
SUR LES

COURBES DE DÉFORMATION DES FILS,

PAR M. H. BOUASSE,
Professeur à l'Université de Toulouse.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE VIII.

SUR LES PHÉNOMÈNES DE RÉACTIVITÉ AU COUPLE NUL.

I. — DISCUSSION DES EXPÉRIENCES DE F. KOHLRAUSCH.

Nous allons reprendre, nous centième, l'étude du phénomène de réactivité au couple nul; un fil tordu, ramené et maintenu au couple total nul, continue généralement à se détordre. On considère comme classiques les expériences de F. Kohlrausch faites, les unes en 1866 (*Pogg. Ann.*, t. CXXVIII), les autres en 1876 (*ibid.*, t. CLVIII); tous ceux qui ont repris la question ont employé des méthodes et appareils analogues aux siens et obtenu des résultats, je ne dis pas aussi inexacts, je dis aussi dénués de sens. L'hypothèse fondamentale, qui seule peut expliquer la technique de Kohlrausch, est qu'il s'agit de déterminer des constantes, analogues aux densités et aux indices de réfraction des cristaux, qui caractérisent non seulement un métal tel qu'il est employé, mais ce métal en général. On introduit conséquemment des simplifications expérimentales, illégitimes, dès que l'on admet que les phénomènes actuels sont liés à toutes les opérations antérieures.

Je vais donc, dans ce Chapitre, discuter les expériences de Kohlrausch, décrire la technique correcte et rapporter mes résultats.

Résultats de Kohlrausch. — Voici d'abord la formule qui résume le Mémoire de 1866.

On tord un fil de l'angle α_0 , on maintient la torsion un temps T , on ramène au couple nul, et l'on attend un temps t ; il y a un déplacement azimutal x .

On a, d'après Kohlrausch,

$$x = K \alpha_0 T^\beta \frac{1}{l^m}.$$

Pour $t = \infty$, $x = 0$. Donc x est l'écart azimutal compté à partir de la position d'équilibre définitive, dont on se rapproche asymptotiquement dans le temps (les lettres ici employées ne sont pas celles du Mémoire original). Les quantités K , β , m sont des constantes. Or nous lisons dans les conclusions du Mémoire :

« 6. La grandeur m a une valeur différente pour les différentes substances, mais constante pour le même corps. On peut donc l'appeler *coefficient d'élasticité résiduelle*; elle est de 0,3875 pour l'argent (t en minutes).

» 7. Les paramètres K et β dépendent seulement de l'espèce du fil (*Drahtsorte*).

» 8. K peut être représenté par l'expression $K = K_1(\theta + 21^\circ, 5)$ où θ est la température. »

Il serait impossible de s'exprimer autrement, s'il s'agissait de constantes déterminées une fois pour toutes, comme par exemple le poids atomique de l'argent. Nous allons rechercher comment un observateur consciencieux a pu se tromper assez grossièrement pour donner comme constants et énoncer à quatre décimales des paramètres qui peuvent varier de dix fois leur valeur.

Choix et préparation du fil étudié. — Kohlrausch, sans s'en douter, a limité son étude à un cas très particulier. Il s'est astreint à n'étudier qu'un *seul petit bout de fil* dont il n'indique d'ailleurs ni la provenance ni l'état au début des expériences. Son fil d'argent avait 12^{cm},5 de long et un diamètre de 0^{mm},092. Les torsions étaient poussées jusqu'à 341°, soit jusqu'à 2,19 millièmes. Ainsi, il opère sur un fil unique, et les torsions qu'il lui fait subir sont toujours petites. Nous lisons enfin au § VI du Mémoire de 1866 : « Relativement à l'importance de la grandeur de la limite d'élasticité parfaite, je dois confesser une inconséquence. Pour la *régularité*, toutes les torsions sont faites dans le même sens. Mais on n'a pas pris au début la précaution d'éloigner la limite d'élasticité dans ce sens, de manière qu'ensuite on n'ait plus eu la crainte de la dépasser. Cela tient, comme on l'a dit, à ce fait que le fil n'était destiné qu'à des recherches préliminaires. » Il s'agit donc, dans les expériences de Kohlrausch, d'un fil préparé on ne sait trop comment, mais tordu toujours dans le même sens.

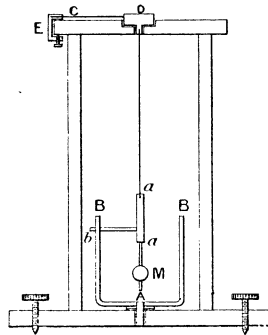
Technique adoptée. — La torsion et la détorsion se faisaient à la main, d'une manière mal déterminée : « Il faut remarquer que, pour la régularité, comme il

est impossible d'obtenir des rotations instantanées, on a fixé leur durée à 2^s; soit en tordant, soit en détordant, la rotation commence une seconde avant l'époque où elle est censée faite et se termine une seconde après. » En conséquence, nous pouvons définir comme suit les parcours utilisés :

- 1° Torsion en 2^s d'un angle α_0 ;
- 2° Arrêt pendant un temps T (qui est, à proprement parler, supérieur de 2^s au temps d'arrêt réel);
- 3° Détorsion jusqu'au couple nul d'un angle α_1 en 2^s;
- 4° Étude de la détorsion au couple nul.

Est-il possible de réaliser strictement cette technique avec l'appareil employé, qui est représenté *fig. 1*? La première phase de l'expérience peut à la rigueur être

Fig. 1.



effectuée, puisque le bras *b* que supporte la pièce *aa* suspendue au fil en expérience butte contre l'arrêt *BB* mobile autour de l'axe *A*.

On peut, à l'aide du bras *CD*, faire une torsion d'un angle connu. Cependant, pour de grandes torsions, de l'ordre d'une circonférence, on risque de produire des chocs, si l'on ne veut pas que la durée de la torsion excède les 2^s convenues. La troisième phase, la plus importante, est inexécutable : il est, en effet, impossible de prévoir à l'avance l'angle dont il faudrait détordre pour ramener justement le fil au couple nul. On est pris entre deux alternatives : ou détordre lentement au voisinage du couple nul pour ne pas le dépasser, ou détordre d'un angle rigoureusement égal à l'angle de torsion, mais il se produit inévitablement des oscillations. L'angle de détorsion α_1 qui ramène au couple nul est, en effet, toujours $<$ que l'angle de torsion α_0 ; autrement il ne se produit pas de détorsion consécutive, le phénomène à étudier est nul.

C'est la seconde alternative que choisissait Kohlrausch; aussi les oscillations existaient-elles, puisqu'il nous prévient qu'elles cessent pratiquement 10^s après la détorsion. A propos des effets de la température, il dit même que la première détermination ne peut se faire que 30^s ou 45^s après la détorsion. Il est à noter

que la manière dont on revient au couple nul a une influence considérable sur les phénomènes qui se passent aussitôt la détorsion finie, et qui deviennent prédominants avec la technique de Kohlrausch.

Nature des résultats que devait obtenir Kohlrausch. — Les résultats de Kohlrausch sont peut-être exacts, en ce sens qu'il a fidèlement décrit les phénomènes observés; mais il ressemble à un explorateur qui, parcourant une région, mesure avec précision la hauteur d'un pic, pris au hasard et non repéré, et déclare que tous les pics du pays ont la même hauteur. De telles observations sont parfaitement inutiles, puisqu'elles n'auront d'explication que quand un autre se sera donné la peine de tout recommencer; elles sont nuisibles, en ce sens qu'elles font croire qu'une question est débrouillée, quand rien n'est fait.

La formule de Kohlrausch (Chap. VI, p. 460) conduit à une décroissance extrêmement rapide du phénomène de détorsion consécutive; elle donne une importance énorme à ce qui se passe dans les premiers instants qui suivent la détorsion.

J'ai montré (*passim*, par exemple, Chap. VII, n° 12, p. 107) que, si l'on augmente la vitesse avec laquelle on décrit une courbe de torsion ou de détorsion, et si l'on arrête brusquement en un point, la vitesse de variation du couple (à azimut constant) ou de l'azimut (à couple constant) croît quand la vitesse de parcours croît: la vitesse de variation initiale après l'arrêt est même proportionnelle à la vitesse de parcours. Après un certain temps, pendant lequel le couple (ou l'azimut) est demeuré constant, la vitesse de variation de l'azimut (ou du couple) est presque indépendante de la vitesse de parcours au moment de l'arrêt, toutes choses égales d'ailleurs. La technique de Kohlrausch le conduit donc à exagérer extraordinairement l'importance du début du phénomène; il opérât avec des vitesses de détorsion formidables, comparativement à celles que j'ai employées habituellement (par exemple 100, 200 fois plus grandes). Je ne lui reprocherais donc pas ses résultats, s'il avait su en reconnaître la cause et s'il ne les généralisait pas d'une manière fautive.

Au fond, ce qu'il se borne à étudier, c'est le phénomène que j'ai appelé (Chap. VI, p. 458 A) *déperdition rapide*, et qui dépend principalement de l'inclinaison de la tangente de la courbe de torsion au couple nul.

Dans son Mémoire de 1866, Kohlrausch donne la formule pour l'argent :

$$x = K_1(\theta + 21^\circ, 5) \alpha_0 T^{0,59} t^{-0,39}.$$

En 1876, il reprend ces expériences *sur le même bout de fil d'argent* et trouve

$$x = (\theta + 21^\circ, 5)(a\alpha_0 + b\alpha_0^2) T^{0,59} t^{-0,39}.$$

Je ne transcris pas la valeur des constantes a et b , qui ne signifient rien.

Nous avons déjà montré (Historique, exposé et discussion, etc., *Faculté de Toulouse*, 1898, A.26) qu'une telle formule est admissible quand α_0 est petit. Elle serait absolument erronée si la torsion devenait grande. N'oublions pas que, pour évaluer la grandeur d'une torsion, il faut la transformer en millièmes.

Détail des résultats de Kohlrausch. — Si l'on peut s'expliquer, comme il précède, la nature des résultats de Kohlrausch, le détail en est faux.

L'expérience montre sans conteste que la grandeur du phénomène ne croît pas indéfiniment avec T ; qu'elle tend même assez rapidement vers une valeur sensiblement constante. La forme $T^{0.59}$ admise par Kohlrausch indique le contraire.

Si l'on fait varier la température, l'expérience montre que la loi tout entière du phénomène est modifiée; il ne suffit pas de multiplier les ordonnées par une sorte de binôme de dilatation; θ , α_0 et T entrent dans l'expression du phénomène suivant une fonction qu'il est impossible de décomposer dans le produit de trois fonctions ne contenant chacune que l'une des variables.

Suivant que l'on emploie des fils plus ou moins étirés, plus ou moins recuits, les phénomènes peuvent varier de plusieurs fois leur valeur : nous voici loin de ces paramètres constants qui caractérisent une matière.

Si l'on recommence toujours dans le même sens les mêmes torsions, on trouve des nombres qui varient; donc le phénomène dépend des phénomènes antérieurs. On objectera que les torsions étaient si faibles dans les expériences de Kohlrausch que, d'une expérience à la suivante, le fil revenait toujours dans le même état; il suffisait d'attendre un temps suffisant pour qu'un parcours n'influe pas sur le suivant. Mais, outre que rien n'est moins prouvé (*voir plus loin*, n° 14), que reste-t-il alors de la généralité de sa formule?

