
SUR LES

SURFACES RÉGLÉES DU QUATRIÈME DEGRÉ,

PAR M. L. ROUYER,

Professeur au Lycée d'Alger.

Nous ne nous occuperons que des surfaces réglées non développables. Cela posé, une surface réglée S du quatrième degré est coupée par un plan tangent quelconque suivant une génératrice rectiligne D et une courbe du troisième degré C . La droite D et la courbe C se rencontrent en trois points dont l'un est le point de contact M du plan tangent. D'ailleurs, la droite D ne peut pas être tangente à C au point M quel que soit le plan tangent, sinon en tout point de la surface les deux directions asymptotiques seraient confondues et la surface serait développable; C et D se rencontrent donc, en dehors de M , en deux points distincts ou confondus et qui sont forcément des points singuliers de la surface. D'autre part, la courbe C ne se décompose pas, car un plan tangent quelconque couperait la surface suivant deux droites, ce qui est impossible; par suite, C possède au plus un point double. Chaque plan tangent contient donc au plus trois points singuliers de la surface et la ligne des points singuliers peut être coupée en trois points (au plus) par un plan quelconque. Il est alors facile de déterminer les différentes variétés que peut présenter cette ligne.

1° C n'a pas de point double et rencontre D en deux points distincts autres que M . La ligne des points singuliers se compose alors de deux droites non concourantes qui sont deux directrices rectilignes de la surface.

2° C possède un point double et rencontre D en deux points distincts différents de M ; la ligne des points singuliers est alors du troisième degré et peut être :

a. Une cubique gauche.

b. Une conique et une droite non situées dans le même plan, mais qui se rencontrent en un point; car, s'il n'en était pas ainsi, toute droite située dans le plan de la conique double et rencontrant la droite double couperait la surface en six points.

c. Trois droites dont l'une s'appuie forcément sur les deux autres. Ces deux dernières, qui ne sont pas concourantes, sont des directrices de la surface, mais la

troisième droite double n'est pas rencontrée par les autres génératrices rectilignes.

3° D et C se coupent en deux points confondus différents de M. Supposons d'abord que D et C soient tangentes en un point ordinaire N de C.

a. C n'a aucun point singulier; alors la ligne des points singuliers de la surface est une droite le long de laquelle les deux nappes sont tangentes en chaque point. Une section plane quelconque possède alors un point double situé sur la droite singulière et pour lequel les deux branches sont tangentes.

b. C possède un point double. Comme cette courbe est du troisième degré, elle ne peut posséder un point double de l'espèce que nous venons de signaler : ce ne peut être qu'un point double ordinaire ou un point de rebroussement qui est situé en dehors de D. La surface possède alors la même droite singulière que précédemment et, d'autre part, le lieu du point double de C ne peut être qu'une droite double, mais qui n'est pas une directrice de la surface.

Dans ces deux derniers cas, la surface peut être considérée comme une dégénérescence de la surface à deux directrices doubles si l'on suppose ces deux droites confondues.

4° D et C se coupent en dehors du point M en un point singulier de C, c'est-à-dire en un point double. La surface possède alors une droite triple.

a. Par chaque point de la droite triple passent trois génératrices rectilignes formant un trièdre : il n'existe alors aucune autre directrice rectiligne.

b. Par chaque point de la droite triple passent trois génératrices situées dans un même plan. Dans ce cas, si l'on considère l'intersection de deux de ces plans, elle coupe la surface en six points et, par suite, appartient à la surface. Il existe alors une autre directrice rectiligne qui est une droite simple de la surface.

L'énumération de ces surfaces a été reprise en 1886 par M. Rohn ⁽¹⁾ qui a complété des résultats établis par Cremona. Toutefois la nomenclature donnée par M. Rohn est encore incomplète : nous signalons un cas particulier intéressant des surfaces à cubique double et surtout deux types de surfaces possédant une droite et un conique doubles.

Nous n'étudierons pas en détail toutes ces surfaces et nous nous contenterons de quelques remarques générales. M. Rohn signale une seule surface admettant une infinité de transformations projectives; cette surface n'est pas la seule jouissant de cette propriété qui appartient aussi aux surfaces à deux droites doubles et à une surface à droite triple que nous déterminons. Si même on considère la surface ayant pour équation

$$tx^3 - zy^3 = 0,$$

(1) *Math. Annalen*, t. XXVIII. — *Die verschiedenen Arten der Regelflächen vierter Ordnung*, p. 284-308.

on sait que cette surface admet une infinité de transformations projectives dépendant de deux paramètres variables (1).

Nous nous occuperons, dans ce Travail, des surfaces à deux directrices doubles. Après avoir rappelé la réduction bien connue de l'équation doublement quadratique à deux variables, nous rattachons au théorème d'addition pour les fonctions elliptiques la recherche des quadriques inscrites dans la surface. Il existe, pour la surface la plus générale, douze familles de ces quadriques que nous déterminons explicitement; à chacune d'elles correspond une forme particulière du théorème d'addition.

Nous indiquons également quelques applications du théorème d'Abel qui sont à rapprocher des résultats établis par Laguerre (2) sur les propriétés de la biquadratique gauche. Dans ces recherches, Laguerre utilise d'ailleurs deux cas particuliers de la surface à deux droites doubles.

Nous établissons ensuite le théorème suivant qui peut être considéré comme une généralisation d'une propriété de la cubique plane de genre un :

Par un point de la surface la plus générale à deux droites doubles, on peut lui mener quatre tangentes doubles dont le rapport anharmonique est constant.

Nous démontrons enfin qu'une telle surface est sa propre polaire relativement à une infinité de quadriques.

Nous consacrons également quelques mots aux surfaces à cubique double et aux surfaces possédant une droite et une conique doubles pour compléter les résultats de M. Rohn et pour montrer que ces surfaces sont, en général, identiques à leur polaire réciproque par rapport à une quadrique convenablement choisie.

SURFACES POSSÉDANT DEUX DIRECTRICES RECTILIGNES DOUBLES DISTINCTES.

Soient Δ et Δ' les deux droites doubles sur lesquelles s'appuient les génératrices rectilignes de la surface. Prenons les deux droites Δ et Δ' comme arêtes opposées du tétraèdre de référence et soient :

$$y - \lambda x = 0, \quad z - \mu t = 0$$

les équations de deux plans passant respectivement par Δ et Δ' . Chacun de ces

(1) LIE, *Transformationsgruppen*, t. III, p. 198.

(2) *Sur un problème de Géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2^e série, t. XV; 1870).

plans coupe la surface suivant deux génératrices rectilignes et, par conséquent, si l'on exprime que leur intersection est une droite de la surface, on obtiendra entre λ et μ une équation doublement quadratique

$$(1) \quad F(\lambda, \mu) = (a\lambda^2 + 2b\lambda + c)\mu^2 + 2(a'\lambda^2 + 2b'\lambda + c')\mu + (a''\lambda^2 + 2b''\lambda + c'') = 0.$$

μ s'exprime rationnellement en fonction de λ et d'un radical $\sqrt{R(\lambda)}$, $R(\lambda)$ étant un polynôme du quatrième degré en λ . De même λ s'exprime rationnellement en fonction de μ et d'un radical analogue $\sqrt{R_1(\mu)}$.

D'une manière générale, $R(\lambda)$ et $R_1(\mu)$ ne peuvent pas être des carrés parfaits, car alors l'équation (1) se décomposerait et la surface ne serait plus du quatrième degré.

Pour effectuer la réduction de l'équation (1), nous remarquerons que toute transformation homographique effectuée sur x et y se traduit par une transformation homographique sur λ .

Par exemple, si l'on pose

$$y = \alpha y' + \beta x', \quad x = \gamma y' + \delta x', \quad \frac{y'}{x'} = \lambda',$$

on a

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta}.$$

Il en est de même pour z , t et μ .

Cela posé, on sait que l'on peut, par des transformations homographiques effectuées séparément sur λ et μ , ramener l'équation (1) à une forme canonique qui dépend de la nature des racines de $R(\lambda)$ et $R_1(\mu)$.

On sait que l'équation (1) représente l'intégrale de l'équation d'Euler :

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} - \frac{d\mu}{\sqrt{R_1(\mu)}} = 0.$$

I. Supposons que R et R_1 aient leurs quatre racines distinctes. On peut alors ramener R et R_1 à la même forme; par exemple,

$$R(\lambda) = (1 - \lambda^2)(1 - k^2\lambda^2),$$

et l'équation différentielle devient

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - k^2\lambda^2)}} = \frac{d\mu}{\sqrt{(1 - \mu^2)(1 - k^2\mu^2)}}.$$

Nous pourrions donc poser

$$\lambda = \operatorname{sn} u, \quad \mu = \operatorname{sn}(u - \alpha),$$

α étant une constante.

Les coordonnées d'un point de la surface peuvent alors s'exprimer de la façon

suivante :

$$x = 1, \quad y = \operatorname{sn} u, \quad z = \nu \operatorname{sn}(u - \alpha), \quad t = \nu$$

en fonction de deux paramètres u et ν .

