

---

SUR LES

# COURBES DE DÉFORMATION DES FILS,

PAR M. H. BOUASSE,  
Professeur à l'Université de Toulouse.

---

## DEUXIÈME PARTIE.

---

### CHAPITRE VI.

---

#### I. — DESCRIPTION DES APPAREILS DE TORSION.

Depuis déjà sept ans que j'étudie les phénomènes dus à la déformation des fils métalliques, j'ai employé un grand nombre de systèmes de dynamomètres de torsion ; je les ai décrits très sommairement, parce qu'ils présentaient des inconvénients graves qu'on pouvait espérer corriger avec de la persévérance. Je suis enfin parvenu à une forme de dynamomètre qui n'a d'autre défaut que celui d'exiger une disposition particulière du laboratoire ; comme j'ai dit déjà souvent qu'il ne faut entreprendre des expériences sur les déformations permanentes que dans l'intention de leur consacrer plusieurs années, que par ailleurs elles nécessitent des installations compliquées, ce défaut n'en est pas un. Les mécanismes qui me permettent d'obtenir des torsions dans un sens, dans le sens contraire, avec des vitesses plus ou moins grandes, avec des arrêts brusques, etc., ont été de ma part l'objet d'une étude minutieuse. Je vais donc décrire l'ensemble de mes installations actuelles pour l'étude des phénomènes de torsion.

*Description du laboratoire.* — Le laboratoire se compose d'une grande pièce ayant à peu près 8<sup>m</sup> sur 8<sup>m</sup>, limitée par deux murs principaux et deux hautes cloisons. Les murs principaux sont percés de quatre fenêtres, opposées deux à deux, laissant entre elles un trumeau de 1<sup>m</sup>, 70 de large. Ces trumeaux ont été reliés par quatre solives (8<sup>cm</sup> × 22<sup>cm</sup>), qui sont à 2<sup>m</sup>, 30 et 3<sup>m</sup>, 20 du sol ; elles limitent donc un espace prisme droit à base rectangle. Pour les fixer commodément, d'autres solives ont été boulonnées à plat sur les trumeaux, et les premières y

reposent à tenons et mortaises. Enfin elles sont reliées : 1° verticalement par quatre solives formant piliers et venant s'enfoncer dans le sol du laboratoire (il n'a pas de caves fort heureusement et le sol est formé d'une épaisse couche de béton); 2° horizontalement par quatre solives. Le tout forme comme une espèce de pont tubulaire en bois. Cet ensemble, très solide et sans aucune trépidation, met à ma disposition deux plans à 2<sup>m</sup>,30 et 3<sup>m</sup>,20 du sol sur lesquels je peux établir, selon le besoin, de petits planchers pour recevoir mes appareils, ou même faire des observations.

Indépendamment de ce bâti, deux énormes piliers de chêne de 25<sup>cm</sup> × 25<sup>cm</sup> × 5<sup>m</sup>,30, réunis à leur partie supérieure par une traverse, d'une part reposent sur le sol, et d'autre part sont fixés au plafond du laboratoire. Ils portent quatre chaises qui servent, deux par deux, de support à deux arbres auxquels sera empruntée toute la force motrice utilisée. Il ne doit y avoir de communication solide entre les deux bâtis que par l'intermédiaire du sol et des murs principaux.

*Force motrice.* — La force motrice est empruntée à un moteur électrique de  $\frac{1}{3}$  de cheval, excité en dérivation par une force électromotrice à peu près constante. La résistance de l'inducteur est invariable; la résistance du circuit de l'anneau peut être modifiée au moyen d'un rhéostat mû à la main et aussi au moyen de la mise automatique en circuit, par un régulateur à boules, d'une résistance auxiliaire. On a préconisé plusieurs systèmes de régulateurs (Marcel Deprez, d'Arsonval, etc.) se fixant directement sur l'arbre de moteur; dans le cas de nos expériences, leur emploi eût été mauvais. En effet, le moteur agit directement sur un arbre fixé à 1<sup>m</sup>,50 du sol et portant, outre une série de poulies, un volant de 1<sup>m</sup>,15 de diamètre; ce volant est fait d'une roue d'ancien bicycle dans la jante creuse de laquelle on a mis un tube de plomb: quoique relativement léger, il possède un moment d'inertie considérable. Les poulies sont en laiton et portent chacune trois gorges de 10<sup>cm</sup>, 20<sup>cm</sup>, 30<sup>cm</sup> de diamètre. L'arbre qui porte le volant, quatre de ces dernières poulies et enfin une poulie de 45<sup>cm</sup> de diamètre sur laquelle passe la corde du moteur, a donc une tendance à posséder un mouvement bien régulier: c'est lui qui agit sur le régulateur à boules. Il fait à peu près un tour en 0<sup>s</sup>,66.

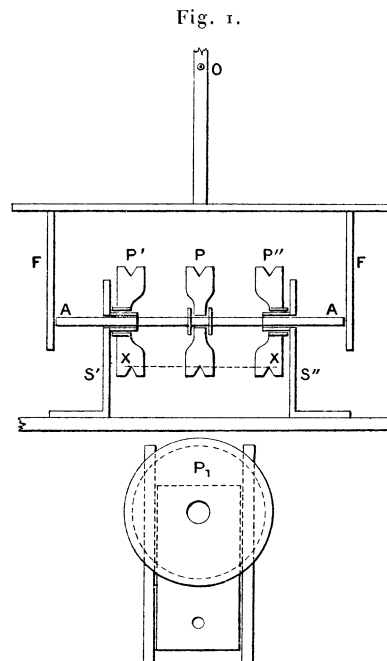
Si l'on fixe le régulateur sur l'arbre du moteur, on règle bien la vitesse de celui-ci, mais pas du tout la vitesse de l'arbre qui porte le volant. En effet, une des grandes difficultés que nous avons éprouvées et qui a compliqué notre installation, en exigeant partout des tenseurs, est la variation de longueur des cordes suivant l'état hygrométrique; même enduites d'une dissolution de cire dans de l'essence de térébenthine, elles sont étonnamment sensibles à l'humidité. Or l'influence de la variation de tension sur le glissement de la corde croît lorsque les poulies sont d'un diamètre très différent et lorsque la corde transmet du travail, ce qui est le cas entre le moteur et l'arbre du volant. Suivant la tension de la

corde, une même vitesse au moteur correspond à des vitesses différentes de cet arbre. Les mêmes inconvénients n'existent pas ailleurs, car à partir de l'arbre du volant les cordes ne transmettent plus qu'un travail insignifiant : presque tout le travail est absorbé par la rotation des deux arbres, et surtout du premier.

Le régulateur à boules est du système de Watt; les perfectionnements qu'on a apportés à ce régulateur n'auraient dans le cas particulier aucun intérêt, puisque le circuit est rompu pour une élévation verticale à peu près nulle des boules. L'appareil qui me sert provient d'un modèle de machine à vapeur fort bien construit et fonctionne parfaitement.

Enfin, à 3<sup>m</sup>,50 du sol se trouve le second arbre dont j'ai déjà parlé; il sert quand on veut mettre en mouvement des appareils placés sur le second plancher, ou quand on veut obtenir des vitesses différant notablement de celles du premier arbre. Ce second arbre porte six poulies de laiton à trois gorges et un cône de bois sur lequel sont tournées dix gorges dont les diamètres varient régulièrement entre 20<sup>cm</sup> et 40<sup>cm</sup>.

*Embrayage et changement de sens (fig. 1).* — Comme embrayage, je me



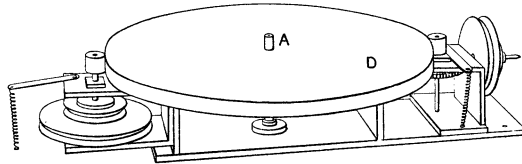
sers d'un appareil à friction de construction très simple. La corde à entraîner passe : 1° sur deux poulies parallèles, dont les joues sont verticales, P' et P'', et qui sont montées folles sur les supports S', S''; 2° sur une poulie horizontale P<sub>1</sub> dont le plan de la gorge a pour trace XX sur le plan vertical. Le moteur entraîne d'un

mouvement uniforme (par l'intermédiaire de l'un des deux arbres) la poulie P; elle est montée sur l'axe AA, qui passe fou dans les supports S'S". Une fourche FF, tournant autour de l'axe O, permet, en une fraction de seconde, d'embrayer à droite ou à gauche, ou de désembrayer.

Les poulies sont en buis; sur les faces intérieures on a collé de l'étoffe pour rendre les contacts plus adhérents. La poulie P<sub>1</sub> peut glisser dans son plan, afin de tendre convenablement la corde à entraîner. L'extrémité de la fourche OFF se manœuvre directement à l'aide d'une autre fourche liée à la première par un lien élastique; on établit ainsi, pendant l'embrayage, une pression constante entre les faces en contact des poulies.

*Appareil de torsion (fig. 2).* — L'appareil qui sert à produire les torsions se

Fig. 2.



compose d'un axe creux A, vertical, portant un disque horizontal D, de 30<sup>cm</sup> de diamètre, divisé en degrés. Le pourtour de ce disque est formé par un cylindre de 1<sup>cm</sup>, 5 de hauteur, contre lequel sont appliqués, par des leviers et des ressorts (dans la figure les ressorts pendent verticalement), deux petits cylindres de 2<sup>cm</sup> de diamètre, portés sur des axes verticaux et qui entraînent le disque par friction. L'axe d'un des cylindres (à gauche de la figure) porte deux poulies de buis de 10<sup>cm</sup> et de 5<sup>cm</sup> de diamètre, sur l'une desquelles passe le cordon d'entraînement. L'autre axe porte un engrenage hélicoïdal de 30 dents sur lequel engrène une vis sans fin dont l'axe porte deux poulies de 8<sup>cm</sup> et de 4<sup>cm</sup> de diamètre. Pour les mêmes vitesses du cordon d'entraînement, on peut donc obtenir des rotations du disque qui sont entre elles à peu près comme les nombres 1, 2, 24, 48. Comme on peut, en utilisant l'arbre du volant, donner trois vitesses comme les nombres 1, 2, 3, on a en tout à sa disposition des vitesses voisines de 1, 2, 3, 4, 6, 24, 48, 72, 96, 144.

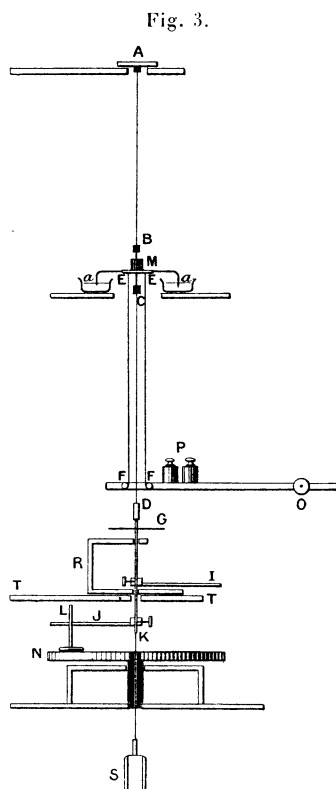
La vitesse 1 correspond à peu près à un tour en 6 minutes; la vitesse 144 correspond donc à un tour en 2,5 secondes. En utilisant le second arbre, on peut obtenir des vitesses plus petites; des vitesses supérieures sont généralement inutiles pour le but que nous nous proposons dans nos expériences.

Pour que l'adhérence soit suffisante, on colle une bande de papier sur les parties qui s'entraînent par friction. La force transmise par les cordons est très faible. L'embrayage et le désembrayage s'obtiennent en supprimant l'action du

ressort de pression, ce qu'on peut faire à distance par des cordons passant sur des poulies de renvoi.

Si le fil à tordre est au-dessous de l'appareil, on fait passer dans l'axe creux une baguette qui s'y fixe et à laquelle on attache les pinces que nous décrirons plus loin. Si le fil à tordre est au-dessus de l'appareil, on emploie un dispositif que nous décrirons en parlant du dynamomètre. Quand on doit tordre d'un grand nombre de tours, un contact électrique agissant sur une sonnerie permet de les compter aisément.

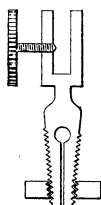
*Disposition générale du dynamomètre (fig. 3).* — On en trouve une des-



cription schématique dans la *fig. 3*. Un fil de fer recuit AB de  $1^{\text{mm}}$  de diamètre et de  $2^{\text{m}}$  de longueur est fixé invariablement en A et porte la pièce BC. Cette pièce se compose d'une tige métallique, aux extrémités de laquelle sont fixées des pinces et qui porte horizontalement une petite barre de laiton dans laquelle sont percés, à  $6^{\text{cm}}$  l'un de l'autre et symétriquement par rapport à la tige, deux petits trous. Dans ces trous passent deux fils fins d'acier EF de  $80^{\text{cm}}$  de long qui viennent se fixer à leur partie inférieure dans un fléau FO qu'on peut surcharger à l'aide des poids P. Cet ensemble forme le dynamomètre unibifilaire.