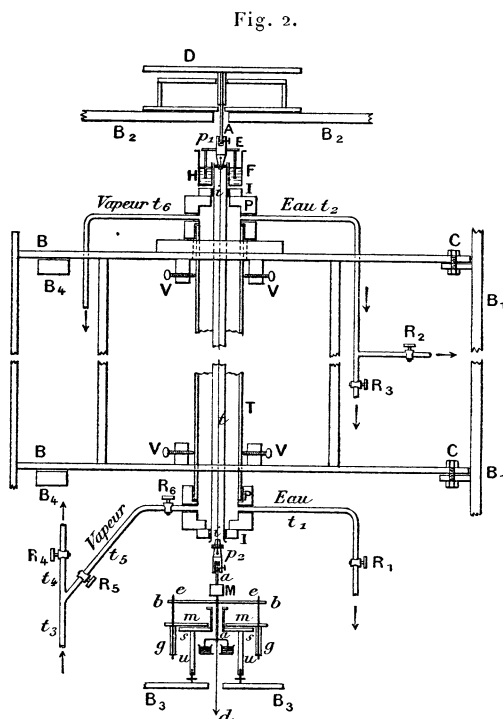
Aussi bien, nous allons décrire nos propres expériences : le lecteur comparera nos résultats avec ceux de Kohlrausch; nous espérons qu'il restera convaincu de l'inutilité de tant d'expériences informes, dont le nombre augmente chaque jour. Il s'expliquera ainsi le peu de ménagement que nous mettons à juger un de ces Mémoires, dont l'influence est rendue néfaste par la notoriété de son auteur.

II. — DESCRIPTION DES APPAREILS.

L'appareil qui sert à tordre est dessiné schématiquement en haut de la *fig. 2*; on trouvera sa description complète au Chapitre VI, page 434. On supposera que le mouvement est transmis par l'intermédiaire d'appareils à friction, décrits page 433; de plus, entre ces derniers appareils et l'appareil de torsion, on imaginera un embrayeur dont la commande se fait électriquement et à distance. La

rupture d'un courant permet, à l'aide d'un système qu'il n'est pas nécessaire de décrire, d'arrêter brusquement le mouvement de rotation, quels que soient d'ailleurs sa vitesse et son sens.

Le fil est pris en haut et en bas dans deux pinces p_1 et p_2 (Chap. VI, p. 436). A la pince supérieure est soudée une plaque de laiton E à laquelle est vissé un



cylindre de laiton, dont nous verrons le rôle plus loin. A la pince inférieure, on peut fixer, suivant le besoin, différents appareils.

La *fig. 2* représente schématiquement celui qui servira à l'étude actuelle des phénomènes au couple nul. C'est une tige aa portant : 1° un miroir M (ou quelquefois, l'un sous l'autre, deux miroirs faisant entre eux un angle connu); 2° une paille transversale bb ; 3° un fil très fin ad auquel on attachera un poids convenable; 4° un fil deux fois recourbé dont les extrémités plongent dans une cuve annulaire pleine d'huile légère. Le poids attaché au fil ad plonge lui-même dans de l'huile; la cuve annulaire peut s'élever ou s'abaisser, grâce à un support à crémaillère non représenté.

Le fil en expérience est long de 145^{cm} entre ses deux pinces; il a généralement un diamètre voisin de 0^{mm},55. Le fil ad a une longueur voisine de 1^m et un diamètre de 0^{mm},15. A identité de métaux, à la même torsion correspond, pour le fil

inférieur, un couple cent fois plus petit que pour le fil supérieur. D'ailleurs, le premier est libre par sa partie inférieure; on ne peut donc pas craindre qu'il gêne sensiblement le fil supérieur dans sa détorsion. L'huile de la cuve annulaire arrête les petites oscillations qui pourraient se produire; le fil deux fois recourbé y pénètre à peine, de manière à ne pas créer un couple résistant qui ne soit pas négligeable.

Avant de produire une torsion, on amène en contact avec la paille les buttoirs *ee* qui sont installés sur un appareil représenté schématiquement *fig. 2*. Imaginons qu'une disposition convenable permette de mettre la paille juste en contact avec les deux buttoirs.

L'expérience va donc consister : 1° à tordre par en haut, suivant une loi quelconque, mais connue, et dans un sens tel que la partie inférieure du fil soit calée au moyen de la paille et des buttoirs; 2° à détordre suivant une loi quelconque, mais connue, jusqu'au moment où la paille lâche les buttoirs; 3° à ce moment précis, simultanément, à désebrayer l'appareil de rotation, à supprimer les buttoirs, à mettre en marche un compteur à seconde. On conçoit que les deux premières opérations puissent s'effectuer par la rupture du même courant, et que le même mouvement de l'observateur qui rompt ce courant ferme un autre circuit sur lequel se trouvent une horloge mère et un compte-secondes électrique. Le commutateur nécessaire à ces opérations est si facile à imaginer qu'il n'est pas utile de le décrire.

L'observateur regarde, avec une lunette, dans le miroir *M*, une échelle *circulaire* en bois de 2^m de longueur située à 1^m du miroir. Le déplacement de l'échelle entière dans le miroir correspond donc à une rotation du miroir d'un peu moins de 60°. Si l'on met un second miroir à 50° du premier, on pourra suivre le phénomène de détorsion pour une rotation du miroir de plus de 100°. Pour faciliter les réglages, la lunette d'observation est montée sur la tige d'un cathétomètre. L'échelle est éclairée par un bec Auer dont on projette l'image, à l'aide d'une lentille mobile, au point de l'échelle qu'on regarde.

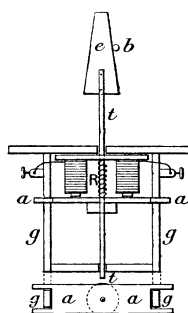
Pour savoir à quel moment la paille quitte ses buttoirs, l'observateur n'a qu'à déterminer le moment où l'image de l'échelle commence à se déplacer. Il s'écoule à peine un ou deux dixièmes de seconde entre ce moment et celui où le mouvement de rotation est arrêté, et où le compte-secondes est mis en marche. Cet intervalle dépend de l'habileté de l'observateur.

Il s'agit maintenant de supprimer les buttoirs. En effet, admettons que, pour détordre le fil, il faille imprimer au disque *D* une rotation qui, vue d'en haut, est dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre : il faudrait imprimer à la paille *bb* une rotation qui, vue d'en haut, serait en sens contraire. Le premier mouvement tend à éloigner la paille de ses buttoirs. Au moment où il cesse et où, par conséquent, l'extrémité supérieure du fil devient fixe, le couple devant rester

nul, l'expérience montre que la détorsion doit continuer. Donc la paille, après avoir quitté un instant ses buttoirs, tendra à revenir s'appliquer contre eux. Si donc, on veut que le couple reste nul, il faut supprimer les buttoirs, aussitôt après l'arrêt du mouvement de rotation du disque D.

La *fig. 3* montre la disposition adoptée. La tige *tt* passe dans deux trous percés dans un cadre *gg*; elle est ainsi guidée verticalement. Elle porte : 1° une mince

Fig. 3.



palette d'acier *e* qui servira de buttoir et dont la figure donne la forme; 2° une lame de fer doux *aa*, servant d'armature à l'électro-aimant et dont les extrémités guident le buttoir en azimuth en glissant le long des montants *g* du cadre, ainsi que le montre sa projection horizontale. Enfin, un ressort *R* fait brusquement descendre la tige *tt* et le buttoir, quand le courant cesse de passer dans l'électro-aimant. Deux appareils identiques sont fixés aux extrémités d'un même diamètre d'une circonférence horizontale dont la tige *aa* (*fig. 2*) serait le centre. Quand la paille *bb* s'appuie contre les buttoirs, elle se projette en *b* comme l'indique la *fig. 3*. Le bas de la *fig. 2* représente schématiquement en *e* et *g* l'appareil décrit *fig. 3*. Un disque *ss* repose sur trois pieds à vis calantes *uu* de 17^{cm} de hauteur. Un secteur *mm* tourne autour de l'axe du disque *ss* et peut se fixer dans une position quelconque à l'aide d'une pince et d'une vis de rappel; il porte normalement, et par l'intermédiaire de glissières horizontales et de vis micrométriques, les appareils de la *fig. 3*. Il est donc très facile d'amener exactement la paille en contact avec les buttoirs *ee* à l'aide de ces réglages.

Il y a des précautions à prendre pour que la paille ne colle pas contre le buttoir, etc., mais la description de ces détails nous entraînerait trop loin.

Expériences à la température ordinaire et à 100°. — Ce qui complique encore beaucoup l'appareil, déjà passablement complexe (il ne faut pas oublier toute la partie mécanique qui a été déjà décrite), c'est la nécessité de pouvoir porter le fil à 100° et le ramener à la température ordinaire. La *fig. 2* montre la

disposition employée. De la vapeur ou de l'eau peut circuler dans l'espace annulaire compris entre les deux tubes t et T . Toute la difficulté consiste à avoir un appareil long de 150^{cm} environ qui doit être réglable en position, déplaçable aisément pour pouvoir installer et supprimer le fil, et surtout parfaitement étanche malgré les brusques et fréquents passages de la température ordinaire à 100°. Toute goutte d'eau qui tombe sur la paille bb ou dans l'huile de l'amortisseur est une source de troubles.

Le tube T , de 6^{cm} de diamètre, est soudé dans les pièces P en bronze, venues de fonte, et dans lesquelles sont vissés les tubes de laiton t_1, t_2, t_3, t_4 . Le tube t , de 2^{cm} de diamètre, en laiton, porte, soudés, deux colliers filetés i . On le visse dans un écrou I soudé à la pièce P inférieure, puis on produit le serrage en vissant l'écrou I qui vient s'appuyer sur la pièce P supérieure. Tous les pas de vis et le joint supérieur iI sont enduits d'un mastic à la céruse. On s'imagine difficilement après quels tâtonnements nous sommes parvenu à construire cette pièce, de manière à la rendre étanche. Nous utilisons d'abord des cuirs ou des caoutchoucs pour les joints : ils se détruisaient rapidement à 100°. Nous essayions de souder le tube t dans les pièces P ; les dilatations inégales de t et T faisaient sauter les soudures.

L'eau provient d'un réservoir, entre par R_2 , sort par R_1 et se rend dans une vidange; le robinet R_3 sert à vider, au besoin, le tube t_2 . La vapeur est produite dans une chaudière en cuivre rouge d'une quinzaine de litres de capacité; on peut maintenir l'appareil pendant plus de trois heures à 100° sans renouveler l'eau.

La chaudière est à plus de 2^{m,5} du miroir, de manière que les courants d'air chaud ne parviennent pas à celui-ci. Enfin, sur le tube t , s'enfile un godet annulaire F contenant de l'huile H ; le cylindre E , fixé à la pince p_1 , fait chicane dans l'huile et ferme hermétiquement la partie supérieure de t , sans gêner les mouvements de rotation.

Il est bien clair qu'on ne peut pas répondre de la température des extrémités du fil : la supérieure, parce que l'huile n'est jamais ni à 100°, ni à la température ordinaire; l'inférieure, parce que le dernier centimètre de fil est dans l'air. Mais le fil a 145^{cm} de long; l'erreur est donc faible et tout à fait indifférente pour les expériences que nous faisons, où nous nous gardons de déterminer des pseudo-constantes et où nous cherchons seulement la forme des phénomènes.

Enfin, il faut installer le fil et l'enlever; l'énorme pièce précédente doit être mobile, et ici nous n'aurions su comment faire sans l'installation spéciale de notre laboratoire. Elle est prise dans un cadre formé de planches épaisses, qui peut tourner autour de l'axe CC formé par des tirefonds C , en glissant de l'autre côté sur les madriers B_4 . Naturellement, avant de produire cette rotation, il faut séparer les pinces p_1 de l'axe A , p_2 de la tige aa . La rotation effectuée (environ 40°), on dévisse la plaque E et l'on retire le fil et ses pinces par en haut.

Je n'insiste pas sur la manière dont on fixe le cadre dans une position invariable pendant l'expérience.

