LES MÉTHODES GÉNÉRALES

POUR RÉSOUDRE

LES PROBLÈMES FONDAMENTAUX

DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE,

PAR M. W. STEKLOFF.

INTRODUCTION.

1. Les problèmes les plus importants de la Physique mathématique sont ceux de Dirichlet, de Neumann (problème hydrodynamique) et le problème de la distribution de l'électricité.

Ces problèmes ont une connexion intime entre eux.

On prend ordinairement le problème de Dirichlet pour point de départ et l'on regarde le problème de l'électrostatique comme résolu, si l'on parvient à résoudre le premier. Mais, pour qu'il en soit ainsi, il faut non seulement : 1° démontrer l'existence de la fonction harmonique à l'intérieur d'un domaine donné (D), se réduisant à une fonction donnée f à la frontière (S), mais encore : 2° établir que la fonction cherchée a des dérivées normales sur (S).

Il y a beaucoup de méthodes pour résoudre la première partie de ce problème général; les unes sont destinées à établir la possibilité du problème (principe de Dirichlet), les autres à le résoudre effectivement.

Parmi les dernières, la plus connue et la plus simple est la méthode de Neumann, qui ne s'applique immédiatement qu'aux surfaces convexes.

La seconde partie du problème dont il s'agit n'a été résolue que dans ces derniers temps par M. Liapounoff, qui a démontré, dans des suppositions assez générales, l'existence des dérivées normales de la fonction V, satisfaisant aux conditions du problème de Dirichlet, *si la méthode de Neumann est applicable à la surface* (S).

Tout se ramène, par conséquent, à l'extension de cette méthode aux cas dans lesquels la surface donnée n'est pas convexe, sans s'appuyer sur la proposition de l'existence des dérivées normales de la fonction V.

Ce problème étant résolu, nous aurons la solution du problème d'électrostatique, en partant des dernières recherches de M. Liapounoff, publiées dans son Mémoire récent, *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet* (¹).

D'après cela nous résoudrons par la méthode de Neumann le problème hydrodynamique.

2. En étudiant depuis longtemps, avant que M. Liapounoff ait publié ses dernières recherches, les questions dont il s'agit, je me suis proposé de résoudre les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique, en suivant une voie différente de celle que je viens d'indiquer.

Je me suis proposé de résoudre en premier lieu le problème de la distribution de l'électricité *sans s'appuyer sur les propriétés des dérivées normales du potentiel de la double couche et indépendamment du principe de Dirichlet,* en modifiant convenablement la méthode connue de M. Robin.

J'y ai réussi d'abord dans le cas le plus simple des surfaces convexes (²) et à présent dans les suppositions plus générales, en m'appuyant principalement sur les dernières recherches de M. Poincaré (³) et de M. Liapounoff.

Je démontre dans le Chapitre II de ce Mémoire que *la méthode de Robin nous donne la solution du problème électrostatique pour toute surface fermée* (S), *ayant les propriétés suivantes :*

1° *En tout point de* (S) *il existe un plan tangent déterminé;*

2° *Autour de chaque point p_0 de* (S) *on peut décrire une sphère de rayon* D, *assez petit mais déterminé, de telle façon qu'une parallèle à la normale à* (S) *en p_0 ne puisse rencontrer* (S), *à l'intérieur de la sphère, qu'en un seul point;*

3° *L'angle aigu ϑ, que font les normales à* (S) *en deux points p_0 et p de* (S), *satisfait à la condition*

$$\vartheta < ar_0,$$

a étant un nombre indépendant du choix des points p_0 et p, r_0 étant la distance p_0p.

4° *A la surface* (S) *est applicable un théorème de M. Poincaré, que j'ap-*

(¹) A. Liapounoff, *Sur certaines questions, etc.* (*Journal de Mathématiques,* n° 3; 1898).

(²) W. Stekloff, *Le problème de la distribution de l'électricité et le problème de Neumann* (*Comptes rendus,* 13 décembre 1897).

(³) H. Poincaré, *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (*Acta Mathematica,* t. XX; 1896).

pelle THÉORÈME FONDAMENTAL *et que j'énoncerai dans le Chapitre I de mon Mémoire.*

On peut démontrer rigoureusement que ce théorème a lieu, si la surface (S) admet la transformation indiquée par M. Poincaré dans son Mémoire déjà cité, mais il est plus que probable qu'il est encore vrai dans les cas plus généraux.

3. Dans le Chapitre III, je considère ensuite le problème hydrodynamique, quand il s'agit de trouver à l'intérieur d'un domaine (D) une fonction harmonique dont la dérivée normale se réduise à une fonction donnée f sur la surface (S).

Nous avons deux méthodes différentes pour résoudre ce problème important : celle de Neumann et celle de M. Robin.

Ces méthodes ne s'appliquent, au moins immédiatement, qu'aux surfaces convexes, et dans ce cas le plus simple la première d'entre elles était jusqu'à ces derniers temps encore imparfaite sous bien des rapports.

Seulement d'après les recherches de M. Tauber (¹) et de M. Liapounoff (²) sur les dérivées normales du potentiel de la double couche nous avons reçu les moyens de la perfectionner dans le cas d'une surface convexe.

En m'appuyant sur mes recherches précédentes, je démontre ici ce théorème plus général :

La méthode de Neumann est applicable à toute surface (S), *ayant les propriétés du numéro précédent, si f est continue sur* (S).

Il en est de même de la méthode de M. Robin.

4. Dans le Chapitre IV je considère enfin le problème de Dirichlet, quand il s'agit de trouver une fonction V, harmonique à l'intérieur d'un domaine (D) et se réduisant à une fonction donnée f sur (S).

Je démontre, *tout à fait indépendamment du principe de Dirichlet, que la méthode de la moyenne arithmétique de Neumann est applicable à toute surface, satisfaisant aux conditions du n° 2, quand la fonction donnée f est seulement continue sur* (S).

Il faut remarquer que *les recherches que nous venons d'indiquer ne dépendent pas du théorème général, récemment établi par M. Liapounoff, sur l'existence des dérivées normales de potentiel de la double couche.*

En terminant mon Mémoire, je traite dans le Chapitre V et dernier deux cas particuliers du problème de Dirichlet, à savoir :

(¹) A. TAUBER, *Ueber das Potential einer Doppelbelegung* (*Monatshefte für Mathematik und Physik,* VIII, Jahrgang 1897, 1 Vierteljahr).

(²) A. LIAPOUNOFF, *Sur le potentiel de la double couche* (*Comptes rendus,* 8 novembre 1897).

1. *Trouver le potentiel de la double couche, prenant la succession donnée de valeurs sur la surface donnée* (S).

2. *Trouver le potentiel de la simple couche, se réduisant à la fonction donnée sur* (S) (*problème de Gauss*).

En m'appuyant ici sur le théorème de M. Liapounoff, tout à l'heure mentionné, *j'arrive à la solution rigoureuse des problèmes en question pour toutes les surfaces, satisfaisant aux conditions du n° 1, sous les suppositions assez générales par rapport à la fonction donnée f.*

En été 1899 a paru l'Ouvrage de M. A. Korn : *Lehrbuch der Potentialtheorie,* dont les résultats principaux sont analogues à ceux que j'ai exposés dans ma Note : *Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique,* insérée aux *Comptes rendus* du 6 mars 1899, ainsi que dans les Notes des 12 et 19 février 1900.

Je me permets cependant de publier mes recherches, obtenues indépendamment de M. A. Korn, qui me semblent plus simples et plus générales que celles de M. A. Korn.

CHAPITRE I.

POTENTIEL DE LA SIMPLE ET DE LA DOUBLE COUCHE. THÉORÈME FONDAMENTAL.

1. Soit (S) une surface fermée, satisfaisant aux conditions 1°, 2° et 3° de l'Introduction. Construisons un cylindre de révolution C, ayant pour axe la normale à (S) au point quelconque p_0.

Désignons par R la plus courte distance de ses génératrices à l'axe, en supposant que R est plus petit que D (n° 2 de l'Introduction), et considérons la partie (σ) de (S) à l'intérieur de C.

Prenons p_0 pour origine des coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ, la normale extérieure n à (S) en p_0 pour axe des ζ.

Soient :

p_0 un autre point de (σ);
ξ, ζ, η ses coordonnées;
r_0 la distance $p_0 p$;
ϑ_0 l'angle aigu que fait la normale à (S) en p_0 avec celle en p.

La condition 3° nous donne

$$\vartheta_0 < a r_0,$$

d'où, R étant suffisamment petit,

$$\cos \vartheta_0 > 1 - \frac{1}{2}\vartheta^2 > 1 - \frac{1}{2}a^2 r_0^2 > \frac{1}{2} \quad (1) \tag{1}$$

(1)

Posons maintenant

$$\xi = \rho \cos \omega, \qquad \eta = \rho \sin \omega,$$

et considérons ζ comme fonction de ρ et de ω.

En tenant compte de la condition 2° et en choisissant convenablement la longueur K, on peut démontrer avec M. Liapounoff les inégalités suivantes

$$\left|\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right| < 4a\rho \qquad \text{et} \qquad |\zeta| < 2a\rho^2 \tag{2}$$

pour tout point de (σ).

2. Supposons maintenant le système des coordonnées arbitrairement choisi dans l'espace. Soient P un point quelconque, x, y, z ses coordonnées, p un point de (S). Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées du point variable p de (S), par μ une fonction de $\xi, \eta\ \zeta$ continue sur (S), par r la distance $\overline{Pp}$, par ds l'élément superficiel de (S), et posons

$$V = \int \frac{\mu}{r} ds,$$

l'intégration par rapport à ξ, η, ζ étant étendue à la surface (S) tout entière.

V est le potentiel de la simple couche à densité μ répandue sur (S).

On sait que V est une fonction du point P continue dans l'espace tout entier; ses dérivées, par rapport à x, y, z, sont aussi continues à l'intérieur et à l'extérieur de (S).

Lorsque le point P s'éloigne à l'infini,

$$V \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

tendent vers zéro de telle façon que les produits

$$RV, \quad R^2 \frac{\partial V}{\partial x}, \quad R^2 \frac{\partial V}{\partial y}, \quad R^2 \frac{\partial V}{\partial z},$$

R étant la distance de P à l'origine des coordonnées, restent finis.

V est une fonction harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de (S).

Supposons que P soit situé sur la normale n au point quelconque p_0 de (S) et

---

(1) Il faut seulement supposer que $ar_0 < 1$.

désignons la valeur de l'expression

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(n, z) \tag{3}$$

au point P par

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P. \tag{4}$$

La valeur de (3) au point p_0 de (S), nous la désignerons par

$$\frac{\partial V}{\partial n}.$$

En désignant par ψ l'angle que fait la droite $\overline{pp_0}$ avec la normale n à (S) en p_0, nous pouvons écrire

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -\int \frac{\mu \cos\psi}{r_0^2}\, ds.$$

Dans les suppositions faites par rapport à (S) et à μ, $\frac{\partial V}{\partial n}$ est une fonction continue du point p_0 de la surface (S) et l'expression (4) tend vers des limites déterminées, quand P tend vers le point p_0, en restant constamment sur n.

Nous désignerons ces limites par

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial V_e}{\partial n},$$

selon que P reste à l'intérieur ou à l'extérieur de la surface (S).

3. Soient μ et μ_0 les valeurs de μ en deux points p et p_0 de (S).

Supposons que μ satisfasse à la condition

$$|\mu - \mu_0| < N r_0^\beta, \tag{5}$$

N et $\beta < 1$ étant des nombres indépendants de r_0 et de μ et de la position du point p_0 sur (S).

Désignons par I_0 la valeur de l'intégrale

$$I = -\int \frac{\mu \cos\psi}{r^2}\, ds$$

au point p_0, par M le maximum de $|\mu|$ sur (S), par δ la distance Pp_0, que nous supposerons suffisamment petite.

En employant la méthode de M. Liapounoff on peut démontrer l'inégalité suivante

$$\left|\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P - I_0 - 2\pi\mu_0\right| < (AM + BN)\delta^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

A et B étant des nombres fixes.

Cette inégalité a lieu pour tout point de la surface (S).

On peut démontrer aussi l'inégalité analogue dans le cas où P est à l'extérieur de (S), mais nous n'insisterons pas sur ce point.

L'inégalité (6) n'est démontrée que dans le cas où μ satisfait à la condition (5), mais les égalités connues

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial n} &= I_0 + 2\pi\mu_0, \\ \frac{\partial V_e}{\partial n} &= I_0 - 2\pi\mu_0 \end{aligned}\right. \tag{7}$$

sont vraies toujours, si μ est seulement continu sur (S).

Dans cette seule supposition les dérivées normales $\frac{\partial V_i}{\partial n}$ $\frac{\partial V_e}{\partial n}$ sont des fonctions régulières continues sur (S).

4. Désignons par I_1 et I_0 les valeurs de I en deux points quelconques p_1 et p_0 de (S).

En supposant que la distance

$$r = p_1 p_0$$

soit suffisamment petite, nous obtiendrons, avec M. Liapounoff, l'inégalité suivante

$$|I_1 - I_0| < LMr^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

L étant un nombre positif, indépendant de r et de la position du point p_0 sur (S). Nous emploierons cette inégalité dans le Chapitre suivant.

5. Soient p un point variable de (S), $P(x, y, z)$ un point quelconque, r la distance $\overline{Pp}$.

Désignons par φ l'angle que fait la direction $\overline{Pp}$ avec la normale n à (S) en p, et posons

$$W = \int \frac{\mu \cos\varphi}{r^2} ds.$$

W est le potentiel de la double couche à l'intensité μ.

On sait que W est une fonction harmonique continue à l'intérieur et à l'extérieur de (S) ainsi que ses dérivées par rapport à x, y et z.

Désignons, en général, par F_i la limite vers laquelle tend une fonction quelconque F du point P, lorsque P tend vers un point p_0 de (S) en restant à l'intérieur de (S), par F_e la limite vers laquelle tend F, lorsque P tend vers p_0 en restant à l'extérieur de (S).

On sait que W varie brusquement, lorsque P vient à traverser la surface (S).

On a, en effet, pour chaque point p_0 de (S),

$$(9) \qquad \begin{cases} W_i = W + 2\pi\mu_0, \\ W_e = W - 2\pi\mu_0, \end{cases}$$

W étant la valeur de cette fonction au point p_0.

Supposons que P soit situé sur la normale n en p_0 et désignons par δ la distance Pp_0.

On sait que, δ étant assez petit,

$$(10) \qquad \left|\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P\right| < K\frac{M}{\delta},$$

où K est un nombre positif ne dépendant ni de la position du point p_0 sur (S), ni de la fonction μ.

Cette inégalité est donnée par M. Liapounoff dans son Mémoire déjà cité.

Considérons les valeurs de μ aux points de (S), dont la distance au point p_0 ne surpasse pas D (*voir* l'Introduction, n° 2).

Introduisons les coordonnées polaires en prenant le point p_0 pour le pôle, le rayon vecteur ρ et l'angle polaire ω dans le plan tangent à (S) en p_0, et considérons μ comme fonction de ρ et de ω.

Posons, avec M. Liapounoff,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu\, d\omega = \overline{\mu},$$

et supposons que μ satisfasse à la condition suivante

$$(11) \qquad |\overline{\mu} - \mu_0| < b\rho^{\beta+1},$$

b et $\beta < 1$ étant des nombres fixes, indépendants de ρ et de la position de p_0 sur (S).

Dans ce cas, comme M. Liapounoff l'a montré, W admet les dérivées normales

$$(12) \qquad \frac{\partial W_i}{\partial n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial W_e}{\partial n}$$

qui sont égales l'une à l'autre, et l'expression

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P,$$

soit P à l'intérieur ou à l'extérieur de (S), tend vers ses limites (12) uniformément pour toutes les positions du point p_0 sur (S).

Je renverrai, pour la démonstration des formules (6), (8), (10) et du théorème tout à l'heure mentionné, au Mémoire de M. Liapounoff : *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet*.

Si nous posons

$$\mu = 1,$$

nous obtiendrons les égalités connues de Gauss

$$\int \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds = 4\pi,$$

si le point x, y, z est situé à l'intérieur de (S),

$$\int \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds = 2\pi,$$

si ce point est situé sur (S), et

$$\int \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds = 0,$$

si le point considéré est à l'extérieur de (S).