Passons au détail. Les pinces employées pour fixer tous les fils sont représentées *fig. 4*; elles sont plus commodes que celles que j'employais précédemment et que j'ai décrites au Chapitre I; le serrage, se faisant sur un pas de vis conique, est régulier et puissant; un petit canal longitudinal scié diamétralement permet d'installer sans tâtonnement le fil dans l'axe même de la pince.

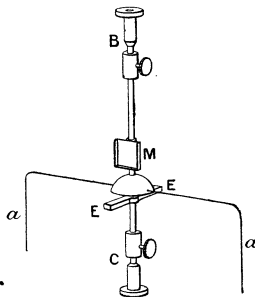
Fig. 4.



La pièce A, qui supporte le fil de fer à sa partie supérieure, se compose d'une première platine percée d'un trou et fixée sur un bâti horizontal à 5<sup>m</sup> du sol; une seconde platine, qui porte la pince, peut se régler horizontalement et se fixer à la première platine par de larges écrous dans la portion convenable.

La *fig. 5* représente le détail de la pièce BC; on voit le miroir et le fil *aa* qui,

Fig. 5.



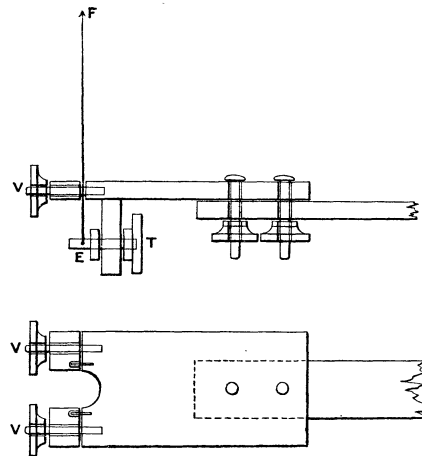
plongeant dans des vases pleins d'huile minérale, amortit les oscillations. La *fig. 6* représente l'extrémité du fléau FO vue en projections verticale et horizontale. Celui-ci est formé d'une tige de bois ayant, de F en O, 75<sup>cm</sup> de longueur (autres dimensions, 5<sup>cm</sup> × 1<sup>cm</sup>); elle porte à son extrémité une pièce de laiton dans laquelle se trouvent installés deux petits treuils T pour donner aux fils EF la longueur convenable, et deux écrous de serrage V pour fixer cette longueur. Contrairement à la *fig. 3* schématique, le plan des deux fils EF est normal à la grande dimension du fléau; la tension des fils EF s'exerce ainsi plus symétriquement.

Le fléau porte au niveau de O une barre transversale en bois dans laquelle sont fixées verticalement deux pointes à 13<sup>cm</sup> de part et d'autre du milieu du fléau. Ces

pointes reposent dans deux trous coniques percés dans une barre de laiton et servent de pivots; la position azimutale des extrémités FF des fils d'acier se trouve ainsi parfaitement déterminée, tandis que leur position verticale est arbitraire, ce qui est la condition fondamentale de justesse d'un bifilaire.

Ce dynamomètre de torsion satisfait à des conditions multiples dont les plus importantes sont les suivantes : 1° Emploi aussi faible que possible des phéno-

Fig. 6.

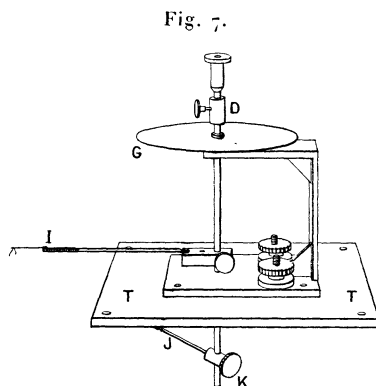


mènes d'élasticité : l'élasticité de torsion du fil de fer, qui a 2<sup>m</sup> de long et dont le diamètre n'est guère que le double du diamètre des fils étudiés, est peu de chose devant l'élasticité du bifilaire proprement dit; 2° Invariabilité du zéro; c'est une conséquence de la réalisation de la précédente condition; 3° Détermination de ce zéro; dans les dynamomètres qui s'attachent au fil et que nous employions d'abord, il y avait presque impossibilité à réaliser cette détermination; 4° Indépendance à peu près complète de la sensibilité du dynamomètre d'une part et de la tension du fil étudié de l'autre. On sait, en effet, que la constante de torsion d'un fil est à peu près indépendante du poids tenseur, pourvu que ce poids soit une fraction du poids nécessaire à l'allongement des fils. Or dans notre appareil le fil de fer peut supporter, sans s'allonger, plus de 15<sup>kg</sup>; son élasticité n'intervient d'ailleurs que pour une fraction de celle du dynamomètre. On a donc réalisé un appareil qui, au moins jusqu'à des charges de 10<sup>kg</sup>, a une sensibilité indépendante de la charge. 5° Sensibilité variable, dans une large mesure, par la variation des poids P: il faut toutefois que ces poids soient suffisants pour bien tendre le fil AB. Mais les dimensions de l'appareil restant les mêmes en modifiant le fil AB, on peut diminuer les poids P presque jusqu'à 0 et, par conséquent, rendre l'appareil de plus en plus sensible.

Nous avons employé le dynamomètre dans la situation représentée; le fil à

étudier s'attache à la pince inférieure de la pièce BC. Dans certaines recherches, par exemple quand on étudie l'action de la chaleur, pour des raisons sur lesquelles il est inutile d'insister en ce lieu, le fil doit être au-dessus du dynamomètre. On voit aisément que notre unibifilaire peut se retourner. La pièce A serait en bas, le fléau devrait porter ses surcharges sur son autre bras; le fil à étudier serait relié au dynamomètre par une tige légère et rigide, de longueur un peu plus grande que EF, et par un ressort qui maintiendrait sa tension constante. On trouvera représenté, *fig. 5*, *Mémoire sur les pertes d'énergie dans les phénomènes de torsion* (*Ann. de Phys.* pour 1898), un système élastique de liaison satisfaisant aux conditions requises.

*Liaison du dynamomètre et de l'appareil de torsion.* — La liaison se fait au moyen de l'appareil représenté *fig. 7* et schématiquement en R dans la *fig. 3*.



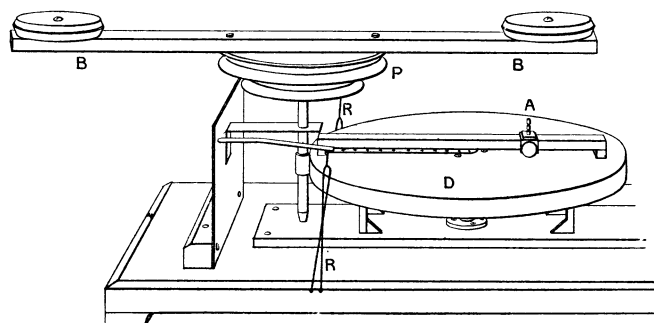
C'est un support qui peut se régler horizontalement, sur une platine TT percée d'un trou et fixée invariablement dans une position horizontale. Le support est traversé verticalement à frottement doux par la tige d'acier DK qui porte : 1° à ses extrémités deux pinces à fil, 2° un disque de verre mince G divisé en degrés, 3° deux bras I et J. Le bras I sert pour l'obtention des mouvements d'oscillation de faible amplitude (détermination de la constante de torsion); le bras J sert à relier le fil à étudier à l'appareil de torsion. Pour cela, on place sur le disque N (*fig. 3*) deux arrêts formés d'un disque épais de laiton et d'une tige verticale L soudée en un point du pourtour de ce disque. Ces arrêts, qui adhèrent au disque N par leur poids, entraînent le bras J et, par son intermédiaire, tordent le fil à étudier. Ce fil est convenablement tendu par la surcharge S attachée par le fil KS. Cette surcharge peut être un seau dans lequel s'écoule de l'eau suivant une loi connue, ou tel autre appareil, suivant les effets que l'on désire obtenir. L'ensemble de l'appareil, de A à S, occupe environ 5<sup>m</sup> de hauteur verticale.

*Obtention d'une torsion alternative sinusoïdale.* — Pour obtenir une telle



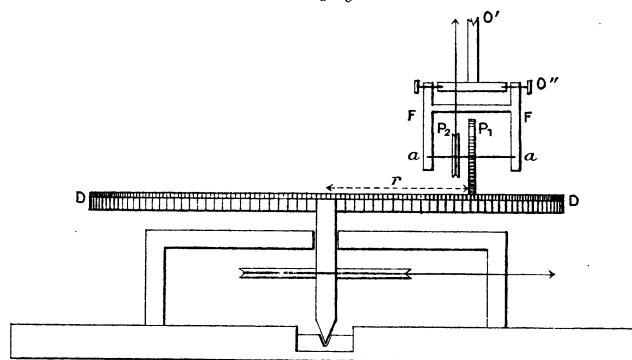
torsion, il faut donner à l'extrémité du bras I (*fig. 3 et 7*) un mouvement alternatif sinusoïdal. Il est transformé en un mouvement circulaire alternatif dont l'amplitude est facilement mesurée sur le disque G. Le procédé employé est identique à celui décrit dans les *Ann. de Ch. et de Phys.*, janvier 1898. L'extrémité I est tirée d'un côté par un caoutchouc tendu, de l'autre par un fil fin métallique qui aboutit à la tête de l'excentrique A de l'appareil représenté dans la *fig. 8*. Il

Fig. 8.



est clair que le mouvement de rotation uniforme du disque D produit un mouvement alternatif du point I (*fig. 7*) sensiblement sinusoïdal par rapport au temps dont l'amplitude est déterminée par la position du point A sur le disque D (*fig. 8*). La tête de l'excentrique est mobile sur une glissière, ce qui permet de faire varier à volonté l'amplitude de l'oscillation. Le disque D est entraîné par friction par un axe vertical : des ressorts R assurent l'adhérence ; le mouvement est régularisé par les masses de plomb portées par le bras BB fixé normalement à l'axe vertical. Le cordon d'entraînement passe sur l'une des poulies de bois P.

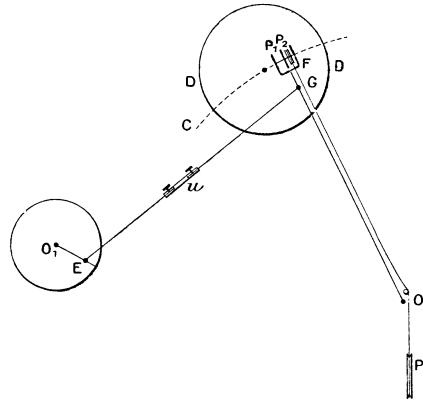
Fig. 9.



*Obtention de vitesses continûment variables, ou variables suivant une loi sinusoïdale quelconque.* — Il s'agit d'obtenir une vitesse de torsion continûment

variable, ou variable suivant la loi  $v = a + b \sin \omega t$ . Pour réaliser cette condition, un disque horizontal DD, de 60<sup>cm</sup> de diamètre, en bois recouvert d'une glace épaisse, est entraîné d'un mouvement uniforme. Un disque vertical de bois P', de 16<sup>cm</sup> de diamètre et de 5<sup>mm</sup> d'épaisseur, frotte sur le disque DD et est entraîné par lui (*fig.* 9, 10, 11). L'axe aa du disque P<sub>1</sub> est horizontal et sensiblement pa-

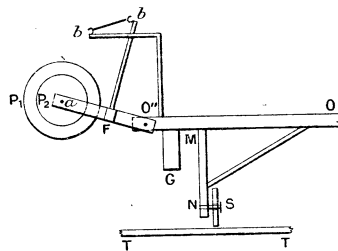
Fig. 10.



rallele à un diamètre du disque DD; il porte une poulie P<sub>2</sub> sur laquelle passe un cordon. La vitesse de rotation du disque P<sub>1</sub> et, par conséquent, la vitesse linéaire d'entraînement du cordon sont proportionnelles à la distance  $r$  du point de contact du disque P<sub>1</sub> au centre du disque D.

Le système P<sub>1</sub>P<sub>2</sub> est monté sur un bâti F en forme de H, qui peut tourner autour de l'axe O'' par lequel il se relie au système O''O'O. Ce dernier se compose d'une longue latte en bois de 3<sup>m</sup>, OO'O'', qui tourne autour de l'axe vertical O, et est supporté par deux roulettes S qui se meuvent sur le plan de verre TT. Dans la *fig.* 11 on voit l'une de ces roulettes; elles se projettent l'une sur l'autre. Une

Fig. 11.



seconde latte de même longueur est fixée à angle droit tout le long de la première pour éviter les flexions. Le point O'' se meut donc sur un cercle dont le centre est en O : l'axe O'' décrit un morceau de plan horizontal.

