b q V_s^2 dx + k_s,$$

$$\int_a^b V_m' V_n' dx = -H V_m(b) V_n(b) - h V_m(a) V_n(a) - \int_a^b q V_m V_n dx.$$

On peut donc écrire

$$W = \sum \alpha_s^2 k_s - H \left[\sum \alpha_s V_s(b) \right]^2 - h \left[\sum \alpha_s V_s(a) \right]^2 - \int_a^b q \left(\sum \alpha_s V_s \right)^2 dx.$$

Cette égalité montre que

$$(37) \quad W < \sum \alpha_s^2 k_s,$$

puisque q reste positif dans l'intervalle (a, b) .

Considérons maintenant l'intégrale

$$K = \int_a^b p U^2 dx.$$

On trouve aisément

$$K = \sum \alpha_s^2.$$

Donc, en vertu de (37),

$$\frac{W}{K} < \frac{\sum \alpha_s^2 k_s}{\sum \alpha_s^2} < k_n,$$

quelles que soient les constantes $\alpha_s (s = 1, 2, \dots, n)$.

De cette inégalité on tire immédiatement

$$k_n > \frac{W}{BV}.$$

D'autre part, d'après le théorème du n° 12, on peut disposer les α_s de façon que l'on ait

$$\frac{W}{V} > \frac{\pi^2}{(b-a)^2} (n-1)^2 = Kn^2,$$

K étant un nombre assignable.

On aura donc

$$(38) \quad k_n > \frac{K}{B} n^2 = Mn^2,$$

ce qui démontre le théorème énoncé au début de ce numéro.

• 13. Supposons maintenant que la fonction f , dans l'équation

$$V'' + (kp - q)V + f = 0,$$

satisfasse à la condition

$$(39) \quad \int_a^b f V_s dx = 0.$$

L'équation précédente donne

$$\int_a^b V'' V_n dx + k \int_a^b p V V_n dx - \int_a^b q V V_n dx = 0.$$

Or, en vertu de (23), (24) et (13),

$$\int_a^b V'' V_n dx = [V_n V' - V'_n V]_a^b + \int_a^b V V_n'' dx = \int_a^b q V V_n dx - k_n \int_a^b p V V_n dx.$$

Par conséquent,

$$(k - k_n) \int_a^b p \mathbf{V} \mathbf{V}_n dx = 0,$$

ou, en vertu de (21),

$$\frac{k - k_n}{\varpi(k)} \int_n^b p \mathbf{W} \mathbf{V}_n dx = 0.$$

Supposons que $k = k_n$ soit un pôle de la fonction méromorphe \mathbf{V} .

Supposant encore que k tende vers k_n et passant à la limite, on arrive, en s'appuyant sur le théorème du n° 8, à cette équation impossible

$$\mathbf{M} \int_a^b p \mathbf{V}_n^2 dx = 0,$$

\mathbf{M} étant une constante différente de zéro.

Il est donc absurde de supposer que k_n soit un point critique de la fonction \mathbf{V} , si f satisfait à la condition (39).

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si la fonction f satisfait à la condition*

$$\int_a^b f \mathbf{V}_n dx = 0,$$

le point $k = k_n$ est un point simple de la fonction \mathbf{V} satisfaisant aux conditions (12) et (13) du n° 4.

Il en résulte immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si la fonction f satisfait aux conditions*

$$\int_a^b f \mathbf{V}_1 dx = 0, \quad \int_a^b f \mathbf{V}_2 dx = 0, \quad \dots, \quad \int_a^b f \mathbf{V}_n dx = 0,$$

la fonction \mathbf{V} est une fonction holomorphe en k , pourvu que

$$|k| < k_n.$$

En comparant ce théorème à celui du n° 6, on obtient encore ce théorème :

THÉORÈME. — *Si la fonction f satisfait aux conditions du théorème précédent le rapport*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\mathbf{W}_{2n-2}}}{\sqrt{\mathbf{W}_{2n}}}$$

est plus grand que k_n .