Il faut fixer le tube T par rapport au cadre et, par conséquent, à l'axe A. De longues vis V permettent très aisément de le faire. Enfin, pendant la rotation, les tubes t_1, t_2, t_3, t_6 doivent être indépendants de la tuyauterie fixe amenant et enlevant l'eau et la vapeur. Ils lui sont reliés par des raccords à vis.

Le disque D est divisé en degrés et l'on peut lire d'en bas, au moyen de réflexions convenables, l'azimut pendant la torsion ou la détorsion.

Marche générale des expériences. — On tord suivant une loi déterminée, on détord; au moment où le couple devient nul et où la paille lâche ses buttoirs, on arrête le détorsion, on supprime les buttoirs, on met en marche un compte-secondes. L'observation commence et continue suivant les cas des temps variables et qui peuvent dépasser un jour.

Quand la paille quitte ses buttoirs, le couple n'est pas nul, mais négatif. Pour le rapprocher de zéro, on donne à la tige bb le moment d'inertie le plus petit possible (on emploie une paille qui est le tube le plus résistant à égalité de poids), on réduit l'adhérence avec les buttoirs (en les faisant comme des couteaux), le frottement sur l'huile d'amortissement et enfin le diamètre du fil tenseur *ad*.

Malgré tout, le geste de l'observateur n'est pas instantané, l'origine du phénomène et son début ne peuvent pas être déterminés exactement, si incomparablement supérieure que puisse être notre technique à celle de Kohlrausch.

Pour ces raisons, nous commençons l'observation systématiquement 25^s après l'origine véritable du phénomène. L'expérience montre que l'influence de toutes les perturbations initiales ci-dessus énoncées a cessé largement et que le miroir a pris alors un mouvement parfaitement régulier. Nous pourrions commencer à observer 2^s ou 3^s après l'origine, car, avec notre manière d'opérer, il n'y a pas d'oscillations; mais nous voulons éviter toute espèce de contestation sur l'interprétation des résultats.

Pour les raisons que l'on sait, nous choisissons pour époques des observations des temps formant une progression géométrique : la raison choisie est 2. Les observations se font donc aux temps 25^s, 50^s, 100^s, etc.; généralement, nous allons jusqu'à 3200^s = 53^m 20^s. Nous appelons Δp_1 le chemin parcouru par le miroir entre 25^s et 50^s, Δp_2 le chemin parcouru entre 50^s et 100^s, etc.

Les Δp sont évalués en unités arbitraires u ; soit $0^{\text{mm}}, 1$ de l'échelle.

Nous poserons

$$p_1 = \Delta p_1, \quad p_2 = \Delta p_1 + \Delta p_2, \quad \dots, \quad p_n = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \dots + \Delta p_n.$$

Voici un Tableau donnant les concordances numériques :

Dans toutes les expériences qui vont être rapportées, le fil a $0^{\text{mm}},545$ de diamètre.

1 tour centimètre vaut.....	171,0 millièmes de torsion
1 tour sur 144^{cm} »	1189 millionièmes
1° »	3,303 millionièmes
1^{cm} d'échelle à un mètre vaut une détorsion de..	$0^{\circ},2865$ de miroir
Soit, en millièmes, pour 144^{cm}	$0^{\circ},2865 \times 3,303 = 0,9462$ millionièmes
Une unité arbitraire = u vaut une détorsion de...	$0,009462$ millionièmes

Enfin, dans ce Mémoire, comme dans le Mémoire précédent, nous étudierons principalement deux cas extrêmes : fil étiré notablement à la filière, fil parfaitement recuit.

Toutes les opérations faites sur un fil doivent être enregistrées, puisqu'elles influent toutes sur l'état actuel. Un fil ne servira donc généralement qu'une fois, pour que l'interprétation des résultats soit possible. Aussi, tandis que Kohlrausch faisait, à dix ans d'intervalle, deux Mémoires avec $12^{\text{cm}},5$ de fil, ce seul Chapitre VIII a exigé l'emploi de plus de 450^{m} de fil, soit 300 bouts. La valeur d'un Travail n'est pas proportionnelle à la quantité de matière employée; la comparaison de ces nombres prouve simplement quelles idées contradictoires Kohlrausch et moi nous faisons du phénomène.

III. — RÉSULTATS DES EXPÉRIENCES.

FIL ÉTIRÉ A LA FILIÈRE.

1. *Vitesses de torsion et de détorsion invariables. Temps d'arrêt nul à la fin de la torsion. Torsion variable.* — On donne, dans le Tableau suivant, le résultat des expériences pour un fil étiré à la filière de 21,5 pour 100 en une passe à partir du fil recuit. Son diamètre est $0^{\text{mm}},545$; la vitesse de torsion est de 1 tour en $10^{\text{s}},36$ (113,8 millionièmes-seconde pour le diamètre et la longueur utilisée); la vitesse de détorsion est de 1 tour en $196^{\text{s}},8$ (5,98 millionièmes-seconde). Le poids tenseur est de 370^{gr} , il restera le même pour toutes les expériences de ce Chapitre. La température est voisine de 15° . Voici les conclusions qu'on peut tirer des nombres transcrits :

α_0 .	α_1 .	Δp_1 .	Δp_2 .	Δp_3 .	Δp_4 .	Δp_5 .	Δp_6 .	Δp_7 .	p_7 .
543^0	515^0	215^u	253^u	274^u	280^u	289^u	290^u	293^u	1894^u
1119	967	535	662	754	797	809	805	781	5143
1818	1333	828	1076	1278	1406	1470	1474	1416	8948
1819	1342	835	1083	1282	1402	1469	1473	1431	8975
3627	1673	1190	1560	1908	2178	2344	2408	2384	13972
7229	1793	1340	1786	2209	2551	2780	2906	2934	16506
36012	1904	1375	1845	2296	2664	2950	3075	3105	17310
72023	1987	1360	1820	2283	2647	2928	3064	3000	17200

1° Si l'on compare entre eux les p_7 (c'est-à-dire les rotations du miroir entre les temps 25^s et 3200^s), on trouve que, exprimés en fonction des angles α_1 de détorsion, ils croissent beaucoup plus vite que ceux-ci, tant que la torsion α_0 ne dépasse pas 20 tours. Pour des torsions α_0 égales à 100 ou 200 tours, il semble que le fil s'abîme, p_7 tend à diminuer ($\alpha_0 = 100$ tours) et diminue effectivement ($\alpha_0 = 200$ tours).

2° Même conclusion quand on exprime p_7 en fonction de α_0 , tant que α_0 reste petit. Mais la courbe (p_7, α_0) , qui présente d'abord sa concavité vers le haut, atteint rapidement un point d'inflexion, se confond pratiquement avec une horizontale, pour redescendre enfin quand α_0 atteint des valeurs comprises entre 100 et 200 tours. Nous retrouvons donc bien, en un sens, les résultats généraux de Kohlrausch, ainsi qu'il a été dit ci-dessus; mais ces résultats n'embrassaient qu'une très petite fraction du phénomène total. Nous allons voir d'ailleurs que les résultats suivants ne concordent plus.

3° La loi qui relie au temps la détorsion consécutive à l'arrêt dépend de l'angle de torsion; l'indice n du Δp_n maximum augmente quand la torsion augmente. L'exception que présente la première ligne tient à ce qu'il est difficile de certifier les Δp à 2^u ou 3^u près. Pour $\alpha_0 = 1119^\circ$, Δp_n est maximum pour n compris entre 5 et 6 et plus voisin de 5; pour $\alpha_0 = 1818^\circ$, n approche de 6; pour $\alpha_0 = 3627^\circ$, $n > 6$; enfin, pour des valeurs plus grandes de α_0 , n atteint 7 et le dépasse. Même conclusion à tirer de la comparaison des Δp d'une même ligne; le quotient $\Delta p_n : \Delta p_1$, par exemple, croît quand α_0 croît. Les choses doivent se passer de même pour les petites torsions; mais les expériences sont nécessairement moins précises. La loi de la détorsion au couple nul en fonction du temps ne peut donc pas s'exprimer par le produit de deux fonctions contenant, l'une α_0 , l'autre t .

4° Le phénomène ici étudié est énorme. Par exemple, la détorsion au couple nul, entre 25^s et 3200^s = 53^m 20, après une torsion de 100 tours et le retour au couple nul, est de 49°, 35. Elle est généralement

$$p_7 \times 0^\circ, 002865.$$

5° Les résultats légitiment le choix que nous avons fait des époques d'observation. Car si les Δp d'une même ligne ne sont pas constants, du moins ils sont toujours du même ordre de grandeur et, comme ils présentent un maximum, ils sont pratiquement constants pour plusieurs valeurs consécutives de n . Cette seule remarque suffit à écarter toutes les formules du genre de celles de Kohlrausch.

2. *Influence de la température.* — La température influe beaucoup sur les phénomènes que nous étudions. Il faut donc savoir s'il est possible de faire une correction. Les expériences ont été réalisées dans les conditions suivantes. Pour abrégé, on écrira $\nu_0 = 34^\circ$, $\nu_1 = 193^\circ$, $T_0 = 0$; cela veut dire que la vitesse de

torsion est de 1 tour en 34^s, la vitesse de détorsion de 1 tour en 193^s et l'arrêt au bout de la torsion nul.

Température.	Torsion = 3 tours.			Torsion = 5 tours.			Torsion = 10 tours.		
	11°,5.	100°.		10°,5.	100°.		10°,1.	100°.	
Δp_1	550 ^u	1312 ^u	2386	850 ^u	1782 ^u	2095	1183 ^u	2290 ^u	1937
Δp_2	686	1756	2559	1089	2483	2280	1554	3255	2095
Δp_3	772	2135	2765	1277	3113	2439	1884	4247	2251
Δp_4	818	2400	2934	1405	3615	2573	2151	5083	2363
Δp_5	815	2538	3114	1459	3874	2655	2305		
Δp_6	794	2557	3220	1440			2376		
Δp_7	765	2507	3277	1385			2356		
Détorsion.	925	855	1082	1291	1197	1076	1630	1561	1044

On donne dans le Tableau le résultat de six expériences, trois à la température ordinaire, trois à 100° avec des torsions de 3, 5 et 10 tours. On vérifie d'abord les résultats du n° 1 à la température ordinaire θ_0 . Pour $\alpha_0 = 3$ tours, c'est Δp_4 qui est maximum; c'est Δp_5 pour 5 tours et Δp_6 pour 10 tours. On donne, dans une troisième colonne, les rapports des mêmes Δp pour la température θ_0 et 100°.

1° Les rapports des Δp de même indice pour la même torsion ne sont pas constants; ils croissent à mesure que l'indice croît. Donc, l'hypothèse de Kohlrausch, qu'il existe un binôme de dilatation, est erronée. Le phénomène diminue moins vite à 100° qu'à la température ordinaire.

2° Ces rapports pour les mêmes indices et des torsions différentes ne sont pas les mêmes. Toutes choses égales d'ailleurs, l'influence d'une température plus élevée est d'autant plus grande que la torsion est plus petite. C'est encore une des hypothèses de Kohlrausch qui tombe.

3° D'après Kohlrausch et pour l'argent, la grandeur du phénomène varie sensiblement de 1 à 4 quand on passe de θ_0 à 100°. On trouve ici pour le cuivre des nombres de même ordre : 1 à 3 pour 3 tours; pour de petites torsions, la variation doit être plus grande. Il faut donc conclure qu'il serait très important de faire des corrections de température, mais que c'est à peu près illusoire, tant qu'on ne connaîtra pas mieux qu'aujourd'hui l'ensemble des phénomènes. On ne comparera donc que des expériences faites sensiblement à la même température.