Si l'on imprime à la latte  $OO'O''$  un mouvement quelconque, ce mouvement se transmettra au disque  $P_1$  et la vitesse de rotation de ce disque en sera modifiée. Pour que l'adhérence des disques  $P_1$  et  $D$  soit convenable, la pièce  $F$  et la latte  $OO'O''$  portent chacune une potence (*fig. 11*) dont les extrémités sont reliées par des caoutchoucs tendus. On peut ainsi graduer la pression et, par conséquent, l'adhérence des disques. Cette adhérence reste à peu près constante alors même que le disque  $D$  ne tournerait pas exactement dans un plan horizontal, ou que le plan  $TT$  ne serait pas lui-même absolument horizontal.

Soit maintenant  $P_3$  (*fig. 10*) la poulie fixe à entraîner; c'est, par exemple, l'une des poulies de l'appareil de torsion (*fig. 2*). Elle tourne sous l'action du cordon qui passe sur la poulie  $P_2$ . La seule condition à réaliser est que le point  $O$  soit dans le plan de la poulie  $P_3$  et que les poulies de renvoi se trouvent au voisinage du point  $O$ . Dans ces conditions, les déplacements de la fourche n'influent sensiblement sur la longueur utile des cordes d'entraînement. Comme pas l'angle  $GO P_3$  est presque égal à  $180^\circ$ , on peut se dispenser de mettre en  $O$  des poulies de renvoi; le cordon passe en frottant sur un bout de tube vertical.

Pour que le disque  $P_1$  ne soit entraîné ni à droite, ni à gauche, par la rotation du disque  $D$ , il faut qu'il soit normal à un diamètre (au moins en supposant que  $P_1$  est assez mince). Cette condition est impossible à réaliser en toute rigueur, puisque le point de tangence ne décrit pas un diamètre, mais un cercle de rayon égal à  $3^m$ . On doit s'arranger pour que ce cercle  $C$  (*fig. 10*) passe par le centre du disque  $D$ . De plus, une disposition qu'il est inutile de décrire permet de modifier l'azimut du plan vertical  $P_1$  de manière à l'amener normal au diamètre de contact quand la distance de contact  $r$  est égale à la moitié de la distance  $r$  maxima. On réduit ainsi le plus possible l'influence perturbatrice de l'action latérale de  $D$  sur  $P_1$ .

Pour obtenir une vitesse variant suivant la loi  $v = a + b \sin \omega t$ , il suffit (*fig. 10*) de donner au point  $G$  un mouvement alternatif sinusoïdal: ce que l'on obtient par le moyen de l'excentrique  $E$  monté sur l'axe  $O_1$  à une distance variable à volonté. Une latte  $EuG$  de  $2^m$  dont on peut, par le moyen d'une glissière  $u$ , modifier un peu la longueur, relie l'excentrique à un point  $G$  du système  $OO'O''$ : le point  $G$  doit être à la hauteur de la surface supérieure du plateau  $D$ . L'axe  $O_1$  vertical est l'axe lent d'un train d'engrenages, énorme tourne-broche, sur l'axe des ailettes duquel on a mis la poulie d'entraînement commandée directement par l'arbre moteur principal, arbre du volant. Sur l'un des rouages intermédiaires du tourne-broche se trouvent des bras produisant des signaux électriques (sonnerie) quatorze fois par tour: ces signaux sont équidistants en temps, si le mouvement est uniforme.

Soient  $r_1$  et  $r_2$  les distances extrêmes du disque  $P_1$  à l'axe de rotation du disque  $D$ , comptées positivement à droite du centre, par exemple, et négativement

à gauche : le mouvement est sinusoïdal, de période  $T$ , et a pour équation

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2} + \frac{r_1 - r_2}{2} \sin 2\pi \frac{t}{T};$$

la vitesse de rotation de la poulie  $P_3$  a la même forme.

*Lecture simultanée des indications du dynamomètre et de la torsion.* —

La lecture des indications du dynamomètre doit être faite quand la torsion a des valeurs connues. C'est là une condition des plus difficiles à réaliser : j'ai essayé un grand nombre de procédés avant de m'arrêter à celui que j'emploie actuellement. L'idée la plus naturelle consiste à produire des signaux électriques pour des azimuts choisis à l'avance, à fixer sur l'appareil de rotation un certain nombre d'index devant produire ou rompre des contacts. Si l'on ne veut pas qu'il y ait de heurts au moment du signal, on doit employer des contacts à mercure : or, rien n'est plus mal déterminé qu'un pareil contact; certainement l'erreur peut atteindre  $1^\circ$ ; de plus, le signal est unilatéral : si l'appareil tourne en sens inverse, il se produit avec un écart de  $3^\circ$  ou  $4^\circ$ , suivant l'épaisseur de la bande de mercure qu'il est impossible de réduire beaucoup. Si, d'autre part, on veut obtenir un signal tous les  $15^\circ$  ou tous les  $30^\circ$ , on est encombré de tous les index qui deviennent nécessaires; il est difficile de les régler à une hauteur commune. Bref, si les signaux électriques sont commodes pour indiquer sans grande précision le passage à un azimut donné, surtout quand l'appareil ne doit tourner que dans un sens, ils sont impossibles à employer dans le cas de signaux nombreux et avec des rotations opposées.

J'ai employé des signaux optiques : on perce tous les  $15^\circ$  ou  $30^\circ$  un petit trou dans le disque, on s'arrange pour en envoyer l'image dans la lunette qui vise l'échelle du dynamomètre et l'on fait la lecture quand l'image passe au réticule. Ce procédé est très bon, surtout s'il y a quelque difficulté à lire les divisions du disque. C'est ce qui arrive généralement quand la torsion du fil se fait par en haut : le disque se trouve sur un support élevé, il est difficile de regarder sa face supérieure sans un nombre relativement grand (3 ou 4) de réflexions. En perçant de petits trous dans le disque que l'on éclaire par-dessus, on ramène à une seule le nombre des réflexions.

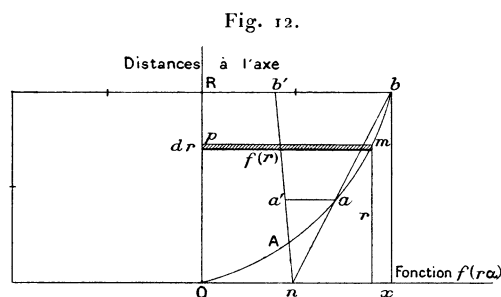
Avec la disposition de dynamomètre que j'emploie actuellement, il est très facile d'obtenir l'une au-dessus de l'autre, dans une lunette, les images de l'échelle du dynamomètre et des divisions du disque de torsion. En avant du miroir du dynamomètre se trouve un prisme à réflexion totale réglable en azimut : d'autre part, une lentille donne une image réelle de la division du disque à la même distance optique de la lunette que l'échelle du dynamomètre. On peut donc viser simultanément l'une dans le prisme à réflexion totale, l'autre dans le miroir du dynamomètre. Il est très facile à l'œil de faire la lecture de l'une, lorsqu'un trait de

l'autre passe sur le réticule. La division du disque est éclairée par un bec Auer à l'aide d'une lentille et d'un miroir. L'échelle du dynamomètre est éclairée par un bec Auer placé entre elle et le dynamomètre au-dessus du plan lunette-échelle-miroir; le dynamomètre est protégé contre le rayonnement par une planche épaisse recouverte entièrement de zinc.

L'échelle du dynamomètre, en bois mince, est cintrée sur une forme en bois selon un cylindre de 60<sup>cm</sup> de rayon dont l'axe est l'axe de rotation du miroir : les divisions sont toujours au point dans la lunette. L'axe optique de la lunette se trouve nécessairement au-dessus du plan formé par le centre du miroir et le bord utile de l'échelle. Dans ces conditions, il est nécessaire de mettre le prisme à réflexion totale au-dessus du miroir du dynamomètre, puisqu'il se trouve nécessairement en avant de ce miroir. Il est alors possible de rapprocher autant qu'on le veut les images des deux échelles et de les mettre avec leurs bords utiles (bords opposés aux chiffres gravés) presque au contact. Les surfaces utiles du miroir et du prisme à réflexion totale se projettent naturellement en contact sur le plan perpendiculaire à l'axe optique de la lunette, dont l'ouverture doit être assez grande pour les utiliser toutes deux : elle est de 5<sup>cm</sup>. La distance de l'image réelle à l'objectif est de 55<sup>cm</sup>; la distance de l'objectif au miroir, de 2<sup>m</sup> environ.

II. — DISTRIBUTION DES FORCES DANS LA SECTION DROITE D'UN FIL TORDU.  
HYPOTHÈSE DE J. THOMSON.

Soient  $R$  le rayon du fil,  $\alpha$  sa torsion mesurée en radians; la torsion sur un cylindre creux infiniment mince de rayon  $r$  est  $r\alpha$ . Soit  $f$  la force tangentielle qu'exerce chaque élément de surface de la section droite du fil. Généralement  $f$  sera une fonction de  $r\alpha$ , c'est-à-dire de la déformation, et aussi une fonction de la



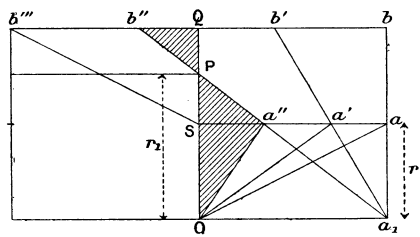
manière suivant laquelle cette déformation aura été faite, c'est-à-dire des dérivées de  $\alpha$  ou de  $r\alpha$  par rapport au temps. Portons cette force en abscisses et le rayon  $r$  en ordonnées.

Soit  $OAb$  (fig. 12) la courbe représentant les  $f$  : le couple total est  $2\pi \int_0^R r^2 f dr$ ;

le couple dû au cylindre plein de rayon  $r$  est  $2\pi \int_0^r r^2 f dr$ . Ces intégrales expriment, au facteur  $2\pi$  près, les moments d'inertie des surfaces  $OAbR$  et  $OAmP$  par rapport à l'axe  $Ox$  considéré comme axe de rotation; nous les désignerons par  $MI(OAbR)$  et  $MI(OAmP)$ .

Ce qui précède est vrai, quels que soient la forme de la fonction  $f$  et les effets du temps. Dans les hypothèses de J. Thomson, la courbe  $f$  se réduit à la ligne brisée  $Oab$  (*fig. 13*); la longueur  $Qb = F$  est la limite d'élasticité ou la valeur

Fig. 13.



maxima de  $f$ . La droite  $Oa$  a pour équation  $f = \Gamma_1 r\alpha$  : on admet implicitement les hypothèses suivantes :

1° L'angle  $\alpha$  est le même pour tous les cylindres creux coaxiaux; c'est une hypothèse fondamentale dont il est impossible de se passer dans l'état actuel de la science.

2° L'élasticité est parfaite jusqu'à ce que  $f = F$  : c'est l'hypothèse classique de la limite d'élasticité définie; si  $\Gamma_1 r\alpha > F$ ,  $f$  est constant et indépendant de la torsion.

3° Le coefficient élémentaire de torsion  $\Gamma_1$  conserve la même valeur, quelle que soit la déformation antérieure : ce n'est qu'approximativement vrai.

4° Le temps n'intervient pas.

Bien que ces trois dernières hypothèses soient fausses, cherchons quelles sont leurs conséquences.

Pour que la courbe des  $f$  soit  $Oab$  (*fig. 13*), il a fallu tordre d'un angle  $\alpha'$ , tel que pour le cylindre creux de rayon  $r'$  (et par conséquent pour tous les cylindres creux de rayon  $> r'$ ) la limite d'élasticité ait été atteinte; d'où la condition

$$F = \Gamma_1 r' \alpha', \quad \alpha' = \frac{F}{\Gamma_1 r'}$$

Si  $\alpha'$  est assez grand,  $r'$  est voisin de zéro; la section droite du cylindre supporte en tous ses points par unité de surface la force tangentielle  $F$  : le couple total, qui est maximum, est proportionnel au cube du rayon.

On peut calculer facilement, comme on a vu précédemment, la loi de torsion. Jusqu'à l'angle  $\alpha = \frac{F}{\Gamma_1 r'}$ , le couple total est proportionnel à la torsion  $\alpha$  et a pour expression  $\frac{\pi}{2} \Gamma_1 R^4 \alpha$ . Au delà, le couple a pour expression  $\frac{\pi}{6} FR^3 \left( 4 - \frac{F^3}{\alpha'^3 R^3 \Gamma_1^3} \right)$ .

Nous savons par le Chapitre IV combien les phénomènes cadrent peu avec ces conclusions.

*Détorsion.* — Après la torsion qui donne la courbe  $Oab$  (*fig.* 13) supposons une détorsion. Par hypothèse la diminution de tension tangentielle par unité de surface de chaque élément de la section droite est proportionnelle au produit  $r\alpha$ , dans lequel  $\alpha$  est l'angle de détorsion. La diminution du couple total est donc  $\frac{\pi}{2} R^4 \Gamma_1 \alpha$ . Les différentes courbes de détorsion sont  $Oa'b$ ,  $Oa''b''$ , ... : l'angle de détorsion correspondant est égal aux rapports  $\frac{bb'}{\Gamma_1 R}$ ,  $\frac{bb''}{\Gamma_1 R}$ , ... ou aux rapports respectivement égaux  $\frac{aa'}{\Gamma_1 r'}$ ,  $\frac{aa''}{\Gamma_1 r'}$ , ...