6. Soient φ et ψ deux fonctions de x, y, z intégrables à l'intérieur d'un domaine (D) ou sur une surface quelconque (S).

On sait que

$$(13) \qquad \left(\int \varphi\psi\, d\tau\right)^2 < \int \varphi^2\, d\tau \int \psi^2\, d\tau,$$

les intégrales étant étendues au domaine (D) tout entier,

$$(14) \qquad \left(\int \varphi\psi\, ds\right)^2 < \int \varphi^2\, ds \int \psi^2\, ds,$$

les intégrales étant étendues à la surface (S) tout entière.

Si φ et ψ sont deux fonctions, ayant les dérivées du premier ordre par rapport à x, y, z à l'intérieur de (D), on a de même

$$(15) \qquad \left(\int \sum \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\, d\tau\right)^2 < \int \sum \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau \int \sum \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 d\tau.$$

Voici la démonstration la plus simple de la première de ces inégalités, dites *inégalités de Schwarz*.

Désignons par φ_1 et ψ_1 ce que deviennent φ et ψ quand on y remplace x, y, z par ξ, η, ζ, par $d\tau_1$ le produit $d\xi\, d\eta\, d\zeta$.

L'inégalité (13) est une conséquence immédiate de cette inégalité évidente

$$\int (\varphi^2\psi_1^2 - 2\varphi\psi\varphi_1\psi_1 + \varphi_1^2\psi^2)\, d\tau\, d\tau_1 = \int (\varphi\psi_1 - \psi\varphi_1)^2\, d\tau\, d\tau_1 > 0.$$

On peut donner la démonstration analogue des inégalités (14) et (15), mais nous n'insisterons pas sur ce point.

7. Soit (S) une surface donnée quelconque satisfaisant aux conditions 1°, 2° et 3°.

Désignons par W une fonction de coordonnées x, y, z continue dans l'espace tout entier, ayant les dérivées du premier ordre à l'intérieur et à l'extérieur de (S), les dérivées normales régulières sur (S), et satisfaisant à la condition

$$\lim_{R=\infty} |RW| < A,$$

où A est un nombre fixe, R est la distance du point x, y, z à l'origine des coordonnées.

Désignons par $d\tau$ l'élément de volume du domaine (D), limité par (S), par $d\tau'$ l'élément de volume du domaine (D') extérieur à (S).

Posons

$$V = \frac{1}{4\pi}\int \frac{W}{r}\, ds,$$

l'intégrale étant étendue à la surface (S) tout entière.

Dans les suppositions faites par rapport à (S) nous pouvons employer le théorème connu de Green, qui nous donne [en vertu de (7)]

$$\int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau + \int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau' = \int V\left(\frac{\partial V_i}{\partial n} - \frac{\partial V_e}{\partial n}\right) ds = \int VW\, ds > 0.$$

En désignant par L le maximum de l'intégrale

$$\int \frac{ds}{r}$$

sur (S), on peut écrire

$$L < 4\pi l,$$

l étant la plus grande distance de deux points de la surface (S).

Par conséquent, en vertu de (14),

$$V^2 < \frac{l}{4\pi}\int \frac{W^2}{r}\,ds,$$

d'où

$$\int V^2\,ds < l^2 \int W^2\,ds.$$

D'autre part,

$$\left(\int VW\,ds\right)^2 < \int V^2\,ds \int W^2\,ds,$$

ou

$$\int VW\,ds < l\int W^2\,ds.$$

Il résulte de là que

$$\int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau + \int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau' < l\int W^2\,ds. \tag{16}$$

Désignons par $d\mathrm{T}$ l'élément de volume de l'espace tout entier.

On a

$$\int \sum \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x}\,d\mathrm{T} = \int W\left(\frac{\partial V_i}{\partial n} - \frac{\partial V_e}{\partial n}\right) ds = \int W^2\,ds,$$

d'où, en vertu de (15),

$$\left(\int W^2\,ds\right)^2 < \int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\mathrm{T} \int \sum \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 d\mathrm{T}.$$

D'après cela, en tenant compte de (16), on trouve

$$\int W^2\,ds < l\int \sum \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 d\mathrm{T},$$

c'est ce qui nous donne le lemme suivant :

Lemme fondamental. — *Soit* W *une fonction des coordonnées, continue dans l'espace tout entier, ayant les dérivées du premier ordre à l'intérieur et à l'extérieur d'une surface fermée* (S), *satisfaisant aux conditions* 1°, 2° *et* 3°.

Supposons encore que W *admette les dérivées normales* $\frac{\partial W_i}{\partial n}$, $\frac{\partial W_e}{\partial n}$, *régulières sur* (S), *et satisfasse à la condition*

$$\lim_{R=\infty} |RW| < A,$$

R *étant la distance du point* x, y, z *à l'origine des coordonnées,* A *étant un* *nombre fixe. Dans ce cas le rapport*

$$\frac{\int \sum \left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x}\right)^2 d\mathrm{T}}{\int \mathrm{W}^2 \, ds}$$

est plus grand que $\frac{1}{l}$, *l étant la plus grande distance de deux points de la surface* (S).

8. Désignons par P_n la fonction de Legendre et posons

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\vartheta', \psi') \, P_n \sin\vartheta' \, d\psi' \, d\vartheta' = \frac{2n+1}{4\pi} \int f P_n \, d\sigma,$$

$d\sigma$ étant l'élément superficiel de la sphère (σ) de rayon 1, ayant pour centre l'origine des coordonnées, $f(\vartheta, \psi')$ étant une fonction donnée continue sur (σ), n'ayant qu'un nombre fini de maxima et de minima le long de tout grand cercle de (σ).

On sait que la série

$$\mathrm{V} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n Y_n \tag{17}$$

présente une fonction harmonique à l'intérieur de (σ), se réduisant à f sur (σ).

On sait de même que la série

$$\mathrm{V} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{n+1}} Y_n \tag{18}$$

présente une fonction harmonique à l'extérieur de (σ), se réduisant à f sur (σ).

La fonction V, définie par les séries (17) et (18), est donc une fonction harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de (σ), continue dans l'espace tout entier et se réduisant à la fonction donnée f sur (σ).

En supposant que

$$\int f(\vartheta, \psi) \, d\sigma = 0,$$

on trouve

$$\int \frac{\partial \mathrm{V}_e}{\partial n} \, d\sigma = 0. \tag{19}$$

Il importe de remarquer que cette égalité ne dépend pas de la supposition de l'existence de la dérivée normale $\frac{\partial \mathrm{V}_e}{\partial n}$ sur (σ).

9. Soient (σ_i) et (σ_e) deux sphères, l'une intérieure l'autre extérieure et toutes les deux concentriques à la sphère (σ).

Désignons par $d\tau_{1i}$ l'élément de volume du domaine (Δ_i), limité par (σ_i), par $d\tau_{1e}$ l'élément de volume du domaine (Δ_e), extérieur à (σ_e).

Supposons que les intégrales

$$I = \int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau, \qquad I' = \int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau',$$

étendues au domaine (Δ), limitée par (σ), et au domaine (Δ'), extérieur à (σ), aient un sens bien déterminé.

Désignons par ρ et ρ_1 les rayons des sphères (σ_i) et (σ_e), et posons

$$\rho\rho_1 = 1.$$

En tenant compte des égalités (17), (18) et (19), on trouve

$$I_1 = \int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau_{1i} = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2 \rho^{2n+1},$$

$$I_1' = \int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau_{1e} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) A_n^2 \rho^{2n+1},$$

où

$$A_n^2 = \int Y_n^2 \, d\sigma.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2} < \frac{I_1}{I_1'} < 1,$$

d'où, en passant à la limite (pour $\rho = 1$), nous tirerons le théorème suivant :

Théorème. — *Si la fonction* V, *harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère* (σ), *continue dans l'espace tout entier et s'annulant à l'infini avec ses dérivées comme le potentiel de la simple couche, satisfait à la condition*

$$\int \frac{\partial V_e}{\partial n} d\sigma = 0,$$

on a

$$\frac{1}{2} < \frac{I}{I'} < 1.$$

Nous supposons ici que les intégrales

$$I = \lim_{\rho=1} I_1, \qquad I' = \lim_{\rho_1=1} I_1'$$

ont un sens bien déterminé.

10. Supposons que la surface donnée (S) admette la transformation suivante :

1° A tout point M de coordonnées x, y, z de l'espace donné correspond un point M' de coordonnées x', y', z' et un seul, et inversement.

2° Les coordonnées x, y, z de M sont des fonctions continues de x', y', z', et inversement.

3° Les dérivées du premier ordre de x, y, z par rapport à x', y', z' sont finies pour toutes les valeurs de x', y', z', et inversement.

4° Quand M décrit la surface (S), le point M' décrit la sphère (σ), qui a pour équation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

5° A tout point de l'espace donné, intérieur à (S), correspond dans l'espace transformé un point intérieur à (σ), à tout point extérieur à (S) correspond un point extérieur à (σ); aux points infiniment éloignés du premier espace correspondent les points infiniment éloignés dans le second.

Nous appellerons cette transformation, indiquée par M. Poincaré dans les *Acta Mathematica,* t. XX, *transformation de M. Poincaré.*

Soit V une fonction continue dans l'espace tout entier, ayant les dérivées du premier ordre à l'intérieur et à l'extérieur de (S), les dérivées normales

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial V_e}{\partial n}$$

sur (S) et s'annulant à l'infini comme un potentiel de la simple couche.

Remplaçons dans V les variables x, y, z par leurs expressions en x', y', z' et désignons la fonction ainsi obtenue par V'.

On a

$$\sum \left(\frac{\partial V'}{\partial x'}\right)^2 = \sum a_{11} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + 2 \sum a_{23} \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z},$$

$$\sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 = \sum b_{11} \left(\frac{\partial V'}{\partial x'}\right)^2 + 2 \sum b_{23} \frac{\partial V'}{\partial y'} \frac{\partial V'}{\partial z'},$$

où

$$a_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z'}\right)^2, \qquad \ldots,$$

$$a_{23} = \frac{\partial y}{\partial x'} \frac{\partial z}{\partial x'} + \frac{\partial y}{\partial y'} \frac{\partial z}{\partial y'} + \frac{\partial y}{\partial z'} \frac{\partial z}{\partial z'}, \qquad \ldots,$$

$$b_{11} = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial z}\right)^2, \qquad \ldots,$$

$$b_{23} = \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial z} \frac{\partial z'}{\partial z}, \qquad \ldots.$$

En désignant par A le maximum de modules de $a_{k,k}$, $a_{k,m}$, $b_{k,k}$, $b_{k,m}$ $(k, m = 1, 2, 3)$, nous aurons

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum\left(\frac{\partial V'}{\partial x'}\right)^2 < 2A\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2, \\ &\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 < 2A\sum\left(\frac{\partial V'}{\partial x'}\right)^2. \end{aligned} \right.$$

Soit (S_i) une surface fermée intérieure à (S), soit (S_e) une surface fermée extérieure à (S), soient (σ_i) et (σ_e) leurs transformées.

En désignant par $d\tau_i$ et $d\tau_e$ les éléments de volume du domaine intérieur à (S_i) et du domaine extérieur à (S_e), et en remarquant que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial x}{\partial z'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial z'} \\ \frac{\partial z}{\partial x'} & \frac{\partial z}{\partial y'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{vmatrix}$$

reste fini pour toutes les valeurs de x', y', z' (ou x, y, z), nous obtiendrons les inégalités suivantes

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int\sum\left(\frac{\partial V'}{\partial x'}\right)^2 d\tau_{1i} < B\int\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau_i, \\ &\int\sum\left(\frac{\partial V'}{\partial x'}\right)^2 d\tau_{1e} < B\int\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau_e \quad (^1), \end{aligned} \right.$$

B étant un nombre assignable.

Ces inégalités ont lieu pour toutes les surfaces (S_i) et (S_e) suffisamment voisines de (S).

Supposons que (S_i) et (S_e) tendent vers (S).

Les intégrales

$$\int\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau_i \qquad \text{et} \qquad \int\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau_e$$

tendent vers

$$I = \int\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau \qquad \text{et} \qquad I' = \int\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau',$$

dont la première s'étend au domaine intérieur à (S), la seconde au domaine extérieur à (S).

Ces dernières intégrales ont un sens bien déterminé en vertu de suppositions que nous avons faites par rapport à la fonction V.

---

(1) $d\tau_{1i}$ et $d\tau_{1e}$ sont les éléments de volume du domaine intérieur à (σ_i) et de l'espace extérieur à (σ_e).

Les inégalités (21) nous montrent que les intégrales

$$\int \sum \left(\frac{\partial V'}{\partial x'}\right)^2 d\tau_1 = \lim \int \sum \left(\frac{\partial V'}{\partial x'}\right)^2 d\tau_{1i},$$

$$\int \sum \left(\frac{\partial V'}{\partial x'}\right)^2 d\tau'_1 = \lim \int \sum \left(\frac{\partial V'}{\partial x'}\right)^2 d\tau_{1e},$$

dont la première s'étend au volume tout entier de la sphère (σ), la seconde à l'espace extérieur à (σ), ont un sens bien déterminé.

Par conséquent, on peut écrire, en vertu de (20),

$$(22) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mu \int \sum \left(\frac{\partial V'}{\partial x'}\right)^2 d\tau_1 < \mathrm{I} < \mu' \int \sum \left(\frac{\partial V'}{\partial x'}\right)^2 d\tau_1, \\ &\mu \int \sum \left(\frac{\partial V'}{\partial x'}\right)^2 d\tau'_1 < \mathrm{I}' < \mu' \int \sum \left(\frac{\partial V'}{\partial x'}\right)^2 d\tau'_1, \end{aligned} \right.$$

μ et μ' étant des nombres finis et positifs.

11. Désignons par W' une fonction continue dans l'espace tout entier, harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de (σ) et se réduisant à

$$(23) \qquad W' = V' + C \qquad \text{sur } (\sigma),$$

C étant une constante.

La constante C étant choisie convenablement, on a

$$(24) \qquad \int \frac{\partial W'_e}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Remplaçons dans W' les variables x', y', z' par leurs expressions en x, y, z et désignons par W la fonction ainsi obtenue.

Posons

$$\mathrm{K}_1 = \int \sum \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 d\tau, \qquad \mathrm{K}'_1 = \int \sum \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 d\tau',$$

$$\mathrm{H} = \int \sum \left(\frac{\partial W'}{\partial x'}\right)^2 d\tau_1, \qquad \mathrm{H}' = \int \sum \left(\frac{\partial W'}{\partial x'}\right)^2 d\tau'_1,$$

$$\mathrm{K} = \int \sum \left(\frac{\partial V'}{\partial x'}\right)^2 d\tau_1, \qquad \mathrm{K}' = \int \sum \left(\frac{\partial V'}{\partial x'}\right)^2 d\tau'_1.$$

Les inégalités (21) nous donnent

$$(25) \qquad \mu' \mathrm{K} > \mathrm{I} > \mu \mathrm{K},$$

$$(26) \qquad \mu' \mathrm{K}' > \mathrm{I}' > \mu \mathrm{K}',$$

$$(27) \qquad \mu' \mathrm{H} > \mathrm{K}_1 > \mu \mathrm{H},$$

$$(28) \qquad \mu' \mathrm{H}' > \mathrm{K}'_1 > \mu \mathrm{H}'.$$

Supposons que V soit une fonction harmonique à l'intérieur et à l'extérieur à (S) et satisfasse à la condition

$$\int \frac{\partial V_e}{\partial n} ds = 0.$$

En employant la transformation de Green et en remarquant qu'en vertu de (23)

$$W = V + C \qquad \text{sur (S)},$$

nous aurons

$$I' = -\int V \frac{\partial V_e}{\partial n} ds = -\int W \frac{\partial V_e}{\partial n} ds - C \int \frac{\partial V_e}{\partial n} ds = -\int W \frac{\partial V_e}{\partial n} ds.$$

Mais

$$\int \sum \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau' = -\int W \frac{\partial V_e}{\partial n} ds.$$

Par conséquent, en vertu de (15),

$$(29) \qquad I' < \int \sum \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 d\tau' = K'_1.$$

On a de même

$$I = \int V \frac{\partial V_i}{\partial n} ds = \int W \frac{\partial V_i}{\partial n} ds = \int \sum \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau,$$

$$(30) \qquad I < \int \sum \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 d\tau = K_1.$$

D'autre part, en vertu de (23), (24) et (15),

$$(31) \qquad H = \int W' \frac{\partial W'_i}{\partial n} d\sigma = \int \sum \frac{\partial V'}{\partial x'} \frac{\partial W'}{\partial x'} d\tau_1 < K,$$

$$(32) \qquad H' = -\int W' \frac{\partial W'_e}{\partial n} d\sigma = -\int V' \frac{\partial W'_e}{\partial n} d\sigma = \int \sum \frac{\partial V'}{\partial x'} \frac{\partial W'}{\partial x'} d\tau'_1 < K'_1.$$

Ces inégalités nous montrent que les intégrales H et H' ont un sens bien déterminé.