Il s'ensuit, en vertu de (20) (n° 6), que dans le cas considéré

$$\frac{W_0}{W_2} = \frac{\int_a^b p v_0^2 dx}{\int_a^b p v_1^2 dx} > k_n^2.$$

16. Cela posé, considérons une fonction f de la variable x , continue et admettant la dérivée dans l'intervalle (a, b) .

Posons

$$(40) \quad f = \sum_{s=1}^n A_s V_s + R_n,$$

où

$$A_s = \int_a^b p f V_s dx \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Il est évident que R_n reste continu, admet la dérivée dans l'intervalle donné et satisfait aux conditions

$$(41) \quad \int_a^b p R_n V_s dx = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

L'égalité (40) donne

$$S_n = \int_a^b p R_n^2 dx = \int_a^b p f^2 dx - \sum_{s=1}^n A_s^2.$$

Remarquons que cette égalité aura lieu, quelle que soit la fonction f , pourvu que l'intégrale

$$\int_a^b p f^2 dx$$

ait un sens bien déterminé.

On en conclut que S_n décroît, lorsque l'indice n croît indéfiniment et que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s^2$$

converge, quelle que soit la fonction f satisfaisant à la condition tout à l'heure mentionnée.

L'équation (40) nous donne encore

$$\begin{aligned} \int_a^b R_n'^2 dx &= \int_a^b f'^2 dx - 2 \sum A_s \int_a^b f' V_s' dx \\ &+ 2 \sum A_n A_m \int_a^b V_n' V_m' dx + \sum A_s^2 \int_a^b V_s'^2 dx. \end{aligned}$$

Transformons le second membre de cette égalité.

On a

$$\begin{aligned} \int_a^b f' V_s' dx &= - [H f(b) V_s(b) + h f(a) V_s(a)] - \int_a^b q f V_s dx + k_s A_s, \\ \int_a^b V_n' V_m' dx &= - [H V_n(b) V_m(b) + h V_n(a) V_m(a)] - \int_a^b q V_n V_m dx, \\ \int_a^b V_s'^2 dx &= - [H V_s^2(b) + h V_s^2(a)] - \int_a^b q V_s^2 dx + k_s. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_a^b R_n'^2 dx &= \int_a^b f'^2 dx - H \left[\sum A_s^2 V_s^2(b) + 2 \sum A_s f(b) V_s(b) - 2 \sum A_n A_m V_n(b) V_m(b) \right] \\ &\quad - h \left[\sum A_s^2 V_s^2(a) + 2 \sum A_s f(a) V_s(a) - 2 \sum A_n A_m V_n(a) V_m(b) \right] \\ &\quad + 2 \sum A_s \int_a^b q f V_s dx - 2 \sum A_n A_m \int_a^b q V_n V_m dx - \sum A_s^2 \int_a^b q V_s^2 dx \\ &\quad - \sum k_s A_s^2. \end{aligned}$$

D'autre part, il est aisé de s'assurer que

$$\begin{aligned} \sum A_s^2 V_s^2(x) + 2 \sum A_s f(x) V_s(x) - 2 \sum A_n A_m V_n(x) V_m(x) &= R_n^2(x) - f^2(x), \\ 2 \sum A_s \int_a^b q f V_s dx - 2 \sum A_n A_m \int_a^b q V_n V_m dx - \sum A_s^2 \int_a^b q V_s^2 dx \\ &= \int_a^b q f^2 dx - \int_a^b q R_n^2 dx. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} T_n &= \int_a^b R_n'^2 dx + H R_n^2(b) + h R_n^2(a) + \int_a^b q R_n^2 dx \\ &= \int_a^b f'^2 dx + H f^2(b) + h f^2(a) + \int_a^b q f^2 dx - \sum_{s=1}^n k_s A_s^2. \end{aligned}$$

Cette égalité nous apprend que T_n décroît, lorsque l'indice n croît indéfini-

ment et que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2$$

converge, pourvu que la fonction continue f admette la dérivée dans l'intervalle (a, b) .