D'une manière générale, soit  $OAb$  la courbe des  $f$  (*fig.* 12) au moment où commence la détorsion; soit  $b'$  un point de la courbe des  $f$  pendant la détorsion. Dans les hypothèses énoncées, le point  $a'$  correspondant au point  $a$  s'obtient en menant par le point  $n$  (intersection des droites  $ab$  et  $Ox$ ) la droite  $nb'$  : l'intersection de  $nb'$  avec l'horizontale du point  $a$  donne le point  $a'$  cherché.

Pour une courbe de détorsion telle que  $Oa''b''$ , les éléments de la section droite dont la distance à l'axe est supérieure à  $r_1$ , exercent des couples dont la direction est opposée à la torsion initiale et dont le couple résultant est  $MI(b''QP)$ . Ses éléments, dont la distance à l'axe est inférieure à  $r_1$ , exercent des couples de sens inverse dont le couple résultant est  $MI(Pa''O)$ .

*Distribution des forces pour le couple total nul.* — Pour que le couple total soit nul, on doit avoir

$$MI(b''PQ) = MI(Oa''P).$$

Soient  $\alpha'$  et  $r'$  l'angle de première torsion et le rayon correspondant  $F = \Gamma_1 r' \alpha'$  à partir duquel la limite d'élasticité  $F$  est atteinte. Soient  $\alpha_1$  l'angle de détorsion jusqu'au couple nul et  $r_1$  le rayon pour lequel se fait la séparation entre les plages concentriques où les tensions sont de sens contraires.

On trouve

$$MI(b''QP) = \frac{F}{r_1} \left( \frac{r_1^4}{12} - \frac{R^3 r_1}{3} + \frac{R^4}{4} \right),$$

$$MI(Pa''S) = \frac{F}{r_1} \left( \frac{r_1^4}{12} - \frac{r_1^3 r_1}{3} + \frac{r_1^4}{4} \right),$$

$$MI(Oa''S) = \frac{F}{r_1} \frac{r_1 - r'}{4} r_1^3;$$

d'où

$$r_1 = \frac{3R^4}{4R^3 - r'^3}, \quad \frac{r_1}{R} = \frac{3}{4 - \left(\frac{r'}{R}\right)^3}.$$

Si  $\frac{r'}{R}$  est petit, le cube est négligeable; donc, si la torsion a été poussée assez loin, la courbe initiale se rapproche de  $Oa_1b$  (fig. 13), les courbes successives de détorsion se rapprochent des courbes  $a_1b'$ ,  $a_1b''$ . Enfin pour le couple nul,  $r_1 = \frac{3}{4}R$ .

Quant à l'angle de détorsion, nous pouvons le déduire immédiatement de la connaissance du couple total obtenu par torsion dont l'expression est  $\frac{\pi}{6}FR^3\left(4 - \frac{F^3}{\alpha'^3R^3\Gamma_1^3}\right)$ .

En effet, la diminution de couple pendant la détorsion est proportionnelle à l'angle de détorsion et donnée par la formule  $\frac{\pi}{2}R^4\Gamma_1\alpha$ . On a donc

$$\frac{\pi}{2}R^4\Gamma_1\alpha_1 = \frac{\pi}{6}FR^3\left(4 - \frac{F^3}{\alpha'^3R^3\Gamma_1^3}\right);$$

d'où

$$\alpha_1 = \frac{F}{3R\Gamma_1}\left(4 - \frac{F^3}{\Gamma_1^3\alpha'^3R^3}\right).$$

Soit  $A = \frac{F}{\Gamma_1R}$  l'angle dont il faut tordre pour que les couches extérieures du fil arrivent juste à la limite d'élasticité; on peut écrire

$$\alpha_1 = \frac{A}{3}\left(4 - \frac{A^3}{\alpha'^3}\right).$$

Si

$$\alpha' \geq A, \quad \alpha_1 = \alpha';$$

si  $\alpha'$  est très grand

$$\alpha_1 = \frac{4}{3}A.$$

Si nous retordons le fil dans le même sens, il est parfaitement élastique jusqu'à la torsion  $\alpha_1$ ; le champ d'élasticité a crû dans le rapport  $\alpha_1 : A$ . Arrivé à la torsion  $\alpha_1$ , on passe par des couples et des distributions qui auraient été les mêmes lors de la première torsion; la seconde courbe de torsion continue la première.

Toutes ces conséquences de l'hypothèse de Thomson sont bien connues : le mode d'exposition ici employé se rapproche beaucoup de celui de Duguet.

*Cas plus général.* — Nous savons, du reste, que les hypothèses de J. Thomson sont fausses, qu'il n'existe pas de limite d'élasticité, et que par conséquent les courbes des  $f$  ne présentent jamais de points anguleux. Supposons qu'au début de la détorsion la courbe des  $f$  puisse se représenter par la parabole  $f = ar - br^2$ . Après la détorsion de l'angle  $\alpha$ , la diminution de  $f$  est  $\Gamma_1(\alpha)r$ . Si l'on admet



que  $\Gamma_1(\alpha)$  est la même fonction dans tous les cylindres creux concentriques et que le temps n'intervient pas, on a, en fonction de  $\alpha$ ,

$$f = ar - br^2 - \Gamma_1(\alpha)r = r[a - \Gamma_1(\alpha)] - br^2$$

et, pour le couple total,

$$2\pi \int_0^r r^3 [a - \Gamma_1(\alpha)] dr - br^4 dr = 2\pi \left\{ \frac{r^4}{4} [a - \Gamma_1(\alpha)] - \frac{br^5}{5} \right\}.$$

Écrivons que le couple total est nul

$$a - \Gamma_1(\alpha_1) = \frac{4b}{5}R, \quad \Gamma_1(\alpha_1) = a - \frac{4b}{5}R.$$

Écrivons que pour cette détorsion et un certain rayon  $r_1$  la tension intérieure  $f$  est nulle

$$a - \Gamma_1(\alpha_1) = br_1 = \frac{4b}{5}R, \quad r_1 = 0.80R,$$

quels que soient  $\alpha$ ,  $b$  et aussi la fonction  $\Gamma_1(\alpha)$ , pourvu qu'elle soit la même dans tous les cylindres creux. Enfin calculons pour quelle détorsion  $\alpha_2$  la couche superficielle a une tension nulle

$$a - \Gamma_1(\alpha_2) = bR, \quad \Gamma_1(\alpha_2) = a - bR.$$

Discutons la valeur du rapport

$$\rho = \frac{\Gamma_1(\alpha_2)}{\Gamma_1(\alpha_1)} = \frac{1-x}{1-\frac{4x}{5}}$$

en posant

$$\frac{bR}{a} = x.$$

On a, avant la détorsion,

$$f = ar - br^2;$$

d'où

$$\frac{df}{dr} = a \left( 1 - \frac{2br}{a} \right) = a \left( 1 - 2x \frac{r}{R} \right).$$

Or  $\frac{df}{dr} > 0$ , donc  $2 \frac{r}{R} x < 1$  quel que soit  $r$ . Donc  $x$  est nécessairement inférieur à 0,5. Pour  $x = 0$  l'élasticité est parfaite; pour  $x = 0,5$ , on atteint la limite de  $f$  pour les couches superficielles.

On a

$$\frac{d\rho}{dx} = - \frac{1}{5 \left( 1 - \frac{4x}{5} \right)^2};$$

$\rho$  décroît donc continuellement quand  $x$  croît. Or pour  $x=0$ ,  $\rho=1$ ; pour  $x=0,5$ ,  $\rho=0,833$ . Donc pour toutes les formes paraboliques de la fonction  $f$ ,  $\rho$  ne peut varier qu'entre 1 et 0,833. Dans l'hypothèse de J. Thomson, cette valeur, qui est le rapport des détorsions, puisque  $\Gamma_1(\alpha)=\Gamma_1\alpha$ , peut descendre à 0,75.

*Valeur séparée des couples qui s'équilibrent au couple total nul.* — Pour le couple total nul nous savons que les couches cylindriques telles que  $r < r_1$  ont une tension dans un sens; pour les couches telles que  $R > r > r_1$ , la tension est de sens contraire. Chacun de ces groupes de couches donne un couple dont nous nous proposons de calculer la valeur maxima; la valeur minima est évidemment nulle quand le fil est parfaitement élastique.

Dans le cas des hypothèses de J. Thomson, il suffit de faire dans l'expression du moment  $MI(Pb''Q)$ ,  $r_1 = \frac{3R}{4}$  et de multiplier par  $2\pi$ . Le couple maximum avant la détorsion est  $C = \frac{4\pi}{6} FR^3$ .

On trouve aisément, pour la valeur  $C'$  du couple cherché,

$$C' = 0,106 C$$

soit un peu plus de  $\frac{1}{10}$ .

Dans les hypothèses plus générales, le couple total avant toute détorsion est

$$2\pi \int_0^R (ar - br^2)r^2 dr \quad \frac{C}{2\pi} = R^4 \left( \frac{a}{4} - \frac{bR}{5} \right) = \frac{aR^4}{20} (5 - 4x).$$

Le couple  $C'$  dont nous cherchons la valeur est

$$\begin{aligned} \frac{C'}{2\pi} &= \int_0^{0,8R} r^3 [a - \Gamma_1(\alpha_1)] dr - \int_0^{0,8R} br^4 dr = 0,8 \int_0^{0,8R} bRr^3 dr - \int_0^{0,8R} br^4 dr \\ &= 0,8 R^3 b \frac{1}{20} = 0,328 \frac{bR^5}{20}; \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{C'}{C} = \frac{0,328x}{5-4x}.$$

Ce rapport croît quand  $x$  passe de 0 à 0,5, qui sont ses valeurs extrêmes; pour  $x=0$ , il est 0; pour  $x=0,5$ , on a  $C'=0,055C$ . Ainsi les deux couples égaux et de sens contraire  $C'$  ne sont guère plus de 1:20 du couple total qu'il est possible d'atteindre.

*Remarques sur les hypothèses précédentes.* — Nous venons de développer quelques conséquences des hypothèses de J. Thomson généralisées par M. Duguet: ce sont des approximations grossières et inacceptables. Elles conduisent à admettre, quelle que soit la forme de la courbe des  $f$  au début de la détorsion et quelle que soit la fonction  $\Gamma_1(\alpha)$ , les diverses courbes des  $f$  pendant la détorsion

sont homologues et se déduisent les unes des autres par la construction de Duguet. Or l'expérience prouve que c'est faux. A la vérité cette preuve est subordonnée à la supposition que *la torsion est simultanément la même pour tous les cylindres creux élémentaires, supposition qui vaut ce qu'elle vaut, mais dont il nous est impossible de nous passer et qui se trouve aussi bien à la base des théories J. Thomson-Duguet.*

Nous avons laissé dans nos formules une fonction indéterminée  $\Gamma_1(\alpha)$ ; il n'est pas inutile de montrer que cette apparente généralisation, qui consiste à remplacer la fonction linéaire  $\Gamma_1\alpha$  par une fonction quelconque  $\Gamma_1(\alpha)$ , *mais la même pour tous les cylindres élémentaires*, n'a absolument aucune raison d'être. Dire qu'au moment de la détorsion la courbe des  $f$  n'est pas une ligne brisée comme le veut J. Thomson, c'est admettre avec raison qu'il n'y a pas de torsion limite au sens classique du mot, que la matière se modifie, qu'elle n'est pas dans le même état aux différents points du cylindre tordu.

Dire maintenant que, pendant la détorsion, la déperdition de tension sur la section droite de chaque cylindre élémentaire est représentée par la fonction linéaire  $\Gamma_1\alpha r$  n'est pas en contradiction logique avec ce qui précède. Seulement l'expérience prouve que c'est faux; elle montre : 1° que  $\Gamma_1$  n'est plus resté le même pour tous les cylindres concentriques; 2° que les phénomènes où le temps intervient ne sont plus les mêmes pour les différents cylindres; 3° que les courbes des  $f$  en fonction de  $r$  pour différentes détorsions ne sont pas homologues, etc., sans parler de la preuve directe et immédiate que la courbe de détorsion (couple total, azimut) n'est pas rectiligne.

Dire que pendant la détorsion, la déperdition de tension est représentée par une fonction  $\Gamma_1(\alpha)r$ , identique pour tous les cylindres est absurde; car on ne peut admettre qu'ils cessent d'être parfaitement élastiques, en se conduisant de la même manière, puisqu'ils ont été inégalement déformés. En définitive la fonction  $\Gamma_1(\alpha)$  dépend de  $r$ .