Le théorème du n° 9 a lieu et nous donne immédiatement

$$(33) \qquad \frac{1}{2} < \frac{H}{H'} < 1.$$

En rapprochant les inégalités (29), (28), (33), (31) et (25), on trouve

$$(34) \qquad I' < K'_1 < \mu' H' < 2\mu' H < 2\mu' K < \frac{2\mu'}{\mu} I.$$

On a de même

$$I < K_1 < \mu' H < \mu' H' < \mu' K_1' < \frac{\mu'}{\mu} I'$$

en vertu de (30), (27), (33), (32) et (26).

Par conséquent,

$$\frac{\mu}{2\mu'} < \frac{I}{I'} < \frac{\mu'}{\mu}, \tag{35}$$

ou

$$I' < m I, \qquad I < m I', \tag{35_1}$$

où l'on peut poser

$$m = \frac{2\mu'}{\mu}.$$

Des inégalités (35) nous tirons le théorème suivant :

Théorème. — *Soit* V *une fonction, harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de la surface donnée* (S), *ayant les propriétés de potentiel de la simple couche et satisfaisant à la condition*

$$\int \frac{\partial V_e}{\partial n} ds = 0.$$

Le rapport

$$\frac{\int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau'}$$

a une limite supérieure finie et une limite inférieure différente de zéro, si la surface fermée (S) *satisfait aux conditions* 1°, 2° *et* 3° *de l'Introduction et admet la transformation de M. Poincaré.*

Nous appellerons ce théorème *théorème fondamental.*

Nous avons démontré ce théorème dans le cas où la surface (S) admet la transformation de M. Poincaré, mais il est probable qu'il existe encore dans les cas plus généraux.

Je crois que l'on peut démontrer ce théorème indépendamment de la transformation de M. Poincaré, pour toutes les surfaces satisfaisant aux conditions 1°, 2° et 3°, bien que je n'aie pas réussi à le démontrer dans ces conditions en toute rigueur en ce moment.

Nous verrons dans ce qui va suivre, que *la solution de tous les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique se ramène à la démonstration complète du théorème fondamental.*

Nous allons considérer, en général, les surfaces fermées auxquelles ce théorème est applicable.

La classe des surfaces admettant la transformation de M. Poincaré y est contenue, sans doute, comme un cas particulier.

CHAPITRE II.

LE PROBLÈME FONDAMENTAL DE L'ÉLECTROSTATIQUE.

1. Ce problème s'énonce comme il suit :

Trouver la densité ρ *d'une couche superficielle, répandue sur la surface donnée* (S), *sans action sur un point intérieur.*

Le potentiel

$$V = \int \frac{\rho}{r} ds$$

de cette couche conservera une valeur constante dans toute l'étendue de (S) (du conducteur).

En supposant que la fonction cherchée ρ soit continue sur (S), on trouve

$$(1) \qquad \rho = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\rho \cos\psi}{r^2} ds \qquad \text{sur (S)},$$

l'équation connue de M. Robin, qui découle immédiatement de la première des formules (7) du Chapitre précédent.

On sait que le problème serait parfaitement déterminé si nous ajoutions encore la condition

$$(2) \qquad \int \rho \, ds = A,$$

A étant une constante positive, présentant la masse totale de la couche considérée.

On peut traiter ce problème de deux manières différentes :

1° On peut démontrer d'abord l'existence de la fonction V, harmonique à l'extérieur de (S) et satisfaisant à la condition

$$V = \text{const.} \qquad \text{sur (S)}.$$

Si nous démontrons ensuite que cette fonction admet la dérivée normale $\frac{\partial V_e}{\partial n}$, nous obtiendrons

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_e}{\partial n}.$$

2° On peut se proposer de déterminer la fonction cherchée, indépendamment du problème de Dirichlet, en partant de l'équation de M. Robin jointe à la condition (2).

Nous nous arrêterons à la dernière méthode, indiquée pour la première fois par M. Robin.

Cette méthode n'est établie rigoureusement qu'en ces derniers temps dans ma Note : *Le problème de la distribution de l'électricité et le problème de Neumann* (*Comptes rendus,* 13 décembre 1897), mais seulement dans le cas des surfaces convexes.

Quelque temps après, j'ai réussi à la démontrer dans le cas plus général, et j'ai exposé mon analyse dans une Note : *Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique,* publiée aux *Comptes rendus* du 6 mars 1899.

Dans ce Chapitre de mon Mémoire je démontrerai enfin, *sans m'appuyer sur le principe de Dirichlet* (comme dans les Notes tout à l'heure mentionnées) *le théorème suivant :*

Théorème. — *La méthode de M. Robin nous donne la solution du problème de la distribution de l'électricité pour toute surface fermée* (S), *satisfaisant aux conditions* 1°, 2° *et* 3° *de l'Introduction, pourvu que le théorème fondamental soit applicable à* (S).

2. Soit ρ_0 une fonction quelconque, continue sur (S), soit r la distance du point $p(x, y, z)$ de (S) au point variable $p'(\xi, \eta, \zeta)$ de la même surface.

Formons la suite d'intégrales

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{\rho_0 \cos\psi}{r^2}\,ds,\\ \rho_2 &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{\rho_1 \cos\psi}{r^2}\,ds,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \rho_k &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{\rho_{k-1} \cos\psi}{r^2}\,ds. \end{aligned}\right.$$

D'après la méthode de M. Robin, la limite vers laquelle tend ρ_k, quand k croît indéfiniment, est une fonction continue sur (S) et présente, la fonction ρ_0 étant choisie convenablement, la densité de la couche superficielle sans action sur un point intérieur.

Pour établir la méthode de M. Robin il faut donc démontrer que ρ_k tend uniformément vers une limite déterminée, différente de zéro, ou, ce qui revient au même, démontrer que la série

$$\rho_0 + (\rho_1 - \rho_0) + (\rho_2 - \rho_1) + \ldots + (\rho_k - \rho_{k-1}) + \ldots \tag{4}$$

converge absolument et uniformément sur (S) et n'est pas identiquement nulle, pourvu que la fonction ρ_0 soit choisie convenablement.

Cette proposition étant établie, nous démontrerons ensuite sans peine que la série (4) présentera la solution du problème proposé.

3. Formons la suite de potentiels

$$\left\{\begin{array}{l} V_1 = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \rho_0 \frac{1}{r}\, ds, \\ V_2 = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \frac{\partial V_1}{\partial n} \frac{1}{r}\, ds, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ V_k = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n} \frac{1}{r}\, ds. \end{array}\right. \tag{5}$$

On a

$$\frac{\partial V_1}{\partial n} = \frac{1}{2\pi}\int \rho_0 \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial n} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_1}{\partial n} \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial n} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n} \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds.$$

En comparant ces égalités avec (3), on trouve

$$\rho_k = \frac{\partial V_k}{\partial n} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6}$$

4. Soit, en général, V une fonction harmonique à l'intérieur de (S), ayant les propriétés du potentiel de la simple couche.

Soit P un point du domaine, limité par (S), de coordonnées x, y, z; soit r la distance de P au point p' de la surface (S).

En supposant que (S) satisfait aux conditions du n° 2 de l'Introduction, on peut écrire

$$V = \frac{1}{4\pi} W + \frac{1}{4\pi} W_1,$$

où l'on pose

$$W = \int V_i \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds, \qquad W_1 = \int \frac{\partial V_i}{\partial n} \frac{1}{r}\, ds.$$

Supposons que P tend vers un point p de (S), en restant à l'intérieur de (S), et passons à la limite.

Nous aurons

$$V_i = \frac{1}{4\pi} W_i + \frac{1}{4\pi} W_{1i}.$$

Mais on a [les égalités (9) du Chap. I]

$$W_i = \overline{W} + 2\pi V_i, \qquad W_{1i} = \overline{W}_1,$$

en entendant par $\overline{W}$ et $\overline{W}_1$ les valeurs des fonctions W et W_1 au point p de (S). Par conséquent,

$$(7) \qquad V_i = \overline{V} = \frac{1}{2\pi}\overline{W} + \frac{1}{2\pi}\overline{W}_1 = \frac{1}{2\pi}\int \overline{V}\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds + \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_i}{\partial n}\frac{1}{r}\,ds.$$

Dans cette formule x, y, z sont les coordonnées du point p de la surface (S). Remplaçons dans (7) V par V_k.

On trouve

$$\overline{V}_k = \frac{1}{2\pi}\int \overline{V}_k \frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds + \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_{k,i}}{\partial n}\frac{1}{r}\,ds.$$

En tenant compte de l'égalité [Chap. I, formule (7)]

$$(8) \qquad \frac{\partial V_{k,i}}{\partial n} = \frac{\partial V_k}{\partial n} - \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n} = \rho_k - \rho_{k-1},$$

nous obtiendrons, en vertu de (5),

$$(9) \qquad \overline{V}_{k+1} = \frac{1}{2\pi}\int \overline{V}_k \frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

5. Considérons maintenant les égalités (3).

La dernière de ces égalités nous donne

$$\int \rho_k\,ds = \frac{1}{2\pi}\int ds\left(\int \rho_{k-1}\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds\right),$$

d'où, en changeant l'ordre d'intégration,

$$\int \rho_k\,ds = \frac{1}{2\pi}\int \rho_{k-1}\,ds\left(\int \frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds\right) = \int \rho_{k-1}\,ds.$$

Supposons que ρ_0 satisfasse à la condition

$$\int \rho_0\,ds = 0.$$

Dans ce cas on a, en général,

$$\int \rho_k\, ds = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

D'autre part, en vertu de (7) du Chapitre I, on a [l'égalité (6)]

$$\frac{\partial V_{k,e}}{\partial n} = \frac{\partial V_k}{\partial n} + \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n} = \rho_k + \rho_{k-1}. \tag{10}$$

Par conséquent,

$$\int \frac{\partial V_{k,e}}{\partial n}\, ds = 0,$$

quel que soit l'indice k.

Toutes les fonctions V_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *satisfont donc aux conditions du théorème fondamental.*

6. Cela posé, formons les intégrales

$$I_k = \int \sum \left(\frac{\partial V_k}{\partial x}\right)^2 d\tau, \qquad I'_k = \int \sum \left(\frac{\partial V_k}{\partial x}\right)^2 d\tau'$$

et supposons que *le théorème fondamental soit applicable à* (S).

En employant la méthode de M. Poincaré [1], prenons la fonction

$$U = \alpha V_k + \beta V_{k+1},$$

où α et β sont des constantes quelconques.

Posons ensuite

$$I = \int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\tau, \qquad I' = \int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\tau'$$

et employons le théorème fondamental.

On trouve, en vertu de (35_1) du Chapitre précédent,

$$I < m I', \qquad I' < m I. \tag{11}$$

Mais

$$I = \alpha^2 I_k + 2\alpha\beta I_{k,k+1} + \beta^2 I_{k+1},$$
$$I' = \alpha^2 I'_k + 2\alpha\beta I'_{k,k+1} + \beta^2 I'_{k+1},$$

où l'on a posé

$$I_{k,k+1} = \int \sum \frac{\partial V_k}{\partial x} \frac{\partial V_{k+1}}{\partial x}\, d\tau, \qquad I'_{k,k+1} = \int \sum \frac{\partial V_k}{\partial x} \frac{\partial V_{k+1}}{\partial x}\, d\tau'.$$

---

[1] H. Poincaré, *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (*Acta mathematica*, t. XX, p. 96).

Par conséquent, en vertu de (11),

$$\alpha^2(m\mathrm{I}'_k - \mathrm{I}_k) + 2\alpha\beta(m\mathrm{I}'_{k,k+1} - \mathrm{I}_{k,k+1}) + \beta^2(m\mathrm{I}'_{k+1} - \mathrm{I}_{k+1}) > 0,$$

$$\alpha^2(m\mathrm{I}_k - \mathrm{I}'_k) + 2\alpha\beta(m\mathrm{I}_{k,k+1} - \mathrm{I}'_{k,k+1}) + \beta^2(m\mathrm{I}_{k+1} - \mathrm{I}'_{k+1}) > 0. \tag{12}$$

Remplaçons dans la première de ces inégalités β par $-\beta$ et additionnons le résultat ainsi obtenu et l'inégalité (12).

Il viendra

$$\alpha^2(m-1)(\mathrm{I}_k+\mathrm{I}'_k)+2\alpha\beta(m+1)(\mathrm{I}_{k,k+1}-\mathrm{I}'_{k,k+1})+\beta^2(m-1)(\mathrm{I}_{k+1}+\mathrm{I}'_{k+1})>0. \tag{13}$$

La première partie de cette inégalité étant une forme quadratique définie et positive, on a

$$(m-1)^2(\mathrm{I}_k+\mathrm{I}'_k)(\mathrm{I}_{k+1}+\mathrm{I}'_{k+1}) > (m+1)^2(\mathrm{I}_{k,k+1}-\mathrm{I}'_{k,k+1})^2.$$

D'autre part, le théorème de Green et les égalités (8) et (10) nous donnent

$$\mathrm{I}_{k+1} = \int \mathrm{V}_{k+1}\frac{\partial \mathrm{V}_{k+1}}{\partial n}ds - \int \mathrm{V}_{k+1}\frac{\partial \mathrm{V}_{k,i}}{\partial n}ds - \int \mathrm{V}_{k+1}\frac{\partial \mathrm{V}_{k-1}}{\partial n}ds,$$

$$\mathrm{I}'_{k+1} = -\int \mathrm{V}_{k+1}\frac{\partial \mathrm{V}_{k+1}}{\partial n}ds - \int \mathrm{V}_{k+1}\frac{\partial \mathrm{V}_{k,e}}{\partial n}ds + \int \mathrm{V}_{k+1}\frac{\partial \mathrm{V}_{k-1}}{\partial n}ds,$$

d'où

$$\mathrm{I}_{k+1}+\mathrm{I}'_{k+1} = -\int \mathrm{V}_{k+1}\frac{\partial \mathrm{V}_{k,e}}{\partial n}ds - \int \mathrm{V}_{k+1}\frac{\partial \mathrm{V}_{k,i}}{\partial n}ds = \mathrm{I}_{k,k+1} - \mathrm{I}_{k,k+1}.$$

Par conséquent [l'inégalité (13)],

$$\mathrm{I}_{k+1}+\mathrm{I}'_{k+1} < \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2(\mathrm{I}_k+\mathrm{I}'_k) = \lambda(\mathrm{I}_k+\mathrm{I}'_k),$$

où

$$\lambda = \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2$$

est un nombre positif plus petit que l'unité.

En posant

$$\mathrm{A} = \lambda(\mathrm{I}_1+\mathrm{I}'_1),$$

A étant un nombre assignable, on trouve

$$\mathrm{I}_k+\mathrm{I}'_k < \mathrm{A}\lambda^k \quad (^1). \tag{14}$$

En employant ensuite le lemme fondamental, démontré dans le n° 7 du Chapitre

---

(1) *Comparer* H. POINCARÉ, *Acta mathematica*, t. XX, p. 96.

précédent, on a

$$\int V_k^2\,ds < l(I_k + I'_k).$$

Cette dernière inégalité et (14) nous donnent immédiatement

$$(15)\qquad \int V_k^2\,ds < B_1\lambda^k,$$

B_1 étant une constante finie et positive.