3. *Influence de la vitesse de torsion.* — On donne, dans le Tableau suivant, les résultats des expériences

$$\alpha_0 = 1823^\circ, \quad v_1 = 196^s,8 = 5,98 \text{ millièmes-seconde,} \quad v_0 \text{ variable.}$$

Dans le haut du Tableau, $T_0 = 0$; dans le bas, $T_0 = 60^m$. La température est voisine de 15°. Pour faciliter les comparaisons, au lieu d'énoncer la vitesse de torsion, on donne le temps total de la torsion.

Durée. de la torsion.	α_1 .	Δp_1 .	Δp_2 .	Δp_3 .	Δp_4 .	Δp_5 .	Δp_6 .	Δp_7 .	p_1 .
52,5.....	1333 ^o	828 ^u	1076 ^u	1278 ^u	1406 ^u	1470 ^u	1474 ^u	1416 ^u	8948 ^u
	1342	835	1083	1282	1402	1469	1473	1431	8975
173.....	1342	860	1113	1324	1464	1527	1532	1497	9317
	1342	860	1113	1326	1453	1525	1530	1480	9287
997.....	1341	915	1195	1435	1611	1700	1705	1658	10219
	1339	920	1200	1438	1620	1705	1713	1662	10258
173.....	1233	1053	1426	1772	2072	2310	2432	2445	13510
997.....	1235	1060	1420	1780	2087	2326	2444	2445	13562

Ce Tableau nous montre tout d'abord à quel point des expériences faites sur des fils différents peuvent être comparables. Bien des physiciens admettront difficilement qu'on puisse reproduire des phénomènes aussi délicats avec une telle constance. Naturellement, il ne faudrait pas prendre des morceaux de fil trop éloignés les uns des autres sur la bobine de fil étiré.

Il prouve de plus l'importance sur le phénomène des conditions de la torsion; toutes choses égales d'ailleurs, si la vitesse de torsion diminue, le phénomène augmente. Corrélativement, le rapport $\Delta p_n : \Delta p_1$ augmente : la loi en fonction du temps dépend de la vitesse de torsion.

Mais cette influence varie avec la grandeur de l'arrêt au bout de la torsion; p_7 passe de 9302 à 10239 en moyenne, quand la durée totale de la torsion passe de 173^s à 997^s pour la valeur $T_0 = 0$. Au contraire, si $T_0 = 60^m$ la différence est insignifiante.

Toutes ces particularités pouvaient aisément se prévoir.

4. *Influence de la vitesse de détorsion.* — Conditions des expériences : $\alpha_0 = 1800^\circ$, $v_0 = 34^s, 1$, $T_0 = 15^m$, $\theta_0 = 15^\circ, 5$ environ. $\alpha_1 = 1259^\circ$ sensiblement pour tous les fils. On donne les v_1 en durée de tour.

v_1 .	Δp_1 .	Δp_2 .	Δp_3 .	Δp_4 .	Δp_5 .	Δp_6 .	Δp_7 .	Δp_8 .	Δp_9 .
702.....	494 ^u	768 ^u	1061 ^u	1386 ^u	1637 ^u	1841 ^u	1956 ^u	1968 ^u	1863 ^u
196,8.....	995	1335	1625	1863	2000	2038	1982	1895	1772
»	995	1320	1616	1854	1978	2010	1992	»	»
97,8.....	»	»	1870	2030	2070	2042	1961	1860	1657
»	1310	1630	1877	2043	2098	2073	1959	1860	»

Ce qui frappe dans le Tableau, c'est la différence des Δp_1 et la presque identité des Δp_7 : mais nous sommes assez habitués à ces phénomènes pour ne plus nous en étonner (*voir* Chap. VII, n° 12). Les courbes qui représentent les Δp_n en fonction de n ont leur maximum pour un n qui croît quand v_1 décroît. En construisant ces courbes, on verra que la courbe qui correspond à la grande vitesse est d'abord au-dessus des deux autres, puis au-dessous.

Les α_1 et les courbes de détorsion sont très sensiblement indépendants de la vitesse de détorsion; les vitesses initiales de détorsion au couple nul doivent être proportionnelles à ν_1 . Il n'en est naturellement plus ainsi des Δp_1 qui n'ont qu'un rapport lointain avec ces vitesses.

5. *Influence du temps d'arrêt T_0 variable après une torsion invariable.* — Condition des expériences : $\nu_0 = 34^s, 1$, $\nu_1 = 196^s, 8$, $\alpha_0 = 1823^o$, $\theta_0 = 15^o$ environ.

T_0	α_1	Δp_1	Δp_2	Δp_3	Δp_4	Δp_5	Δp_6	Δp_7	p_7
0.....	1342 ^o	860 ^u	1113 ^u	1324 ^u	1464 ^u	1527 ^u	1532 ^u	1497 ^u	9317 ^u
»	1342	860	1113	1326	1453	1525	1530	1480	9287
15 ^s	1342	864	1124	1336	1465	1545	1544	1509	9389
1 ^m	1326	907	1179	1409	1565	1639	1641	1591	9931
6 ^m	1292	960	1255	1522	1714	1819	1831	1781	10882
25 ^m	1264	1010	1343	1695	1928	2094	2165	2139	12375
60 ^m	1233	1053	1426	1772	2072	2310	2432	2445	13510
133 ^m	1206	1073	1455	1835	2181	2449	2650	2748	14391
780 ^m	1145	1105	1508	1910	2277	2621	2919	3148	15488

Les expériences du Chapitre VII nous ont appris que la tangente d'arrivée au couple nul sur la courbe de détorsion est à peu près complètement indépendante de T_0 . Donc la vitesse de détorsion initiale au couple nul ne doit pas dépendre de T_0 . Mais les Δp_1 diffèrent notablement de cette vitesse; il n'y a pas contradiction à ce qu'ils soient différents.

Les rapports $\Delta p_n : \Delta p_1$ croissent quand T_0 croît.

L'indice n du Δp_n maximum croît quand T_0 croît : ces deux phénomènes semblent généralement liés.

Considérons enfin p_7 en fonction de T_0 . Quand T_0 croît, p_7 croît d'abord très vite, puis plus lentement. Il ne semble pas que p_7 atteigne une limite même pour $T_0 = 780^m$. Les expériences qui correspondent à T_0 très grand sont, il est vrai, difficiles à interpréter, parce qu'il est presque impossible de maintenir une température suffisamment constante.

6. *Influence d'un temps d'arrêt T_0 invariable après une torsion variable.* — Pour faciliter les énoncés, nous conviendrons de quelques notations. Le symbole $p_n(\alpha_0, T_0)$ représente l'énoncé du numéro actuel; on étudie l'influence sur p caractérisé par l'indice n , pour un temps d'arrêt T_0 fixe, de la torsion α_0 . Plus généralement $p_n(\alpha_0, T_0; \alpha'_0, T'_0)$ serait la rotation consécutive à l'arrêt depuis 25^s jusqu'à 25^s \times 2ⁿ, après une torsion α_0 , un arrêt T_0 , une nouvelle torsion α'_0 , un nouvel arrêt T'_0 . Si l'on voulait spécifier les vitesses, on écrirait

$$p_n[\alpha_0(\nu_0)T_0; \alpha'_0(\nu'_0)T'_0];$$

si enfin on voulait attirer l'attention sur les conditions de la détorsion, on emploierait les indices 1 comme suit : $p_n[\alpha_0(v_0)T_0; \alpha_1(v_1)]$.

Ceci posé, soient tracées les deux courbes $p_n(\alpha_0, T_0)$ et $p'_n(\alpha_0, 0)$, n et T_0 sont supposés invariables, ainsi que les vitesses de torsion et de détorsion. Posons $\Delta_n = p_n - p'_n$ et $R_n = 2\Delta_n : (p_n + p'_n)$. Les courbes ont pour abscisses les torsions α_0 .

Δ_n nul pour $\alpha_0 = 0$ croît d'abord très rapidement quand α_0 croît, passe par un maximum, décroît et tend vers une limite constante qui n'est pas nulle quand α_0 devient énorme.

R_n est d'abord extrêmement grand, puis décroît, puis tend vers une limite constante pour de grandes torsions. Ainsi, l'influence de l'arrêt T_0 est relativement considérable pour de petites torsions, alors que le phénomène est petit; elle diminue quand la torsion croît et devient constante en même temps que le phénomène lui-même. Voici quelques nombres pour fixer les idées :

$v_0 = 34^s, 1,$	$v_1 = 196^s, 8,$	$L = 145^{cm},$	$Charge : 370^{gr},$	$T_0 = 15^m.$			
Torsion.	1,5 tour.	3 tours.	5 tours.	10 tours.	15 tours.	25 tours.	40 tours.
$p_6, T_0 = 0^m \dots$	1668 ^u	4390 ^u	7983 ^u	12326 ^u	13735 ^u	14824 ^u	15066 ^u
$p_6, T_0 = 15^m \dots$	2516 ^u	5881 ^u	10026 ^u	14104 ^u	15142 ^u	16128 ^u	16427 ^u
$\Delta_6 \dots \dots \dots$	848	1491	2043	1778	1407	1304	1361
$R_6 \dots \dots \dots$	0,405	0,290	0,227	0,135	0,097	0,082	0,086
$R_3 \dots \dots \dots$	0,355	0,246	0,180	0,102	0,085		

Ces expériences, qui semblent d'abord de pure curiosité, ont une importance théorique considérable. Elles prouvent qu'au point de vue des phénomènes au couple nul, on ne peut pas assimiler l'influence du même couple, agissant pendant la torsion et pendant l'arrêt au bout de la torsion. En effet, quand la torsion se prolonge, le couple reste sensiblement le même, le temps pendant lequel il est imposé augmente; l'influence relative de l'arrêt devrait diminuer, R devrait tendre vers 0. Or R tend vers une valeur qui n'est pas nulle. Donc l'effet produit par cet arrêt est d'une espèce qui diffère de l'effet produit par un prolongement de l'action d'un couple pendant la torsion.

On donne dans le Tableau les valeurs de R_3 . Par définition,

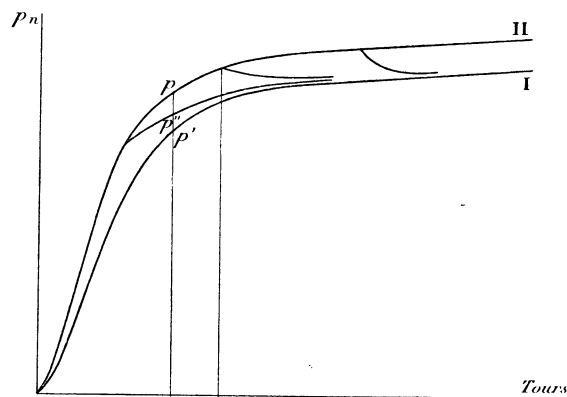
$$R_n = 2(p_n - p'_n) : (p_n + p'_n),$$

c'est donc une fonction de rapport $p_n : p'_n$. Si, comme le veut Kohlrausch, on pouvait exprimer p par un produit de trois fonctions contenant séparément α_0 , T_0 et t , R_n devrait être indépendant de n ; on voit qu'il ne l'est pas, R_n croît quand n croît, ce qui concorde avec ce que nous avons dit au n° 5.

7. *Influence des arrêts intermédiaires sur la courbe de torsion.* — Soient

d'abord tracées les deux courbes définies au n° 6 : I, $p'(\alpha_0, 0)$; II, $p(\alpha_0, T_0)$. Considérons maintenant les courbes III, $p''(\alpha_0, T_0; \alpha'_0, 0)$, construites en prenant pour abscisse $\alpha_0 + \alpha'_0$. Elles forment un faisceau : T_0 est invariable; mais pour une même abscisse $\alpha_0 + \alpha'_0$, nous avons pu prendre l'azimut d'arrêt α_0 variable. Chacune des courbes du faisceau est définie par l'azimut α_0 où se fait l'arrêt. La *fig. 4* représente trois de ces courbes.

Fig. 4.