Pour établir la relation algébrique entre λ et μ nous partirons de l'identité

$$(2) \quad \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u - \alpha) \operatorname{dn} \alpha - \operatorname{cn} \alpha = -\operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u - \alpha);$$

d'où l'on tire

$$(3) \quad (\lambda \mu \operatorname{dn} \alpha - \operatorname{cn} \alpha)^2 = (1 - \lambda^2)(1 - \mu^2).$$

L'équation de la surface est alors

$$(4) \quad (yz \operatorname{dn} \alpha - tx \operatorname{cn} \alpha)^2 - (x^2 - y^2)(t^2 - z^2) = 0.$$

Ces deux dernières équations mettent en évidence certaines propriétés de la surface.

Tout plan passant par Δ coupe la surface suivant deux génératrices dont les arguments u_1 et u_2 sont donnés par l'équation

$$\operatorname{sn} u - \lambda = 0,$$

et l'on a, par suite,

$$u_1 + u_2 = 2\mathbf{K} + 4m\mathbf{K} + 2ni\mathbf{K}'.$$

Si les deux génératrices sont confondues, on a

$$u_1 = u_2 = \mathbf{K} + 2m\mathbf{K} + ni\mathbf{K}';$$

il suffit de donner à m et n les valeurs 0 et 1; on obtient quatre génératrices :

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv \mathbf{K}, & u_2 &\equiv -\mathbf{K}, \\ u_3 &\equiv \mathbf{K} + i\mathbf{K}', & u_4 &\equiv -\mathbf{K} + i\mathbf{K}'. \end{aligned}$$

Ces quatre génératrices sont situées respectivement dans les quatre plans

$$\begin{aligned} x - y &= 0, & x + y &= 0, \\ x - ky &= 0, & x + ky &= 0. \end{aligned}$$

Chacun de ces plans est tangent à la surface le long de la génératrice correspondante.

Les quatre plans

$$\begin{aligned} t - z &= 0, & t + z &= 0, \\ t - kz &= 0, & t + kz &= 0 \end{aligned}$$

jouissent de la même propriété et touchent la surface suivant les génératrices ayant pour arguments respectifs :

$$\begin{aligned} u'_1 &\equiv \mathbf{K} + \alpha, & u'_2 &\equiv \alpha - \mathbf{K}, \\ u'_3 &\equiv \alpha + \mathbf{K} + i\mathbf{K}', & u'_4 &\equiv \alpha - \mathbf{K} + i\mathbf{K}'. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc ainsi huit génératrices que nous appellerons par la suite *génératrices remarquables de la surface*.

Génération de la surface S. — L'équation (4) montre que la surface peut être considérée comme l'enveloppe des quadriques de l'une des trois familles

$$(A_1) \quad \theta^2(y^2 - x^2) + 2\theta(yz \operatorname{dn} \alpha - tx \operatorname{cn} \alpha) + z^2 - t^2 = 0,$$

$$(H_1) \quad \theta^2(y - x)(z + t) + 2\theta(yz \operatorname{dn} \alpha - tx \operatorname{cn} \alpha) + (y + x)(z - t) = 0,$$

$$(H_2) \quad \theta^2(y - x)(z - t) + 2\theta(yz \operatorname{dn} \alpha - tx \operatorname{cn} \alpha) + (y + x)(z + t) = 0.$$

Les deux dernières familles comprennent des surfaces passant par les deux droites doubles et, par suite, chacune d'elles touche la surface S suivant deux droites; nous ne nous en occuperons pas pour le moment.

Considérons l'équation (A₁). Elle représente des quadriques qui rencontrent chacune des deux droites Δ et Δ' en deux points fixes par chacun desquels passe une des génératrices remarquables déterminées ci-dessus.

Soit Q l'une quelconque de ces quadriques. La surface peut être engendrée par une droite qui s'appuie sur Δ et Δ' en restant tangente à Q. Menons par Δ un plan quelconque P. Il coupe Q suivant une conique C et rencontre Δ' en un point M. De ce point, on peut mener à C deux tangentes qui sont deux génératrices de la surface. Pour qu'elles soient confondues, il faut :

1° Que M se trouve sur C, c'est-à-dire soit l'un des points d'intersection de Q avec Δ';

2° Ou bien que C dégénère en deux droites, c'est-à-dire que le plan P soit tangent à Q.

Par Δ passent donc quatre plans coupant la surface suivant deux génératrices confondues et ce sont les plans que nous avons déterminés précédemment. Dans le cas qui nous occupe, ces quatre plans doivent être distincts; si l'on veut, par conséquent, engendrer la surface comme nous venons de l'indiquer, il faudra choisir la quadrique Q de telle façon qu'elle ne soit tangente ni à Δ ni à Δ'; et que, de plus, la droite conjuguée de Δ par rapport à Q, ne passe pas par l'un des points d'intersection de Q avec Δ' (même remarque pour la conjuguée de Δ').

Nous voyons donc que non seulement toutes les quadriques de la famille (A) sont circonscrites à un tétraèdre, mais encore qu'elles sont tangentes à quatre

plans fixes ayant pour équations

$$\begin{aligned} x - ky = 0, & \quad x + ky = 0, \\ t - kz = 0, & \quad t + kz = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte qu'aucune de ces quadriques ne peut dégénérer en un cône ou une conique : on le vérifie d'ailleurs aisément sur l'équation.

Il est presque évident que ce mode de génération de la surface n'est pas unique. En effet, rien ne distingue *a priori* les quatre racines des polynômes $R(\lambda)$ et $R_1(\mu)$. On peut donc ramener l'équation (1) à la forme (3) de plusieurs manières. Soient a, b, c, d les racines de $R(\lambda)$ et a_1, b_1, c_1, d_1 celles de $R_1(\mu)$. On a, d'ailleurs,

$$(a, b, c, d) = (a_1, b_1, c_1, d_1).$$

Cela posé, on peut faire en sorte que, par une transformation homographique convenable, deux quelconques des racines de $R(\lambda)$ deviennent égales à $+1$ et -1 en même temps que les deux autres deviennent égales et de signes contraires : $\frac{1}{k}$ et $-\frac{1}{k}$.

Supposons que les deux premières racines soient a et b et les deux autres c et d . On ne pourra alors effectuer sur μ que deux transformations : la première transforme a_1, b_1, c_1, d_1 respectivement en $1, -1, \frac{1}{k}$ et $-\frac{1}{k}$ et la seconde transforme ces mêmes racines en $\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}, 1$ et -1 , ce qui est possible, car on a

$$(a, b, c, d) = (a_1, b_1, c_1, d_1) = (c_1, d_1, a_1, b_1).$$

On peut effectuer sur λ six transformations de la nature indiquée et à chacune d'elles correspondent deux transformations pour μ . Il y a donc, au total, douze combinaisons possibles, c'est-à-dire douze familles de surfaces du second degré inscrites dans S le long d'une courbe du quatrième degré.

Quadriques inscrites dans S . — Nous avons vu qu'il existe sur chaque droite double quatre points par lesquels passent les génératrices remarquables. Ils sont d'ailleurs conjugués deux à deux par rapport aux sommets du triangle de référence. Soient M_1, M_2, M_3, M_4 les points remarquables sur Δ et M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 les points analogues sur Δ' .

Les quadriques cherchées doivent, d'après ce qui précède, couper Δ et Δ' en deux des points remarquables et, par conséquent, aucune de ces quadriques ne passera par les sommets du triangle de référence.

L'équation d'une telle quadrique est de la forme

$$(ay^2 + 2bxy + cx^2) + 2(Ayz + Byt + Czx + Dxt) + (a'z^2 + 2b'zt + c't^2) = 0,$$

où a, c, a', c' sont différents de zéro.

Cherchons les points d'intersection avec une génératrice quelconque. Remplaçons x, y, z, t par

$$1, \lambda, \nu\mu, \nu.$$

Il vient

$$(a'\mu^2 + 2b'\mu + c')\nu^2 + 2(A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D)\nu + (a\lambda^2 + 2b\lambda + c) = 0.$$

Cette équation doit admettre une racine double en ν ; on aura donc

$$(5) \quad (A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D)^2 - (a\lambda^2 + 2b\lambda + c)(a'\mu^2 + 2b'\mu + c') = 0.$$

Cette équation doublement quadratique n'est donc qu'une autre forme de l'équation (3). Le problème revient donc à mettre l'équation (3) sous la forme (5) de toutes les façons possibles.