7. Envisageons maintenant deux cylindres de révolution (C) et (C_1), dont l'axe commun est dirigé suivant la normale n à (S) dans le point $p(x, y, z)$ de (S). Soient R et R_1 ($R > R_1$) les rayons de ces cylindres.

Désignons par (σ_1) la portion de (S) découpée par (C_1) au voisinage du point p, par (σ) la portion de (S), située à l'intérieur des deux cylindres (C) et (C_1), par (S_1) la portion qui reste.

Soient $d\sigma_1$, $d\sigma$ et ds_1 les éléments superficiels des portions (σ_1), (σ) et (S_1).

On peut écrire [l'égalité (9) du n° 4]

$$(16)\qquad \begin{aligned} \overline{V}_k &= \frac{1}{2\pi}\left(\int \overline{V}_{k-1}\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds_1 + \int \overline{V}_{k-1}\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma + \int \overline{V}_{k-1}\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma_1\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(Q_1 + Q_2 + Q_3). \end{aligned}$$

En employant l'inégalité de Schwarz, on trouve

$$Q_1^2 < \int \overline{V}_{k-1}^2\,ds_1 \int \frac{\cos^2\varphi}{r^4}\,ds_1 < \int \overline{V}_{k-1}^2\,ds \int \frac{\cos^2\varphi}{r^4}\,ds_1.$$

En remarquant que dans le champ de l'intégration

$$r > R,$$

on a

$$\int \frac{\cos^2\varphi}{r^4}\,ds_1 < \frac{S_1}{R^4} < \frac{S}{R^4},$$

S_1 et S étant les aires de la portion (S_1) et de la surface (S) tout entière.

On a donc

$$Q_1^2 < \frac{S}{R^4}\int \overline{V}_{k-1}^2\,ds,$$

d'où, en vertu de (15),

$$(17)\qquad Q_1^2 < \frac{SB_1}{R^4}\lambda^{k-1}.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$Q_2 = \int \overline{V}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, d\sigma.$$

On a, comme précédemment,

$$(18)\qquad Q_2^2 < \int \overline{V}_{k-1}^2\, ds \int \frac{\cos^2\varphi}{r^4}\, d\sigma.$$

Prenons la normale n en p pour l'axe des ζ et introduisons les coordonnées polaires α et β, ayant pour pôle le point p.

On a évidemment

$$d\sigma = \frac{\alpha\, d\alpha\, d\beta}{\cos\vartheta}.$$

On peut toujours choisir R de telle façon que l'on ait

$$(19)\qquad \cos\vartheta > \frac{1}{2}$$

pour tous les points de la portion de (S), située à l'intérieur du cylindre (C).

Cela posé, on peut écrire

$$(20)\qquad d\sigma < 2\alpha\, d\alpha\, d\beta.$$

D'autre part, il est aisé de démontrer l'égalité suivante

$$\frac{r\cos\varphi}{\cos\vartheta} = \alpha \frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} - \zeta,$$

qui nous donne

$$|r\cos\varphi| < |\alpha| \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\right| + |\zeta|.$$

En employant maintenant les inégalités (2) du Chapitre précédent, on trouve

$$|r\cos\varphi| < 6a\alpha^2$$

et

$$(21)\qquad \left|\frac{\cos\varphi}{r^2}\right| < \frac{6a}{\alpha},$$

puisque

$$r > \alpha.$$

On a donc, en vertu de (19) et (20),

$$\int \frac{\cos^2\varphi}{r^4}\, d\sigma < 72a^2 \int_0^{2\pi} d\beta \int_{R_1}^{R} \frac{d\alpha}{\alpha} = 144\pi a^2 \log\frac{R}{R_1}.$$

D'après cela, l'inégalité (18), en vertu de (15), peut être présentée sous la forme suivante

$$Q_2^2 < 144\pi a^2 B_1 \lambda^{k-1} \log \frac{R}{R_1}. \tag{22}$$

Considérons enfin l'intégrale

$$Q_3 = \int \overline{V}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2} d\sigma_1.$$

Désignons par $2\pi N$ le maximum de module de l'intégrale

$$I = \int \frac{|\cos\varphi|}{r^2} ds$$

sur (S), par $(\overline{V}_k)$ le maximum de module de $\overline{V}_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$.

En tenant compte de l'égalité (9) du n° 4, on a

$$(\overline{V}_k) < \frac{1}{2\pi}(\overline{V}_{k-1}) I < N(\overline{V}_{k-1}).$$

Par conséquent,

$$(\overline{V}_k) < N^{k-1}(\overline{V}_1) < 2 l N^{k-1} R_0 = N_0 N^k,$$

R_0 étant le maximum de module de ρ_0 sur (S),

$$N_0 = \frac{2 l R_0}{N}.$$

En remarquant que

$$R_1 < R,$$

on a, en vertu de (20) et (21),

$$\int \frac{|\cos\varphi|}{r^2} d\sigma_1 < 12 a \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{R_1} d\alpha = 24\pi a R_1.$$

D'autre part,

$$|Q_3| < (\overline{V}_{k-1}) \int \frac{|\cos\varphi|}{r^2} d\sigma_1 < N_0 N^{k-1} \int \frac{|\cos\varphi|}{r^2} d\sigma_1,$$

ou, en vertu de l'inégalité précédente,

$$|Q_3| < 24\pi a N_0 N^{k-1} R_1 = 2\pi T N^{k-1} R_1. \tag{23}$$

Cela posé, rapprochons les inégalités (17), (22) et l'inégalité évidente

$$(Q_1 + Q_2)^2 < 2(Q_1^2 + Q_2^2).$$

On aura

$$(Q_1 + Q_2)^2 < 2\left(\frac{SB_1}{R^4} + 144\pi a^2 B_1 \log \frac{R}{R_1}\right)\lambda^{k-1}.$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$\frac{SB_1}{R^4} + 144\pi a^2 B_1 \log R = 2\pi^2 P,$$
$$144\pi a^2 B_1 = 2\pi^2 Q, \qquad \mu = \sqrt{\lambda}.$$

Nous aurons

$$|Q_1 + Q_2| < 2\pi\mu^{k-1}\sqrt{P - Q\log R_1}.$$

En rapprochant cette inégalité, l'inégalité (23) et la suivante

$$|\overline{V}_k| < \frac{1}{2\pi}|Q_1 + Q_2| + \frac{1}{2\pi}|Q_3|,$$

on trouve

$$|\overline{V}_k| < \mu^{k-1}\sqrt{P - Q\log R_1} + TN^{k-1}R_1,$$

d'où, en posant

$$R_1 = \left(\frac{\mu}{N}\right)^{k-1},$$

nous déduirons immédiatement

$$(24) \qquad |\overline{V}_k| < \mu^{k-1}\left(\sqrt{P + (k-1)Q\log\frac{N}{\mu}} + T\right).$$

Soit τ une constante positive, satisfaisant aux conditions

$$\mu < \tau < 1.$$

Posons

$$\frac{\mu}{\tau} = \sigma.$$

Il est évident que l'expression

$$\sigma^{k-1}\left(\sqrt{P + (k-1)Q\log\frac{N}{\mu}} + T\right)$$

ne surpasse pas un nombre K_1, fini et positif, quelle que soit la valeur de k. On peut, par conséquent, remplacer l'inégalité (24) par l'inégalité suivante

$$(25) \qquad |\overline{V}_k| < C\tau^k \qquad (0 < \tau < 1),$$

où l'on a posé

$$C = \frac{K_1}{\tau}.$$

L'inégalité obtenue démontre le théorème suivant :

Théorème. — *Supposons que la fonction* ρ_0, *continue sur la surface donnée* (S), *satisfasse à la condition*

$$\int \rho_0\, ds = 0.$$

Posons

$$V_1 = -\frac{1}{2\pi}\int \rho_0 \frac{1}{r}\, ds$$

et formons la suite des fonctions

$$\overline{V}_2 = \frac{1}{2\pi}\int \overline{V}_1 \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds,$$

$$\overline{V}_3 = \frac{1}{2\pi}\int \overline{V}_2 \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\overline{V}_k = \frac{1}{2\pi}\int \overline{V}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds,$$

où $\overline{V}_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) *désigne les valeurs de la fonction* V_k *aux points de* (S).

Si la surface fermée (S) *satisfait aux conditions* 1°, 2° *et* 3° *de l'Introduction et le théorème fondamental lui est applicable, on a*

$$|\overline{V}_k| < C\tau^k, \tag{25}$$

où C *est une constante finie et positive ne dépendant que de la fonction* ρ_0 *et de la surface* (S), τ *est un nombre positif plus petit que l'unité.*

8. Posons

$$\mu_k = (\overline{V}_k - \overline{V}_{k-1}) + (\overline{V}_{k+2} - \overline{V}_{k+3}) + \dots + (\overline{V}_{k+2p} - \overline{V}_{k+2p+1}) + \dots. \tag{26}$$

En tenant compte du théorème du numéro précédent [l'inégalité (25)], on trouve

$$|\overline{V}_{k+2p} - \overline{V}_{k+2p+1}| < 2C\tau^k\tau^{2p} \qquad (p = 0, 1, 2, \dots). \tag{27}$$

Cette inégalité montre que la série (26) converge absolument et uniformément et présente, par conséquent, une fonction continue sur (S).

L'inégalité (27) nous donne aussi

$$|\mu| < \frac{2C}{1-\tau^2}\tau^k = C_1\tau^k. \tag{28}$$

En remarquant ensuite que la série

$$|\overline{V}_k| + |\overline{V}_{k+1}| + |\overline{V}_{k+2}| + |\overline{V}_{k+3}| + \dots$$

converge absolument et uniformément, on peut écrire

$$\mu_k = \overline{V}_k - (\overline{V}_{k+1} - \overline{V}_{k+2}) - (\overline{V}_{k+3} - \overline{V}_{k+4}) - \dots. \tag{29}$$

Cela posé, considérons le potentiel de la double couche

$$W_k = \frac{1}{2\pi}\int \mu_k \frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds.$$

On a

(30) $$W_{k,i} = \overline{W}_k + \mu_k \qquad \text{sur } (S).$$

D'autre part, en tenant compte des égalités (26) et (9), on trouve

$$\overline{W}_k = (\overline{V}_{k+1} - \overline{V}_{k+2}) + (\overline{V}_{k+3} - \overline{V}_{k+4}) + \ldots.$$

Par conséquent, en vertu de (29) et (30),

$$W_{k,i} = \overline{V}_k = V_{k,i} \qquad \text{sur } (S).$$

On a donc, d'après le théorème connu,

(31) $$W_k = V_k \qquad \text{à l'intérieur de } (S).$$

Soit P un point intérieur à (S), situé sur la normale n dans le point quelconque p de (S), soit δ la distance Pp.

En adoptant les notations du Chapitre précédent, on peut écrire, en vertu de (31),

(32) $$\left(\frac{\partial V_k}{\partial n}\right)_P = \left(\frac{\partial W_k}{\partial n}\right)_P.$$

9. Soient p et p' deux points de la surface (S).

En prenant la distance pp' suffisamment petite, on trouve, d'après le théorème de M. Liapounoff [*voir* Chap. I, n° 4, l'inégalité (8)],

$$|\rho'_k - \rho_k| < LR_{k-1}r^{\frac{1}{2}},$$

ρ'_k et ρ_k étant les valeurs de la fonction ρ_k aux points p' et p, R_{k-1} étant le maximum de module de ρ_{k-1} sur (S).

Appliquons maintenant l'inégalité (6) du Chapitre précdent à la fonction

$$V_k = -\frac{1}{2\pi}\int \rho_{k-1}\frac{1}{r}\,ds.$$

Il faut poser

$$\mu = -\frac{\rho_{k-1}}{2\pi}, \qquad N = LR_{k-2}, \qquad M = R_{k-1}.$$

Nous aurons, δ étant suffisamment petit,

$$\left|\left(\frac{\partial V_k}{\partial n}\right)_P - (\rho_k - \rho_{k-1})\right| < (AR_{k-1} + BLR_{k-2}\ \delta^{\frac{1}{2}},$$

d'où, en vertu de (32),

$$(33)\qquad |\rho_k - \rho_{k-1}| < (AR_{k-1} + BLR_{k-2})\delta^{\frac{1}{2}} + \left|\left(\frac{\partial W_k}{\partial n}\right)_P\right|.$$

Désignons par M_k le maximum du module de μ_k sur (S).

En employant l'inégalité (10) du Chapitre précédent, on trouve

$$\left|\left(\frac{\partial W_k}{\partial n}\right)_P\right| < K\frac{M_k}{\delta},$$

ou, en vertu de (28),

$$(34)\qquad \left|\left(\frac{\partial W_k}{\partial n}\right)_P\right| < KC_1\frac{\tau^k}{\delta}.$$

Posons maintenant

$$\delta = c\tau^{\frac{2k}{3}}, \qquad \tau^{\frac{1}{3}} = \sigma \quad (^1),$$

C étant une constante convenablement choisie.

L'inégalité (33) se présentera, en vertu de (34), sous la forme suivante

$$|\rho_k - \rho_{k-1}| < (AR_{k-1} + A_1R_{k-2} + n)\sigma^k,$$

ou

$$(35)\qquad |\rho_k| < |\rho_{k-1}| + (AR_{k-1} + A_1R_{k-2} + n)\sigma^k,$$

où A, A_1 et n sont des constantes finies et positives, ne dépendant pas de la position du point p sur (S).

On peut poser, par conséquent,

$$R_k = R_{k-1} + (AR_{k-1} + A_1R_{k-2} + n)\sigma^k,$$

d'où il s'ensuit que

$$R_k > R_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots)$$

et que

$$(36)\qquad R_k < R_{k-1}(1 + m\sigma^k) + n\sigma^k,$$

où l'on a posé

$$m = A + A_1.$$

En présentant l'inégalité (36), comme l'a fait M. Liapounoff, sous la forme

$$\left(R + \frac{n}{m}\right) < \left(R_{k-1} + \frac{n}{m}\right)(1 + m\sigma^k),$$

---

(1) Nous employons dans ce numéro les raisonnements analogues à ceux de M. Liapounoff, indiqués dans son Mémoire, déjà cité, *Sur certaines questions*, etc.

et, en remarquant qu'on peut l'admettre pour toutes les valeurs de k à partir de $k=1$, on trouve

$$R_k+\frac{n}{m}<\left(R_0+\frac{n}{m}\right)(1+m)(1+m\sigma)(1+m\sigma^2)\ldots(1+m\sigma^k).$$

Le produit infini

$$(1+m)(1+m\sigma)\ldots(1+m\sigma^k)\ldots$$

est évidemment convergent.

En désignant sa valeur par α, nous aurons

$$R_k+\frac{n}{m}<\left(R_0+\frac{n}{m}\right)\alpha,$$

d'où l'on voit que R_k ne surpasse pas un nombre déterminé

$$L_1=\left(R_0+\frac{n}{m}\right)\alpha-\frac{n}{m},$$

quel que soit l'indice k.

Cela posé, on trouve, en vertu de (35),

$$|\rho_k-\rho_{k-1}|<N\sigma^k, \tag{37}$$

où la constante

$$N=(A+A_1)L_1+n$$

ne dépend pas de la position du point p sur la surface (S).

De là se tire la conséquence suivante : *La série*

$$\rho'=\rho_0+(\rho_1-\rho_0)+\ldots+(\rho_k-\rho_{k-1})+\ldots$$

converge absolument et uniformément sur la surface (S).

On peut donc écrire

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{\rho'\cos\psi}{r^2}\,ds=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int\frac{(\rho_k-\rho_{k-1})\cos\psi}{r^2}\,ds,\qquad \rho_{-1}=0,$$

d'où l'on conclut immédiatement, en vertu de (3),

$$\rho'=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\rho'\cos\psi}{r^2}\,ds. \tag{38}$$

En remarquant ensuite que

$$\int\rho_k\,ds=0\qquad(r=1,2,3,\ldots),$$

on trouve

(39) $$\int \rho' \, ds = 0.$$

Les égalités (38) et (39) montrent que la fonction ρ' est identiquement nulle.

Or, cette fonction peut être présentée sous la forme de la série

$$\rho_k + (\rho_{k+1} - \rho_k) + (\rho_{k+2} - \rho_{k+1}) + \ldots.$$

On aura donc

$$\rho_k = (\rho_k - \rho_{k+1}) + (\rho_{k+1} - \rho_{k+2}) + \ldots$$

pour toutes les valeurs de l'indice k.