L'origine de chacune de ces courbes se trouve sur II, puisque pour $\alpha'_0 = 0$ on a $p'' = p$.

L'expérience montre que p'' tend asymptotiquement vers p' ; on peut donc poser symboliquement

$$p''(\alpha_0, T_0; \infty, 0) = p'(\infty, 0).$$

L'influence de l'arrêt qui a eu lieu après α_0 s'efface peu à peu, à mesure que la torsion supplémentaire grandit.

La différence $p''(\alpha_0, T_0; \alpha'_0, 0) - p'(\alpha_0, 0; \alpha'_0, 0)$ décroît d'abord très vite quand α'_0 croît; puis ensuite la décroissance est très lente, de sorte que les courbes ne se raccordent pratiquement que fort loin.

Si le point origine de la courbe p'' se trouve sur une partie très redressée de la courbe p (α_0 petit), p'' rejoint p' en montant. Si l'origine de p'' se trouve sur une partie presque horizontale de p (α_0 grand), p'' part de p vers le bas et se raccorde à p' en descendant.

La conclusion que nous tirons de cette série d'expériences est la même que celle du n° 6. Pour les grandes valeurs de α_0 , le couple est sensiblement constant et le fil peut être considéré comme étant près d'un état limite. Cependant on ne peut pas compenser l'effet d'un couple agissant pendant la torsion, par l'effet d'un couple agissant pendant l'arrêt. Pendant la torsion, l'état du fil obtenu pendant l'arrêt peut être détruit.

On verra facilement que les phénomènes ici étudiés généralisent pour le couple nul ce qui a été dit dans le Chapitre VII, au n° 34.

8. *Arrêts sur les courbes de détorsion.* — Fixons la grandeur de la torsion et des vitesses de torsion et de détorsion. Soit T_0 le temps d'arrêt au bout de la torsion et T_1 un temps d'arrêt intermédiaire en un point de la courbe de détorsion, après une détorsion α'_1 par exemple. Nous pouvons étudier, en fonction de α'_1 , la quantité symboliquement représentée par $p(\alpha_0, T_0; \alpha'_1, T_1)$. L'origine de la courbe est au point $\alpha'_1 = 0$; on a évidemment

$$p(\alpha_0, T_0; 0, T_1) = p(\alpha_0, T_0 + T_1).$$

Il est clair que l'expérience n'a de sens que si α'_1 n'est pas trop voisin de l'angle de détorsion α_1 qui correspond à un arrêt nul sur la courbe de détorsion. D'ailleurs, l'expérience montre que le phénomène change brusquement d'allure et que p diminue très rapidement en fonction de α'_1 , quand α'_1 s'approche beaucoup de α_1 .

Voici quelques nombres pour fixer les idées :

$$\alpha_0 = 5^t, \quad v_0 = 34^s, 1, \quad v_1 = 196^s, 8.$$

Courbe $p_6(5^t, 0; \alpha'_1, 15^m)$.

α'_1	0^t	1^t	2^t	3^t
α_1	1262°	1323°	1324°	1332°
p_6	9802^u	8280^u	7752^u	7135^u

Courbe $p_6(5^t, 15^m; \alpha'_1, 15^m)$.

α'_1	0^t	$0^t, 25$	$0^t, 50$	1^t	2^t	3^t
α_1	1242°	1260°	1259°	1264°	1270°	1269°
p_6	10281^u	9921^u	9864^u	9789^u	9558^u	8004^u

Les tangentes des courbes au point $\alpha'_1 = 0$ font avec la verticale un angle d'autant plus voisin de 90° que T_1 est plus petit devant T_0 . Si $T_0 = 0$, la tangente de départ est verticale. Les courbes présentent des inflexions très longues, puis s'infléchissent brusquement vers le bas quand α'_1 s'approche beaucoup de α_1 . La tangente d'inflexion est d'autant plus inclinée que la tangente de départ est plus verticale.

9. *Cycles fixés par la répétition et influence de l'arrêt T_1 au couple nul.* — Jusqu'à présent, chaque expérience portait sur un fil neuf. Dans la série suivante, au contraire, un même fil servira pour plusieurs expériences consécutives. Nous voulons montrer à quel point les parcours influent les uns sur les autres.

Kohlrausch, se servant d'un fil unique, attendait que le mouvement consécutif à l'arrêt parût complètement annulé. La réalisation de cette condition, *d'ailleurs vague*, ne prouve pas que le fil soit revenu à son état initial.

L'exemple suivant fixera les idées.

Cycles de 3 tours de torsion... $T_0 = 0$ $T_1 = 17^m$ $\nu_0 = \nu_1 = 196^s, 8$ $L = 145^c$

I. La première série faite le matin commence à la température de $14^{\circ}, 4$ et finit à $15^{\circ}, 0$; on trouve successivement pour sept expériences les valeurs p_3 suivantes :

3620, 4320, 4550, 4664, 4700, 4739, 4751.

On laisse au couple nul.

II. On reprend l'après-midi; la température varie de $15^{\circ}, 0$ à $15^{\circ}, 3$; on trouve

4513, 4695, 4724, 4743, 4752, 4764, 4753.

III. On attend jusqu'au lendemain matin au couple nul. La température a baissé; elle est à $13^{\circ}, 3$ au commencement et à $14^{\circ}, 1$ à la fin. Il s'est écoulé quatorze heures entre la fin de la deuxième série et le commencement de celle-ci; on trouve :

4155, 4420, 4487, 4492, 4513.

Les expériences prouvent d'abord l'influence de la température. Nous pouvons même calculer, d'après elles, quel serait le coefficient de variation.

En utilisant les expériences les plus voisines de la limite et en admettant que la limite est la même pour les deux dernières séries, on aurait

4618 à $14^{\circ}, 1$ et 4497 à $13^{\circ}, 0$.

Posons

$$4497(1 + 1^{\circ}, 1\alpha) = 4618.$$

Nous trouvons

$$\alpha = 0,0244;$$

d'où l'on tirerait

$$1 + 90\alpha = 3,20.$$

D'après ce calcul, p_3 à 100° serait 3,20 fois plus grand que p_3 à 10° . Les expériences du n° 2 donnent directement pour ce rapport 2,79, concordance inespérée, puisque la première expérience porte sur une variation de 1° .

Cette comparaison a un sens, puisqu'il s'agit de parcours de même amplitude.

Les expériences montrent, de plus :

1° Qu'au début, le fil est loin de l'état qu'il peut prendre par des torsions répétées de 3 tours et des détorsions jusqu'au couple nul.

2° Que l'on tend rapidement d'abord, puis lentement vers une limite.

3° Que le repos diminue p , mais sans jamais le ramener à la valeur initiale, ce qui prouve que le fil s'est transformé d'une manière permanente.

4° Le premier intervalle, auquel correspond la rotation consécutive Δp_1 , va de 25^s à 50^s. Le onzième va donc de 2¹⁰.25^s à 2¹⁰.50^s, soit de 7^h6^m40^s à 14^h13^m20^s. A cette durée d'un peu plus de 7 heures correspond une rotation Δp_{11} , probablement inférieure à 1000^u. En effet, voici les $\Delta p_1, \dots, \Delta p_5$ pour la dernière expérience, où $p_5 = 4513$:

608, 794, 943, 1048, 1120.

Après quatorze heures, c'est-à-dire à la fin du onzième intervalle, les Δp ont passé depuis longtemps par le maximum.

Ainsi la vitesse $dp : dt$ est certainement inférieure à 1^u en 25^s. Nous pourrions croire que la vitesse étant pratiquement nulle, nous sommes revenus à l'état initial. Il suffirait d'élever un peu la température pour produire une détorsion brusque qui prouverait la fausseté de cette hypothèse. Nous reviendrons là-dessus au Chapitre IX.

5° Plus le cycle est grand, plus la limite diffère du résultat initial.

On donne la valeur initiale de p_5 et la valeur qu'il prend après 6 cycles, parcourus dans les mêmes conditions, avec les mêmes temps d'arrêts ($T_0 = 0, T_1 = 17^m$) et les mêmes vitesses, mais dont les amplitudes diffèrent. Chaque série est naturellement faite avec un fil distinct.

Amplitudes.	1 tour.	2 tours.	3 tours.	4 tours.	5 tours.
p_5 initial.....	738	2116	3620	5118	6466
p_5 final.....	792	2552	4739	7225	9166
Rapport.....	1073	1206	1309	1412	1417

6° On atteint une limite pratique après un nombre de cycles qui croît quand l'amplitude croît. Voici les p_5 pour les cycles de 1 tour :

738, 775, 780, 791, (801), 795, 792, 792. Limite voisine de 792.

Le nombre 801 est erroné; il y a eu une légère erreur dans l'arrêt. La limite pratique est donc obtenue après 4 cycles.

Voici les p_5 pour les cycles de 5 tours :

6466, 7740, 8415, 8750, 8996, 9166, 9260.

Au 7^e cycle, nous sommes loin de la limite pratique. Chaque cycle entraîne une torsion permanente et, par conséquent, une transformation considérable.

7° Voici les détorsions pour les cycles de 1 tour et de 5 tours :

Cycles de 1 tour...	346°	355°	356°	356°	357°	357°	357°	Torsion...	360°
Cycles de 5 tours..	1326°	1467°	1530°	1566°	1591°	1608°	1620°	Torsion...	1800°

Nous ferons, à propos de ces détorsions, une remarque importante. Reprenons les cycles de 3 tours déjà cités plus haut. Pour le 7^e cycle de la série I, $\alpha_1 = 1056^\circ$; pour le 1^{er} de la série II, $\alpha_1 = 1047^\circ$. Pour le 7^e de la série II, $\alpha_1 = 1060^\circ$; pour le 1^{er} de la série III, $\alpha_1 = 1046^\circ$. On s'explique très facilement ces résultats, en considérant que l'arrêt au couple nul laisse quelque chose se débâter, qu'il faut ensuite rebâter dans les premiers parcours de la série suivante, d'où valeurs plus petites de α_1 et de p .

8° Enfin, les détorsions au couple nul, *dans des séries systématiquement faites*, c'est-à-dire pour lesquelles T_1 a une valeur constante, ne compensent jamais la torsion permanente.

Prenons, par exemple, le 7^e cycle de la série II, on avait

$$\alpha_0 = 3^\circ = 1080^\circ, \quad \alpha_1 = 1060^\circ, \quad \alpha_0 - \alpha_1 = 20^\circ, \quad p_3 = 4753.$$

Or 1^{cm} d'échelle vaut $0^\circ, 2855$; $p_3 = 13^\circ, 62$.

Mais si, après une série systématiquement faite, on laissait à T_1 une valeur beaucoup plus grande que celle qu'il possède dans la série, il pourrait se faire, au moins si α_0 n'est pas trop grand, que $\alpha_1 +$ la valeur en angle de $p_n > \alpha_0$. C'est ce qui arrive, par exemple, entre les séries II et III.

FIL RECUIT.

10. *Fil recuit et étiré avec ou sans filière. Comparaison des résultats.* — Il importe tout d'abord de montrer à quel point les résultats sont variables, suivant que le fil a été plus ou moins étiré sans filière ou avec filière. Le cycle effectué est de 5 tours sur le fil recuit, avec les vitesses $v_0 = 34^s, 1$, $v_1 = 196^s, 8$ et l'arrêt $T_0 = 30^m$; la charge est de 370^g .

Pour que les expériences soient absolument comparables pour les fils plus ou moins étirés, il faut changer l'amplitude et les vitesses. Si, par exemple, on a amené le fil, dont le rayon initial est représenté par 1000, à posséder le rayon 906, α_0 étant la torsion pour le premier fil, la torsion pour le second doit être $\alpha_0 : 0,906$; elle doit être effectuée avec une vitesse telle que la durée totale reste la même. Ainsi pour le fil 1000, la durée était $5 \times 34^s, 1 = 170^s, 5$; la vitesse de torsion pour le fil 906 devrait être telle que le tour soit effectué en $34^s, 1 : 0,906$.