On établit sans peine l'identité

$$(6) \quad k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u - \alpha) \operatorname{cn} \alpha - \operatorname{dn} \alpha = -\operatorname{dn} u \operatorname{dn}(u - \alpha),$$

d'où l'on tire immédiatement

$$(7) \quad (k^2 \lambda \mu \operatorname{cn} \alpha - \operatorname{dn} \alpha)^2 - (1 - k^2 \lambda^2)(1 - k^2 \mu^2) = 0.$$

Cette équation fournit une deuxième solution du problème. D'autre part, si dans l'équation (6) on remplace u et α par $u + iK'$ et $\alpha + iK'$, il vient

$$\frac{1}{i} \operatorname{sn}(u - \alpha) \frac{1}{\operatorname{sn} u} \frac{\operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{sn} \alpha} - \frac{1}{i} \frac{\operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{sn} \alpha} = -\frac{1}{i} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u} \operatorname{dn}(u - \alpha),$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{sn} u \operatorname{cn} \alpha - \operatorname{sn}(u - \alpha) \operatorname{dn} \alpha = \operatorname{cn} u \operatorname{dn}(u - \alpha) \operatorname{sn} \alpha;$$

d'où l'on tire

$$(8) \quad (\lambda \operatorname{cn} \alpha - \mu \operatorname{dn} \alpha)^2 - (1 - \lambda^2)(1 - k^2 \mu^2) \operatorname{sn}^2 \alpha = 0,$$

et, par symétrie, on a

$$(9) \quad (\lambda \operatorname{dn} \alpha - \mu \operatorname{cn} \alpha)^2 - (1 - \mu^2)(1 - k^2 \lambda^2) \operatorname{sn}^2 \alpha = 0.$$

Les équations (3), (7), (8) et (9) donnent quatre familles des quadriques cherchées et représentées par les équations

$$(A_1) \quad \theta^2(y^2 - x^2) + 2\theta(yz \operatorname{dn} \alpha - tx \operatorname{cn} \alpha) + z^2 - t^2 = 0,$$

$$(A_2) \quad \theta^2(k^2 y^2 - x^2) + 2\theta(k^2 yz \operatorname{cn} \alpha - tx \operatorname{cn} \alpha) + k^2 z^2 - t^2 = 0,$$

$$(A_3) \quad \theta^2(y^2 - x^2) + \frac{2\theta}{\operatorname{sn} \alpha} (yt \operatorname{cn} \alpha - zx \operatorname{dn} \alpha) + k^2 z^2 - t^2 = 0,$$

$$(A_4) \quad \theta^2(k^2 y^2 - x^2) + \frac{2\theta}{\operatorname{sn} \alpha} (yt \operatorname{dn} \alpha - zx \operatorname{cn} \alpha) + z^2 - t^2 = 0.$$

Une quelconque de ces quadriques rencontre l'une des droites doubles en deux points conjugués par rapport aux sommets du triangle de référence situés sur cette droite.

Les équations précédentes ont été obtenues en utilisant des formes diverses du théorème d'addition pour les fonctions elliptiques.

On peut exprimer ce théorème par des équations un peu plus compliquées que les précédentes, mais qui, néanmoins, s'établissent facilement.

Considérons les deux fonctions

$$F(u) = \left\{ k \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u - \alpha) - \frac{\operatorname{dn} \alpha + k \operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{dn} \alpha + \operatorname{cn} \alpha} [\operatorname{sn} u + \operatorname{sn}(u - \alpha)] + 1 \right\}^2,$$

$$\Phi(u) = (1 - \operatorname{sn} u)(1 - k \operatorname{sn} u)[1 - \operatorname{sn}(u - \alpha)][1 - k \operatorname{sn}(u - \alpha)].$$

Elles ont les mêmes périodes $4\mathbf{K}$ et $2i\mathbf{K}'$. Elles ont les mêmes pôles : ceux de $\Theta(u)$ et $\Theta(u - \alpha)$, et l'on vérifie sans peine qu'elles ont les mêmes zéros. Enfin, pour ces deux fonctions, les pôles et les zéros sont doubles. Elles ne diffèrent donc que par un facteur constant et l'on a

$$F(u) = \mathbf{A} \Phi(u).$$

Le coefficient \mathbf{A} se détermine en faisant $u = -\mathbf{K}$,

$$\mathbf{A} = \frac{2}{1+k} \frac{\operatorname{dn} \alpha + k \operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{dn} \alpha + \operatorname{cn} \alpha}.$$

L'équation doublement quadratique s'écrit alors

$$(10) \quad \left[k\lambda\mu - \frac{\operatorname{dn} \alpha + k \operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{dn} \alpha + \operatorname{cn} \alpha} (\lambda + \mu) + 1 \right]^2 - \mathbf{A}(1-\lambda)(1-k\lambda)(1-\mu)(1-k\mu) = 0.$$

Remarquons maintenant que l'équation fondamentale (3) ne change pas quand on y change les signes de λ et de μ . L'équation (10) donne, par cette transformation,

$$(11) \quad \left[k\lambda\mu + \frac{\operatorname{dn} \alpha + k \operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{dn} \alpha + \operatorname{cn} \alpha} (\lambda + \mu) + 1 \right]^2 - \mathbf{A}(1+\lambda)(1+k\lambda)(1+\mu)(1+k\mu) = 0.$$

D'autre part, l'équation (3) ne change pas quand on change λ en $-\lambda$ et α en $\alpha + 2\mathbf{K}$. Effectuons ce changement sur l'équation (10), il vient

$$(12) \quad \left[k\lambda\mu - \frac{\operatorname{dn} \alpha - k \operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{dn} \alpha - \operatorname{cn} \alpha} (\lambda - \mu) - 1 \right]^2 - \mathbf{A}'(1+\lambda)(1+k\lambda)(1-\mu)(1-k\mu) = 0$$

où l'on a posé

$$\mathbf{A}' = \frac{2}{1+k} \frac{\operatorname{dn} \alpha - k \operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{dn} \alpha - \operatorname{cn} \alpha},$$

et, par symétrie,

$$(13) \left[k\lambda\mu + \frac{dn\alpha - kcn\alpha}{dn\alpha - cn\alpha} (\lambda - \mu) - 1 \right]^2 - A'(1-\lambda)(1-k\lambda)(1+\mu)(1+k\mu) = 0.$$

Les équations (10), (11), (12), (13) fournissent quatre nouvelles solutions du problème des quadriques inscrites :

$$(B_1) \quad \theta^2(y-x)(ky-x) + 2\theta \left[ky\alpha - \frac{A(1+k)}{2} (\alpha x + ty) + tx \right] + A(\alpha - t)(k\alpha - t) = 0,$$

$$(B_2) \quad \theta^2(y+x)(ky+x) + 2\theta \left[ky\alpha + \frac{A(1+k)}{2} (\alpha x + ty) + tx \right] + A(\alpha + t)(k\alpha + t) = 0,$$

$$(B_3) \quad \theta^2(y+x)(ky+x) + 2\theta \left[ky\alpha + \frac{A'(1+k)}{2} (\alpha x - ty) - tx \right] + A'(\alpha - t)(k\alpha - t) = 0,$$

$$(B_4) \quad \theta^2(y-x)(ky-x) + 2\theta \left[ky\alpha - \frac{A'(1+k)}{2} (\alpha x - ty) - tx \right] + A'(\alpha + t)(k\alpha + t) = 0.$$

Enfin, on obtient immédiatement les quatre dernières familles en changeant dans les équations précédentes k en $-k$ si l'on remarque que cette transformation n'altère pas l'équation primitive.

Posons

$$B = \frac{2}{1-k} \frac{dn\alpha - kcn\alpha}{dn\alpha + cn\alpha},$$

$$B' = \frac{2}{1-k} \frac{dn\alpha + kcn\alpha}{dn\alpha - cn\alpha},$$

on obtient les quatre équations

$$(C_1) \quad \theta^2(y-x)(ky+x) + 2\theta \left[ky\alpha + \frac{B(1-k)}{2} (\alpha x + ty) - tx \right] + B(\alpha - t)(k\alpha + t) = 0,$$

$$(C_2) \quad \theta^2(y+x)(ky-x) + 2\theta \left[ky\alpha - \frac{B(1-k)}{2} (\alpha x + ty) - tx \right] + B(\alpha + t)(k\alpha - t) = 0,$$

$$(C_3) \quad \theta^2(y+x)(ky-x) + 2\theta \left[ky\alpha + \frac{B'(1-k)}{2} (ty - \alpha x) + tx \right] + B'(\alpha - t)(k\alpha + t) = 0,$$

$$(C_4) \quad \theta^2(y-x)(ky+x) + 2\theta \left[ky\alpha - \frac{B'(1-k)}{2} (ty - \alpha x) + tx \right] + B'(\alpha + t)(k\alpha - t) = 0.$$

Nous obtenons ainsi explicitement les équations des douze familles de quadriques inscrites et à chacune d'elles correspond une forme particulière du théorème d'addition.

Il est bien évident que ces douze familles possèdent les mêmes propriétés.

Considérons, par exemple, la famille (A_1) . Une des surfaces de cette famille

touche son enveloppe S suivant une courbe du quatrième degré définie par les équations

$$\theta(y^2 - x^2) + (yz \operatorname{dn} \alpha - tx \operatorname{cn} \alpha) = 0,$$

$$\theta(yz \operatorname{dn} \alpha - tx \operatorname{cn} \alpha) + (z^2 - t^2) = 0.$$

Une quadrique quelconque passant par cette courbe a pour équation

$$\theta\rho(y^2 - x^2) + (\theta + \rho)(yz \operatorname{dn} \alpha - tx \operatorname{cn} \alpha) + (z^2 - t^2) = 0.$$

La symétrie de cette équation par rapport à θ et ρ montre que cette quadrique rencontre la surface S suivant une autre biquadratique gauche qui est la courbe de contact de la quadrique

$$\rho^2(y^2 - x^2) + 2\rho(yz \operatorname{dn} \alpha - tx \operatorname{cn} \alpha) + (z^2 - t^2) = 0$$

appartenant à la famille (A_1) .

Si donc on considère deux quadriques d'une même famille, leurs courbes de contact avec S sont situées sur une même surface du second degré.