De cette égalité il vient, en vertu de (37),

(40) $$|\rho_k| < k\sigma^k,$$

k étant un nombre fini et positif.

Cette inégalité montre que *la série*

$$\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k + \ldots$$

converge absolument et uniformément sur la surface (S), *si la fonction continue* ρ_0 *satisfait à la condition*

(41) $$\int \rho_0 \, ds = 0.$$

10. Supposons maintenant que ρ_0 ne satisfait pas à la condition (4). On peut démontrer sans peine que la série

$$\rho_0 + (\rho_1 - \rho_0) + (\rho_2 - \rho_1) + \ldots + (\rho_k - \rho_{k-1}) + \ldots$$

converge absolument et uniformément sur (S), quelle que soit la fonction ρ_0 continue sur (S).

Posons, en effet,

$$\rho'_k = \rho_k - \rho_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots).$$

Il est évident que

$$\rho'_k = \frac{1}{2\pi} \int \rho'_{k-1} \frac{\cos\psi}{r^2} \, ds \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

$$\int \rho'_1 ds = 0.$$

D'après le théorème du numéro précédent, on voit immédiatement que la série

$$\rho_0 + \rho'_1 + \rho'_2 + \ldots + \rho'_k + \ldots$$

converge absolument et uniformément sur (S) et présente, par suite, une fonction continue sur (S), que nous désignerons par ρ (1).

Supposons que ρ_0 satisfasse à la condition

$$\int \rho_0 \, ds = a,$$

a étant une constante positive.

Nous aurons

$$\int \rho \, ds = a.$$

Par conséquent, *la fonction continue*

$$\rho = \lim_{k=\infty} \rho_k$$

n'est pas identiquement nulle.

Elle satisfait à l'équation de M. Robin

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \int \rho \frac{\cos\psi}{r^2} \, ds,$$

et présente, par suite, *la densité d'une couche superficielle répandue sur* (S) *sans action sur un point intérieur à* (S).

Le théorème énoncé à la fin du n° 1 est donc rigoureusement démontré, et le problème fondamental de l'électrostatique est résolu pour toutes les surfaces satisfaisant aux conditions générales du théorème tout à l'heure mentionné.

CHAPITRE III.

LE PROBLÈME HYDRODYNAMIQUE (PROBLÈME DE NEUMANN).

1. Un des problèmes les plus importants d'Hydrodynamique consiste à déterminer une fonction, harmonique à l'intérieur d'un domaine donné, dont la dérivée normale prend la succession des valeurs données sur la surface (S).

Nous considérons séparément deux cas du problème énoncé : le *problème intérieur* et le *problème extérieur*.

Dans le premier cas, il s'agit de trouver une fonction harmonique à l'intérieur

(1) *Voir* ma Note *Sur le problème de la distribution de l'électricité et le problème de Neumann* (*Comptes rendus,* 13 décembre 1897).

d'une surface fermée (S) et satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = f \qquad \text{sur (S)},$$

f étant une fonction continue satisfaisant à la condition

$$\int f\,ds = 0; \tag{1}$$

dans le second, il s'agit de déterminer une fonction, harmonique à l'extérieur de (S), s'annulant à l'infini et satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = f \qquad \text{sur (S)},$$

où f est une fonction quelconque, seulement continue sur (S).

Nous avons, comme je l'ai déjà dit dans l'Introduction, deux méthodes différentes pour résoudre ce problème important : celle de Neumann et celle de M. Robin.

Mais nous n'avions pas, jusqu'à ces derniers temps, la démonstration suffisante de ces méthodes, même dans le cas le plus simple des surfaces convexes.

Seulement, dans ma Note du 13 décembre 1897, j'ai démontré rigoureusement que la méthode de M. Robin s'applique aux surfaces tout à l'heure mentionnées.

Dans ce Mémoire, je démontrerai en toute rigueur que les méthodes dont il s'agit s'appliquent à toutes les surfaces satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3° et 4° de l'Introduction.

2. Nous commencerons par la méthode de M. Robin, dont la démonstration découle presque immédiatement des recherches du Chapitre précédent.

Considérons d'abord le problème intérieur.

Supposons que la surface fermée (S) satisfasse aux conditions indiquées à la fin du n° 1.

Soit f une fonction continue sur (S) satisfaisant à la condition (1).

Formons, comme dans le n° 2 du Chapitre II, la suite des fonctions ρ_k

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi}\int \rho_{k-1}\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{2}$$

en supposant que

$$\rho_0 = f.$$

Dans ce cas, la série

$$f + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k + \ldots$$

présente une fonction continue sur (S).

Posons

$$V = \frac{1}{2\pi}\int (f + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k + \ldots)\frac{1}{r}\,ds. \tag{3}$$

D'après les propriétés connues du potentiel de la simple couche, on trouve

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n} + (f + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k \ldots).$$

Mais, en vertu de (2), on a

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -(\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k + \ldots).$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = f \qquad \text{sur } (S).$$

La fonction V, *définie par la formule* (3), *nous donne, par suite, la solution du problème intérieur de Neumann.*

3. Considérons maintenant le problème extérieur.

Supposons que f, étant continue sur (S), ne satisfasse pas à la condition (1).

Nous avons démontré, dans le Chapitre précédent, que la série

$$m = (f - \rho_1) + (\rho_2 - \rho_3) + \ldots + (\rho_{2k} - \rho_{2k+1}) + \ldots$$

converge absolument et uniformément sur (S), quelle que soit la fonction f, continue sur (S).

La fonction

$$W = -\frac{1}{2\pi}\int [(f - \rho_1) + (\rho_2 - \rho_3) + \ldots + (\rho_{2k} - \rho_{2k+1}) + \ldots]\frac{1}{r}\,ds$$

présentera donc le potentiel de la simple couche de la densité m.

On peut écrire, par conséquent,

$$\frac{\partial W_e}{\partial n} = S_1 + S_2,$$

où l'on a posé

$$S_1 = (\rho_1 - \rho_2) + (\rho_3 - \rho_4) + \ldots + (\rho_{2k+1} - \rho_{2k+2}) + \ldots,$$
$$S_2 = (f - \rho_1) + (\rho_2 - \rho_3) + \ldots + (\rho_{2k} - \rho_{2k+1}) + \ldots.$$

Les séries S_1 et S_2 étant convergentes sur (S), on a

$$S_1 + S_2 = (f - \rho_2) + (\rho_2 - \rho_4) + \ldots + (\rho_{2k} - \rho_{2k+2}) + \ldots,$$

ou

$$S_1 + S_2 = f - \lim_{k=\infty} \rho_{2k} = f - \rho,$$

ρ étant la densité d'une couche superficielle sans action sur un point intérieur.

Nous pouvons employer la fonction ρ, parce que nous avons démontré l'existence de cette fonction en toute rigueur dans le Chapitre précédent.

On a donc

$$\frac{\partial W_e}{\partial n} = f - \rho \qquad \text{sur } (S).$$

Posons

$$P = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho}{r} ds.$$

P est une fonction harmonique à l'extérieur de (S) et satisfait à la condition

$$\frac{\partial P_e}{\partial n} = -\rho \qquad \text{sur } (S).$$

De là on conclut immédiatement que *la fonction*

$$V = W - P,$$

étant harmonique à l'extérieur de (S), satisfait à la condition

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = \frac{\partial W_e}{\partial n} - \frac{\partial P_e}{\partial n} = f \qquad \text{sur } (S)$$

et *présente, par suite, la solution du problème extérieur de Neumann.*

Nous pouvons donc énoncer ce théorème général :

Théorème. — *La méthode de M. Robin résout le problème hydrodynamique, tant intérieur qu'extérieur, pour toutes les surfaces fermées satisfaisant aux conditions* 1°, 2°, 3° *et* 4° *de l'Introduction, si la fonction donnée f est seulement continue sur la surface.*

4. Considérons maintenant la méthode de Neumann dont la démonstration générale et rigoureuse n'a pas été atteinte jusqu'à ces derniers temps, même pour les surfaces convexes.

Posons

$$(4) \qquad v_1 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f}{r} ds$$

et formons la suite des fonctions

$$(5)\qquad \begin{cases} v_2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \bar{v}_1 \frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds, \\ v_3 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \bar{v}_2 \frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ v_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \bar{v}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds. \end{cases}$$

Supposons que la série

$$(6)\qquad \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \ldots + \bar{v}_k + \ldots.$$

converge absolument et uniformément sur (S).

Formons, après cela, le potentiel de la double couche

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\int (\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \ldots + \bar{v}_k + \ldots)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds.$$

Supposons encore que Φ admette les dérivées normales

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\Phi_e}{\partial n}$$

sur (S) et que

$$(7)\qquad \frac{\partial\Phi_i}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_e}{\partial n} \qquad \text{sur (S)}.$$

Posons ensuite

$$(8)\qquad V = v_1 + \Phi.$$

D'après les propriétés connues du potentiel de la double couche, en remarquant en même temps que la série (8) converge absolument et uniformément, on trouve, en vertu de (5),

$$\Phi_e = (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) + (\bar{v}_3 - \bar{v}_2) + \ldots + (\bar{v}_k - \bar{v}_{k-1}) + \ldots = -\bar{v}_1.$$

Par conséquent

$$V_e = 0.$$

Il s'ensuit que

$$V = 0 \qquad \text{à l'extérieur de (S)}.$$

On a donc

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur (S)},$$

d'où, en tenant compte de (7), on trouve

$$\frac{\partial v_{1e}}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi_e}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial n}.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = \frac{\partial v_{1i}}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \frac{\partial v_{1i}}{\partial n} - \frac{\partial v_{1e}}{\partial n}.$$

Mais, comme on sait [l'égalité (1)],

$$\frac{\partial v_{1i}}{\partial n} - \frac{\partial v_{1e}}{\partial n} = f.$$

Par conséquent, *la fonction* V (8), *harmonique à l'extérieur de* (S), *satisfait à la condition*

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = f \qquad \text{sur (S)}$$

et présente, par suite, la solution du problème hydrodynamique intérieur par la méthode de C. Neumann.

On voit donc que, pour établir en toute rigueur la méthode de Neumann, il faut et il suffit de démontrer : 1° la convergence de la série (6) et 2° l'égalité (7).

On considère ordinairement cette égalité comme un cas particulier du théorème général, énoncé pour la première fois par C. Neumann :

Le potentiel de la double couche de l'intensité continue admet les dérivées normales (intérieure et exérieure) sur (S), *qui sont égales l'une à l'autre.*

Mais ce théorème n'est pas exact en général : on peut en indiquer beaucoup d'exemples, quand le potentiel de la double couche n'admet pas des dérivées normales sur (S).

La démonstration rigoureuse de ce théorème, pour les surfaces satisfaisant aux conditions 1°, 2° et 3° de l'Introduction dans quelques suppositions par rapport à la fonction présentant l'intensité du potentiel de la double couche, a été donnée pour la première fois par M. Liapounoff en 1898.

Nous avons déjà indiqué ce théorème de M. Liapounoff dans le n° 5 du Chapitre I. Mais nous ne l'emploierons pas ici.

Nous démontrerons l'égalité (9) immédiatement, en nous appuyant sur les recherches du Chapitre précédent.

5. Démontrons d'abord la convergence de la série (6).

Les égalités (5) nous montrent que les valeurs des fonctions v_k dans les points de (S) sont liées par les relations

$$\bar{v}_k = \frac{1}{2\pi}\int \bar{v}_{k-1}\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds \qquad (k=2, 3, \ldots), \tag{8 bis}$$

où

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f}{r}\,ds.$$

En comparant ces égalités et les égalités (9) et (5) du Chapitre précédent, on conclut immédiatement que

$$\bar{v}_k = \overline{V}_k \qquad (k=2, 3, \ldots), \tag{9}$$

où V_k sont des fonctions définies par les formules (5) du Chapitre II sous la condition que

$$\rho_0 = -\frac{f}{2}.$$

Mais, puisque l'on a

$$\int f\,ds = 0,$$

la série

$$\overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \ldots + \overline{V}_k + \ldots$$

converge absolument et uniformément.

Il en est de même, en vertu de (9), de la série (6), dont la convergence est donc démontrée en toute rigueur.

6. Il ne reste qu'à démontrer l'égalité (7).

En tenant compte des propriétés fondamentales du potentiel de la double couche et des égalités (8 *bis*) et (9), on trouve

$$\bar{v}_{k,i} = \bar{v}_k + \bar{v}_{k-1} = \overline{V}_k + \overline{V}_{k-1} = \overline{V}_{k,i} + \overline{V}_{k-1,i}, \tag{10}$$

$$\bar{v}_{k,e} = \bar{v}_k - \bar{v}_{k-1} = \overline{V}_k - \overline{V}_{k-1} = \overline{V}_{k,e} - \overline{V}_{k-1,e}. \tag{11}$$

Il s'ensuit que

$$v_k = V_k + V_{k-1} \qquad \text{à l'intérieur de (S)}, \tag{12}$$

$$v_k = V_k - V_{k-1} \qquad \text{à l'extérieur de (S)}, \tag{13}$$

ou, en vertu de (5) du Chapitre II,

$$v_k = -\frac{1}{2\pi}\int (\rho_{k-1} + \rho_{k-2})\frac{1}{r}\,ds \qquad \text{à l'intérieur de (S)}, \tag{14}$$

$$v_k = -\frac{1}{2\pi}\int (\rho_{k-1} - \rho_{k-2})\frac{1}{r}\,ds \qquad \text{à l'extérieur de (S)} \tag{15}$$

$$(k=2, 3, \ldots).$$

L'inégalité (40) du Chapitre précédent montre que la série

$$k = (\rho_1 + \rho_0) + (\rho_2 + \rho_1) + \ldots + (\rho_k + \rho_{k+1}) + \ldots$$

converge absolument et uniformément sur (S).

On peut écrire, par conséquent,

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{k}{r} ds = \frac{1}{2\pi}\int (\rho_1 + \rho_0)\frac{1}{r} ds + \frac{1}{2\pi}\int (\rho_2 + \rho_1)\frac{1}{r} ds + \ldots + \frac{1}{2\pi}\int (\rho_k + \rho_{k-1})\frac{1}{r} ds + \ldots,$$

d'où, en vertu de (14), on tire

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{k}{r} ds = - v_2 - v_3 - \ldots - v_k - \ldots \qquad \text{à l'intérieur de (S).}$$

Mais

$$\Phi = v_2 + v_3 + \ldots + v_k + \ldots.$$

Par conséquent,

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{k}{r} ds = W_1 \qquad \text{à l'intérieur de (S).} \tag{16}$$

Il est évident aussi que la série

$$l = (\rho_1 - \rho_0) + (\rho_2 - \rho_1) + \ldots + (\rho_k - \rho_{k-1}) + \ldots$$

converge uniformément sur (S).

7. En raisonnant, comme précédemment, on trouve [en vertu de (15)]

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{l}{r} ds = W_2 \qquad \text{à l'extérieur de (S).} \tag{17}$$

Les égalités (16) et (17) nous donnent

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_e}{\partial n} = \frac{\partial W_{1i}}{\partial n} - \frac{\partial W_{2e}}{\partial n} \qquad \text{sur (S).} \tag{18}$$

Mais, comme l'on sait,

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial n} = \frac{\partial W_1}{\partial n} - [(\rho_1 + \rho_0) + (\rho_2 + \rho_1) + \ldots + (\rho_k + \rho_{k-1}) + \ldots]$$

et, en vertu de (2),

$$\frac{\partial W_1}{\partial n} = (\rho_2 + \rho_1) + (\rho_3 + \rho_2) + \ldots + (\rho_k + \rho_{k-1}) + \ldots.$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial n} = -(\rho_1 + \rho_0).$$

On a de même

$$\frac{\partial W_{2e}}{\partial n} = \frac{\partial W_2}{\partial n} + (\rho_1 - \rho_0) + (\rho_2 - \rho_1) + \ldots + (\rho_k - \rho_{k-1}) + \ldots,$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial n} = (\rho_2 - \rho_1) + (\rho_3 - \rho_2) + \ldots + (\rho_k - \rho_{k-1}) + \ldots,$$

d'où

$$\frac{\partial W_{2e}}{\partial n} = \rho_1 - \rho_0 + 2[(\rho_2 - \rho_1) + \ldots + (\rho_k - \rho_{k-1}) + \ldots].$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial n} - \frac{\partial W_{2e}}{\partial n} = -2[\rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) + (\rho_3 - \rho_2) + \ldots + (\rho_k - \rho_{k-1}) + \ldots] = -2 \lim_{k=\infty} \rho_k = 0,$$

et, en vertu de (18),

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial n} \quad \text{sur (S)}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous avons ainsi démontré que *la méthode de Neumann résout le problème hydrodynamique intérieur pour toutes les surfaces satisfaisant aux conditions* 1°, 2°, 3° et 4° (Introduction, n° **1**).