17. Cherchons maintenant une fonction V vérifiant l'équation

$$V'' + (kp - q)V + pR_n = 0,$$

jointe aux conditions aux limites

$$V'(a) - hV(a) = 0,$$

$$V'(b) + HV(b) = 0.$$

Posons

$$V = v_0 + kv_1 + k^2v_2 + \dots + k^nv_n + \dots$$

Comme R_p satisfait aux conditions (41), on trouve, en tenant compte du théorème du n° 15,

$$\frac{W_0}{W_2} = \frac{\int_a^b p v_0^2 dx}{\int_a^b p v_1^2 dx} > k_n^2;$$

d'où

$$\frac{S_n}{W_0} > k_n^2,$$

puisque

$$W_0^2 < W_2 S_n.$$

Or, on a

$$\int_a^b v_0'^2 dx + H v_0^2(b) + h v_0^2(a) = - \int_a^b q v_0^2 dx + \int_a^b p R_n v_0 dx.$$

On en conclut, en remarquant que q reste positif dans l'intervalle (a, b) ,

$$(42) \quad \int_a^b v_0'^2 dx + H v_0^2(b) + h v_0^2(a) < \sqrt{W_0} \sqrt{S_n}.$$

D'autre part, moyennant les équations

$$v_0'' - qv_0 + pR_n = 0, \quad a < x < b,$$

$$v_0'(a) - h v_0(a) = 0,$$

$$v_0'(b) + H v_0(b) = 0,$$

on trouve aisément

$$S_n = -HR_n(b)v_0(b) - hR_n(a)v_0(a) - \int_a^b R'_n v'_0 dx + \int_a^b q v_0 R_n dx;$$

d'où

$$S_n^2 < \left[HR_n^2(b) + hR_n^2(a) + \int_a^b R_n'^2 dx + \int_a^b q R_n^2 dx \right] \left[H v_0^2(b) + h v_0^2(a) + \int_a^b v_0'^2 dx + \int_a^b q v_0^2 dx \right]$$

et, en vertu de (42),

$$\frac{S_n}{\int_a^b R_n'^2 dx + HR_n^2(b) + hR_n^2(a) + \int_a^b q R_n^2 dx} < \frac{\sqrt{W_0}}{\sqrt{S_n}} < \frac{1}{k_n}.$$

De cette inégalité, en remarquant que

$$T_n = \int_a^b R_n'^2 dx + HR_n^2(b) + hR_n^2(a) + \int_a^b q R_n^2 dx,$$

on tire l'inégalité suivante

$$\frac{S_n}{T_n} < \frac{1}{k_n},$$

qui aura lieu quel que soit l'indice n .

Il en résulte que S_n tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, puisque T_n décroît et k_n tend vers l'infini d'après le théorème du n° 14.

On trouve ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$(43) \quad \int p f^2 dx = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2.$$

18. Nous avons supposé que f admette la dérivée dans l'intervalle donné, mais cette dernière restriction n'a rien d'essentiel.

L'égalité (43) aura lieu, quelle que soit la fonction f , continue dans l'intervalle considéré.

Il suffit, pour la démonstration, d'appliquer le théorème connu de M. E. Picard sur le développement d'une fonction continue en série absolument et uniformément convergente procédant suivant les polynomes entiers.

En répétant textuellement la démonstration qui a servi à démontrer le théorème analogue pour les fonctions harmoniques de M. Poincaré (1) ainsi que

(1) W. STEKLOFF, *Sur les fonctions harmoniques de M. H. Poincaré (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. II, p. 285-287; 1900).*

pour les fonctions fondamentales ⁽¹⁾, on prouvera aisément ce théorème général :

THÉORÈME.— *Quelle que soit la fonction f , continue dans l'intervalle donné de a à b ($b > a$), on a toujours*

$$\int_a^b p f^2 dx = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2.$$

Remarquons qu'on peut établir cette égalité pour toute fonction f , limitée dans l'intervalle donné, en employant la méthode indiquée ⁽²⁾; mais peu importe.