*Autre mode de représentation.* — Le mode de représentation de M. Duguet, si intéressant qu'il soit, ne donne pas une idée exacte de l'importance relative des différents cylindres creux concentriques dans la réalisation du couple total. Pour des comparaisons numériques ultérieures, nous avons calculé le Tableau suivant.

La torsion est supposée avoir été poussée assez loin pour que tous les éléments de la section droite exercent, au moment de la détorsion, la tension limite  $F$ ; les couples produits par les cylindres concentriques *pleins* de rayon  $r$  sont proportionnels à  $r^3$ ; le couple produit par le fil entier de rayon  $R = 100$  est désigné par 10000.

Pendant la détorsion, les cylindres pleins de rayon  $r$  subissent une perte de couple proportionnelle à  $r^4$ ; chaque ligne du Tableau donne donc *pour une même détorsion* les couples produits par les cylindres pleins de rayon  $r$ , chaque  $r$  cor-

respondant à une colonne. La différence entre deux nombres consécutifs d'une même ligne donne l'action du cylindre creux compris entre deux rayons qui diffèrent de  $\frac{1}{20}$  du rayon total. Nous supposons que le couple total devient nul après une détorsion égale à 10; après la détorsion 7,5 les parties superficielles et les parties centrales de la section droite commencent à agir dans des sens opposés. Pour chaque détorsion plus grande que 7,5, le couple exercé par un cylindre plein de rayon  $r$  et exprimé en fonction de ce rayon passe par un maximum. Il correspond à la valeur de  $r$  telle que le cylindre élémentaire creux de rayon  $r$  ait une tension tangentielle nulle. L'ensemble de ces maximums est donné en fonction de la détorsion  $\alpha$  par l'expression  $\alpha r = \text{const.}$  Cette constante est définie par la condition que, pour  $r = R = 100$ ,  $\alpha = 7,5$ ; la condition est donc  $\alpha r = 750$ . Pour  $\alpha = 10$  (couple total nul),  $r = 75$ .

Le Tableau peut encore servir quelle que soit la forme de la courbe des  $f$  au moment de la détorsion, pourvu que l'on admette que, pendant la détorsion, la diminution de tension à la distance  $r$  soit proportionnelle à  $\Gamma_1 \alpha r$ . Entre deux détorsions  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , la diminution de couple produite par le cylindre plein de rayon  $r$  est

$$\Gamma_1(\alpha_1 - \alpha_2) \int_0^r r^3 dr = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{4} \Gamma_1 r^4.$$

Or les nombres inscrits dans la deuxième ligne du Tableau donnent précisément les diminutions simultanées de couples pour une même détorsion : ce sont les différences entre deux nombres consécutifs d'une même colonne.

	$r = 100$	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15
	$r^4 = 10000$	8145	6561	5220	4096	3164	2401	1785	1296	915	625	410	256	150	81	39	16	5
Détorsions.																		
0.....	$r^3 = 10000$	8574	7290	6141	5120	4219	3430	2746	2160	1664	1250	911	640	429	270	156	80	34
1.....	9000	7759	6634	5619	4710	3903	3190	2567	2030	1572	1188	870	614	414	262	152	78	33
2.....	8000	6945	5978	5097	4300	3586	2950	2389	1900	1481	1125	829	589	399	254	148	77	33
3.....	7000	6130	5322	4575	3890	3269	2710	2210	1770	1389	1063	788	563	384	246	144	75	32
4.....	6000	5316	4666	4053	3480	2953	2470	2032	1640	1298	1000	747	538	369	238	140	74	32
5.....	5000	4502	4010	3531	3070	2636	2230	1853	1510	1206	938	706	512	354	229	136	72	31
6.....	4000	3687	3354	3009	2660	2320	1990	1675	1380	1115	875	665	487	339	221	133	70	31
7.....	3000	2873	2698	2487	2250	2003	1750	1496	1250	1023	813	624	461	324	213	129	69	30
7,5...	2500	2466	2369	2226	2045	1845	1630	1407	1185	977	782	604	448	317	209	127	68	30
8.....	2000	2058	2042	1965	1840	1687	1510	1318	1120	932	750	583	436	309	205	125	67	30
9.....	1000	1244	1386	1443	1430	1371	1270	1139	990	840	688	542	410	294	197	121	66	29
10.....	0	429	729	921	1024	1055	1029	961	864	749	625	501	384	279	189	117	64	29
11.....	-1000	-386	73	399	614	739	789	783	734	658	563	460	359	264	181	113	62	28
12.....	-2000	-1200	-583	-123	204	422	549	604	604	566	500	419	333	249	173	109	61	28
13.....	-3000	-2015	-1239	-645	-206	106	309	426	474	475	438	378	308	234	165	105	59	27
14.....	-4000	-2829	-1895	-1167	-616	-211	69	247	344	383	375	337	282	219	157	101	58	27
15.....	-5000	-3643	-2551	-1689	-1026	-527	-171	69	214	292	313	296	257	204	149	97	56	26
16.....	-6000	-4458	-3207	-2211	-1436	-843	-411	-110	84	201	250	255	231	189	140	94	54	26

*Dissolution dans un acide des couches superficielles du fil.* — Supposons qu'après la torsion  $\alpha'$  et la détorsion  $\alpha$  l'on plonge le fil dans un bain qui le dissout régulièrement et qu'on détermine la loi de variation du couple total, les extrémités du fil étant maintenues fixes. Dans les hypothèses de J. Thomson, pour des détorsions  $< 7,5$  (10 étant la détorsion ramenant au couple nul), le couple total diminue jusqu'à zéro sans présenter de maximum. Pour des détorsions plus grandes, le couple croît, puis décroît jusqu'à zéro. C'est ce qu'on conclut immédiatement du Tableau. Les lignes successives, lues de gauche à droite, donnent, pour chaque détorsion, la succession des couples quand le fil se dissout régulièrement.

Voici un problème analogue :

On tord le fil d'un angle  $\alpha'$ , on détord jusqu'au couple total nul de l'angle  $\alpha_1$  : le couple nul étant maintenu, on dissout régulièrement le fil ; on demande sa détorsion complémentaire  $\alpha_2$  pendant la dissolution.

On a toujours  $\alpha' + \alpha_1 + \alpha_2 = 0$ . Les couches axiales ne peuvent pas atteindre la limite F, puisque  $\alpha'$  est fini ; la courbe des  $f$  se termine donc toujours (*fig. 13*) par une branche rectiligne passant par l'origine O des coordonnées. Quand la dissolution atteint les couches correspondantes, l'équilibre devient définitif et le fil cesse de se détordre : alors la somme des torsions est nulle. Ce mode de raisonnement est général : quelles que soient les torsions et détorsions  $\Sigma\alpha'$ , on a  $\alpha_2 + \Sigma\alpha' = 0$ ,  $\alpha_2$  étant la détorsion pendant la dissolution au couple nul.

Dans le cas d'une seule torsion  $\alpha'$  et d'une seule détorsion  $\alpha_1$ , on peut aisément calculer  $\alpha_2$  ;  $\alpha_2$  est une augmentation de la détorsion. En effet (*fig. 13*), au moment où commence la dissolution, on a, par hypothèse,  $MI(b''QP) = MI(O\alpha''P)$ . Quand les couches extérieures se dissolvent, l'équilibre cesse d'exister : l'aire  $Pd''O$  doit alors diminuer, ce qui entraîne une détorsion.

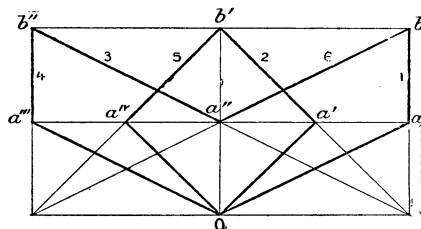
*Torsion en un sens opposé à la première torsion.* — A partir du couple nul, le champ d'élasticité parfaite a diminué pour les torsions de sens opposé. Pour que les parties superficielles arrivent à leur limite d'élasticité, il faut que le point  $b$  de la courbe des  $f$  (*fig. 13*) vienne en  $b'''$ . Le champ total d'élasticité ne peut donc pas être plus grand que  $\frac{2F}{\Gamma_1 R} = 2A$ . Comme la détorsion jusqu'au couple nul a été  $\alpha_1$ , il reste de torsion élastique en sens inverse

$$2A - \alpha_1 = \frac{A}{3} \left( 2 + \frac{A^3}{\alpha'^3} \right),$$

formule qui s'applique pour  $\alpha' > A$ . Si  $\alpha' < A$ , la torsion élastique en sens opposé est A. Si  $\alpha'$  est très grand, le champ d'élasticité dans le premier sens croît de A à  $\frac{4A}{3}$  ; il diminue en sens inverse de A à  $\frac{2A}{3}$ .

*Torsions alternées égales.* — Soient une torsion  $+\alpha'$  à droite,  $-2\alpha'$  à gauche,  $+2\alpha'$  à droite,  $-2\alpha'$  à gauche, . . . Après la première torsion, la tension limite s'exerce sur tous les éléments compris entre la surface du fil et le cylindre de rayon  $r'$  tel que  $r'\alpha'\Gamma_1 = F$  (fig. 14). Cherchons la détorsion nécessaire pour

Fig. 14.

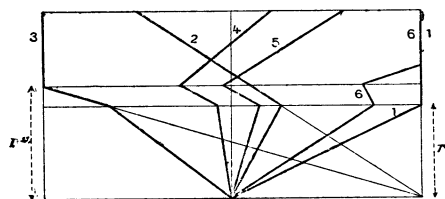


passer de la courbe 1 à sa symétrique 4. Le point  $a$  doit venir en  $a'''$ , c'est-à-dire se déplacer de  $aa''' = 2F$ ; il faut produire une détorsion égale à  $\frac{2F}{\Gamma_1 r'} = 2\alpha'$ ; ce qui est précisément la condition imposée. Le fil est identique à lui-même aux bouts de l'oscillation; les courbes 5, 6, 7 sont symétriques de 2, 3, 4. Il y a bien une dissymétrie hélicoïdale, mais qui change de sens à chaque oscillation.

L'expérience ne confirme pas ces conclusions; la première torsion produit une dissymétrie qui subsiste.

*Torsions alternées décroissantes.* — On produit une torsion  $+\alpha'$  qui amène la tension limite jusqu'au cylindre de rayon  $r'$  donné par la formule  $r'\alpha'\Gamma_1 = F$  (courbe 1, fig. 15). On détord de  $-\alpha'' < 2\alpha'$  qui amène la tension limite jusqu'au

Fig. 15.



cylindre de rayon  $r''$ , donné par la formule  $r''\alpha''\Gamma_1 = 2F$ . On tord d'un angle  $+\alpha''' < \alpha''$ ; on détord d'un angle  $\alpha^{IV} < \alpha'''$  et ainsi de suite. Pour ces diverses torsions, la tension limite s'exerce dans les parties de la section droite comprises entre la surface et le cylindre de rayon  $r$  donné par la formule générale (valeur absolue)  $\alpha r\Gamma_1 = 2F$ , sauf pour la première torsion, pour laquelle on a  $\alpha' r'\Gamma_1 = F$ . Comptons le nombre des points anguleux de la courbe des  $f$ .

Première torsion...	Jusqu'à l'angle A.	Pas de point anguleux.
» ...	Entre A et $\alpha'$ .	Un.
Deuxième torsion ..	On détord de $2A$ .	Un.
» ...	Entre $2A$ et $\alpha''$ .	Deux.
Troisième torsion ..	On détord de $2A$ .	Deux.
» ...	Entre $2A$ et $\alpha'''$ .	Trois.

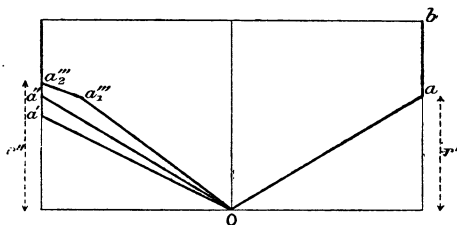
En général, pendant la  $n^{\text{ième}}$  torsion, la courbe des  $f$  présente, jusqu'à la torsion  $2A$ ,  $n - 1$  points anguleux, entre  $2A$  et  $\alpha^n$ ,  $n$  points anguleux.

Pendant chaque torsion, on passe une fois par le couple total nul; pendant la  $n^{\text{ième}}$  torsion, au couple total nul, la courbe des  $f$  a  $n - 1$  ou  $n$  points anguleux. Il y en a  $n - 1$  seulement, parce qu'alors l'extrémité de la courbe des  $f$  est encore au voisinage de l'axe des coordonnées; la détorsion est inférieure à  $2A$ .

*Retour à la disposition initiale.* — Le champ d'élasticité parfaite est invariable et égal à  $2A$ . Si l'on tord dans un sens d'un angle plus grand que  $A$ , la courbe des  $f$  présente un ou plusieurs points anguleux. Il est impossible de supprimer ces points anguleux et, par conséquent, de rétablir la disposition initiale.