8. Passons maintenant au problème extérieur.

Employons de nouveau les fonctions v_k, en prenant

$$v_1 = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{f}{r}\,ds,$$

f étant une fonction *seulement continue sur* (S).

Supposons que la série

$$(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + (\bar{v}_3 - \bar{v}_4) + \ldots + (\bar{v}_{2k-1} - \bar{v}_{2k}) + \ldots \tag{19}$$

converge uniformément sur (S) et formons le potentiel de la double couche

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\int [(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + (\bar{v}_3 - \bar{v}_4) + \ldots + (\bar{v}_{2k-1} - \bar{v}_{2k}) + \ldots]\frac{1}{r}\,ds.$$

Supposons encore qu'on ait, comme précédemment,

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial n}. \tag{20}$$

Cela posé, envisageons la fonction harmonique

$$V = v_1 - \Phi. \tag{21}$$

On a

$$V_i = v_{1i} - \Phi_i = \bar{v}_1 - \Phi_i, \tag{22}$$

et, en vertu de (5),

$$\Phi_i = (v_{2i} - v_{3i}) + (v_{4i} - v_{5i}) + \ldots + (v_{2k,i} - v_{2k+1,i}) + \ldots.$$

D'autre part, les égalités (10) donnent

$$v_{2k,i} - v_{2k+1,i} = \overline{V}_{2k-1} - \overline{V}_{2k+1}.$$

Par conséquent,

$$-\Phi_i = (\overline{V}_3 - \overline{V}_1) + (\overline{V}_5 - \overline{V}_3) + \ldots + (\overline{V}_{2k+1} - \overline{V}_{2k-1}) + \ldots.$$

La série (19) étant convergente, il en est de même, en vertu de (9), de la dernière série.

On peut donc écrire

$$-\Phi_i = -\overline{V}_1 + \lim_{k=\infty} \overline{V}_{2k+1},$$

d'où l'on voit [l'égalité (22)] que

$$V_i = \lim_{k=\infty} V_{2k+1}.$$

Si nous démontrons que

$$\lim_{k=\infty} V_{2k+1} = \text{const.},$$

nous aurons

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur (S)},$$

ou, en vertu de (21) et (20),

$$\frac{\partial v_{1i}}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial n}.$$

D'autre part, on a

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = \frac{\partial v_{1e}}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_e}{\partial n} = \frac{\partial v_{1e}}{\partial n} - \frac{\partial v_{1i}}{\partial n}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = f \qquad \text{sur (S)}.$$

La fonction V, *définie par la formule* (21), *présentera donc la solution du problème hydrodynamique extérieur.*

Pour établir en toute rigueur la méthode de Neumann dans le cas considéré, il faut donc démontrer : 1° la convergence uniforme de la série (19); 2° l'égalité (20); et 3° l'égalité suivante

$$\lim_{k=\infty} \overline{V}_k = \text{const.} \tag{23}$$

9. La convergence uniforme de la série (19) est presque évidente.

En posant en effet

$$W_k = \overline{V}_{k+1} - \overline{V}_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

on trouve, en vertu de (5),

$$W_k = -\frac{1}{2\pi}\int \rho'_{k-1}\frac{1}{r}\,ds \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

où l'on a posé

$$\rho'_0 = \rho_1 - \frac{f}{2}, \qquad \rho'_k = \rho_{k+1} - \rho_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Il est évident que ρ'_0 satisfait à la condition

$$\int \rho'_0\,ds = 0.$$

En appliquant le théorème du n° 7 du Chapitre précédent, on trouve

$$|W_k| < C\tau^k,$$

d'où l'on conclut immédiatement que la série (19) converge absolument et uniformément sur (S).

D'autre part, si la fonction

$$\rho_0 = \frac{f}{2}$$

ne satisfait pas à la condition

$$\int \rho_0\,ds = 0,$$

la fonction ρ_k tend vers ρ [1], quand k croît indéfiniment (*voir* Chap. II). On a, par conséquent,

$$\lim_{k=\infty} \overline{v}_k = \lim_{k=\infty} \overline{V}_k = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\rho}{r}\,ds = \text{const.},$$

ce qui démontre l'égalité (23).

Il ne reste qu'à démontrer l'égalité (20).

---

[1] ρ étant la densité d'une couche électrique en équilibre sur (S).

Posons

$$k = (\rho_0 - \rho_2) + (\rho_2 - \rho_4) + \ldots + (\rho_{2k} - \rho_{2k+2}) + \ldots.$$

Cette série converge absolument et uniformément sur (S), quelle que soit la fonction

$$\rho_0 = \frac{f}{2},$$

continue sur (S).

On a, par conséquent,

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{k}{r}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int (\rho_0 - \rho_2)\frac{1}{r}\,ds + \frac{1}{2\pi}\int (\rho_2 - \rho_4)\frac{1}{r}\,ds + \ldots + \frac{1}{2\pi}\int (\rho_{2k} - \rho_{2k+2})\frac{1}{r}\,ds + \ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{k}{r}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int [\rho_1 + \rho_0 - (\rho_2 + \rho_1)]\frac{1}{r}\,ds + \ldots + \frac{1}{2\pi}\int [\rho_{2k+1} + \rho_{2k} - (\rho_{2k+2} + \rho_{2k+1})]\frac{1}{r}\,ds + \ldots,$$

d'où l'on tire, en vertu de (14),

$$(24)\quad \begin{cases} W_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \frac{k}{r}\,ds = -(v_2 - v_3) - (v_4 - v_5) - \ldots - (v_{2k} - v_{2k+1}) - \ldots = -\Phi \\ \text{à l'intérieur de (S).} \end{cases}$$

La série

$$l = (\rho_1 - \rho_0) - (\rho_2 - \rho_1) + \ldots + (-1)^{k-1}(\rho_k - \rho_{k-1}) + \ldots$$

est aussi convergente, quelle que soit la fonction ρ_0 continue sur (S). On a donc, comme précédemment,

$$(25)\qquad W_2 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{l}{r}\,ds = -\Phi \qquad \text{à l'extérieur de (S).}$$

Les égalités (24) et (25) nous donnent

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_e}{\partial n} = \frac{\partial W_{2e}}{\partial n} - \frac{\partial W_{1i}}{\partial n}.$$

Mais

$$\frac{\partial W_{2e}}{\partial n} - \frac{\partial W_{1i}}{\partial n} = -(S_1 - S_2 + k + l),$$

où l'on a posé

$$S_1 = (\rho_2 - \rho_1) - (\rho_3 - \rho_2) + \ldots + (-1)^{k-1}(\rho_{k+1} - \rho_k) + \ldots,$$
$$S_2 = (\rho_1 - \rho_3) + (\rho_3 - \rho_5) + \ldots + (\rho_{2k+1} - \rho_{2k+3}) + \ldots.$$

En remarquant que les séries

$$T_1 = (\rho_1 - \rho_0) + (\rho_3 - \rho_2) + \ldots + (\rho_{2k+1} - \rho_{2k}) \quad + \ldots,$$
$$T_2 = (\rho_2 - \rho_1) + (\rho_4 - \rho_3) + \ldots + (\rho_{2k+2} - \rho_{2k+1}) + \ldots,$$

convergent absolument et uniformément, on peut écrire

$$l = T_1 - T_2.$$

On a donc

$$k + l - S_2 = k + T_1 - (S_2 + T_2).$$

Mais

$$k + T_1 = (\rho_1 - \rho_2) + (\rho_3 - \rho_4) + \ldots + (\rho_{2k+1} - \rho_{2k+2}) + \ldots = Q_1,$$
$$S_2 + T_2 = (\rho_2 - \rho_3) + (\rho_4 - \rho_5) + \ldots + (\rho_{2k+2} - \rho_{2k+3}) + \ldots = Q_2.$$

En même temps on a, en vertu de la convergence uniforme des séries Q_1 et Q_2,

$$-S_1 = Q_1 - Q_2.$$

Par conséquent,

$$S_1 - S_2 + k + l = 0$$

et

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial n}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En comparant toutes les recherches précédentes on peut énoncer ce théorème général :

Théorème. — *La méthode de Neumann résout le problème hydrodynamique, tant intérieur qu'extérieur, pour toutes les surfaces fermées satisfaisant aux conditions* 1°, 2°, 3° *et* 4° *de l'Introduction, si la fonction donnée f est seulement continue sur la surface.*

10. En terminant ce Chapitre je me permets encore de faire les remarques suivantes :

En employant les résultats obtenus dans les Chapitres précédents, nous pouvons résoudre complètement des divers problèmes importants de la théorie analytique de la chaleur.

Nous pouvons, par exemple, démontrer en toute rigueur, sans employer les fonctions discontinues autres que $\frac{1}{r}$, le théorème suivant :

Il existe une fonction u, continue avec ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur de la surface donnée (S), *assujettie aux conditions du théorème du numéro précédent, satisfaisant aux conditions*

$$\Delta u + f = 0 \qquad \text{à l'intérieur de (S),}$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial n} + h u_i = 0 \qquad \text{sur (S),}$$

où f est une fonction donnée, continue à l'intérieur de (S), *h est une constante positive ou zéro.*

Ce théorème nous donne la solution complète du problème connu des *températures stationnaires.*

Nous pouvons ensuite donner une démonstration simple de ce théorème important :

Il existe pour toute surface ayant les propriétés du théorème précédent, une infinité de nombres positifs

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_s,$$

croissant indéfiniment avec s, et de fonctions correspondantes

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_s,$$

satisfaisant aux conditions

$$\Delta V_s + k_s V_s = 0 \qquad \text{à l'intérieur de (S),}$$

$$\frac{\partial V_{s,i}}{\partial n} + h V_s = 0 \qquad \text{sur (S),}$$

où h est une constante positive ou zéro.

Nous pouvons enfin démontrer rigoureusement l'existence des diverses fonctions discontinues qui peuvent jouer un rôle important dans les recherches sur le développement d'une fonction donnée suivant les fonctions V_s, l'existence des fonctions fondamentales de M. Poincaré, etc.

Mais ces recherches peuvent faire l'objet d'un autre Mémoire et nous ne les reproduirons pas ici.

CHAPITRE IV.

LE PROBLÈME DE DIRICHLET ET LA MÉTHODE DE LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE DE C. NEUMANN.

1. Considérons maintenant le problème classique de Dirichlet quand il s'agit de trouver une fonction harmonique à l'intérieur ou à l'extérieur d'une surface donnée (S) et se réduisant à une fonction donnée f sur (S).

Parmi les méthodes destinées à le résoudre effectivement, la plus simple est la méthode de la moyenne arithmétique de Neumann, qui ne s'applique immédiatement qu'aux surfaces convexes.

Eu égard à la grande importance de cette méthode, il serait nécessaire de l'étendre au cas plus général où la surface donnée n'est pas convexe. Ce problème fut traité par M. Poincaré en 1896 (*Acta Mathematica,* t. XX), qui a établi que la méthode de Neumann est applicable à toutes les surfaces ayant partout un plan tangent et deux rayons de courbure principaux déterminés et admettant la transformation de M. Poincaré si, en même temps, la fonction donnée f a des dérivées de tous les ordres sur (S).

La démonstration de M. Poincaré est fondée sur le principe de Dirichlet et exige quelques suppositions préliminaires qu'on ne peut pas regarder comme démontrées rigoureusement (1).

En m'appuyant sur les recherches précédentes, j'ai réussi à établir la méthode de Neumann en toute rigueur, *indépendamment du principe de Dirichlet* (2), dans le cas plus général *où la surface donnée satisfait aux conditions* 1°, 2°, 3° *et* 4° *du n° 2 de l'Introduction et la fonction donnée f n'est que continue sur* (S).

Nous considérons séparément, comme dans le cas du problème hydrodynamique :

Le *problème intérieur de Dirichlet,* quand il s'agit de trouver une fonction, harmonique à l'intérieur de la surface donnée, se réduisant à une fonction donnée f sur (S) et;

Le *problème extérieur de Dirichlet,* quand il s'agit de trouver une fonction, harmonique à l'intérieur de (S), s'annulant à l'infini et se réduisant à f sur (S).

2. Supposons d'abord qu'on puisse considérer f sur (S) comme la limite d'une autre fonction $F(x, y, z)$ continue avec ses dérivées de deux premiers ordres dans tout le domaine (D) limité par (S) [la surface (S) y comprise].

Dans les suppositions faites à l'égard de (S) et de f, on peut employer le théorème de Green, qui donne

$$F(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int f\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds + \frac{1}{4\pi}\int\frac{dF_i}{\partial n}\frac{1}{r}\,ds - \frac{1}{4\pi}\int\frac{\Delta F}{r}\,d\tau \quad \text{à l'intérieur de (S),}$$

$$0 = \frac{1}{4\pi}\int f\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds + \frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial F_i}{dn}\frac{1}{r}\,ds - \frac{1}{4\pi}\int\frac{\Delta F}{r}\,d\tau \quad \text{à l'extérieur de (S),}$$

où $d\tau$ désigne l'élément de volume du domaine (D).

---

(1) *Comparer* aussi M. A. Korn, *Lehrbuch der Potentialtheorie.* Berlin, 1899.

(2) *Voir* ma Note *Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique* (*Comptes rendus,* 6 mars 1899).

Ces égalités nous montrent immédiatement que, dans le cas considéré, le potentiel de la double couche.

(1) $$W_1 = \frac{1}{2\pi}\int f \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds$$

admet les dérivées normales

$$\frac{dW_{1i}}{\partial n} \quad \text{et} \quad \frac{dW_{1e}}{\partial n}$$

continues sur (S) et que

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial n} = \frac{\partial W_{1e}}{\partial n} = L \qquad \text{sur (S)}.$$

Il est évident que L satisfait à l'équation

(2) $$\int L\, ds = 0.$$

3. Cela posé, formons la suite d'intégrales

(3) $$\left\{\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{2\pi}\int \overline{W}_1 \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds, \\ W_3 &= \frac{1}{2\pi}\int \overline{W}_2 \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ W_k &= \frac{1}{2\pi}\int \overline{W}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds. \end{aligned}\right.$$

Considérons encore les fonctions v_k et V_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$), définies par les relations suivantes

(4) $$v_1 = V_1 = -\frac{1}{2\pi}\int \rho_0 \frac{1}{r}\, ds,$$

(5) $$V_k = -\frac{1}{2\pi}\int \rho_k \frac{1}{r}\, ds,$$

(6) $$\frac{\partial V_k}{\partial n} = \rho_k = -\frac{1}{2\pi}\int \rho_{k-1} \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds,$$

(7) $$v_k = \frac{1}{2\pi}\int \overline{v}_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds,$$

$$(k = 2, 3, \ldots),$$

en y posant

$$\rho_0 = L.$$

Appliquons le théorème de Green, ce qui est possible, à la fonction W_1

[l'égalité (1)]. On trouve

$$(8)\qquad W_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{W_{1,i}\cos\varphi}{r^2}\,ds + \frac{1}{4\pi}\int \frac{L}{r}\,ds \qquad \text{à l'intérieur de (S).}$$

Mais, d'après les propriétés connues du potentiel de la double couche,

$$W_{1i} = \overline{W}_1 + f \qquad \text{sur (S).}$$

En substituant cette expression de W_{1i} dans (8) et en tenant compte des égalités (3) et (4), on trouve

$$(9)\qquad V_1 = v_1 = W_2 - W_1 \qquad \text{à l'intérieur de (S).}$$

On a de même, d'après le théorème de Green,

$$W_1 = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{W_{1,e}\cos\varphi}{r^2}\,ds - \frac{1}{4\pi}\int \frac{L}{r}\,ds \qquad \text{à l'extérieur de (S).}$$

De cette égalité, en remarquant que

$$W_{1e} = \overline{W}_1 - f,$$

nous tirerons, comme précédemment,

$$(10)\qquad V_1 = v_1 = W_2 + W_1 \qquad \text{à l'extérieur de (S).}$$

Les égalités (9) et (10) donnent

$$v_{1i} = v_{1e} = \overline{v}_1 = W_{2,i} - W_{1,i} = W_{2,e} + W_{1,e}\ (^1) \qquad \text{sur (S).}$$

On peut donc écrire, en vertu de (5) (pour $k = 2$),

$$v_2 = \frac{1}{2\pi}\int (W_{2,i} - W_{1,i})\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int (W_{2,e} + W_{1,e})\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds.$$

D'autre part, il est évident que

$$W_{2i} - W_{1i} = W_{2e} + W_{1e} = \overline{W}_2 - f.$$

On a, par suite [en vertu de (3)],

$$(11)\qquad v_2 = \frac{1}{2\pi}\int (\overline{W}_2 - f)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds = W_3 - W_1.$$

---

(1) La fonction $v_1 = V_1$ est continue dans l'espace tout entier comme potentiel de la simple couche.