La première condition est facilement réalisable; la seconde ne l'est que très difficilement; mais on peut opérer toujours avec la même vitesse, sans qu'il résulte d'erreur appréciable, au moins sur la forme du phénomène, en prenant T_0 suffisamment grand, puisque nous savons que l'influence de v_0 diminue quand T_0

augmente. Quant à la petite erreur qui proviendra de v_1 , elle ne portera, comme nous le savons (n° 3), que sur le début du phénomène.

Ceci posé, on donne dans le Tableau suivant les rayons, les α_1 et les p_1 ramenés par le calcul au même rayon. Ce serait, à *très peu près*, ce qu'on obtiendrait en opérant sur des fils ayant tous des diamètres 1000, tordus du même angle avec la même vitesse, le même temps d'arrêt au bout de la torsion, et détordus avec la même vitesse. On se reportera, pour mieux comprendre ce qui précède, à un article paru en 1899 dans le *Journal de Physique*. Si les expériences étaient rigoureusement comparables, on trouverait des nombres p_1 *un peu plus grands pour les petits rayons*.

Allongement.....	0 %	2,74	5,48	10,96	21,91
Rayon.....	1000	987	974	949	906
α_1	225°	527°	709°	934°	1127°
p_1	883"	2810"	4579"	6913"	9348"

Les allongements se faisaient à vitesse constante, à l'aide d'une sorte de machine à diviser, à l'écrou de laquelle était attachée l'une des extrémités du fil; on admet, pour calculer les rayons, que la densité ne change pas. *Le phénomène que nous étudions et que Kohlrausch considérait comme caractérisant une matière in genere, varie, toutes choses égales d'ailleurs, de 883 à 9348, soit de 1 à 10,5.* C'est même à cause de la petitesse du phénomène pour les fils recuits, qu'on faisait toujours recuire les fils des balances de torsion, au temps où l'on se servait de fils métalliques. La loi de variation des Δp est modifiée par l'étrirage sans filière : les rapports $\Delta p_n : \Delta p_1$ augmentent beaucoup, quand l'étrirage augmente. Voici, par exemple, la suite des Δp pour deux fils :

Rayon 1000.....	94	118	129	131	133	139	139
Rayon 906.....	734	1002	1251	1460	1589	1656	1656

Le rapport $\Delta p_7 : \Delta p_1$ est 1,478 pour le premier et 2,256 pour le second; les nombres donnés sont ramenés par le calcul au même rayon.

Une question se pose tout naturellement à propos de ces expériences : le même allongement, avec ou sans filière, produit-il la même modification ? L'expérience montre sans conteste qu'il n'en est rien ; la grandeur et la loi du phénomène sont modifiées.

Allongement.	Rayon.	α_1 .	p_1 .
10,14	953	1104	7966
26,06	891	1232	11788

Comme on pouvait le prévoir, le fil allongé d'un certain tant pour 100 avec filière se conduit comme s'il était allongé sans filière d'un tant pour 100 plus grand.

La loi du phénomène est modifiée : voici la suite des Δp pour le rayon 891, le fil étant allongé avec filière. On les comparera aux Δp pour le rayon 906, avec allongement sans filière.

895, 1232, 1570, 1860, 2049, 2130, 2051.

Il y aurait à ce sujet un nombre infini de questions à résoudre : je ne veux ici que les indiquer, n'ayant pas le temps de chercher à les élucider complètement.

1° Le même allongement produit en une ou plusieurs passes amène-t-il exactement les fils dans un état invariable?

2° Les autres conditions de l'étirage avec filière, indiquées dans un Mémoire paru en 1901 dans les *Annales de Chimie et de Physique*, ont-elles une influence?

3° Le temps qui s'écoule depuis le passage à la filière intervient-il?

4° La température d'étirage à la filière produit-elle une modification mesurable?

5° Le séjour prolongé du fil à des températures comprises entre 0° et 100°, et autant que possible invariables, transforme-t-il la matière, au point de vue des phénomènes qui nous occupent?

6° Les variations de torsion et de température, petites et nombreuses, causent-elles une transformation?

A toutes ces questions je pourrais dès maintenant donner une réponse probable; je m'en garderai pour ne pas déflorer un important sujet de recherches.

11. *Vitesses de torsion et de détorsion invariables; T₀ invariable; torsion variable.* — Le fil était parfaitement recuit. Les vitesses de torsion et de détorsion étaient, en millièmes-seconde,

$$v_0 = 155,2 \quad \text{et} \quad v_1 = 6,04, \quad T_0 = 0.$$

Dans le Tableau, construit suivant une méthode un peu différente de la méthode précédemment employée, pour la facilité des comparaisons, on donne seulement p_7 et le Δp maximum (Δp_m) en unités arbitraires u . Les autres Δp sont exprimés en fonction de Δp_m appelé 1000.

Torsion en tours.....	2	5	10	25	50	100	200	400
Torsion en millièmes..	2,38	5,94	11,9	29,7	59,4	119	238	476
Δp_1	898	896	869	835	797	745	643	557
Δp_2	936	921	906	895	885	864	789	697
Δp_3	1000	1000	1000	997	979	960	901	827
Δp_4	936	950	969	1000	1000	1000	977	932
Δp_5	898	912	916	971	977	992	1000	985
Δp_6	821	840	853	906	928	970	989	1000
Δp_7	740	744	754	835	846	890	942	971
Δp_m	79 ^u	125 ^u	191 ^u	309 ^u	473 ^u	734 ^u	1147 ^u	1644 ^u
p_7	490°	800°	1197°	1989°	3044°	5713°	7158°	9813°
α_1	196°	245°	304°	434°	598°	836°	1107°	1482°

Un commentaire de ce Tableau est inutile après tout ce que nous avons déjà dit.

Comme complément de cette expérience, j'ai fait deux expériences avec le dynamomètre, pour des torsions de 476 et 238 millièmes. Les vitesses étaient du même ordre. Le fil avait 96^{cm}; le tour de torsion se faisait en 11^s,40 et le tour de détorsion en 338^s, ce qui donne

$$v_0 = 156,2 \quad \text{et} \quad v_1 = 5,27 \text{ en millionnièmes-seconde.}$$

On ramenait au couple nul et brusquement on maintenait l'*azimut constant*; naturellement le couple croissait. Il y a grand intérêt à comparer numériquement, dans des conditions aussi identiques que possible, les deux phénomènes. γ et Γ représentent en unités arbitraires la tangente de retour au couple nul sur la courbe de détorsion et la tangente caractéristique. On donne la série des Δp

Torsion.	$\gamma : \Gamma$.	Δp .
476	0,626	19, 10, 11, 12, 15, 15, 16, 16, 16.
236	0,623	17, 6, 9, 10, 11, 12, 12, 11, 9.

Les premiers Δp , soit 19 et 17, sont les gains de couple entre 0° et 25°; ils doivent donc se nommer Δp_0 . Les autres sont $\Delta p_1, \dots, \Delta p_8$. Le Γ valait 7^u,22 par degré. L'unité arbitraire u (différente de l'unité u employée dans la méthode à couple constant) est toujours de 0^{mm},1 d'échelle. Les résultats sont qualitativement de même nature; on peut poursuivre numériquement la comparaison.

$$Torsion = 476.$$

p_7 (couple nul) = 9813^u, soit 28°,11 pour un fil de 144^{cm}; pour le fil de 96^{cm} il y aurait une détorsion de 18°,73.

p_7 (azimut constant) = 95^u; ce gain de couple, pour un fil parfaitement élastique, équivaldrait à une torsion de 95 : 7,22 = 13°,77,

$$9812 : 95 = 103,3.$$

$$Torsion = 238.$$

p_7 (couple constant) = 7158^u, soit 13°,67 pour le fil de 96^{cm}.

p_7 (azimut constant) = 71^u, soit 9°,83;

$$7158 : 71 = 100,8.$$

Ces résultats sont conformes aux prévisions. Le gain de couple au voisinage du couple nul et à azimut constant, exprimé en degrés, doit être plus petit que la détorsion effective qui se produit quand on maintient le couple nul. Mais les rapports doivent être à peu près les mêmes. C'est ce que l'on constate. L'expérience à couple nul a pour elle une sensibilité 100 fois plus grande; mais l'expérience à

azimut constant, outre qu'elle peut facilement se généraliser pour tous les azimuts, donne un renseignement de plus : la valeur Δp_0 .

Les Δp_0 sont presque les mêmes : ce qui devait être; puisque les vitesses de détorsion sont les mêmes, et aussi les tangentes d'arrivée sur la courbe de détorsion, les vitesses initiales doivent être les mêmes. On remarquera que nous sommes à l'extrême limite des renseignements que peut fournir l'expérience. J'engage ceux qui en douteraient à les recommencer.

12. *Influence du temps d'arrêt T_0 , variable après une torsion invariable.*

— Je me contenterai de transcrire sans commentaires le Tableau suivant, construit comme celui du n° 11 :

$$\alpha_0 = 50' = 59,4 \text{ millièmes}, \quad v_0 = 155,2, \quad v_1 = 6,04 \text{ millionièmes-seconde.}$$

T_0 .	0 ^s .	100 ^s .	10 ^m .	60 ^m .	360 ^m .
α_1	598°	579°	563°	546°	533°
Δp_1	797	804	740	692	604
Δp_2	885	884	854	804	711
Δp_3	979	962	954	894	788
Δp_4	1000	1000	976	957	857
Δp_5	977	990	1000	995	905
Δp_6	928	948	980	1000	940
Δp_7	846	886	946	997	968
Δp_m	473 ^u	499 ^u	547 ^u	607 ^u	712 ^u
p_7	3044 ^u	3230 ^u	3531 ^u	3848 ^u	4109 ^u

13. *Cycles fixés par la répétition.* — Nous ne voulons pas allonger inutilement ce Mémoire, en rapportant pour les fils recuits des expériences dont on déduirait aisément le résultat de l'étude des fils étirés, *mutatis mutandis*. Nous choisirons donc, dans la masse de nos expériences, ce qui peut avoir un intérêt nouveau.

Imaginons que le fil subisse une *préparation* de 200 tours, soit ramené au couple nul et y reste 12 heures. Les vitesses de torsion et de détorsion sont $v_0 = 186,3$, $v_1 = 4,74$ millionièmes-seconde. Il est bien clair, par ce que nous savons des courbes de torsion, que, si l'on décrit alors un parcours, de 20 tours par exemple, dans le sens de cette préparation, ou en sens inverse, les résultats seront tout différents. Mais on ne peut pas prévoir ce qui arrivera pour le cycle limite, si l'on répète un grand nombre de fois le parcours de 20 tours *dans le même sens*, soit dans le sens de la préparation, soit en sens inverse. C'est à cette question que répond l'expérience suivante.

On donne ici, sous la rubrique p_n , la détorsion entre 20^s et 1800^s, ces expériences ayant été faites avant que l'on eût arrêté la technique : $T_0 = 5^m$, $T_1 = 35^m$.

PREMIER FIL. — *Cycles de 20 tours dans le sens de la préparation.*

α_1	1104°	1149°	1180°	1211°	1239°	1266°
p_n	6490 ^u	6514 ^u	6791 ^u	7039 ^u	7232 ^u	7398 ^u
ρ_1	0,893	0,884	0,875	0,847	0,849	0,833
ρ_2	1,481	1,483	1,462	1,447	1,451	1,436

SECOND FIL. — *Cycles de 20 tours dans le sens inverse de la préparation.*

α_1	971°	1038°	1069°	1093°	1116°
p_n	5248 ^u	5930 ^u	6176 ^u	6325 ^u	6475 ^u
ρ_1	0,927	0,885	0,876	0,869	0,852
ρ_2	1,522	1,499	1,490	1,464	1,457

ρ_1 et ρ_2 représentent les quotients des rotations entre 20° et 100° d'une part, et 100° et 600° de l'autre, par la rotation entre 600° et 1800°. Ces nombres montrent immédiatement que la loi en fonction du temps se modifie d'un cycle à l'autre : la vitesse de rotation diminue de moins en moins vite, puisque les quotients diminuent.