Cherchons maintenant à déterminer le point de contact d'une quadrique (A_1) avec une génératrice donnée. Remplaçons, dans l'équation (A_1) , x, y, z, t par

$$1, \operatorname{sn} u, v \operatorname{sn}(u - \alpha), v.$$

Il vient, en tenant compte des formules d'addition,

$$[\theta \operatorname{cn} u + v \operatorname{cn}(u - \alpha)]^2 = 0.$$

On obtient, comme on devait le prévoir, une racine double en v

$$v = -\theta \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn}(u - \alpha)},$$

expression du premier degré en θ : donc les courbes de contact partagent homographiquement les génératrices rectilignes. Par suite, si quatre génératrices touchent une des quadriques (A_1) suivant quatre points dans un même plan, elles toucheront de la même manière toutes les quadriques de la même famille, et tous les plans correspondant à quatre génératrices données passent par une même droite qui s'appuie sur les droites doubles (car l'équation du plan contiendrait θ au premier degré).

Soient u_1, u_2, u_3, u_4 les arguments de quatre génératrices ainsi choisies. Ils sont donnés par une équation de la forme

$$(14) \quad A + B \operatorname{sn} u - \theta \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn}(u - \alpha)} [C \operatorname{sn}(u - \alpha) + D] = 0.$$

Le premier membre est une fonction elliptique aux périodes $4K$ et $2iK'$. De plus dans un parallélogramme cette fonction possède quatre pôles

$$iK', 2K + iK', \alpha + K \text{ et } \alpha - K.$$

Les quatre zéros vérifient donc la relation

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 2\alpha + 2K,$$

condition qui ne dépend pas de θ .

On pourrait au moyen des formules rechercher les génératrices occupant des positions particulières, mais ceci reviendrait manifestement à l'étude bien connue de la biquadrique gauche.

Nous ferons cependant une remarque intéressante. Si l'on cherche comme précédemment la condition pour que quatre génératrices touchent suivant quatre points d'un plan les quadriques de l'une des trois familles (A_2) , (A_3) , (A_4) on trouve la même condition que pour (A_1) .

Donc si quatre génératrices rectilignes touchent suivant quatre points d'un plan l'une quelconque des quadriques (A_1) , (A_2) , (A_3) , (A_4) elles touchent de la même manière toutes les surfaces qui composent ces quatre familles.

Pour que quatre génératrices jouissent de la même propriété par rapport aux quatre familles (B) il faut que l'on ait

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 2\alpha + iK',$$

et enfin pour les familles (C) on doit avoir

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 2\alpha + 2K + iK'.$$

Ajoutons enfin, que si les points de contact d'une quadrique inscrite avec quatre génératrices sont dans un même plan, les plans tangents en ces points sont évidemment concourants.

Nous venons de voir que si quatre génératrices touchent suivant quatre points situés dans un même plan une des quadriques (A_1) elles touchent de la même façon une quelconque des quadriques (A_2) , (A_3) , (A_4) .

Considérons l'une des quadriques (A_1)

$$(A_1) \quad \theta^2(y^2 - x^2) + 2\theta(yz \operatorname{dn} \alpha - tx \operatorname{cn} \alpha) + (z^2 - t^2) = 0,$$

et soit

$$Ax + By + Cz + Dt = 0$$

l'équation du plan qui contient les points de contact de (A_1) avec ces quatre génératrices.

Proposons nous de former l'équation du plan contenant les points de contact des mêmes génératrices avec une quadrique (A₂) par exemple

$$(A_2) \quad \theta_1^2(k^2y^2 - x^2) + 2\theta_1(k^2yz \operatorname{cn} \alpha - tx \operatorname{dn} \alpha) + k^2z^2 - t^2 = 0.$$

Les arguments de ces génératrices sont donnés comme on l'a vu par l'équation

$$(15) \quad (A + B \operatorname{sn} u) \operatorname{cn}(u - \alpha) - \theta[C \operatorname{sn}(u - \alpha) + D] \operatorname{cn} u = 0.$$

Soit

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1t = 0$$

l'équation du plan cherché.

On verra de la même manière que les arguments des mêmes génératrices vérifient l'équation

$$(15') \quad (A_1 + B_1 \operatorname{sn} u) \operatorname{dn}(u - \alpha) - \theta_1[C_1 \operatorname{sn}(u - \alpha) + D_1] \operatorname{dn} u = 0.$$

Les équations (15) et (15') doivent être identiques. Le théorème d'addition va nous permettre de transformer l'équation (15) en une autre de la forme (15').

Partons des identités

$$\begin{aligned} k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} u \operatorname{cn}(u - \alpha) &= \operatorname{dn}(u - \alpha) - \operatorname{dn} u \operatorname{dn} \alpha, \\ k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} u \operatorname{sn}(u - \alpha) &= \operatorname{dn}(u - \alpha) \operatorname{dn} \alpha - \operatorname{dn} u, \\ \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} u &= \operatorname{sn} u \operatorname{dn}(u - \alpha) \operatorname{cn} \alpha - \operatorname{sn}(u - \alpha) \operatorname{dn} u, \\ \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn}(u - \alpha) &= \operatorname{sn} u \operatorname{dn}(u - \alpha) - \operatorname{sn}(u - \alpha) \operatorname{dn} u \operatorname{cn} \alpha. \end{aligned}$$

Portons ces valeurs des premiers membres dans (15). Il vient en multipliant par $\operatorname{sn} \alpha$

$$\begin{aligned} A[\operatorname{sn} u \operatorname{dn}(u - \alpha) - \operatorname{sn}(u - \alpha) \operatorname{dn} u \operatorname{cn} \alpha] + \frac{B}{k^2}[\operatorname{dn}(u - \alpha) - \operatorname{dn} u \operatorname{dn} \alpha] \\ - \frac{\theta C}{k^2}[\operatorname{dn}(u - \alpha) \operatorname{dn} \alpha - \operatorname{dn} u] - \theta D[\operatorname{sn} u \operatorname{dn}(u - \alpha) \operatorname{cn} \alpha - \operatorname{sn}(u - \alpha) \operatorname{dn} u] = 0. \end{aligned}$$

C'est bien une équation de la forme (15').

Pour obtenir l'équation du plan cherché il suffit de remplacer

$$\operatorname{dn}(u - \alpha), \quad \operatorname{sn} u \operatorname{dn}(u - \alpha), \quad \operatorname{sn}(u - \alpha) \operatorname{dn} u, \quad \operatorname{dn} u,$$

respectivement par

$$x, \quad y, \quad \frac{-z}{\theta_1}, \quad \frac{-t}{\theta_1}.$$

Il vient alors

$$A\left(y + \frac{z}{\theta_1} \operatorname{cn} \alpha\right) + \frac{B}{k^2}\left(x + \frac{t}{\theta_1} \operatorname{dn} \alpha\right) - \frac{\theta C}{k^2}\left(x \operatorname{dn} \alpha + \frac{t}{\theta_1}\right) - \theta D\left(y \operatorname{cn} \alpha + \frac{z}{\theta_1}\right) = 0.$$

C'est l'équation cherchée : ce calcul est d'ailleurs une vérification des résultats précédents. On voit que les deux plans se correspondent homographiquement.

Condition pour que quatre génératrices rectilignes appartiennent à une même quadrique. — Une quadrique coupant la surface suivant quatre droites contient forcément les droites doubles. Elle est donc définie par une relation de la forme

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0.$$

Les génératrices communes aux deux surfaces sont alors déterminées par l'équation

$$a \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u - \alpha) + b \operatorname{sn} u + c \operatorname{sn}(u - \alpha) + d = 0.$$

Le premier membre admet les périodes $4\mathbf{K}$ et $2i\mathbf{K}'$ et possède dans un parallélogramme les pôles de $\Theta(u)$ et $\Theta(u - \alpha)$. L'équation admet donc quatre solutions liées par la relation

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 2\alpha.$$

Cette relation exprime la condition nécessaire et suffisante pour que quatre génératrices appartiennent à une surface du second degré.

Quadriques touchant la surface suivant deux droites. — Si l'on fait $u_1 = u_3$, $u_2 = u_4$ on obtient la condition pour qu'il existe une quadrique tangente à la surface le long des génératrices u_1 et u_2 . Il vient alors

$$u_1 + u_2 \equiv \alpha + 2m\mathbf{K} + ni\mathbf{K}'.$$

Il suffit de donner à m les valeurs 0 et 1. Il y a donc quatre familles de quadriques répondant à la question et caractérisées par les équations

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 + u_2 \equiv \alpha, \\ u_1 + u_2 \equiv \alpha + 2\mathbf{K}, \\ u_1 + u_2 \equiv \alpha + i\mathbf{K}', \\ u_1 + u_2 \equiv \alpha + 2\mathbf{K} + i\mathbf{K}'. \end{array} \right.$$

Proposons-nous de déterminer ces quadriques. Nous en avons déjà obtenu deux familles (\mathbf{H}_1) , (\mathbf{H}_2)

$$(\mathbf{H}_1) \quad \theta^2(y - x)(z + t) + 2\theta(yz \operatorname{dn} \alpha - xt \operatorname{cn} \alpha) + (y + x)(z - t) = 0,$$

$$(\mathbf{H}_2) \quad \theta^2(y - x)(z - t) + 2\theta(yz \operatorname{dn} \alpha - xt \operatorname{cn} \alpha) + (y + x)(z + t) = 0.$$

Par un raisonnement bien connu on vérifiera que ces quadriques correspondent respectivement aux deux premières équations (16).