19. Soit maintenant ψ une autre fonction quelconque satisfaisant à une seule condition

$$\int_a^b \psi^2 dx < Q,$$

Q étant un nombre fixe.

Multiplions l'équation (40) par ψ et intégrons-la de $x = x_0$ à une valeur quelconque de x , x_0 et x étant compris dans l'intervalle (a, b) .

On trouve

$$\int_{x_0}^x f \psi dx = \sum_{s=1}^n A_s \int_{x_0}^x \psi V_s dx + r_n,$$

où l'on a posé

$$r_n = \int_{x_0}^x R_n \psi dx.$$

Il est évident que

$$|r_n| < N \sqrt{S_n},$$

N étant un nombre fixe.

On en conclut, en tenant compte du théorème du numéro précédent, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$(44) \quad \int_{x_0}^x f \psi dx = \sum_{s=1}^{\infty} A_s \int_{x_0}^x \psi V_s dx.$$

Démontrons que cette série converge uniformément dans l'intervalle donné.

⁽¹⁾ W. STEKLOFF, *Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique* (Édition de la Société mathématique de Kharkow, p. 250-255. Kharkow; 1901).

⁽²⁾ W. STEKLOFF, *Les méthodes générales, etc.*, p. 255-257. Kharkow; 1901.

Désignons par P la somme de cette série, par P_n la somme de ses n premiers termes.

On a

$$|P - P_n| = |r_n|.$$

Comme $S_n = \int_a^b p R_n^2 dx$ tend vers zéro, lorsque n croît indéfiniment, on peut toujours trouver un nombre ν indépendant de x et tel qu'on ait, pour $n > \nu$,

$$|P - P_n| < \varepsilon,$$

quel que soit le nombre positif ε .

Donc, la série (44) converge uniformément dans l'intervalle donné.

On peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — Soient f une fonction, continue dans l'intervalle donné (a, b) , ψ une autre fonction assujettie à une seule condition

$$\int_a^b \psi^2 dx < Q,$$

Q étant un nombre assignable.

Ces conditions étant remplies, la fonction

$$\int_{x_0}^x f\psi dx, \quad a \leq x_0 \leq b, \quad a \leq x \leq b,$$

est développable en série uniformément convergente de la forme suivante

$$\int_{x_0}^x f\psi dx = \sum_{s=1}^{\infty} A_s \int_{x_0}^x \psi V_s dx, \quad A_s = \int_a^b p f V_s dx.$$

Posons, en particulier,

$$x_0 = a, \quad x = b.$$

On trouve

$$(45) \quad \int_a^b f\psi dx = \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s,$$

où l'on a posé

$$B_s = \int_a^b \psi V_s dx.$$

Il est aisé de voir que la série (45) converge absolument.

On a, en effet,

$$|A_s B_s| < \frac{1}{2}(A_s^2 + B_s^2).$$

Les séries

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \quad \sum_{s=1}^{\infty} B_s^2$$

convergent (*voir* n° 16).

Il en est de même de la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} |A_s B_s|.$$

Donc, la série (45) converge absolument.

20. Supposons maintenant que f admette les dérivées de deux premiers ordres dans l'intervalle (a, b) et satisfasse aux conditions

$$(46) \quad \begin{cases} f'(a) - h f(a) = 0, \\ f'(b) + H f(b) = 0. \end{cases}$$

Dans ce cas T_n tend vers zéro, lorsque n croît indéfiniment.

Je profite de l'occasion pour démontrer cette proposition, intéressante par elle-même :

Moyennant le théorème précédent on trouve

$$\int_a^b f f'' dx = \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s,$$

où

$$B_s = \int_a^b f'' V_s dx.$$

Or, en vertu de (23), (24) et (46),

$$B_s = \int_a^b f q V_s dx - k_s A_s.$$

D'autre part,

$$\int_a^b f f'' dx = - [H f^2(b) + h f^2(a)] - \int_a^b f'^2 dx.$$

On a donc

$$\int_a^b f'^2 dx + H f^2(b) + h f^2(a) + \sum_{s=1}^{\infty} A_s \int_a^b f q V_s dx = \sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2,$$

d'où

$$\int_a^b f'^2 dx + H f^2(b) + h f^2(a) + \int_a^b q f^2 dx = \sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2,$$

puisque, d'après le théorème du numéro précédent,

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s \int_a^b q f V_s dx = \int_a^b q f^2 dx.$$

21. Supposons maintenant que la fonction continue f soit choisie de sorte que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s$$

converge *uniformément* dans l'intervalle donné (a, b) .