Supposons maintenant que l'on ait déjà trouvé

$$v_{k-1} = W_k - W_{k-2}.$$

On peut écrire

$$v_k = \frac{1}{2\pi}\int (\overline{W}_k - \overline{W}_{k-2}) \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds,$$

d'où l'on tire immédiatement [en vertu de (3)]

$$(12) \qquad v_k = W_{k+1} - W_{k-1}.$$

Donc, cette égalité étant exacte pour une valeur quelconque de k, elle le sera aussi pour la valeur plus grande d'une unité.

Or, cette égalité est démontrée pour $k = 2$ [l'égalité (11)].

Elle est vraie, par conséquent, pour toutes les valeurs de k à partir de $k = 2$.

4. Envisageons maintenant les égalités (12) et (13) du Chapitre précédent. Nous aurons, en vertu de (12),

$$(13) \qquad W_{k+1} - W_{k-1} = V_k + V_{k-1} \quad \text{à l'intérieur de (S),}$$

$$(14) \qquad W_{k+1} - W_{k-1} = V_k - V_{k-1} \quad \text{à l'extérieur de (S)}$$

$$(k = 2, 3, \ldots).$$

Les égalités (13) donnent, pour $k = 2$,

$$W_3 - W_1 = V_2 + V_1 \quad \text{à l'intérieur de (S),}$$

d'où, en tenant compte de (9), on tire

$$(15) \qquad W_3 - W_2 = V_2 \quad \text{à l'intérieur de (S).}$$

Supposons que l'on ait déjà démontré que

$$(16) \qquad W_{k-1} - W_{k-2} = V_{k-2} \quad \text{à l'intérieur de (S).}$$

On trouve, en vertu de (13),

$$W_k - W_{k-2} = V_{k-1} + V_{k-2} \quad \text{à l'intérieur de (S),}$$

d'où, en vertu de (16),

$$(17) \qquad W_k - W_{k-1} = V_{k-1} \quad \text{à l'intérieur de (S).}$$

Or, cette égalité étant démontrée pour $k = 2$ [l'égalité (15)], elle le sera aussi pour toutes les valeurs de k à partir de $k = 2$.

En posant de même $k = 2$ dans (14), on trouve

$$W_3 - W_1 = V_2 - V_1 \qquad \text{à l'extérieur de (S),}$$

d'où, en vertu de (10),

$$W_3 + W_2 = V_2 \qquad \text{à l'extérieur de (S),}$$

et, en général,

$$W_k + W_{k-1} = V_{k-1} \qquad \text{à l'extérieur de (S)} \quad (k = 2, 3, \ldots). \tag{18}$$

5. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de résoudre le problème suivant :

Le potentiel de la double couche étant donné, trouver le potentiel de la simple couche, prenant à l'intérieur ou à l'extérieur de (S) *les mêmes valeurs que le potentiel donné.*

Soit

$$W_1 = \frac{1}{2\pi} \int f \frac{\cos\varphi}{r^2} ds,$$

le potentiel donné, où f est une fonction satisfaisant aux conditions du n° 2. Dans le cas considéré, on a

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial n} = L \qquad \text{sur (S).}$$

En employant la méthode de M. Robin, qui est applicable à la surface (S), puisque nous supposons qu'elle satisfait aux conditions 1°, 2°, 3° et 4° et que la fonction L est continue sur (S), formons la fonction U, harmonique à l'intérieur de (S), satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial U_i}{\partial n} = -L \qquad \text{sur (S).}$$

On trouve (*voir* Chap. III)

$$U = -\frac{1}{2\pi} \int (L + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k + \ldots) \frac{1}{r} ds,$$

où ρ_k sont les fonctions définies par les formules (6).

On peut écrire aussi, en vertu de (5),

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} V_k.$$

Cela posé, formons la fonction

$$W = W_1 + U.$$

Elle est harmonique à l'intérieur de (S) et satisfait évidemment à la condition

$$\frac{\partial W_i}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur } (S),$$

d'où l'on conclut immédiatement que

$$(19) \qquad W_1 + U = W_1 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k = C = \text{const.} \qquad \text{à l'intérieur de } (S).$$

Employons maintenant la fonction ρ, la densité d'une couche superficielle n'exerçant aucune action à l'intérieur, dont nous avons déjà démontré l'existence dans le Chapitre II.

L'égalité (19) donne

$$W_{1,i} + U_i = \overline{W}_1 + f + U_i = C \qquad \text{sur } (S).$$

De cette égalité on tire aisément

$$C \int \rho\, ds = 2 \int f \rho\, ds.$$

On peut choisir une autre valeur de ρ, que nous désignerons par ρ', de façon que l'on ait

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{\rho'}{r}\, ds = C = \frac{2 \int f \rho\, ds}{\int \rho\, ds}.$$

La fonction ρ' étant choisie de la manière indiquée, la formule (19) donnera

$$(20) \quad W_1 = \frac{1}{2\pi} \int (\rho' + L + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k + \ldots) \frac{1}{r}\, ds \qquad \text{à l'intérieur de } (S)\ [1].$$

Cette égalité nous donne la solution du problème proposé, quand il s'agit de trouver le potentiel de la simple couche, ayant à l'intérieur de (S) *les mêmes valeurs que le potentiel de la double couche donné.*

6. Considérons maintenant les valeurs de W_1 pour les points extérieurs à (S). On a

$$\frac{\partial W_{1e}}{\partial n} = L \qquad \text{sur } (S).$$

---

[1] *Comparer* M. A. Liapounoff, *Sur certaines questions,* etc., p. 290.

Posons

$$U' = -\frac{1}{2\pi}\int [L - \rho_1 + \rho_2 + \ldots + (-1)^k \rho_k + \ldots] \frac{1}{r}\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} V_k.$$

D'après ce que nous avons dit dans le Chapitre II, on sait que la fonction U', étant harmonique à l'extérieur de (S), satisfait à la condition

$$\frac{\partial U'_e}{\partial n} = L.$$

Il en résulte que la fonction

$$W = W_1 - U' = W_1 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} V_k$$

est harmonique à l'extérieur de (S) et satisfait à la condition

$$\frac{\partial W_e}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur (S).}$$

Donc, la fonction W, qui s'annule à l'infini, est identiquement nulle à l'extérieur de (S).

On a, par conséquent,

$$(21) \qquad W_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} V_k = -\frac{1}{2\pi}\int [L - \rho_1 + \rho_2 + \ldots + (-1)^k \rho_k + \ldots] \frac{1}{r}\, ds.$$

Cette égalité fournit la solution du problème proposé, quand il s'agit de trouver le potentiel de la simple couche, ayant aux points extérieurs à (S) *les mêmes valeurs que le potentiel de la double couche donné.*

7. Cela posé, formons la série de Neumann

$$(22) \qquad V = \frac{1}{2}[W_1 - (W_2 - W_1) + (W_3 - W_2) - \ldots + (-1)^{k-1}(W_k - W_{k-1}) + \ldots].$$

En tenant compte de l'égalité (17) et de l'inégalité (25) du théorème du n° 7 du Chapitre II, on trouve immédiatement

$$(23) \qquad |W_{k,i} - W_{k-1,i}| < C\tau^k,$$

d'où l'on conclut que la série

$$(24) \qquad V_i = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}(W_{k,i} - W_{k-1,i}),$$

où il faut poser

$$W_0 = 0,$$

converge absolument et uniformément sur (S).

D'après le théorème connu, qui semble avoir été énoncé pour la première fois par M. Vito Volterra en 1882 [1], on conclut de là que *la série* (22) *converge uniformément en tout point intérieur à* (S) *et présente, par conséquent, une fonction harmonique à l'intérieur de* (S).

Posons maintenant

$$S = (W_{3,i} - W_{2,i}) + (W_{5,i} - W_{4,i}) + \ldots + (W_{2k+1,i} - W_{2k,i}) + \ldots,$$
$$T = (W_{2,i} - W_{1,i}) + (W_{4,i} - W_{3,i}) + \ldots + (W_{2k,i} - W_{2k-1,i}) + \ldots.$$

Ces séries convergent absolument et uniformément sur (S), en vertu de (23).

En remarquant que

$$W_{2,i} - W_{1,i} = \overline{W}_2 - f, \qquad W_{k,i} - W_{k-1,i} = \overline{W}_k - \overline{W}_{k-2} \qquad (k = 3, 4, \ldots),$$

on peut les présenter sous la forme suivante :

$$S = (\overline{W}_3 - \overline{W}_1) + (\overline{W}_5 - \overline{W}_3) + \ldots + (\overline{W}_{2k+1} - \overline{W}_{2k-1}) + \ldots,$$
$$T = (\overline{W}_2 - f) \quad + (\overline{W}_4 - \overline{W}_2) + \ldots + (\overline{W}_{2k} \quad - \overline{W}_{2k-2}) + \ldots,$$

ou

$$S = -\overline{W}_1 + \lim_{k=\infty} \overline{W}_{2k+1}, \tag{25}$$

$$T = -f + \lim_{k=\infty} \overline{W}_{2k}. \tag{26}$$

D'autre part, l'égalité (24) peut s'écrire

$$V_i = \frac{1}{2}(W_{1i} + S - T),$$

ou, en vertu de (25) et (26),

$$V_i = \frac{1}{2}(W_{1i} + f - \overline{W}_1) + \frac{1}{2}\lim_{k=\infty}(\overline{W}_{2k+1} - \overline{W}_{2k}).$$

Mais

$$W_{1i} = \overline{W}_1 + f,$$
$$W_{k,e} = \overline{W}_k - \overline{W}_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots).$$

On a donc

$$V_i = f + \frac{1}{2}\lim_{k=\infty} W_{k,e}. \tag{27}$$

---

(1) On appelle souvent ce théorème *théorème de M. A. Harnack.* — *Voir* A. HARNACK, *Die Grundlagen der Theorie des logaritmischen Potentiales;* Leipzig, 1887, § 20. — P. PAINLEVÉ, *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* t. II, p. B.15; 1888). — P. DUHEM, *Leçons sur l'Électricité,* t. I, p. 222; Paris, 1891.

Il faut déterminer la limite vers laquelle tend $W_{k,e}$ quand k croît indéfiniment. Les égalités (18) du n° 4 nous donnent tout de suite

$$W_k = (-1)^k \left[W_1 - \sum_{s=1}^{k-1} (-1)^{s-1} V_s \right] \qquad \text{à l'extérieur de (S),}$$

d'où, en passant à la limite (pour $k=\infty$), on tire, en vertu de (21),

$$\lim_{k=\infty} W_{k,e} = 0,$$

et l'égalité (27) revient à

$$V_i = f \qquad \text{sur (S).}$$

Il s'ensuit que *la série de Neumann* (22) *fournit la solution du problème intérieur de Dirichlet pour toute surface* (S), *satisfaisant aux conditions* 1°, 2°, 3° *et* 4°, *si la fonction continue f admet les dérivées partielles de deux premiers ordres sur* (S).

8. Considérons maintenant le problème extérieur de Dirichlet.

Posons

$$(28) \qquad V = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (W_k + W_{k-1}), \qquad W_0 = 0.$$

Nous aurons

$$(29) \qquad V_e = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (W_{k,e} + W_{k-1,e}) \qquad \text{sur (S).}$$

Les égalités (18) nous donnent

$$W_{k,e} + W_{k-1,e} = V_{k,e} = \overline{V}_k \qquad (k = 2, 3, \ldots).$$

Il s'ensuit, comme dans le n° 7, que

$$| W_{k,e} + W_{k-1,e} | < C\tau^k.$$

Donc, la série (29) converge absolument et uniformément, et la série (28) présente, par suite, une fonction, harmonique à l'extérieur de (S), qui s'annule évidemment à l'infini.

En remarquant que

$$W_{2,e} + W_{1,e} = \overline{W}_2 - f, \qquad W_{k,e} + W_{k-1,e} = \overline{W}_k - \overline{W}_{k-2} \qquad (k = 3, 4, \ldots),$$

on peut écrire

$$V_e = -\frac{1}{2} W_{1,e} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (\overline{W}_k - \overline{W}_{k-2}),$$

d'où, en adoptant les notations du numéro précédent,

$$V_e = -\frac{1}{2} W_{1,e} - \frac{1}{2}(S+T).$$

Mais, en vertu de (25) et (26),

$$S + T = -f - \overline{W}_1 + \lim_{k=\infty}(\overline{W}_{2k+1} + \overline{W}_{2k}).$$

Par conséquent,

$$V_e = -\frac{1}{2} W_{1,e} + \frac{1}{2}(f + \overline{W}_1) - \frac{1}{2}\lim_{k=\infty}(\overline{W}_{2k+1} + \overline{W}_{2k})$$
$$= f - \frac{1}{2}\lim_{k=\infty}(\overline{W}_{2k+1} + \overline{W}_{2k}).$$

Or on a, en général,

$$W_{k,i} = \overline{W}_k + \overline{W}_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

et la formule précédente revient à

(30) $$V_e = f - \frac{1}{2}\lim_{k=\infty} W_{k,i}.$$

Il faut déterminer la limite vers laquelle tend $W_{k,i}$, quand k croît indéfiniment. En tenant compte des égalités (17) du n° 4, on trouve tout de suite

$$W_k = W_1 + \sum_{s=1}^{k-1} V_s \qquad \text{à l'intérieur de } (S),$$

d'où, en passant à la limite (pour $k=\infty$), on tire immédiatement, en vertu de (19),

$$\lim_{k=\infty} W_{k,i} = C$$

et l'égalité (30) revient à

$$V_e = f - \frac{C}{2} = f + c,$$

où l'on a posé (*voir* n° 5)

(31) $$c = -\frac{C}{2} = -\frac{\int \rho f \, ds}{\int \rho \, ds}.$$

On voit donc que *la série de Neumann* (28) *fournit la solution du problème extérieur de Dirichlet dans les mêmes suppositions à l'égard de la surface donnée et de la fonction f que nous avons énoncées dans le numéro précédent.*

9. Jusqu'à présent, nous avons supposé que la fonction donnée f avait des dérivées partielles de deux premiers ordres sur (S).

Mais cette dernière restriction n'a rien d'essentiel; nous démontrerons tout de suite que les séries (22) et (28) nous donnent la solution des problèmes intérieur et extérieur de Dirichlet, quelle que soit la fonction f, qui n'est que continue sur (S).

Nous emploierons pour cela le théorème de M. Picard [1].

D'après ce théorème, on peut présenter la fonction f, continue sur (S), sous la forme de la série suivante

$$f = P_1 + P_2 + \ldots + P_s + \ldots, \tag{32}$$

uniformément convergente sur (S), où $P_s (s = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des polynomes entiers en x, y, z.

Soit U_s une fonction harmonique à l'intérieur de (S) et se réduisant à P_s sur (S).

Les fonctions $P_s (s = 1, 2, 3, \ldots)$ satisfont évidemment aux conditions faites par rapport à f dans les numéros précédents.