Nous pouvons toujours supposer (cela ressortira de la démonstration même) que la courbe des  $f$  ne présente qu'un point anguleux ( $Oab$ , *fig.* 16). La valeur

Fig. 16.



limite de  $f$  est atteinte jusqu'au rayon  $r'$ ; à partir de l'état initial, pour obtenir cette disposition, il faudrait tordre de  $\alpha'$  donné par  $\alpha'\Gamma, r' = F$ . Soit  $\alpha''$  la torsion suivante en sens contraire. Si  $\alpha'' = 2\alpha'$ , la couche des  $f$  devient  $Oa''b'$  symétrique de  $Oab$ ; le problème reste le même. Si  $\alpha'' > 2\alpha'$ , la courbe est  $Oa'b'$ ;  $r'$  est devenu  $r''$ . Si enfin  $\alpha'' < 2\alpha'$ , la courbe devient  $Oa''_1a''_2b'$ , il y a un point anguleux de plus.

En produisant une torsion  $\alpha'''$  en sens inverse de  $\alpha''$ , nous pourrions supprimer ce point anguleux surajouté. Nous pouvons supprimer tous les points anguleux, sauf un; nous ne pouvons donc pas ramener la courbe des  $f$  à être rectiligne.

On peut la ramener à être apparemment rectiligne, la droite étant la limite d'un zigzag dont les éléments sont nombreux et courts et font entre eux des angles compris entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$ . A supposer les hypothèses de Thomson vérifiées, rien ne prouve que cette disposition serait équivalente à la disposition initiale. Pour

obtenir ce zigzag, il faut faire décroître systématiquement les torsions alternées; on augmente indéfiniment le nombre des points anguleux; en choisissant convenablement la loi de décroissance, on peut les mettre tous sur une droite passant par le point O.

*Dissolution régulière du fil.* — On a tordu de  $+\alpha'$ , détordu de  $-\alpha''$ ; on est revenu au couple nul par une torsion  $+\alpha_1$ ; on étudie la rotation  $\alpha_2$  pendant la dissolution au couple nul. On a

$$\alpha' - \alpha'' + \alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

1° Si  $\alpha'' < 2A$ , la rotation pendant la dissolution est négative et a la même valeur que si, après la première torsion, on revient au couple nul sans le dépasser.

2° Si  $2A < \alpha'' < 2\alpha'$ , il y a, suivant la grandeur de  $\alpha''$ :

Soit une rotation négative dont la valeur absolue est décroissante.

Soit une rotation positive suivie d'une rotation négative, la première croissante, la seconde décroissante à mesure que  $\alpha''$  croît.

3° Si  $\alpha'' = 2\alpha'$  en valeur absolue, il y a, pendant la dissolution, une rotation positive égale en grandeur à la rotation négative du cas 1°.

4° Si  $\alpha'' > 2\alpha'$ , cette rotation croît; elle reste positive.

Si le nombre des torsions et détorsions croît, le problème devient très compliqué.

### III. — MÉTHODE GÉNÉRALE DE DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DE LA COURBE DES $f$ .

Le fil de rayon R est, au début de chaque opération, dans un état bien déterminé (par exemple, parfaitement recuit, ou allongé, à partir de l'état parfaitement recuit, d'un certain nombre de millièmes, avec ou sans filière). Il est tordu de  $R\alpha$  avec une vitesse  $v = \frac{d\alpha}{dt}$ ; on veut connaître à chaque instant la distribution des tensions dans une section droite.

Si le temps n'intervenait pas, la courbe des  $f$  se déduirait de la courbe des  $\varphi$  (voir Chap. IV, n° 4); mais cette hypothèse n'est pas vérifiée: on doit résoudre expérimentalement le problème. Soit un fil identique comme matière au début, et de rayon  $nR$ ; tordons-le du même angle avec la vitesse  $v$ . A supposer que *l'existence de la partie extérieure du fil ne change pas les phénomènes pour les parties intérieures*, le couple  $C_n$  obtenu est celui que donnerait, pour la même torsion, la portion cylindrique du premier fil qui va de l'axe jusqu'au rayon  $nR$ .

Cette méthode est inapplicable, car on n'est jamais sûr de réaliser, sur des fils qui ne sont pas de même diamètre, des états initiaux identiques. On peut tourner



la difficulté grâce à la loi de correspondance générale étudiée dans le *Journal de Physique pour 1899*.

Prenons donc un fil de rayon  $R$  et de même longueur que le premier; tordons-le de l'angle  $n\alpha$  avec une vitesse  $n\nu$ ; le couple  $C'_n$  obtenu est relié au couple  $C_n$  cherché par les formules  $C_n = n^3 C'_n$ . On peut faire ainsi, sur des fils de rayon  $R$ , toute une série d'expériences qui permettent de calculer, à l'aide des couples mesurés  $C'_m, C'_p, \dots$ , les couples  $C_m = m^3 C'_m, C_p = p^3 C'_p, \dots$ .

*Application de la méthode à la déperdition de couple à azimuth constant.* — Nous n'avons rien spécifié relativement à la loi de torsion;  $\nu$  peut être une constante ou une fonction du temps. La condition imposée, que la torsion devienne  $m\alpha$  quand la vitesse devient  $m\nu$ , implique seulement que les opérations se fassent dans le même temps, quelque complexe qu'elles puissent être. Sous cette deuxième forme, elle indique que, si l'on maintient l'azimut constant pendant un certain temps pour l'un des fils, on le doit maintenir constant pendant le même temps pour un autre quelconque des fils. On peut donc analyser la loi de distribution des tensions dans la section droite et la perte de couple correspondante, quand on maintient invariables les azimuths des bouts du fil.

Soit  $P$  la perte de couple éprouvée par le fil de rayon  $R$  quand, après un ensemble quelconque de torsions et de détorsions  $\Sigma\alpha$ , effectuées avec une vitesse  $\nu$ , on maintient invariables les azimuths des bouts du fil pendant le temps  $t$ . Prenons des fils de même matière, de même longueur et de même rayon. Effectuons des torsions  $\Sigma m\alpha, \Sigma n\alpha, \dots$  avec des vitesses  $m\nu, n\nu, \dots$ . Déterminons, pendant le même temps  $t$ , les déperditions  $P'_m, P'_n, \dots$  éprouvées à azimuth constant; les déperditions  $P_m, P_n, \dots$  des cylindres du premier fil, allant de l'axe à la surface cylindrique de rayons  $mR, nR, \dots$ , sont  $m^3 P'_m, n^3 P'_n, \dots$ .

On comprendra aisément maintenant le rôle du Tableau numérique que nous avons donné plus haut et son emploi dans des comparaisons ultérieures.

#### IV. — ÉCROUISSAGE, HYSTÉRÉSIS, RÉACTIVITÉ. PHÉNOMÈNES QUI DÉPENDENT DU TEMPS.

*Changements brusques de vitesse. Équation de continuité.* — Sans changer les valeurs actuelles de la force et de la déformation, on modifie la vitesse de déformation. M. Brillouin a donné une équation générale de continuité qui contient, comme cas particuliers, plusieurs lois expérimentales énoncées par nous antérieurement.

Soient 1 et 2 les conditions avant et après les variations brusques de vitesse; on a, dans chaque cylindre élémentaire,

$$(1) \quad \left(\frac{df}{dt}\right)_2 - \left(\frac{df}{dt}\right)_1 = \Gamma_1 r \left[ \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_2 - \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_1 \right].$$

Nous admettons que  $\alpha$  et, par conséquent,  $\frac{d\alpha}{dt}$  est le même pour tous les cylindres creux élémentaires au même instant. Le couple total a pour expression

$$C = 2\pi \int_0^R r^2 f dr.$$

Nous poserons

$$\Gamma = 2\pi \int_0^R r^3 \Gamma_1 dr, \quad \gamma = \frac{dC}{d\alpha} = 2\pi \int_0^R r^2 \frac{df}{d\alpha} dr, \quad \gamma \frac{d\alpha}{dt} = 2\pi \int_0^R r^2 \frac{df}{dt} dr.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (1) par  $2\pi r^2 dr$ , intégrons de 0 à R :

$$\left[ 2\pi \int_0^R r^2 \frac{df}{dt} dr \right]_2 - \left[ 2\pi \int_0^R r^2 \frac{df}{dt} dr \right]_1 = \Gamma \left[ \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)_2 - \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)_1 \right],$$

$$(\Gamma - \gamma_1) \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)_1 = (\Gamma - \gamma_2) \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)_2,$$

règle applicable aux couples mesurables.

On peut aussi l'écrire

$$\left[ 2\pi \int_0^R r^2 \frac{df}{dt} dr \right]_2 = \Gamma \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)_2 - (\Gamma - \gamma) \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)_1.$$

Rien dans le raisonnement ne suppose que  $\Gamma_1$  est constant; c'est une fonction de  $r$  que l'on peut appeler la *constante caractéristique du cylindre élémentaire*.

La constante de torsion du fil est  $\Gamma$ ; si nous supposons la courbe de torsion tracée dans le plan des  $C$  et des  $\alpha$ , nous pouvons dire que  $\Gamma$  est la tangente ou direction caractéristique;  $\gamma$  est la tangente actuelle. Il importe de remarquer que  $\gamma$  peut être plus grand ou plus petit que  $\Gamma$ .

L'équation précédente ne nous apprend quelque chose que pour les variations brusques; pour les variations continues, elle est identiquement satisfaite.

*Cas particuliers.* — A. On passe d'une vitesse finie  $v_1$  à une vitesse nulle. Il vient

$$\frac{d}{dt} 2\pi \int_0^R r^2 f dr = -(\Gamma - \gamma_1) v_1.$$

Nous avons énoncé cette règle dans notre Mémoire de 1897 (*Ann. de Phys. et de Chim.*, § XXVI et suivants).

Si  $\gamma_1 < \Gamma$ ,  $\left[ v_1 > 0, \left( \frac{dC}{d\alpha} \right)_1 > 0 \right]$ ,  $\left( \frac{dC}{dt} \right)_2 < 0$ , il y a rétrogradation.

Si  $\gamma_1 > \Gamma$ ,  $\left( \frac{dC}{dt} \right)_2 > 0$ , la variation de couple consécutive à l'arrêt est directe.

B. On passe d'une vitesse finie  $v_1$  à une vitesse inconnue  $v_2$  telle que le couple total reste constant. On a  $v_2\Gamma = v_1(\Gamma - \gamma_1)$ ; il y a généralement un point anguleux.

Si  $\gamma_1 = 0$ ,  $v_1 = v_2$ . Si  $\Gamma = \gamma_1$ , la courbe précédente est rectiligne, le fil est parfaitement élastique,  $v_2 = 0$ . Nous avons énoncé cette loi en discutant (*Ann. de Toulouse*, t. XII) les expériences de Kohlrausch sur l'élasticité résiduelle (*Exposé et discussion, etc.*, A. 26).

Si  $\gamma_1 < \Gamma$ ,  $v_1$  et  $v_2$  sont de même signe; pour maintenir le couple constant, il faut continuer la torsion dans le sens primitif. Si  $\gamma_1 > \Gamma$ ,  $v_1$  et  $v_2$  sont de signes contraires; pour maintenir le couple constant, il faut intervertir, *au début*, le sens de la torsion.

C. Reprenons la formule générale

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_2 - \left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_1 = \Gamma(v_2 - v_1).$$

Supposons qu'actuellement on ait  $v_1 = 0$  et que brusquement nous donnions une vitesse finie, soit pour tordre, soit pour détordre;

$$\gamma_2 = \Gamma + \frac{1}{v_2} \left(\frac{\partial C}{\partial t}\right).$$

D. La vitesse est brusquement intervertie :  $v_2 = -v_1$ ,

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 2\Gamma.$$

Cette équation nous permettra d'élucider la délicate question des cycles bouclés et non bouclés.

*Application de l'équation de continuité aux phénomènes de traction.* — On se reportera au Chapitre III du présent Mémoire, pages 360 et suivantes.

L'équation de continuité est plus simple parce que les phénomènes sont homogènes. Nous nous sommes occupé du cas B. On supprime l'écoulement de l'eau et l'on étudie la vitesse d'allongement sous charge constante. Soient  $\lambda$  l'allongement, P la charge; soit  $\gamma = \frac{dP}{dt}$ ;  $\Gamma$  est la valeur de  $\gamma$  quand le fil est parfaitement élastique. Soient  $v_1$  et  $v_2$  les vitesses d'allongement avant et après la suppression de l'écoulement; on a  $v_2\Gamma = v_1(\Gamma - \gamma_1)$  au moment de la discontinuité.

Il semblerait d'abord que le résultat de l'expérience contredise cette conclusion. Je dis en effet : « Il est impossible de reconnaître sur la courbe ainsi obtenue ( $\lambda$  en fonction de P) le point où l'écoulement de l'eau dans le seau de charge a été arrêté; les courbes à charge variable et à charge constante se raccordent rigoureusement : donc la vitesse d'allongement  $\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_{t=0}$ , au début de la courbe à charge constante, est égale à la vitesse d'allongement à la fin de la courbe à charge

variable, au moment où s'arrête l'écoulement »; ce qui équivaut à dire que  $v_1 = v_2$ . Mais l'expérience est faite dans des conditions telles que  $\gamma_1$  est très petit devant  $\Gamma$ . De plus, le seau de charge a une certaine vitesse acquise qui rend impossible sur la courbe la production d'un point anguleux.