On peut obtenir les deux autres familles sans aucun calcul en partant de l'équa-

tion (8)

$$(H_3) \quad \theta^2(y+x)(kz-t) + \frac{2\theta}{\operatorname{sn}\alpha}(yt \operatorname{cn}\alpha - zx \operatorname{dn}\alpha) + (y-x)(kz+t) = 0,$$

$$(H_4) \quad \theta^2(y-x)(kz-t) + \frac{2\theta}{\operatorname{sn}\alpha}(yt \operatorname{cn}\alpha - zx \operatorname{dn}\alpha) + (y+x)(kz+t) = 0.$$

Ces deux familles correspondent aux deux dernières équations (16).

Si l'on considère deux quadriques de la même famille, on vérifie immédiatement que les quatre génératrices de contact sont sur une même quadrique.

Considérons maintenant deux quadriques de familles différentes, (H_1) et (H_2) par exemple; les quatre génératrices de contact vérifient la relation

$$u_1 + u_2 + u'_1 + u'_2 \equiv 2\alpha + 2K.$$

Donc ces génératrices touchent suivant quatre points d'un plan toutes les quadriques (A). On fera des remarques analogues pour les diverses combinaisons que l'on peut former.

Quadriques osculatrices. — Il suffit de supposer que trois des génératrices d'intersection sont confondues

$$u_1 + 3u_2 \equiv 2\alpha,$$

$$u_2 = \frac{2\alpha - u_1}{3} + \frac{4mK}{3} + \frac{2niK'}{3}.$$

On donnera à m et n les valeurs 0, 1, 2.

Par la génératrice u_1 passent donc neuf quadriques osculatrices à la surface le long d'une génératrice. Les génératrices correspondantes peuvent se grouper par trois de telle sorte que trois génératrices d'un même groupe soient situées sur une quadrique contenant la génératrice u_1 . Si l'on coupe la surface par un plan contenant la génératrice u_1 , la section est une cubique plane de genre 1, dont les points d'inflexion sont situés sur les neuf génératrices que nous venons de déterminer.

Quadriques surosculatrices. — Ces quadriques coupent la surface suivant quatre génératrices confondues: on a donc

$$u = \frac{\alpha}{2} = mK + \frac{niK'}{2}.$$

On donnera à m et n les valeurs 0, 1, 2, 3.

On obtient ainsi seize génératrices le long desquelles il existe une quadrique surosculatrice. Ces droites sont différentes des génératrices remarquables déterminées au début. On aperçoit sans peine les relations qui peuvent exister entre les seize génératrices trouvées.

Par exemple on peut les grouper par quatre de telle façon que quatre génératrices d'un même groupe touchent suivant quatre points d'un plan une famille de quadriques inscrites, ou bien appartiennent à une même quadrique.

On peut appliquer de la même façon le théorème d'Abel pour étudier l'intersection de la surface avec une surface réglée admettant les deux droites doubles comme directrices et définie par un équation de la forme

$$\Phi(\lambda, \mu) = 0.$$

Une surface du quatrième degré ainsi définie coupe la surface S suivant huit génératrices dont les arguments sont liés par la relation

$$u_1 + u_2 + \dots + u_8 \equiv 4\alpha.$$

Supposons, par exemple, que les deux surfaces se touchent suivant quatre génératrices. On aura entre les arguments la relation

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2\alpha + 2m\mathbf{K} + ni\mathbf{K}',$$

où l'on donne à m et n les valeurs 0 et 1.

Si l'on prend

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 2\alpha,$$

les quatre droites sont situées sur une quadrique et la surface est définie par l'équation

$$(\lambda\mu \operatorname{dn} \alpha - \operatorname{cn} \alpha)^2 - (1 - \lambda^2)(1 - \mu^2) - (a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d)^2 = 0.$$

Si l'on prend

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 2\alpha + 2\mathbf{K},$$

les quatre génératrices touchent suivant quatre points d'un plan les quadriques (A).

Les arguments sont donc racines d'une équation de la forme (15)

$$\{(a + b \operatorname{sn} u) \operatorname{cn}(u - \alpha) + [c \operatorname{sn}(u - \alpha) + d] \operatorname{cn} u\}^2 = 0.$$

Développons en remplaçant $\operatorname{sn} u$ et $\operatorname{sn}(u - \alpha)$ par λ et μ , et $\operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u - \alpha)$ par

$$\operatorname{cn} \alpha - \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u - \alpha) \operatorname{dn} \alpha,$$

il vient

$$(a + b\lambda)^2(1 - \mu^2) + (c\mu + d)^2(1 - \lambda^2) + 2(a + b\lambda)(c\mu + d)(\operatorname{cn} \alpha - \lambda\mu \operatorname{dn} \alpha) = 0.$$

Cette équation doublement quadratique définit une surface du quatrième ordre touchant S suivant quatre droites. On aura l'équation la plus générale en ajoutant au premier membre

$$(1 - \lambda^2)(1 - \mu^2) - (\lambda\mu \operatorname{dn} \alpha - \operatorname{cn} \alpha)^2,$$

et l'équation peut alors s'écrire

$$[(a + b\lambda) + 1 - \lambda^2][c\mu + d + 1 - \mu^2] - [(a + b\lambda)(c\mu + d) + \lambda\mu \operatorname{cn} \alpha - \operatorname{dn} \alpha]^2 = 0;$$

on a l'équation la plus générale sous la forme que nous avons utilisée jusqu'ici.

Il y a enfin deux autres familles de surfaces répondant à la question et qu'on déterminerait de la même manière.

Signification des invariants. — L'équation réduite renferme deux constantes essentielles qui constituent des invariants absolus de la surface.

La signification géométrique du module k s'aperçoit immédiatement. Par la droite Δ , par exemple, passent quatre plans coupant la surface suivant deux droites confondues. Leurs équations sont

$$\begin{aligned} y - x &= 0, & y + x &= 0, \\ ky - x &= 0, & ky + x &= 0. \end{aligned}$$

Le rapport anharmonique de ces plans est

$$\rho = \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^2.$$

Le module k ne dépend donc que de l'invariant absolu du polynôme du quatrième degré $R(\lambda)$.

L'argument α constitue aussi un invariant. Considérons les quatre génératrices remarquables situées dans les plans précédents. Elles rencontrent Δ en quatre points dont on calcule aisément le rapport anharmonique. Pour cela remarquons que les valeurs de μ correspondant aux valeurs

$$\lambda = 1, \quad \lambda = -1, \quad \lambda = \frac{1}{k}, \quad \mu = -\frac{1}{k},$$

sont données par les équations (3) et (7)

$$\mu_1 = \frac{\operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{dn} \alpha}, \quad \mu_2 = -\frac{\operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{dn} \alpha}, \quad \mu_3 = \frac{\operatorname{dn} \alpha}{k \operatorname{cn} \alpha}, \quad \mu_4 = -\frac{\operatorname{dn} \alpha}{k \operatorname{cn} \alpha}.$$

On trouve pour le rapport anharmonique

$$\rho_1 = \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 \left(\frac{1+k \operatorname{sn}^2 \alpha}{1-k \operatorname{sn}^2 \alpha} \right)^2.$$

Tangentes doubles de la surface. — La considération de ces tangentes va nous donner une interprétation nouvelle et intéressante de l'invariant k . Considérons un point M situé sur la génératrice (u).

Le plan tangent en ce point coupe la surface suivant une cubique plane de

genre 1. Du point M on peut mener à cette cubique quatre tangentes qui sont des tangentes doubles de la surface. On sait qu'il existe quatre quadriques touchant la surface suivant la génératrice donnée (u) et suivant une autre génératrice : les tangentes doubles sont les génératrices rectilignes issues de M dans ces quatre quadriques. Donc quand le point M décrit une génératrice rectiligne les autres points de contact des tangentes doubles décrivent quatre génératrices rectilignes.

Désignons par u_1, u_2, u_3, u_4 leurs arguments. On a d'après les relations (16)

$$\begin{aligned} u + u_1 &\equiv \alpha, \\ u + u_2 &\equiv \alpha + 2\mathbf{K}, \\ u + u_3 &\equiv \alpha + i\mathbf{K}', \\ u + u_4 &\equiv \alpha + 2\mathbf{K} + i\mathbf{K}'. \end{aligned}$$

La première génératrice D_1 détermine avec le point M un plan contenant l'une des tangentes doubles : ce plan P_1 a une équation de la forme

$$y - x \operatorname{sn} u_1 - \Lambda [z - t \operatorname{sn}(u_1 - \alpha)] = 0.$$

Exprimons que ce plan passe par le point M dont les coordonnées sont

$$1, \operatorname{sn} u, \nu \operatorname{sn}(u - \alpha), \nu,$$

on a finalement pour le plan P_1 l'équation

$$P_1, \nu [y + x \operatorname{sn}(u - \alpha)] - (z + t \operatorname{sn} u) = 0.$$

De même les trois autres génératrices déterminent avec le point M trois plans dont les équations sont

$$\begin{aligned} P_2, \nu [y - x \operatorname{sn}(u - \alpha)] + (z - t \operatorname{sn} u) &= 0, \\ P_3, \nu [x + ky \operatorname{sn}(u - \alpha)] - (t + kz \operatorname{sn} u) &= 0, \\ P_4, \nu [x - ky \operatorname{sn}(u - \alpha)] - (t - kz \operatorname{sn} u) &= 0. \end{aligned}$$