Après cinq ou six cycles, on est loin d'une limite ; mais il semble bien que, si loin que l'on pousse l'expérience, la dissymétrie produite par la préparation subsistera. Elle subsiste naturellement d'autant mieux que la préparation est plus grande et le cycle plus petit.

On comparera utilement les expériences précédentes avec ce qu'aurait donné avec un fil neuf la fixation du cycle de 20 tours dans les mêmes conditions, mais sans préparation antérieure.

α_1	392°	514°	614°	700°	776°
p_n	1753 ^u	2510 ^u	3163 ^u	3739 ^u	4257 ^u
ρ_1	1,138	1,108	1,077	1,046	1,029
ρ_2	1,640	1,611	1,580	1,556	1,564

Enfin il est évident que, si l'on tord un fil neuf en une seule fois de 50 ou de 100 tours, on obtiendra un α_1 et un p_n sensiblement égaux, mais un peu plus grands que si l'on tord de ce même nombre de tours en plusieurs fois.

On a trouvé en effet

100 tours	$\alpha_1 = 801^\circ$	$p_n = 4351$
50 »	$\alpha_1 = 575^\circ$	$p_n = 2836$

14. *Préparation invariable. Repos au couple nul variable. Répétition d'un petit cycle.* — Au n° 13, nous avons étudié l'influence d'un grand parcours sur la fixation de cycles. Le fil se reposait 12 heures après la préparation. Les

cycles avaient une amplitude (20 tours) relativement grande devant la préparation (200 tours), et le repos au couple nul (720^m) est notable. Aussi p_n croît-il du premier au deuxième cycle.

Préparons toujours par une grande torsion (100 tours = 118,9 millièmes) et dans des conditions invariables :

$$T_0 = 10^m, \quad v_0 = 155,2, \quad v_1 = 6,04 \text{ millionièmes-seconde.}$$

Mais laissons le fil se reposer un temps T_1 variable et décrivons alors de petits cycles de 2 tours ($T'_0 = 0$, $T'_1 = 60^m$, $v_0 = v_1 = 6,04$). Les phénomènes seront tout différents. A chaque valeur de T_1 correspond un fil différent et une série de cycles.

T_1	Δp_1	Δp_2	Δp_3	Δp_4	Δp_5	Δp_6	Δp_7	p_7	α_1
1..... ^m	418 ^u	503 ^u	576 ^u	631 ^u	669 ^u	689 ^u	701 ^u	4187 ^u	691 ^o
	365	431	475	511	532	540	548	3402	691
	351	414	455	485	490	499	507	3201	696
120.....	378	441	483	513	523	528	536	3402	679
	356	420	465	495	499	498	500	3233	692
860.....	365	420	458	478	484	486	484	3175	674
	354	417	459	484	487	491	484	3176	692
1243.....	361	414	454	476	480	476	468	3129	673
	355	408	454	479	482	482	477	3137	691
	365	405	448	477	477	483	475	3130	693
4300.....	334	389	421	438	427	426	418	2853	672
	330	392	429	445	445	440	437	2918	692
	328	387	427	440	445	444	435	2906	697

Pour donner une idée exacte de ce que sont les vitesses de rotation du miroir pendant l'arrêt, au moment où l'on commence les cycles, voici le résultat de l'expérience pour le fil ayant servi à la quatrième série ($\alpha_1 = 791^o$) :

$$\Delta p = 580, 711, 789, 850, 863, 857, 826, 760, 684, 620, 535, 440.$$

Δp_{12} est la détorsion dans le douzième intervalle, qui va de 853^m 20^s à 1706^m 40^s. Puisque les cycles ont commencé à être parcourus après 1243^m, ce Δp n'a été déterminé que par une extrapolation, très certaine d'ailleurs. Comme tous les fils sont à très peu près identiques, on pourra calculer, d'après les résultats obtenus pour le quatrième, ce que sont les vitesses aux moments où l'on commence à décrire les cycles dans les autres séries.

Alors même que l'on ne voudrait pas attacher de l'importance aux valeurs

absolues des p_7 , qui sont pourtant fort concordantes (car la température a pu varier légèrement dans des intervalles de temps aussi grands), on remarquera que la démonstration fournie de l'extraordinaire permanence de l'influence du premier parcours est tout à fait indépendante de la valeur absolue de ces nombres. Nous voyons que, après 120^m de repos, p_7 décroît du premier au second cycle; qu'après 860^m, plus de 14 heures, p_7 reste constant; que la diminution est à peine sensible après 1243^m, et que sûrement les phénomènes ne sont pas arrivés à une limite après 4300^m, soit près de 3 jours.

En définitive, un parcours influe sur les parcours postérieurs d'une manière très complexe. Il y a d'abord une transformation de la matière, que nous appelons un *écrouissage*. Cette transformation est permanente, et ce n'est pas cette permanence que nous voulons ici mettre en évidence. Mais il y a aussi une modification qui produit la réactivité; elle n'est pas permanente, mais elle disparaît avec une lenteur dont les expériences actuelles sont la preuve. Nous verrons au Chapitre IX comment une élévation de température permet de la supprimer presque instantanément; nous étudierons dans ce Chapitre, d'une manière générale, l'influence de la température sur les phénomènes.

Nous n'avons pas fini avec la réactivité; nous avons tenu à poser le problème d'une manière correcte le plus tôt possible, afin que les physiciens ne perdent plus leur temps à suivre les errements des Mémoires classiques de Kohlrausch.

NOTE SUR QUELQUES THÉORIES DE LA RÉACTIVITÉ.

NOTE SUR LA THÉORIE DE O.-E. MEYER.

(*Pogg. Ann.*, t. CLI; 1874.)

Cette théorie n'a aucun rapport avec les phénomènes à expliquer. Je n'en parlerais pas, si un *Traité classique français* ne déclarait qu'elle est la plus satisfaisante de toutes.

Tordons un fil par en bas, la partie supérieure restant fixe; cherchons comment le mouvement se transmet d'un bout à l'autre du fil supposé parfaitement élastique. On a

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = a \frac{d^2 \alpha}{dx^2},$$

$x = 0$ pour le point d'attache, $x = l$ à l'extrémité inférieure, a est le rapport de la constante de torsion par unité de longueur Γl au moment d'inertie de l'unité de longueur du fil par rapport à son axe, m .

L'intégrale générale est

$$\alpha = \Sigma N \sin \omega t \sin \gamma x;$$

la condition à satisfaire

$$(1) \quad \omega^2 = a \gamma^2.$$

Extrémité inférieure fixe :

$$(2) \quad \begin{aligned} \sin \gamma l &= 0, & \gamma &= \frac{k\pi}{l}, \\ \omega &= \sqrt{a} \frac{k\pi}{l}, & T_k &= \frac{2l}{k\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

On obtient une série harmonique de sons qui ont été étudiés dans ces derniers temps par M. Cornu. Lamé les signale déjà dans son *Traité d'Elasticité*; il les croit parfaitement silencieux, puisque les molécules superficielles ne sortent pas de la surface cylindrique initiale.

Extrémité inférieure portant une masse dont le moment d'inertie est M. — L'équation à satisfaire pour $l = x$ est

$$-B \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = a \frac{d\alpha}{dx};$$

la condition à satisfaire est

$$(3) \quad \text{tang} \gamma l = \frac{1}{\gamma B}.$$

B est le rapport du moment d'inertie du corps suspendu au moment d'inertie m ; B est donc très grand vis-à-vis de l . Donc γB est très grand vis-à-vis de γl ; une racine de l'équation (3) est voisine de $\gamma = \frac{1}{\sqrt{Bl}}$; elle donne

$$n^2 = a : Bl, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{Bl}{a}}.$$

Or

$$a = \frac{\Gamma l}{m}, \quad B = \frac{M}{m}, \quad \frac{Bl}{a} = \frac{M}{\Gamma}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{\Gamma}};$$

nous retrouvons ainsi, en tenant compte des phénomènes de propagation, l'oscillation que donne la théorie élémentaire.

Les autres racines de l'équation (3) sont données par la condition (2) très approximativement. Donc, pour cette série harmonique, tout se passe comme si l'extrémité inférieure était fixe. C'est évident *a priori*; en effet, le fondamental de cette série a une période $T_1 = \frac{2l}{\sqrt{a}}$, $\frac{T}{T_1} = \pi \sqrt{\frac{B}{l}}$, soit un nombre très grand.

En définitive, quand on tord un fil parfaitement élastique, on a, en outre de l'oscillation ordinaire, une division du fil en nœuds et en ventres; il y a exactement un nœud au point d'attache et très approximativement à l'extrémité inférieure mobile, puis une série de nœuds intermédiaires pour chaque terme de la série harmonique. Ces vibrations tournantes très rapides ne gênent en rien l'oscillation principale.

O.-E. Meyer s'est proposé de calculer quels seraient les phénomènes dans le cas où le fil ne serait pas parfaitement élastique; le problème est intéressant en soi, mais, comme nous le verrons, n'a aucun rapport avec la réactivité.

Fil imparfaitement élastique. — Pour tenir compte de l'élasticité imparfaite, Meyer ajoute un terme à l'équation ci-dessus employée

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = a \frac{d^2\alpha}{dx^2} + 2b \frac{d^3\alpha}{dx^2 dt}.$$

L'intégrale générale a maintenant la forme

$$\alpha = \Sigma N e^{-\beta t} \sin \gamma x,$$

car les oscillations sont amorties. La condition à satisfaire est

$$(4) \quad \beta^2 + a\gamma^2 - 2b\beta\gamma^2 = 0, \quad \beta = b\gamma^2 \pm \sqrt{b^2\gamma^4 - a\gamma^2}.$$

Dans le cas particulier que nous avons traité, la condition à satisfaire pour $x = l$ est

$$-B \frac{d^2\alpha}{dt^2} = a \frac{d\alpha}{dx} + 2b \frac{d^2\alpha}{dx dt}, \quad \text{soit } \tan \gamma l = \frac{1}{B\gamma},$$

c'est-à-dire la relation (3) elle-même.

Nous retrouvons donc l'oscillation de période T , mais avec un amortissement donné par la partie réelle de β et une valeur sensiblement égale, quoique légèrement plus longue que pour $b = 0$ donnée par la partie imaginaire. Substituons la valeur $\gamma = \frac{1}{\sqrt{B}l}$ dans (4), il vient pour l'amortissement $\frac{b}{B}l$. Le décrement logarithmique est

$$\delta = 2\pi \sqrt{\frac{B}l} \frac{b}{a} \frac{1}{B} = 2\pi \frac{b}{\sqrt{aB}l}.$$

Outre cette oscillation, nous aurons la série harmonique déjà étudiée; elle correspond à des γ plus grands. Il peut se faire que b et γ soient tels que le radical de (4) soit positif. Le mouvement change de caractère et devient apériodique. *C'est à l'aide de ces mouvements apériodiques que Meyer veut expliquer les phénomènes de réactivité.*

Boltzmann le réfute péremptoirement. Le premier de ces mouvements apériodiques correspond à un γ plus petit que celui qu'on tire de la relation

$$b^2 \gamma^4 - a \gamma^2 = 0.$$

et, par conséquent, à un amortissement plus grand que la valeur correspondante de β , soit $a : b$.