*Phénomènes qui se produisent quand on maintient brusquement l'azimut (ou le couple) constant.* — Nous croyons devoir conclure, des expériences qui seront décrites dans les deux Chapitres suivants, que l'on doit distinguer, après les tout premiers instants pendant lesquels la loi de continuité précédemment étudiée s'applique, deux phénomènes distincts. Si, brusquement, l'azimut est maintenu constant, ils se rapportent à une variation consécutive du couple; si, brusquement, le couple est maintenu constant, ils se rapportent à une variation consécutive d'azimut. Notre terminologie est empruntée à la première de ces hypothèses et au cas général d'une déperdition de couple.

A. *Déperdition rapide.* — Il y a d'abord un phénomène de déperdition rapide qui devient insensible après les premiers instants (quelques minutes). On peut admettre qu'il est représenté par une formule exponentielle

$$p_1 = A_1(1 - e^{-kt}).$$

La vitesse initiale de déperdition est, pour  $t = 0$ ,  $A_1 k$ . Si cette déperdition rapide était le seul phénomène, on pourrait poser, d'après la loi de continuité,

$$A_1 k = v_1(\Gamma - \gamma_1), \quad p_1 = A_1[1 - e^{-v_1(\Gamma - \gamma_1)t}].$$

M. Brillouin donne une expression de cette forme au n° 14 de son premier Mémoire : à la vérité, le second phénomène entre pour une part dans la déperdition initiale. M. Brillouin dit (*loc. cit.*) : « Si cette expression restait indéfiniment valable, il y aurait toujours retour à la force nulle pour un certain degré fini d'écroutissage. » C'est qu'il est conduit par sa théorie à considérer  $A_1$  comme représentant le couple actuel : la déperdition limite serait donc égale à  $A_1$ . Mais l'expérience montre, comme le prévoyait M. Brillouin, que cette limite est très inférieure, soit que la formule cesse bientôt d'être applicable, soit que la constante  $A_1$  n'ait pas pour valeur le couple actuel. L'expérience aura donc à déterminer les constantes de la formule.

B. *Déperdition lente.* — Simultanément se produit un phénomène de déperdition lente qui bientôt est prépondérant et dure pendant des heures et des jours. On peut le représenter très exactement par la formule

$$(2) \quad p_2 = A \log(t + \tau) - A \log \tau.$$

La vitesse à chaque instant est  $\frac{dp}{dt} = \frac{A}{t + \tau}$ ; la vitesse initiale est  $\frac{A}{\tau}$ . Si  $t$  est

assez grand vis-à-vis de  $\tau$ , la vitesse à chaque instant est approximativement  $dp = A \frac{dt}{t}$ . Le premier de ces phénomènes est très difficile à étudier; on ne peut guère en déterminer que l'amplitude totale  $A_1$ : l'autre est, au contraire, d'une étude relativement aisée.

*Étude de la déperdition lente : choix des temps pour lesquels se font les lectures.* — Admettons que les temps pour lesquels se font les lectures sont donnés par la formule  $t = N^n$ ,  $n$  étant la série des nombres entiers et  $N$  une constante. On a

$$p'_2 = A \log(t' + \tau) - A \log \tau = A \log t' + A \log \left(1 + \frac{\tau}{t'}\right) - A \log \tau;$$

de même pour  $p''_2$ , d'où

$$\begin{aligned} p''_2 - p'_2 &= A \log \frac{t''}{t'} + A \log \left(1 + \frac{\tau}{t''}\right) - A \log \left(1 + \frac{\tau}{t'}\right) \\ &= A \left[ \log N + \log \left(1 + \frac{\tau}{t''}\right) - \log \left(1 + \frac{\tau}{t'}\right) \right]. \end{aligned}$$

Si  $\tau$  est petit devant  $t'$  et  $t''$ , il vient, en se bornant aux premiers termes du développement,

$$p''_2 - p'_2 = A \left( \log N - \tau \frac{N-1}{N^{n+1}} \right).$$

Dans la pratique nous prenons  $N = 2$ ,

$$\Delta p = A \left( 0,693 - \frac{\tau}{t''} \right).$$

La formule approchée  $\Delta p = A \frac{\Delta t}{t}$  aurait donné  $\Delta p = A \cdot 0,66$ ; mais elle est inapplicable, parce que  $\Delta t$  n'est pas une quantité petite. Ainsi  $\Delta p$  doit être légèrement croissant et presque constant.

*Ensemble des cylindres creux infiniment minces : résultante de leurs actions.* — Le phénomène total observé résulte de l'ensemble des phénomènes dus aux divers cylindres creux infiniment minces qui composent le fil. Ces cylindres sont dans des états différents et, par conséquent, les constantes des formules ne sont pas nécessairement les mêmes. En admettant que la déperdition lente pour chaque cylindre élémentaire soit représentée par une expression de la forme  $p_2 = A \log(t + \tau) - A \log \tau$ , la somme des déperditions n'est pas nécessairement représentée par une formule aussi simple. Elle ne peut l'être que si les constantes diffèrent peu d'un cylindre à l'autre, ou si  $t$  est grand vis-à-vis de  $\tau$ ; car alors la formule se réduit à  $p_2 = A \log t - A \log \tau$  et la somme de termes de

cette forme conserve encore la même forme. D'une manière générale, les phénomènes pourront être fort complexes.

*Formules de Kohlrausch.* — On sait que Kohlrausch a fait sur les phénomènes de torsion des fils sous couple nul des expériences considérées comme classiques : quelle que puisse être la valeur de ces expériences, que nous discuterons soigneusement dans le Chapitre VIII de ce Mémoire, voici par quelles formules leur auteur a cru pouvoir représenter le phénomène total. L'hypothèse fondamentale qui est à leur base est qu'à couple constant (nul) la torsion croît asymptotiquement vers une certaine limite. Au moment où le couple commence à être maintenu constant, il y a donc un certain excès d'azimut que nous désignerons par  $x$ .

Ceci posé, la première de ses formules est  $x = Ce^{-\gamma t^m}$ , où  $m$  a des valeurs  $> 0$  et de l'ordre de 0,1. Pour  $t = \infty$ ,  $x = 0$ ; pour  $t = 0$ ,  $x = C$ ;  $C$  est donc l'excès au début.

Supposons les observations faites à des temps espacés en progression géométrique,  $t = N^n$ ,

$$x_n = Ce^{-\gamma N^{mn}}, \quad x_{n-1} = Ce^{-\gamma N^{m(n+1)}}, \quad x_n - x_{n+1} = Ce^{-\gamma N^{mn}}(1 - e^{-\gamma N^m}).$$

Le second facteur est constant :  $\Delta x$  varie donc à un facteur constant près comme  $e^{-\gamma N^{mn}}$ ; cette différence est rapidement décroissante.

La seconde formule qu'il donne comme simplification est

$$x = \frac{C}{t^m} \quad 0 < m < 1.$$

Ici pour  $t = \infty$ ,  $x = 0$ ; pour  $t = 0$ ,  $x = \infty$ ; mais il n'appliquera pas sa formule à des temps très petits. On tire

$$\Delta x = C \frac{N^m - 1}{N^{m(n+m)}} = C \frac{N^m - 1}{N^m} \left( \frac{1}{N^m} \right)^n.$$

Les différences  $\Delta x$  diminuent rapidement, puisqu'elles varient comme les puissances successives d'un nombre plus petit que l'unité. Ainsi ces deux types de formules donnent une déperdition rapide au début; on atteint la limite qu'elles indiquent en un temps très court comparativement à la durée totale du phénomène accessible.

*Rôle différent des deux phénomènes que nous avons cru devoir distinguer.*

— Il peut sembler arbitraire de décomposer un phénomène expérimentalement unique en deux autres que l'on attribue à des causes distinctes. Voici les raisons générales qui nous induisent à cette complication.

A. *Représentation analytique du résultat des expériences.* — La formule (2) représente généralement bien les phénomènes, si l'on néglige dans le

*calcul des constantes les premiers instants.* Une extrapolation pour ces premiers instants est alors tout à fait impossible. Quand, au contraire, on fait le calcul des constantes en tenant compte des premiers instants, on ne peut représenter l'ensemble des résultats expérimentaux par une expression de la forme (2). C'est ce que nous avons fait dans notre premier Mémoire (*Ann. de Ch. et de Phys.*; 1897); les nombres cités au § XXIX montrent que la déperdition est toujours plus rapide au début que ne l'indique la formule.

Cet argument prouve seulement que la formule (2) est insuffisante pour représenter l'ensemble du phénomène, et non pas qu'il y a deux phénomènes distincts. Cependant il est bien extraordinaire *a priori* qu'une formule représente parfaitement un phénomène pour des variations énormes d'une variable et ne le représente plus du tout pour une toute petite variation. On doit chercher une interprétation plus rationnelle, et ne pas se borner à ajouter une ou plusieurs constantes.

B. *Influence de la vitesse de torsion.* — Le phénomène de déperdition rapide dépend principalement de la vitesse de torsion au moment de l'arrêt; le phénomène lent est à peu près indépendant de la vitesse au moment de l'arrêt; il dépend des vitesses antérieures.

Si donc on détermine la déperdition pour des vitesses, immédiatement antérieures à l'arrêt, croissantes, on peut s'arranger pour que ce soit principalement le phénomène de déperdition rapide qui croisse. Donc l'ensemble du phénomène n'est pas représenté par des courbes dilatées proportionnellement à la vitesse : la vitesse de déperdition rapportée à la vitesse initiale décroît d'autant plus vite en fonction du temps qui s'écoule après l'arrêt que la vitesse de torsion au moment de l'arrêt est plus grande. C'est ce que nous avons énoncé au § XXX de notre thèse, mais avec une interprétation différente. Tout s'explique aisément en admettant qu'un seul des phénomènes (déperdition rapide) est soumis directement à l'influence de la vitesse de torsion au moment de l'arrêt, tandis que l'autre n'en dépend à peu près pas ou n'en dépend que très indirectement.

C. *Arrêt pour le même couple sur les courbes de torsion et de détorsion au voisinage de la torsion maxima.* — Supposons que l'on torde jusqu'à un couple C et que l'on détorde avec une vitesse constante. On peut arrêter brusquement pour un couple C' voisin de C, soit sur la courbe de torsion, par conséquent sans atteindre C, soit sur la courbe de détorsion; les différentes expériences étant faites, bien entendu, sur des fils différents, mais aussi identiques que possible et ayant subi les mêmes déformations antérieures. Les  $\gamma$ , au moment de l'arrêt, peuvent être très différents, par exemple le  $\gamma$  sur la courbe de torsion voisin de zéro, le  $\gamma$  sur la courbe de détorsion plus grand que  $\Gamma$ . Corrélativement, les déperditions initiales seront tout à fait différentes : l'expérience montre que, si C' est voisin de C, les déperditions lentes sont identiques.

D. *Arrêts sur les courbes de détorsion.* — Voici un phénomène plus singulier

encore où il semble bien que l'on sépare nettement les deux causes. On produit une torsion, puis une détorsion; on arrête sur la courbe de détorsion et l'on suit la variation de couple à azimut constant. Si le point de la courbe de détorsion est convenablement choisi, il y a d'abord, au moment de l'arrêt, une rétrogradation; le couple croît: c'est le phénomène de déperdition rapide qui est lié principalement à la valeur de la tangente de la courbe de détorsion au point d'arrêt. L'expérience montre d'ailleurs qu'au point d'arrêt  $\gamma < \Gamma$ , comme on pouvait le prévoir.

Mais le couple passe bientôt par un maximum et décroît: or, on peut montrer qu'au point d'arrêt, dans toute la section droite du fil, les tensions sont de même sens: donc sur un cylindre creux infiniment mince on obtiendrait le même phénomène. Cette décroissance du couple est due, selon nous, au phénomène lent, qui n'est plus lié principalement à la valeur de la tangente sur la courbe de torsion au point d'arrêt, mais à la valeur du couple actuel, des couples antérieurs et à la manière dont ils ont été traversés.

*E. Influence de la durée de l'arrêt à l'extrémité de la courbe de torsion sur la déperdition de couple en un point de la courbe de détorsion.* — L'influence de la durée de l'arrêt au bout d'une courbe de torsion, sur les  $\gamma$  en fonctions des couples le long de la courbe de détorsion, est à peu près nulle. Elle est considérable sur la déperdition lente. De sorte que l'on peut aisément modifier un des phénomènes sans toucher à l'autre.