Ces quatre plans sont coupés suivant quatre tangentes doubles par le plan tangent en M dont l'équation est

$$P, \nu (y - x \operatorname{sn} u) - h [z - t \operatorname{sn}(u - \alpha)] = 0,$$

en posant

$$h = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}(u - \alpha) \operatorname{dn}(u - \alpha)}.$$

Cela posé nous allons calculer le rapport anharmonique des quatre tangentes doubles. Remarquons que l'on peut dans ce calcul supposer $\nu = 1$, car le rapport anharmonique sera manifestement indépendant de ν . Les deux plans P_3 et P_4 se

coupent alors suivant la droite

$$(L) \quad \begin{cases} x - t = 0, \\ y \operatorname{sn}(u - \alpha) - z \operatorname{sn} u = 0. \end{cases}$$

Par l'intersection de P et P₁ faisons passer un plan contenant L; on trouve par un calcul aisé l'équation

$$(P'_1) \quad x - t + \theta_1[y \operatorname{sn}(u - \alpha) - z \operatorname{sn} u] = 0.$$

De même par l'intersection de P et P₂ on fait passer un plan contenant L

$$(P'_2) \quad x - t + \theta_2[y \operatorname{sn}(u - \alpha) - z \operatorname{sn} u] = 0,$$

où l'on a posé

$$\theta_1 = \frac{h - 1}{\operatorname{sn}^2 u - h \operatorname{sn}^2(u - \alpha)},$$

$$\theta_2 = \frac{h + 1}{\operatorname{sn}^2 u + h \operatorname{sn}^2(u - \alpha)}.$$

Le rapport anharmonique cherché est précisément celui des quatre plans P'₁, P'₂, P₃ et P₄ qui passent par une même droite

$$r = \frac{\theta_1 - k}{\theta_1 + k} \cdot \frac{\theta_2 - k}{\theta_2 + k},$$

c'est-à-dire

$$r = \frac{h^2[1 + k \operatorname{sn}^2(u - \alpha)]^2 - (1 + k \operatorname{sn}^2 u)^2}{h^2[1 - k \operatorname{sn}^2(u - \alpha)]^2 - (1 - k \operatorname{sn}^2 u)^2}.$$

Remplaçons h par sa valeur et dans l'expression obtenue remplaçons $\operatorname{sn} u$ et $\operatorname{sn}(u - \alpha)$ par λ et μ . L'expression précédente devient une fraction rationnelle en λ et μ le numérateur est

$$(1 - \lambda^2)(1 - k^2 \lambda^2)(1 + k \mu^2)^2 - (1 - \mu^2)(1 - k \mu^2)(1 + k \lambda^2)^2;$$

on le met aisément sous la forme

$$(k^2 \lambda^2 \mu^2 - 1)(\lambda^2 - \mu^2)(k + 1)^2.$$

Le dénominateur s'obtient en changeant le signe de k . On a donc

$$r = \left(\frac{1 + k}{1 - k} \right)^2 = \rho.$$

Nous retrouvons la valeur obtenue précédemment pour les quatre plans remarquables passant par l'une des droites doubles.

Donc, par un point de la surface réglée on peut lui mener quatre tangentes doubles dont le rapport anharmonique est constant.

Ce résultat pouvait être prévu en remarquant que toutes les cubiques déterminées par les plans tangents possèdent le même invariant absolu, car les coordonnées des points de ces courbes peuvent s'exprimer par des fonctions elliptiques de même module k .

Il est bien évident que les quatre tangentes doubles issues de M sont des génératrices rectilignes des quadriques inscrites touchant la surface en M . Considérons particulièrement les quadriques (A_1) et (A_2)

$$(A_1) \quad \theta_1^2 (y^2 - x^2) + 2\theta_1 (yz \operatorname{dn} \alpha - tx \operatorname{cn} \alpha) + z^2 - t^2 = 0,$$

$$(A_2) \quad \theta_2^2 (k^2 y^2 - x^2) + 2\theta_2 (k^2 yz \operatorname{cn} \alpha - tx \operatorname{dn} \alpha) + k^2 z^2 - t^2 = 0.$$

En exprimant qu'elles passent par M on trouve

$$\theta_1 = -v \frac{\operatorname{cn}(u - \alpha)}{\operatorname{cn} u}, \quad \theta_2 = -v \frac{\operatorname{dn}(u - \alpha)}{\operatorname{dn} u}.$$

Les valeurs de θ_1 et θ_2 ne changent pas quand on y remplace u par $u + 2K$. Les deux quadriques sont donc tangentes à la surface en un autre point M_1 défini par les coordonnées curvilignes $u + 2K$ et v . Enfin cherchons le point où la quadrique (A_1) touche la génératrice ayant pour argument $(\alpha - u + iK')$. Il est défini par un paramètre v_1 tel que

$$\theta_1 = -v_1 \frac{\operatorname{cn}(-u + iK')}{\operatorname{cn}(\alpha - u + iK')} = -v_1 \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{sn}(u - \alpha)}{\operatorname{dn}(u - \alpha) \operatorname{sn} u}$$

ou en remplaçant θ_1 par sa valeur

$$v_1 \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn}(u - \alpha) = v \operatorname{cn}(u - \alpha) \operatorname{dn}(u - \alpha) \operatorname{sn} u.$$

La symétrie de ces équations en cn et dn montre que les deux quadriques (A_1) et (A_2) touchent au même point la génératrice considérée. Elles sont donc tangentes en ce point M_2 ayant pour coordonnées $\alpha - u + iK'$ et v_1 et par suite en un quatrième point $M_3(\alpha - u + 2K + iK', v_1)$.

Ces quatre points M, M_1, M_2, M_3 ne sont pas dans un même plan, comme il est facile de le vérifier; les deux quadriques se coupent donc suivant quatre droites qui sont bitangentes à la surface et forment par suite un quadrilatère gauche, qui est à la fois inscrit et circonscrit à la surface.

Les quatre sommets d'un tel quadrilatère sont situés sur quatre génératrices rectilignes appartenant à une même surface du second degré.

Polygones tracés sur la surface. — On peut rattacher à l'invariant α une théorie analogue à celle des polygones de Poncelet.

Nous avons vu que si deux génératrices rectilignes se coupent sur Δ' leurs arguments vérifient la relation

$$u + u' \equiv 2\mathbf{K},$$

si elles se coupent sur Δ on a

$$u + u' \equiv 2\alpha + 2\mathbf{K}.$$

Cela posé, considérons une ligne brisée ayant ses sommets sur Δ et Δ' et formée par des génératrices rectilignes de S . Les côtés successifs se coupent alternativement sur Δ et Δ' . Soient u_1, u_2, u_3, \dots les arguments de ces côtés. On a

$$u_1 + u_2 \equiv 2\mathbf{K},$$

$$u_2 + u_3 \equiv 2\mathbf{K} + 2\alpha.$$

D'où par soustraction

$$u_3 - u_1 \equiv 2\alpha.$$

De même

$$u_5 - u_3 \equiv 2\alpha,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$u_{2p+1} - u_{2p-1} \equiv 2\alpha,$$

c'est-à-dire

$$u_{2p+1} - u_1 \equiv 2p\alpha.$$

Si le contour polygonal se ferme il doit posséder un nombre pair de côtés : soit $2p$. On aura donc

$$u_{2p+1} - u_1 \equiv 0,$$

par conséquent

$$2p\alpha \equiv 0.$$

Si cette condition est remplie il existera une infinité de polygones de $2p$ côtés tracés sur la surface, pourvu toutefois qu'il n'existe aucun nombre pair $2p'$ inférieur à $2p$ et tel que

$$2p'\alpha \equiv 0.$$

Dans ce qui précède nous avons supposé que l'on ne rencontre aucune des huit génératrices remarquables de la surface dont les arguments vérifient l'une des relations

$$(G_1) \quad 2u \equiv 2\mathbf{K},$$

$$(G_2) \quad 2u \equiv 2\mathbf{K} + 2\alpha.$$

Supposons que dans les équations précédentes (u_1) vérifie l'équation (G_2).

On a toujours

$$u_{2h+1} \equiv u_1 + 2h\alpha,$$

c'est-à-dire

$$2u_{2h+1} \equiv 2\mathbf{K} + 2(2h+1)\alpha.$$

Si p est pair, prenons $2h = p$; on a

$$2u_{2h+1} \equiv 2\mathbf{K} + 2\alpha;$$

on parvient alors à une génératrice remarquable du même groupe que la première. Si p est impair, prenons $2h + 1 = p$, on a

$$2u_{2h+1} \equiv 2\mathbf{K};$$

on parvient alors à une génératrice remarquable de l'autre groupe G_1 .

Dans les deux cas on obtient encore un polygone de $2p$ côtés, mais replié sur lui-même.

Nous n'insisterons pas sur ces propriétés et nous nous contenterons de signaler le conoïde droit circonscrit à une sphère sur lequel on peut tracer une infinité de quadrilatères gauches : mais dans ce cas l'une des droites doubles est située à l'infini.

Transformation par polaires réciproques. — La surface S a manifestement pour polaire une surface analogue; nous allons montrer qu'il est possible de choisir la quadrique directrice de telle façon que S soit sa propre polaire.