Calculons le quotient de l'amortissement de l'oscillation ordinaire par cet amortissement; il est

$$\frac{b}{Bl} : \frac{a}{b} = \frac{b^2}{aBl} = \frac{\delta^2}{4\pi^2}.$$

Or l'expérience nous apprend que $\delta < 0,01$ pour les métaux tels que le cuivre où le phénomène de réactivité est considérable; donc le quotient ci-dessus $< 0,000025$. Les mouvements apériodiques s'éteignent infiniment plus vite que le mouvement périodique ordinaire; on ne peut expliquer avec eux des phénomènes dont la durée se mesure en jours.

NOTE SUR LA THÉORIE DE BOLTZMANN.

(*Ann. Pogg.*, Vol. complém., VII; 1876.)

Cette théorie fort ingénieuse rend compte d'une masse importante de faits. Je l'exposerai avec d'autant plus de soin qu'elle est diamétralement opposée aux idées que je soutiens. Elle repose sur deux hypothèses :

1° Le fil se souvient un certain temps des déformations subies; ce souvenir s'efface suivant une certaine fonction du temps.

2° La modification éprouvée sous l'influence d'une déformation est indépendante des modifications antérieures; c'est le principe de la superposition, sur lequel Boltzmann fait lui-même d'expresses réserves.

Voici la mise en œuvre de ces hypothèses : Si au temps τ compté vers le passé à partir de l'époque actuelle prise pour origine et pendant le temps $d\tau$, la déformation a été α , le couple nécessaire au temps t actuel pour produire une déformation est diminué proportionnellement à $\psi(\tau)\alpha d\tau$. On a donc pour expression du couple

$$C = \Gamma \left[\alpha - \int_0^\infty \psi(\tau) \alpha(\tau) d\tau \right];$$

$\alpha(\tau)$ représente la déformation au temps τ ; si donc α est exprimé en fonction de t , on doit écrire

$$C = \Gamma \left[\alpha - \int_0^\infty \psi(\tau) \alpha(t - \tau) d\tau \right].$$

La fonction ψ doit avoir une valeur finie pour $\tau = 0$ et être nulle pour $\tau = \infty$; on pourrait la représenter, par exemple, par $\frac{a}{b + \tau}$.

Boltzmann applique sa théorie à quelques cas particuliers; nous choisissons les plus intéressants.

A. Le fil est complètement détordu du temps $-\infty$ au temps 0. On le tord brusquement d'un angle α_0 , et l'on maintient constante cette torsion. L'intégration au temps t doit être faite entre 0 et t avec $\alpha = \alpha_0$, entre t et ∞ avec $\alpha = 0$. D'où

$$C = \Gamma \alpha_0 \left[1 - \int_0^t \psi(\tau) d\tau \right] = \Gamma \alpha_0 \left(1 - a \int_0^t \frac{d\tau}{b + \tau} \right) = \Gamma \alpha_0 \left[1 - a \log \left(1 + \frac{t}{b} \right) \right].$$

C'est le couple variable à azimut constant. Nous avons employé précisément une expression de cette forme pour représenter nos expériences. Boltzmann admet que la déperdition dans le même temps est proportionnelle à α_0 ; ce n'est pas vrai; mais il est bien entendu que l'on pourrait généraliser la théorie.

Si l'on cherche quelle forme a la courbe de détorsion après un temps d'arrêt t plus ou moins prolongé, on trouve que, si $t = \infty$, la tangente Γ' de départ est plus petite que Γ , mais $\Gamma' > \Gamma$, si le temps d'arrêt avec $\alpha = \alpha_0$ est court.

B. On tord le fil brusquement de l'angle α_0 et on le maintient tordu entre $-\varepsilon$ et 0. Au temps 0, on ramène brusquement à l'azimut primitif $\alpha = 0$. On demande le couple nécessaire pour le maintenir dans cet azimut. On a

$$C = -\Gamma \alpha_0 \int_t^{t+\varepsilon} \psi(\tau) d\tau = -\Gamma \alpha_0 \varepsilon \psi(t) \quad \text{si } \varepsilon \text{ est petit.}$$

Le couple est négatif, car, dans la détorsion α_0 égale à la torsion, on a dépassé le couple nul; il tend vers 0.

C. De $-\infty$ à 0, le fil supporte une torsion constante; au temps 0, on ramène au couple nul et à l'azimut $\alpha_1 > 0$; on maintient indéfiniment ce couple; on demande la variation de l'azimut.

Il est évident, *a priori*, que α_1 tendra vers 0; cherchons suivant quelle loi.

Nous avons, au moment de la détorsion,

$$\alpha_1 = \alpha_0 \int_0^\infty \psi(\tau) d\tau.$$

ensuite, un angle α variable donné par

$$\alpha = \alpha_0 \int_t^\infty \psi(\tau) d\tau + \int_0^t \psi(\tau) \alpha(t - \tau) d\tau,$$

$$\alpha_1 - \alpha = \alpha_0 \int_0^t \psi(\tau) d\tau - \int_0^t \psi(\tau) \alpha(t - \tau) d\tau.$$

La seconde intégrale, nulle pour $t = 0$, s'annule encore pour $t = \infty$; elle a toujours une valeur petite, car α est toujours plus petit que α_1 . On a donc approximativement

$$\alpha_1 - \alpha = \alpha_0 \int_0^t \psi(\tau) d\tau.$$

D. De $-\infty$ à $-T$, $\alpha = 0$; de $-T$ à 0 , $\alpha = \alpha_0$. Au temps 0 , on ramène au couple nul et à l'azimut $\alpha_2 > 0$; on maintient indéfiniment ce couple; on demande la variation de l'azimut.

On a

$$\alpha_2 = \alpha_0 \int_0^T \psi(\tau) d\tau, \quad \alpha = \alpha_0 \int_t^{t+T} \psi(\tau) d\tau + \int_0^t \psi(\tau) \alpha(t - \tau) d\tau,$$

d'où, avec la même approximation que précédemment,

$$\alpha = \alpha_0 T \psi(t).$$

Comparons les deux résultats de ces cas qui ne diffèrent que par le temps pendant lequel le fil est resté tordu. Si $\psi(t) = \frac{a}{b+t}$, en C nous aurons une logarithmique, en D une hyperbole et, naturellement, toutes les courbes intermédiaires suivant la grandeur du temps ϵ . Cette conséquence caractérise la théorie de Boltzmann. Montrons, sur ces exemples, en quoi les idées de Boltzmann diffèrent de celles que nous défendons.

Nous croyons que l'état actuel du fil dépend de toutes les déformations antérieures ou, plus exactement, de tous les couples antérieurs; que les modifications produites par un couple actuel sont fonction de l'état actuel et, par conséquent, de tous les couples antérieurs, mais que l'état actuel peut être défini par un nombre probablement très petit de paramètres. En particulier, *si nous pouvions opérer sur un tube infiniment mince*, dans les cas C et D, nous devrions avoir la même loi de variation pour les azimuts, mais avec des paramètres différents, la valeur de ces paramètres dépendant de la loi $\alpha = f(t)$.

Pour Boltzmann, au contraire, les déformations agissent indépendamment les unes des autres (loi de superposition), mais l'état du fil ne peut être défini actuellement par un nombre fini de paramètres; son évolution actuelle est en quelque sorte l'image, la transposition des modifications antérieures.

Il semblerait que l'expérience pût trancher immédiatement la question; malheureusement, nous n'avons pas affaire à un mince tube de métal; nous observons en même temps les phénomènes qui se rapportent à l'ensemble de tubes coaxiaux inégalement déformés.

Toutefois, d'après le Tableau du n° 3, les lois de variation des azimuts semblent

de même forme pour $T = 0$ et $T = 780^m$; elles ne diffèrent pas, comme le feraient une logarithmique et une hyperbole. On objectera que si $\psi(t)$ était une exponentielle, les courbes correspondant aux cas C et D seraient les mêmes; mais il est bien certain que $\psi(t)$ varie beaucoup moins vite que l'exponentielle et que la forme la plus probable de $\psi(t)$ serait celle que nous avons indiquée ci-dessus.

Je ne parle, bien entendu, que de la partie lente du phénomène de réactivité. La théorie de Boltzmann rendrait compte, d'une manière assez satisfaisante, de l'influence des vitesses de torsion et de détorsion, au moins qualitativement.

E. Entre les temps $-T$ et 0 , faisons parcourir au fil l'oscillation sinusoïdale amortie $-\alpha_0 e^{-\beta t} \sin \omega t$; nous partons au temps $-T$ vers les azimuts négatifs et terminons au temps 0 en revenant par les azimuts positifs. Restons à l'azimut 0 et déterminons la variation du couple. Comptons les temps à partir du temps 0 comme origine positivement vers le passé; appelons u ce temps. La valeur de l'azimut entre les temps $u = 0$ et $u = T$ est représentée par

$$\alpha_0 e^{\beta u} \sin \omega u.$$

On a en définitive

$$C = -\Gamma \alpha_0 \int_0^T e^{\beta u} \sin \omega u \psi(t+u) du.$$

Le phénomène sera tout différent suivant la forme de la fonction ψ .

Posons $\psi(t) = e^{-\beta_1 t}$, on a

$$C = -\Gamma \alpha_0 e^{-\beta_1 t} \int_0^T e^{-\beta_1 u} e^{\beta u} \sin \omega u du.$$

Le couple C reste de signe constant et varie comme $e^{-\beta_1 t}$, puisque l'intégrale est constante. Mais cette intégrale est positive, si $\beta - \beta_1$ est négatif; négative, si $\beta_1 - \beta$ est positif. En supposant une autre forme pour ψ , on peut faire en sorte que l'intégrale change de signe suivant la valeur de t . Si ψ décroît très vite au début, et décroît lentement pour des valeurs grandes de t , C sera d'abord négatif, puis positif. Quel que soit ψ , on pourra toujours choisir la forme de l'oscillation de manière à être dans ce dernier cas; on aura une oscillation pour C et aussi pour l'azimut à couple nul constant.

Un tel phénomène serait impossible dans les idées que je soutiens: la matière se trouverait dans un certain état au début du phénomène, et il résulterait une détorsion d'un sens unique sans interversion de sens possible.

Mais, ici encore, il est nécessaire d'être prudent. Nous avons observé de telles variations de couple à *azimut constant*, d'abord dans un sens, puis dans l'autre (Chap. VII, n° 4); et, dans ce cas, la théorie de Boltzmann n'indiquerait rien de semblable. Nous n'avons pas affaire, en effet, à un tube infiniment mince, mais à une superposition de tubes qui agissent chacun pour son compte. La forme du

phénomène résultant peut ne plus avoir que de lointaines analogies avec celle du phénomène élémentaire. Nous reviendrons d'ailleurs sur ces phénomènes.

NOTE SUR LA THÉORIE DE NEESEN.

(*Pogg. Ann.*, t. CLVII; 1876.)

Tout ce qu'on peut dire de mieux de cette théorie, c'est qu'elle n'existe pas. Voici l'équation qui est censée la résumer :

$$C = \Gamma \left[\alpha + \psi(\alpha) - \int_0^t \psi_1(\alpha) \chi(t) dt \right].$$

Neesen pose ensuite, on ne sait pourquoi, $\psi = \psi_1$; puis il admet que ce sont des constantes, d'où

$$C = \Gamma \alpha \left\{ 1 + c \left[1 - \int_0^t \chi(t) dt \right] \right\}.$$

Si α est constant, cette formule exprime le résultat d'une expérience et ne saurait constituer une théorie. Si α est variable, elle n'a plus de sens. Reprenons la formule générale et faisons-y α fonction du temps; on ne voit pas ce que signifie l'intégration effectuée à partir du temps invariable 0, sur une fonction χ du temps, pendant que l'azimut varie.

J'attends, pour juger cette théorie, de savoir en quoi elle consiste.