Nous ne faisons ici qu'énumérer des phénomènes: ils seront étudiés avec le plus grand détail dans les deux Chapitres suivants. Mais on aurait difficilement compris le pourquoi de nos expériences, si nous n'avions pas d'abord montré quelles en sont les conclusions.

*Écrouissage, hystérésis, réactivité.* — Le mot *écrouissage*, pris en général, n'a qu'un sens très vague: dire qu'un métal a un certain écrouissage signifie qu'il est dans un certain état, ce qui n'apprend rien. On ajoute pour quel phénomène on considère l'écrouissage. Ainsi, un fil est dit plus ou moins écroui pour la traction (ou la torsion), quand sa courbe d'essai de traction (ou de torsion) est plus ou moins rectiligne: ce qui ne signifie pas encore grand'chose. L'écrouissage ne peut, en aucun cas, être exprimé par un seul nombre: sa définition est certainement plus complexe. Enfin, dans la plupart des déformations, il se crée des hétérogénéités entre les divers points de la pièce déformée.

Un métal étant pris dans un certain état, avec un certain écrouissage, on peut lui imposer des déformations d'amplitude assez faibles pour ne pas changer cet écrouissage. Est-il possible alors de distinguer les phénomènes en plusieurs groupes, de montrer par l'étude des phénomènes qu'il existe des propriétés distinctes de la matière?

Considérons les pertes d'énergie  $S$  dans les oscillations de torsion effectuées suivant une loi connue par rapport au temps (par exemple, sinusoïdale et de



période  $T$ ) et répétées un grand nombre de fois identiques à elles mêmes jusqu'à ce que le phénomène ait atteint sa limite. La courbe construite avec les couples et les torsions comme coordonnées est alors fermée et entoure une aire égale à  $S$ , à un facteur constant près. D'une expérience à l'autre on fait varier l'amplitude  $A$  et l'on étudie des fils, de longueur invariable, préalablement fortement étirés à la filière, puis recuits à une même température pendant des temps  $t$  variables. L'érouissage de traction et de torsion décroît quand le temps  $t$  croît. On trace, pour chaque valeur de  $t$ , une courbe donnant  $S$  en fonction des amplitudes  $A$ , prises toujours assez petites pour que l'érouissage n'en soit pas sensiblement modifié.

Nous connaissons déjà le résultat de l'expérience : les lois qui relient  $S$  à  $A$  pour de grandes amplitudes extrapolées pour de petites ne représentent plus les phénomènes. Cela résulte de la comparaison de nos expériences [*Sur les pertes d'énergie dans les phénomènes de torsion* (*Ann. de Chim. et de Phys.*; 1898)] pour les grandes amplitudes et des expériences de Tomlinson (*Phil. Trans.*; 1886) pour les petites. La perte d'énergie dépend aussi de la période  $T$  d'une manière tout à fait différente, suivant que  $A$  est petit ou grand.

Il y a plus : la courbe qui donne  $S$  en fonction de  $A$  pour une période  $T$  donnée peut se développer suivant les puissances de  $A$ , égales ou supérieures à la seconde ; elle aboutit donc tangentiellement à l'axe des amplitudes. L'expérience montre que deux telles courbes tracées pour des érouissages différents se coupent. Pour de petites amplitudes  $S$  diminue quand l'érouissage diminue ; pour de grandes amplitudes  $S$  croît quand l'érouissage diminue.

Nous voici ramenés aux conclusions des pages précédentes : il y a au moins deux groupes de phénomènes. La réactivité intervient principalement pour les petites oscillations : ses effets croissent à mesure que le fil est *plus* éroui ; pour les grandes oscillations elle continue à jouer son rôle, mais ses effets ne sont plus prédominants : l'hystérésis l'emporte, et cela d'autant plus que le fil est *moins* éroui. Les élévations de température agissent davantage sur le premier phénomène que sur le second. C'est à la réactivité que nous attribuons les phénomènes de déperdition lente, à l'hystérésis les phénomènes rapides.

En résumé, si l'ensemble des phénomènes d'élasticité est encore un chaos, c'est qu'on n'a pas distingué au moins trois ordres de phénomènes :

1° Les effets des déformations permanentes proprement dites, produisant les variations d'érouissage.

2° Les effets d'hystérésis, qui se montrent surtout dans l'étude des parcours grands, mais cependant assez petits pour ne pas modifier l'érouissage. C'est pour ces effets que la théorie de M. Brillouin s'applique probablement avec une rigueur d'autant plus grande qu'on parviendra davantage à distinguer ce qui appartient proprement à l'hystérésis.

3° Les effets de la réactivité, qui apparaissent principalement dans l'étude des oscillations petites et dans les phénomènes lents dépendant du temps, les phénomènes rapides devant être attribués à l'hystérésis.

L'hystérésis et la réactivité sont des fonctions de l'écroutissage.

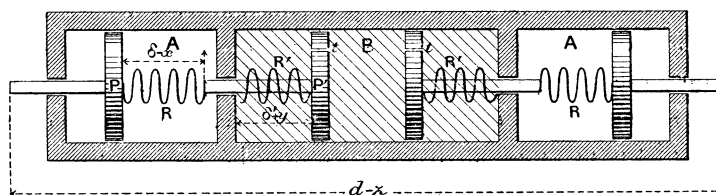
Ceux qui ont le mieux étudié la question des oscillations n'ont pas fait ces distinctions nécessaires. Ainsi Tomlinson (*Phil. Trans.*, P. II, p. 802; 1886) rapproche ses expériences sur les petites oscillations de celles où Wiedemann étudie des parcours relativement énormes et où intervient principalement l'hystérésis. Ce que Tomlinson ajoute de l'influence du phénomène appelé par les Allemands *Elastische Nachwirkung* n'est pas pour éclaircir la question, car ce dernier phénomène est lui-même complexe, et ce n'est qu'une de ses parties, celle que nous appelons *réactivité*, qui intervient dans les petites oscillations. D'ailleurs, alors que Tomlinson insiste sur le premier rapprochement, qui est mauvais, il glisse sur le second, qui est pourtant plus juste.

Dans notre thèse, nous avons nous-même confondu bien des choses que nous nous sommes efforcé de distinguer peu à peu dans la suite déjà longue de nos Mémoires. Ce n'est que par nos dernières expériences, dont la description fait l'objet du Chapitre suivant, que nous avons montré la nécessité des distinctions dont il vient d'être parlé.

*Essai de représentation des phénomènes de réactivité.* — Ces phénomènes évoquent l'idée d'un ressort qu'on bande et qui se débände ensuite plus ou moins vite. On peut imaginer un mécanisme qui reproduit les circonstances principales du phénomène, mais n'en redonne malheureusement pas numériquement les particularités. Son étude est cependant utile pour montrer quel minimum de complication il faut donner aux hypothèses.

La *fig. 17* représente ce qu'on peut appeler une molécule à élasticité *parfaite*

Fig. 17.



mais *retardée* : son élasticité est parfaite en ce sens qu'elle revient en définitive à sa forme initiale, mais elle est imparfaite en ce sens que de l'énergie a été absorbée. La molécule est un cylindre divisé en trois chambres A, B, A. Les chambres A sont vides, la chambre B est remplie d'un liquide de grande viscosité. Quatre pistons s'y meuvent, sans frottement contre les parois, réunis deux par

deux par des ressorts R. La force exercée par ces ressorts pour une déformation  $x$  est  $Rx$ . Les pistons intérieurs sont reliés au bâti par deux autres ressorts  $R'$ ; la force due à une déformation  $y$  de ces ressorts est  $R'y$ . Ces pistons sont percés de trous  $t$  par lesquels le liquide visqueux peut circuler dans la chambre B.

Soient  $d$  la longueur de la molécule quand tout est en équilibre,  $d - z$  sa longueur quand on la raccourcit de  $z$ . Si cette variation  $z$  se fait brusquement, elle porte instantanément sur les ressorts R, d'où une force  $Rz$ . L'équilibre n'est pas atteint. Le liquide visqueux tend à s'écouler par les trous  $t$  et les ressorts à se déformer.

Admettons que nous puissions négliger les masses; écrivons qu'il y a équilibre à chaque instant entre les forces résultant des ressorts et le frottement du liquide contre les parois des trous  $t$ .

La force résultante sur le piston  $P'$  est  $Rx - R'y$ . La déformation totale  $z = x + y$ . Enfin, l'écoulement est à chaque instant proportionnel à  $\frac{dy}{dt}$ . En définitive, nous avons une certaine équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = f(Rx - R'y), \quad \text{avec la condition} \quad f(0) = 0.$$

Dans le cas où l'on produit au début une brusque diminution de longueur  $z$ , l'équilibre est atteint définitivement quand  $Rx_1 = R'y_1$ , équation qui, jointe à la condition de construction  $z = x_1 + y_1$ , permet de calculer  $x_1$  et  $y_1$ . La variation de longueur des ressorts R, qui avait été au début égale à  $z$ , n'est plus égale à la fin qu'à  $x_1$ : la réaction extérieure de la molécule, qui est au début  $Rz$ , diminue jusqu'à  $Rx_1$ , à longueur constante, suivant une loi qui dépend des valeurs des constantes R et  $R'$  et de la forme de la fonction  $f$ .

Si brusquement nous supprimons la compression, la molécule s'allonge de  $x_1$ , car les ressorts R se débloquent instantanément. Comme les ressorts  $R'$  ne sont plus équilibrés, ils tendent à reprendre leur longueur initiale, et peu à peu la molécule s'allonge jusqu'à la longueur qu'elle avait avant toute compression.

Mais, si aussitôt l'allongement  $x_1$  obtenu, c'est-à-dire la molécule ramenée brusquement à la longueur  $d - y_1$ , on maintient constante cette longueur, les ressorts  $R'$ , en s'équilibrant sur les ressorts R, vont faire renaître peu à peu une réaction extérieure de la molécule dont la valeur limite serait facile à calculer.

La déformation  $y$  des ressorts  $R'$  est la mesure de la réactivité de la molécule. Or,  $y$  est fonction des forces extérieures qui ont été antérieurement appliquées et de la manière suivant laquelle elles l'ont été. Bien que cette hypothèse soit très générale, puisqu'elle renferme des constantes et une fonction à déterminer et qu'on puisse même la généraliser encore, il est possible de montrer qu'elle est tout à fait

insuffisante. La réactivité, c'est-à-dire la faculté de donner des phénomènes lents, fonction du temps, ne dépend pas seulement des forces et de la manière suivant laquelle elles ont été appliquées; elle dépend encore des déformations permanentes qui accompagnent l'application de ces forces.

Voici la nature des expériences qui prouvent cette dépendance.

On tord un fil de  $p$  tours, on arrête un temps  $T$ , on détord jusqu'au couple nul, et l'on suit à azimut constant les variations du couple.

Sur un fil aussi identique que possible, on tord de  $p$  tours, on arrête au temps  $T$ , on tord alors de  $n$  tours. Sans arrêt au bout, on détord jusqu'au couple nul et l'on suit à azimut constant la variation du couple. Cette variation est plus petite que dans la première expérience pour un choix convenable de  $p$  et de  $n$ .

Dans les deux expériences, tout est semblable, à la différence près d'un parcours où la force extérieure a toujours une valeur supérieure aux valeurs qu'elle prend dans la première expérience : la déformation  $\gamma$  devrait être toujours plus grande dans la seconde expérience, quelle que soit d'ailleurs la loi suivant laquelle la force extérieure agit sur cette déformation.

Il faut conclure nécessairement de cette expérience qu'une force appliquée avec un minimum de déformation, comme c'est le cas pendant l'arrêt, produit une déformation  $\gamma$  beaucoup plus grande qu'une force appliquée avec déformation simultanée. C'est là un phénomène dont notre hypothèse ne peut pas rendre compte sans quelque modification profonde <sup>(1)</sup>.

Je n'ai fait, dans le § IV de ce Chapitre, qu'énoncer des résultats d'expériences. J'étudierai, dans le Chapitre VII, les courbes de première torsion et de première détorsion sur des fils n'ayant au début aucune dissymétrie hélicoïdale, si l'on veut n'ayant jamais été tordus; dans le Chapitre VIII, j'étudierai les phénomènes généraux au couple nul; je discuterai les expériences de Kohlrausch sur ce que les Allemands appellent l'*Elastische Nachwirkung*.

---

(1) M. Guillaume (Rapport au Congrès de 1900) dit que les théories « admettant un glissement graduel des molécules n'expliquent ni l'établissement d'une limite ni le retour parfait à la forme primitive ». Ces conditions sont rigoureusement satisfaites par mon hypothèse. Mais tandis que les physiciens qui ont admis une dualité de la matière (molécules et matière visqueuse) ont mis les molécules dans la matière visqueuse, je mets la matière visqueuse dans les molécules. Une théorie est-elle chimique, physique ou mécanique? Pure question de mots. Toujours est-il que l'hypothèse de M. Guillaume (constitution chimique fonction de la pression avec retards convenables) ne représente pas mieux les phénomènes dans les métaux que mon hypothèse, et cela pour les mêmes raisons.