L'équation (3) ne change pas quand on change λ et μ en $-\lambda$ et $-\mu$. Les deux droites

$$\begin{cases} y - \lambda x = 0, \\ z - \mu t = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y + \lambda x = 0, \\ z + \mu t = 0 \end{cases}$$

sont conjuguées par rapport à la quadrique

$$(D_1) \quad xy + \theta zt = 0,$$

où θ est un paramètre arbitraire.

De même l'équation ne change pas quand on change u en $u + i\mathbf{K}'$, c'est-à-dire λ et μ en $\frac{1}{k\lambda}$ et $\frac{1}{k\mu}$.

Les deux droites

$$\begin{cases} y - \lambda x = 0, \\ z - \mu t = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y - \frac{x}{k\lambda} = 0, \\ z - \frac{t}{k\mu} = 0 \end{cases}$$

sont conjuguées par rapport à la quadrique

$$(D_2) \quad x^2 - ky^2 + \theta(t^2 - kz^2) = 0,$$

où θ est arbitraire.

Enfin on verrait que si l'on change u en $u + 2\mathbf{K} + i\mathbf{K}'$ on fait correspondre à

chaque droite sa conjuguée par rapport aux quadriques

$$(D_3) \quad x^2 + ky^2 + \theta(t^2 + kz^2) = 0.$$

En résumé les trois transformations précédentes font correspondre à chaque génératrice (u) trois conjuguées

$$\begin{aligned} u_1 &= u + 2K, \\ u_2 &= u + iK', \\ u_3 &= u + 2K + iK'. \end{aligned}$$

La surface reste invariable quand on la soumet à toutes ces transformations.

On voit que ces propriétés résultent de ce fait qu'il existe trois transformations homographiques qui permutent entre elles les racines du polynome $R(\lambda)$.

Enfin la surface reste invariable si dans l'équation (3) on effectue les transformations

$$\lambda = \varepsilon\mu_1, \quad \mu = \varepsilon\lambda_1$$

ou

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{k\mu_1}, \quad \mu = \frac{\varepsilon}{k\lambda_1},$$

ε pouvant prendre les valeurs $+1$ et -1 .

Ces transformations font correspondre à chaque droite sa conjuguée par rapport à l'une des quatre quadriques

$$\begin{aligned} xz + \varepsilon ty &= 0, \\ xt + \varepsilon ky z &= 0. \end{aligned}$$

Ces quatre nouvelles droites, dérivant de la génératrice (u) ont pour arguments

$$\begin{aligned} u'_1 &= u - \alpha, & u'_2 &= u - \alpha + 2K, \\ u'_3 &= u - \alpha + iK', & u'_4 &= u - \alpha + 2K + iK'. \end{aligned}$$

Il résulte de ces considérations que la surface admet une infinité de transformations projectives, car la succession de deux transformations par polaires réciproques équivaut à une transformation projective.

En particulier la surface admet toutes les transformations du groupe projectif défini par les équations

$$G \quad x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = \theta z, \quad t_1 = \theta t,$$

qui laisse invariante toutes les génératrices rectilignes.

Elle admet aussi sept transformations qui n'appartiennent pas au groupe G et qui font correspondre à chaque génératrice l'une des sept droites dont les arguments sont désignés par $u_1, u_2, u_3, u'_1, u'_2, u'_3, u'_4$.

La transformation projective la plus générale qui n'altère pas la surface est le produit d'une de ces sept transformations par une transformation quelconque du groupe G .

Lignes asymptotiques. — Les lignes asymptotiques de la surface S se déterminent par une quadrature et sont des courbes algébriques du huitième ordre.

Représentons les coordonnées d'un point par les formules

$$\begin{aligned} x = 1, \quad y = \lambda, \quad z = \mu v, \quad t = v, \\ \lambda = \operatorname{sn} u, \quad \mu = \operatorname{sn}(u - \alpha). \end{aligned}$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$\begin{vmatrix} \frac{d\lambda}{du} & \frac{d^2\lambda}{du^2} du^2 \\ v \frac{d\mu}{du} & v \frac{d^2\mu}{du^2} du^2 + 2 \frac{d\mu}{du} du dv \end{vmatrix} = 0.$$

En excluant les génératrices rectilignes, il vient

$$\frac{2}{v} \frac{dv}{du} = \frac{\frac{d^2\lambda}{du^2}}{\frac{d\lambda}{du}} - \frac{\frac{d^2\mu}{du^2}}{\frac{d\mu}{du}}.$$

En intégrant

$$(17) \quad v^2 = h^2 \frac{d\lambda}{d\mu} = h^2 \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}(u - \alpha) \operatorname{dn}(u - \alpha)}.$$

Cette équation détermine les asymptotiques. Si l'on cherche le nombre des points d'intersection d'une de ces lignes avec un plan quelconque on obtient une équation de la forme

$$(A \operatorname{sn} u + B)^2 \operatorname{cn}(u - \alpha) \operatorname{dn}(u - \alpha) - [C \operatorname{sn}(u - \alpha) + D]^2 \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = 0.$$

Le premier membre est une fonction doublement périodique aux périodes $4K$ et $2iK'$ qui admet dans un parallélogramme quatre pôles doubles, ceux de $\Theta(u)$ et $\Theta(u - \alpha)$. Cette fonction admet donc huit zéros, et les asymptotiques sont du huitième degré.

Si dans l'équation (17) on remplace v par $\frac{t}{x}$ et λ et μ par $\frac{y}{x}$ et $\frac{z}{t}$, on voit que les asymptotiques sont les intersections de la surface S avec les surfaces définies par l'équation générale

$$h^4 (y^2 - x^2)(k^2 y^2 - x^2) - (z^2 - t^2)(k^2 z^2 - t^2) = 0,$$

où h est un paramètre variable.

Mais chacune de ces surfaces coupe S suivant une courbe du seizième degré qui se compose de deux lignes asymptotiques de S.

On peut obtenir l'équation générale d'une famille de surfaces dont chacune coupe S suivant une seule ligne asymptotique.

De l'équation

$$\operatorname{sn}(u - \alpha) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha - \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 \alpha},$$

on tire

$$\operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = \operatorname{sn} u [\operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u - \alpha) \operatorname{sn}^2 \alpha] - \operatorname{sn}(u - \alpha).$$

De même

$$\operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn}(u - \alpha) \operatorname{dn}(u - \alpha) = \operatorname{sn} u - [\operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u - \alpha) \operatorname{sn}^2 \alpha] \operatorname{sn}(u - \alpha).$$

D'où, en remplaçant $\operatorname{sn} u$ et $\operatorname{sn}(u - \alpha)$ par λ et μ ,

$$\nu^2 = h^2 \frac{\lambda(\operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha + k^2 \lambda \mu \operatorname{sn}^2 \alpha) - \mu}{\lambda - (\operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha + k^2 \lambda \mu \operatorname{sn}^2 \alpha) \mu},$$

ν^2 s'exprime rationnellement en λ et μ .

Les lignes asymptotiques sont donc les intersections de S avec les surfaces définies par l'équation

$$(k^2 y z \operatorname{sn}^2 \alpha + x t \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha)(z t + h^2 x y) = y t^3 + h^2 z x^3.$$

Chacune de ces surfaces coupe S suivant les deux droites doubles et suivant quatre autres droites définies par les équations

$$\begin{cases} t = 0, & \begin{cases} x = 0, \\ t^2 - k^2 z^2 \operatorname{sn}^2 \alpha = 0. \end{cases} \\ x^2 - k^2 y^2 \operatorname{sn}^2 \alpha = 0, & \end{cases}$$

L'intersection comprend en outre une courbe du huitième ordre qui est une ligne asymptotique.

D'après l'expression de ν on voit que les lignes asymptotiques divisent homographiquement les génératrices rectilignes. Toutes ces courbes rencontrent chaque droite double en quatre points fixes : ce sont les points par lesquels passent deux génératrices confondues : il en résulte que ces courbes ne peuvent être situées sur une surface du second degré.

Chaque génératrice rencontre une ligne asymptotique en deux points conjugués par rapport aux deux points où cette génératrice rencontre les droites doubles. Les points d'intersection de chaque génératrice avec les diverses asymptotiques déterminent donc sur cette droite une involution.

Cas de dégénérescence. — Dans la réduction de l'équation doublement qua-

dratique nous avons supposé que les polynomes $R(\lambda)$ et $R_1(\mu)$ avaient leurs racines distinctes. S'il n'en est pas ainsi ils peuvent admettre soit une seule racine double soit une racine triple.

Dans ces deux cas nous serons conduit à des surfaces possédant une troisième droite double s'appuyant sur les deux directrices Δ et Δ' .

II. Supposons que R et R_1 aient une racine double. On sait que par une transformation homographique convenable on peut rendre infinie la racine double et amener l'équation doublement quadratique à représenter l'intégrale de l'équation

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} - \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} = 0.$$

On peut alors poser

$$\lambda = \sin u \quad \text{et} \quad \mu = \sin(u - \alpha),$$

α étant une constante.

On pourrait utiliser ici le théorème d'addition pour les fonctions circulaires, mais il est plus simple de faire dans toutes les équations établies précédemment $k = 0$, en remarquant que $\cos \alpha$ devient $\cos x$ et que dx se réduit à l'unité.