Dans ce cas

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$$

représente une fonction continue dans cet intervalle.

On peut écrire, par conséquent,

$$\lim \int_a^b p R_n^2 dx = \int_a^b p R^2 dx = 0,$$

c'est-à-dire

$$R = 0.$$

Il s'ensuit que

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s.$$

Nous obtenons donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La série*

$$(47) \quad \sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s, \quad A_s = \int_a^b p f V_s dx$$

représentera la fonction donnée f toutes les fois qu'elle sera uniformément convergente.

22. Il ne reste qu'à trouver les conditions suffisantes de la convergence uniforme de la série (47).

Supposons que f satisfasse aux conditions du n° 20.

On trouve alors

$$(48) \quad k_n A_n = k_n \int_a^b p f V_n dx = \int_a^b q f V_n dx - \int_a^b f V_n'' dx = \int_a^b (q f - f'') V_n dx = C_n,$$

d'où, en tenant compte de (28),

$$A_n V_n = C_n \left(M_1 \int_a^b p v_2 V_n dx - M_2 \int_a^b p v_1 V_n dx - \frac{v_1}{\Delta} \int_a^x p v_2 V_n dx - \frac{v_2}{\Delta} \int_a^x p v_1 V_n dx \right).$$

Désignons par r_n le reste de la série (47), par r_{1n} , r_{2n} , ρ_{1n} , ρ_{2n} les restes des séries

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_a^b p v_1 V_n dx, & \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_a^b p v_2 V_n dx, \\ \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_a^x p v_1 V_n dx, & \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_a^x p v_2 V_n dx. \end{aligned}$$

On aura

$$r_n = M_1 r_{2n} - M_2 r_{1n} + \frac{v_1}{\Delta} \rho_{2n} - \frac{v_2}{\Delta} \rho_{1n}.$$

D'après le théorème du n° 19 on peut trouver un nombre ν indépendant de x et tel qu'on ait pour $n > \nu$

$$|r_{2n}| < \varepsilon', \quad |r_{1n}| < \varepsilon', \quad |\rho_{2n}| < \varepsilon', \quad |\rho_{1n}| < \varepsilon'.$$

On aura donc

$$|r_n| < M \varepsilon' = \varepsilon \quad \text{pour } n > \nu,$$

M désignant le maximum des modules de M_1 , M_2 , $\frac{v_1}{\Delta}$, $\frac{v_2}{\Delta}$ dans l'intervalle (a, b) , ε étant un nombre positif quelconque, donné à l'avance.

Donc la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s$$

converge uniformément dans l'intervalle (a, b) , pourvu que f satisfasse aux conditions, énoncées au début du n° 20.

On obtient ainsi ce théorème :

THÉORÈME. — *La série*

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s, \quad A_s = \int_a^b p f V_s dx$$

converge uniformément dans l'intervalle donné (a, b) , pourvu que la fonction continue f admette les dérivées des deux premiers ordres dans cet intervalle

et satisfasse aux conditions aux limites

$$\begin{aligned} f'(a) - hf(a) &= 0, \\ f'(b) + Hf(b) &= 0. \end{aligned}$$

23. Supposons encore que f admette les dérivées des trois premiers ordres dans l'intervalle (a, b) et que q admette la dérivée première dans cet intervalle.

On aura, en vertu de (29) et (48),

$$|A_n V_n| < k_n \frac{|C_n|}{k_n} < \frac{k_n}{2} \left(C_n^2 + \frac{1}{k_n^2} \right).$$

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n C_n^2$$

converge d'après le lemme du n° 16, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n}$$

convergera également, en vertu de (38).