Désignons par

$$W_k^{(s)} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

les fonctions, définies par la suite des égalités (3), quand on y pose P_s au lieu de f. D'après le théorème du n° 7, on trouve

$$U_s = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(W_k^{(s)} - W_{k-1}^{(s)}) \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots). \tag{33}$$

Soit P un point intérieur situé sur la normale à (S) au point quelconque p, soit $pP = \delta$. On peut démontrer à l'aide de l'inégalité (10) du Chapitre I que

$$\sigma_s = \sum_{s=1}^{\infty} | U_s | < \varepsilon_s \frac{Q}{\delta},$$

ε_s étant le maximum de $|P_s|$, Q étant une constante positive.

La série $\sum_{s=1}^{\infty} \sigma_s$ étant convergente, on trouve, d'après le théorème connu,

$$\begin{aligned} V = \sum_{s=1}^{\infty} U_s &= \frac{1}{2}\sum_{s=1}\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(W_k^{(s)} - W_{k-1}^{(s)}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\ \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(W_k^{(s)} - W_{k-1}^{(s)}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(W_k - W_{k-1}). \end{aligned}$$

Cette égalité a lieu pour tout point P intérieur à (S).

---

[1] *Voir* E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 260, 263; Paris, 1891.

La fonction V, étant harmonique à l'intérieur de (S), tend vers f quand P tend vers p. Il en est de même de la *somme* de la série

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(W_k - W_{k-1}).$$

Il en résulte que *la série*

$$V = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(W_k - W_{k-1})$$

fournit la solution du problème intérieur de Dirichlet, quand la fonction donnée f n'est que continue sur (S).

En raisonnant de la même manière, nous démontrerons ensuite que *la série*

$$V = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(W_k + W_{k-1}) \tag{34}$$

fournira la solution du problème extérieur de Dirichlet, quand la fonction f est seulement continue sur (S).

En résumant toutes les recherches précédentes, on arrive à ce théorème général :

Théorème. — *La méthode de la moyenne arithmétique de Neumann résout le problème de Dirichlet, tant intérieur qu'extérieur, pour toutes les surfaces fermées, satisfaisant aux conditions* 1°, 2°, 3° *et* 4° *de l'Introduction, si la fonction donnée f n'est que continue sur la surface.*

10. On voit par ce qui précède que, dans le cas du problème extérieur de Dirichlet, la série de Neumann présente une fonction, harmonique à l'extérieur de (S), s'annulant à l'infini, mais se réduisant sur la surface (S) à une fonction, différant de la fonction donnée f par une constante C, qui, en général, n'est pas égale à zéro.

Mais si f satisfait encore à la condition

$$\int \rho f \, ds = 0,$$

nous aurons, en vertu de (31),

$$C = 0.$$

Dans ce cas seulement la série (34) présentera une fonction, satisfaisant à toutes les conditions du problème énoncé à la fin du n° 1.

CHAPITRE V.

DEUX CAS SPÉCIAUX DU PROBLÈME DE DIRICHLET.

1. Parmi les fonctions harmoniques, les potentiels de la double et de la simple couche sont les fonctions les plus usuelles dans la Physique mathématique.

Les recherches sur les diverses questions de cette branche des Sciences se ramènent souvent à la solution des deux problèmes suivants :

Problème I. — *Trouver à l'intérieur ou à l'extérieur d'une surface donnée* (S) *un potentiel de la double couche, se réduisant à la fonction donnée f sur* (S).

II. *Trouver un potentiel de la simple couche ayant la même propriété.*

Nous avons ici deux cas particuliers du problème de Dirichlet, résolu dans le Chapitre précédent sous la supposition générale que la fonction donnée f est seulement continue sur (S).

Quant aux problèmes tout à l'heure mentionnés, nous ne pouvons les résoudre rigoureusement que sous certaines restrictions complémentaires à l'égard de la fonction f.

Cette restriction consistera en ce que la fonction f sera non seulement continue sur (S), mais satisfera encore à la condition (11) du n° 5 du Chapitre I.

Quant à la surface (S) nous supposons, comme précédemment, qu'elle est assujettie aux conditions 1°, 2°, 3° et 4° du n° 2 de l'Introduction.

Dans les suppositions indiquées à l'égard de (S) et de f nous traiterons les problèmes proposés.

2. Considérons d'abord le problème suivant :

Trouver à l'intérieur de (S) *un potentiel de la double couche, qui se réduise à f sur* (S).

D'après le théorème de M. Liapounoff, énoncé dans le n° 5 du Chapitre I, le potentiel de la double couche

$$W_1 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{f\cos\varphi}{r^2}\,ds$$

admet dans le cas considéré des dérivées normales régulières sur (S), satisfaisant à la condition

$$(1)\qquad \frac{\partial W_{1i}}{\partial n} = \frac{\partial W_{1e}}{\partial n} = L, \qquad \int L\,ds = 0.$$

De là résulte immédiatement que les recherches du Chapitre précédent (n^{os} 1-9) restent vraies non seulement quand f admet des dérivées partielles de deux premiers ordres sur (S), mais encore quand f, étant continue sur (S), ne satisfait qu'à la condition

$$|\bar{f}-f|<b\rho^{\beta+1}. \tag{2}$$

Nous adoptons ici les notations du Chapitre I sans les expliquer de nouveau, en remplaçant seulement la lettre μ par f.

Nous pouvons donc affirmer que la série

$$V=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(W_k-W_{k-1})$$

représente une fonction harmonique à l'intérieur de (S) et se réduisant à f sur (S), f étant une fonction continue sur (S) et satisfaisant à la condition (2).

Cela posé, considérons la série

$$\mu=f-(\overline{W}_1-f)+(\overline{W}_2-\overline{W}_1)-\ldots+(-1)^{k-1}(\overline{W}_k-\overline{W}_{k-1})+\ldots. \tag{3}$$

Nous avons déjà vu que

$$W_{k,e}=\overline{W}_k-\overline{W}_{k-1} \qquad (k=2,\ 3,\ \ldots), \tag{4}$$

et que (*voir* n° 7)

$$W_k=(-1)^k\left[W_1-\sum_{s=1}^{k-1}(-1)^{s-1}V_s\right] \qquad \text{à l'extérieur de (S).}$$

D'autre part, on trouve, en vertu de (21),

$$W_1-\sum_{s=1}^{k-1}(-1)^{s-1}V_s=\sum_{s=k}^{\infty}(-1)^{s-1}V_s=-\frac{1}{2\pi}\int\sum_{s=k-1}^{\infty}(-1)^s\rho_s\frac{1}{r}\,ds.$$

On a donc, en tenant compte de (4),

$$|\overline{W}_k-\overline{W}_{k-1}|=|W_{k,e}|<\frac{1}{2\pi}\left|\int\sum_{s=k-1}^{\infty}(-1)^s\rho_s\frac{1}{r}\,ds\right|<K_1\sum_{s=k-1}^{\infty}R_s,$$

où K_1 est évidemment un nombre fini et positif, R_s $(s=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ désigne le maximum de module ρ_s $(s=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

En remarquant que la fonction continue L satisfait à la condition (1) et en tenant compte de l'inégalité (40) du Chapitre II, on peut écrire

$$R_s = K\sigma^s \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots).$$

On a donc

$$\sum_{s=k-1}^{\infty} R_s = KK_1 \sum_{s=k-1}^{\infty} \sigma^s = N\sigma^{k-1},$$

où l'on a posé

$$N = \frac{KK_1}{1-\sigma}.$$

De là résulte que

$$|W_{k,c}| = |\overline{W}_k - \overline{W}_{k-1}| < N\sigma^{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots).$$

Cette inégalité montre que la série (3) converge absolument et uniformément sur (S).

On peut écrire, par conséquent,

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\mu\cos\varphi}{r^2}\,ds = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\int(\overline{W}_{k-1} - \overline{W}_{k-2})\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds \qquad \text{à l'intérieur de (S),}$$

en supposant que

$$W_0 = f, \qquad W_{-1} = 0,$$

ou, en vertu de (3) du Chapitre précédent,

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\mu\cos\varphi}{r^2}\,ds = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(W_k - W_{k-1}) = 2V \qquad \text{à l'intérieur de (S).}$$

On a donc finalement

$$V = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mu\cos\varphi}{r^2}\,ds \qquad \text{à l'intérieur de (S).}$$

Cette égalité résout complètement le problème proposé.

3. Supposons maintenant qu'il s'agisse de *trouver à l'extérieur de* (S) *un potentiel de la double couche se réduisant à f sur* (S).

On ne peut pas résoudre ce problème dans le cas général, quand f ne satisfait qu'aux conditions du n° 1, mais on peut déterminer le potentiel de la double couche V, tel que l'on ait

$$V = f + c \qquad \text{sur (S),}$$

c étant une constante déterminée [*voir* n° 8, l'égalité (31)].

Considérons la série

(5) $\lambda = f + (\overline{W}_1 + f - C) + (\overline{W}_2 + \overline{W}_1 - C) + \ldots + (\overline{W}_k + \overline{W}_{k-1} - C) + \ldots,$

où

$$C = -2c.$$

Nous avons déjà démontré (n° 8) que

(6) $$W_{k,i} = \overline{W}_k + \overline{W}_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

et en même temps

$$W_{k,i} = W_{1,i} + \sum_{s=1}^{k-1} V_{s,i}.$$

D'autre part, en tenant compte des égalités (19) et (20) du n° 5, on trouve

$$W_{k,i} = C - \sum_{s=k}^{\infty} V_{s,i} = C + \frac{1}{2\pi} \int \sum_{s=k-1}^{\infty} \rho_s \frac{1}{r}\, ds,$$

d'où l'on tire immédiatement [l'égalité (6)]

$$|\overline{W}_k + \overline{W}_{k-1} - C| = |W_{k,i} - C| < K_1 \sum_{s=k-1}^{\infty} R_s,$$

et, comme dans le numéro précédent,

$$|\overline{W}_k + \overline{W}_k - C| < N\sigma^{k-1}.$$

Il s'ensuit que la série (5) converge absolument et uniformément sur S.

On peut donc écrire

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\lambda \cos\varphi}{r^2}\, ds = \frac{1}{2\pi}\int \frac{f \cos\varphi}{r^2}\, ds + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int (\overline{W}_k + \overline{W}_{k-1} - C)\frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds$$

à l'extérieur de (S).

Cette égalité peut s'écrire aussi sous la forme suivante

(7) $$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\lambda\cos\varphi}{r^2}\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} (W_k + W_{k-1}) \qquad \text{à l'extérieur de (S)},$$

puisque, d'après le théorème connu de Gauss,

$$\int \frac{C \cos\varphi}{r^2}\, ds = 0 \qquad \text{à l'extérieur de (S)}.$$

Mais, d'après le théorème du n° 8, on trouve

$$-\sum_{k=1}^{\infty}(W_{k,c}+W_{k-1,c}) = 2f + 2c \qquad \text{sur (S).}$$

En rapprochant cette égalité et (7), on conclut immédiatement que *la fonction*

$$V = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\lambda \cos\varphi}{r^2}\, ds \qquad \text{à l'extérieur de (S)}$$

fournit la solution complète du problème proposé.

Si la fonction f satisfait à la condition

$$\int \rho f\, ds = 0,$$

nous obtiendrons le potentiel de la double couche, se réduisant à la fonction donnée f sur (S).

4. Passons maintenant au problème de Gauss, quand il s'agit de *trouver un potentiel de la simple couche, prenant la succession des valeurs données f sur* (S).

La solution de ce problème important découle presque immédiatement des recherches du Chapitre précédent.

Reprenons, en effet, la série de Neumann

$$V = \tfrac{1}{2}W_1 - \tfrac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k(W_k - W_{k-1}) \qquad \text{à l'intérieur de (S),}$$

qu'on peut présenter, en vertu de (17) du Chapitre précédent, sous la forme suivante :

$$V = \tfrac{1}{2}W_1 - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}V_k \qquad \text{à l'intérieur de (S).}$$

Employons encore l'égalité (19) du même Chapitre,

$$\tfrac{1}{2}W_1 = \frac{C}{2} - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}V_k = c - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}V_k \qquad \text{à l'intérieur de (S)}$$

En ajoutant ces dernières égalités, on trouve facilement

$$V = c - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}V_{2k-1}.$$

En choisissant la densité ρ d'une couche superficielle en équilibre sur (S), de façon que l'on ait

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\rho}{r}\,ds = c,$$

et en tenant compte des égalités (5) du Chapitre précédent, on trouve finalement

$$V = \frac{1}{2\pi}\int (\rho + L - \rho_3 + \rho_5 - \rho_7 + \ldots + (-1)^k \rho_{2k+1} + \ldots)\frac{1}{r}\,ds.$$

Le problème de Gauss est donc résolu pour toute surface fermée (S), *assujettie aux conditions du n°* 1, *si la fonction donnée f, continue sur* (S), *satisfait encore à l'inégalité* (2).

Nous pouvons aussi énoncer le résultat obtenu sous la forme du théorème suivant :

Théorème. — *La fonction* V, *harmonique à l'intérieur ou à l'extérieur de la surface donnée* (S) *et se réduisant à la fonction donnée f sur* (S), *admet des dérivées normales, régulières sur* (S), *si la surface* (S) *satisfait aux conditions* 1°, 2°, 3° *et* 4° (Introduction, n° 2), *et la fonction f, continue sur* (S), *à l'inégalité* (2).

5. En comparant les résultats obtenus et les dernières recherches de M. Liapounoff [1], de M. Poincaré [2] et de M. Zaremba [3], nous tirerons tout de suite quelques conséquences importantes que j'indiquerai sans reproduire la démonstration.

D'après ce que nous avons dit, il est facile de voir, en effet, qu'*on peut regarder comme démontrés en toute rigueur les théorèmes suivants pour toutes les surfaces fermées, satisfaisant aux conditions du théorème précédent :*

Théorème I. — *La fonction de Green* G, *dépendant de deux systèmes de coordonnées* x, y, z, *et* ξ, η, ζ, *et correspondant à la surface donnée* (S), *admet des dérivées normales, régulières sur* (S). *Elle est symétrique en* x, y, z *et* ξ, η, ζ.

Théorème II. — *La fonction* V, *harmonique dans un domaine* (D), *limitée par la surface donnée* (S), *et se réduisant à une fonction continue f sur* (S), *peut se présenter sous la forme suivante :*

$$V = \frac{1}{4\pi}\int f\,\frac{\partial G_i}{\partial n}\,ds.$$

(1) *Journal de Mathématiques;* 1898.
(2) *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo;* 1894.
(3) *Journal de Mathématiques;* 1898.

THÉORÈME III. — *Les intégrales*

$$\int \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| d\tau', \quad \int \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| d\tau', \quad \int \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right| d\tau',$$

étendues par rapport aux variables ξ, η, ζ *au domaine* (D) *tout entier, ne surpassent pas un nombre* K, *fini et positif, quelle que soit la position du point* x, y, z *dans le domaine* (D).

THÉORÈME IV. — *Pour toute surface* (S) *ayant les propriétés mentionnées plus haut, il existe une infinité de nombres positifs*

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_s, \quad \ldots,$$

indéfiniment croissant avec s, et de fonctions correspondantes

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_s, \quad \ldots,$$

satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned} \Delta V_s + k_s V_s &= 0 \qquad \text{à l'intérieur de (S)}, \\ V_s &= 0 \qquad \text{sur (S)} \\ &(k = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

6. En terminant mes recherches, je ferai encore la remarque suivante :

Tous les théorèmes démontrés dans ce Mémoire ont lieu pour toute surface (S) satisfaisant aux conditions générales 1°, 2° et 3°, pourvu *que le théorème fondamental de M. Poincaré* (voir *Chap. I, n°* **11**) *lui soit applicable.*

Il s'ensuit que la solution générale de tous les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique se ramène à la démonstration d'un seul théorème, que j'ai appelé, à cause de cela, *théorème fondamental,* pour les surfaces satisfaisant seulement aux trois conditions 1°, 2° et 3°.

Malheureusement je n'ai pas réussi, en ce moment, à le démontrer en toute rigueur dans ce cas général, et je dois me borner à la remarque que je viens de faire.