On en conclut que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s$$

converge absolument et uniformément dans l'intervalle de a à b .

Remarquons enfin que les séries

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s(a) \quad \text{et} \quad \sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s(b)$$

convergent absolument, quelle que soit la fonction continue f admettant la dérivée du premier ordre dans l'intervalle donné (a, b) .

Cela résulte immédiatement de ce que

$$|A_n V_n(b)| < k_n [|A_n D_n| + |A_n E_n|] B,$$

où l'on a posé

$$D_n = \int_a^b p v_1 V_n dx, \quad E_n = \int_a^b p v_2 V_n dx.$$

Dans l'inégalité précédente B désigne le maximum des modules de

$$M_1 + \frac{\nu_1}{\Delta} \quad \text{et} \quad M_2 + \frac{\nu_2}{\Delta}$$

dans l'intervalle (a, b) .

Les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n A_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} k_n D_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} k_n E_n^2$$

convergent d'après le lemme du n° 16.

Donc, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n V_n(b)$$

converge absolument.

On démontrera de la même manière la convergence absolue de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n V_n(a).$$

24. La simple comparaison des théorèmes des n°s 21 et 22 nous amène au théorème suivant :

THÉORÈME. — *La fonction continue f est développable en série uniformément convergente de la forme suivante*

$$(49) \quad f = \sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s, \quad A_s = \int_a^b p f V_s dx,$$

pourvu que cette fonction admette les dérivées des deux premiers ordres dans l'intervalle donné (a, b) et satisfasse aux conditions aux limites

$$(50) \quad \begin{cases} f'(a) - h f(a) = 0, \\ f'(b) + H f(b) = 0. \end{cases}$$

Si f admet encore la dérivée du troisième ordre, la série (49) converge non seulement uniformément, mais encore absolument.

25. Soit maintenant f une fonction quelconque ayant les dérivées des deux premiers ordres dans l'intervalle (a, b) , mais ne satisfaisant pas aux conditions (50).

Prenons la fonction

$$f_1 = f + Ax + B,$$

A et B étant des constantes quelconques.

On peut les choisir de façon que l'on ait

$$\begin{aligned} f_1'(a) - hf_1(a) &= 0, \\ f_1'(b) + Hf_1(b) &= 0. \end{aligned}$$

On trouve alors

$$(51) \quad \begin{cases} A = \frac{H[hf(a) - f'(a)] - h[Hf(b) + f'(b)]}{H + h + Hh(b-a)}, \\ B = \frac{(ha - 1)[Hf(b) + f'(b)] - (1 + Hb)[hf(a) - f'(a)]}{H + h + Hh(b-a)}. \end{cases}$$

En entendant par A et B dans f_1 les valeurs trouvées et en appliquant à f_1 le théorème du numéro précédent, on obtient le développement

$$f_1 = \sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s, \quad A_s = \int_a^b \rho f_1 V_s dx,$$

ce qui démontre le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute fonction f , continue et admettant les dérivées de deux premiers ordres dans l'intervalle donné (a, b) , se développe en série uniformément convergente, procédant suivant les fonctions $V_s (s = 1, 2, \dots)$ de la forme suivante*

$$f = -Ax - B + \sum_{s=1}^{\infty} V_s \int_a^b (f + Ax + B) \rho V_s dx,$$

A et B étant des constantes bien déterminées, définies par les équations (51).

Remarquons que les résultats obtenus s'appliquent aussi aux cas limites de $h = 0$ et de $h = \infty$.

Dans le premier cas les fonctions V_n , vérifiant les équations (12), satisfont aux conditions

$$V_n'(a) = 0, \quad V_n'(b) = 0,$$

dans le second cas aux conditions

$$V_n(a) = 0, \quad V_n(b) = 0.$$

Faisant l'hypothèse particulière par rapport à p , q , H et h , nous obtiendrons les développements divers de la fonction donnée en séries procédant suivant les fonctions trigonométriques, fonctions de Lamé, etc.