L'équation réduite se met alors sous l'une des sept formes suivantes

$$(3') \quad (\lambda\mu - \cos \alpha)^2 - (1 - \lambda^2)(1 - \mu^2) = 0,$$

$$(8') \quad (\lambda \cos \alpha - \mu)^2 - (1 - \lambda^2) \sin^2 \alpha = 0,$$

$$(9') \quad (\mu \cos \alpha - \lambda)^2 - (1 - \mu^2) \sin^2 \alpha = 0,$$

$$(10') \quad \left(\lambda + \mu - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} (1 - \lambda)(1 - \mu) = 0,$$

$$(11') \quad \left(\lambda + \mu + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} (1 + \lambda)(1 + \mu) = 0,$$

$$(12') \quad \left(\lambda - \mu + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} (1 + \lambda)(1 - \mu) = 0,$$

$$(13') \quad \left(\lambda - \mu - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} (1 - \lambda)(1 + \mu) = 0.$$

Chacune de ces équations fournit une famille de quadriques inscrites dans la surface. Il n'est pas nécessaire d'étudier en détail les propriétés de la surface, qui dans leur ensemble sont peu modifiées.

Considérons l'équation de la surface

$$y^2 t^2 + z^2 x^2 - 2xyz t \cos \alpha - x^2 t^2 \sin^2 \alpha = 0.$$

Elle montre que la droite

$$(G) \quad x = 0, \quad t = 0,$$

est une droite singulière et en un point quelconque de cette génératrice double la surface admet deux plans tangents distincts, car

$$y^2 t^2 + z^2 x^2 - 2xyz t \cos \alpha$$

n'est pas un carré parfait.

Coupons la surface par un plan passant par (G)

$$t = \rho x.$$

La section se compose de (G) et d'une conique définie par les équations

$$\begin{aligned} \rho^2(y^2 - x^2 \sin^2 \alpha) - 2\rho yz \cos \alpha + z^2 &= 0, \\ t &= \rho x. \end{aligned}$$

La surface est donc un lieu de coniques dont les plans passent par la droite G.

Elle est également l'enveloppe d'une famille de cônes du second ordre. Considérons en effet l'équation (3'), elle exprime que la surface est l'enveloppe d'une famille de cônes définie par l'équation

$$\theta^2(y^2 - x^2) + 2\theta(yz - tx \cos \alpha) + (z^2 - t^2) = 0,$$

ou

$$(\theta y + z)^2 - (\theta x + t \cos \alpha)^2 - t^2 \sin^2 \alpha = 0.$$

Les sommets de ces cônes sont situés sur G, mais aucun ne contient cette droite et aucun n'est tangent à Δ ou à Δ' .

La surface peut donc être engendrée d'une infinité de manières par une droite mobile qui s'appuie sur deux droites non concourantes Δ et Δ' , et reste tangente à un cône du second degré C (ou rencontre une conique Γ), pourvu toutefois qu'aucune génératrice du cône C (ou aucune tangente de Γ) ne s'appuie sur Δ et Δ' et qu'enfin aucune des droites Δ et Δ' ne soit tangente à C (ou ne rencontre Γ).

Les droites Δ et Δ' sont deux droites doubles de la surface et la troisième est la génératrice qui passe par le sommet de C (ou est située dans le plan de Γ). La dualité qui apparaît dans ce mode de génération résulte évidemment de ce que la surface est, comme dans le cas général, identique à sa polaire réciproque par rapport à l'une des quadriques

$$\begin{aligned} xy + \theta z t &= 0, \\ xz \pm ty &= 0, \end{aligned}$$

qui toutes contiennent la droite double G.

Considérons maintenant l'équation (8'). Elle montre que les génératrices de S sont tangentes à toutes les surfaces définies par l'équation

$$\theta^2(y^2 - x^2) + 2\theta(yt \cos \alpha - zx) - t^2 \sin^2 \alpha = 0.$$

C'est l'équation d'une famille de quadriques tangentes à la droite double Δ en un point $A(x = 0, y = 0, t = 0)$. Elles rencontrent Δ' en deux points distincts dont aucun n'est situé dans le plan tangent en A .

D'où l'on peut tirer un nouveau mode de génération de la surface.

L'équation (9') conduit à des conclusions analogues.

Enfin, examinons l'une des quatre dernières équations, (10') par exemple.

Il lui correspond une famille de quadriques inscrites définie par l'équation

$$\theta^2(y-x)x - \theta\left(yt + zx - 2xt \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right) + (z-t)t \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Toutes ces quadriques qui peuvent servir à la génération de la surface contiennent la droite double G , mais aucune n'est tangente à l'une des droites doubles Δ et Δ' .

Les quadriques de cette famille touchent leur enveloppe suivant des cubiques gauches. Il existe donc sur la surface quatre séries de cubiques gauches, correspondant aux équations (10'), (11'), (12'), (13'), et le long de chacune d'elles on peut inscrire dans S une quadrique.

Si l'on cherche la condition pour que quatre droites appartiennent à une même quadrique on trouve la condition

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2\alpha + 2h\pi.$$

Il n'y a plus que deux familles de quadriques touchant la surface suivant deux génératrices dont les arguments sont liés par l'une des équations

$$u_1 + u_2 = \alpha + 2h\pi.$$

$$u_1 + u_2 = \alpha + (2h + 1)\pi.$$

Leurs équations se déduisent des équations (H_1) et (H_2) obtenues dans le cas général. On retrouvera avec de légères modifications la théorie des polygones tracés sur la surface; mais la propriété des tangentes doubles ne subsiste pas, car par chaque point passent seulement deux tangentes doubles.

Enfin, les lignes asymptotiques sont déterminées par l'équation (17)

$$v^2 = h^2 \frac{d\lambda}{d\mu} = h^2 \frac{\cos u}{\cos(u - \alpha)}.$$

Elles sont du sixième degré et sont les intersections de la surface S avec les surfaces définies par l'équation

$$xt \cos \alpha (zt + h^2 xy) = yt^3 + h^2 zx^3.$$

Ces surfaces sont réglées et du quatrième degré. Elles admettent la droite G comme

droite triple et possèdent comme directrice simple la droite

$$y = 0, \quad z = 0.$$

III. Supposons finalement que R et R₁ aient une racine triple. On peut toujours admettre que cette racine est infinie et l'autre nulle. L'équation doublement quadratique est alors l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} - \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}} = 0,$$

et l'on peut l'écrire

$$\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire sous forme rationnelle

$$(\alpha) \quad (\lambda + \mu - 1)^2 - 4\lambda\mu = 0,$$

$$(\beta) \quad (\lambda - \mu + 1)^2 - 4\lambda = 0,$$

$$(\gamma) \quad (\lambda - \mu - 1)^2 - 4\mu = 0.$$

On peut d'ailleurs poser

$$\lambda = u^2, \quad \mu = (u - 1)^2.$$

On a donc deux types d'équations.

Prenons l'équation (α), elle exprime que la surface est l'enveloppe des cônes définis par l'équation générale

$$\theta^2 xy + \theta(xz + yt - xt) + zt = 0$$

ou

$$(\theta x + t)(\theta y + z) - \theta xt = 0.$$

Tous ces cônes ont une génératrice commune

$$(G) \quad x = 0, \quad t = 0,$$

et rencontrent les deux droites Δ et Δ' en quatre points qui sont les sommets du trièdre de référence : on en déduit sans peine un mode de génération de la surface.

La génératrice G est encore une droite double et il suffit d'écrire l'équation de la surface

$$(yt - zx)^2 - 2xt(yt + zx) + x^2t^2 = 0,$$

pour reconnaître que le long de cette génératrice les plans tangents aux deux nappes sont confondus. Toute section plane de la surface est une quartique possédant deux points doubles ordinaires et un point de rebroussement.

Si le plan passe par G la section est une conique tangente à G et l'on en déduit un mode de génération corrélatif du précédent.

D'autre part l'équation (β) donne une autre famille de quadriques inscrites

$$\theta^2 xy + \theta(yt - zx + xt) + t^2 = 0.$$

Elles sont tangentes à Δ au point $A(x = 0, y = 0, t = 0)$ et le plan tangent en ce point passe par l'un des points où ces quadriques rencontrent Δ' ; c'est le point $B(x = 0, z = 0, t = 0)$. Toutes ces quadriques contiennent G .

L'équation (γ) conduit aux mêmes résultats. On obtient ainsi deux nouveaux modes de génération de la surface.

Pour que quatre génératrices soient situées sur une même quadrique il faut que leurs paramètres vérifient une équation de la forme

$$au^2(u-1)^2 + bu^2 + c(u-1)^2 + d = 0,$$

d'où

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2.$$

Il n'existe plus qu'une famille de quadriques touchant la surface suivant deux droites dont les paramètres vérifient la relation

$$u_1 + u_2 = 1.$$

Enfin les asymptotiques sont des courbes unicursales. L'équation (17) donne ici

$$v^2 = h^2 \frac{u}{u-1},$$

en résolvant par rapport à u et en portant cette valeur dans les expressions des coordonnées d'un point de la surface; il vient

$$x = (v^2 - h^2)^2, \quad y = v^4, \quad z = vh^4, \quad t = v(v^2 - h^2)^2,$$

on obtient des courbes du cinquième ordre.

Dans les deux cas que nous venons d'étudier, si l'on représente les coordonnées d'un point comme nous l'avons fait par les équations

$$x = \iota, \quad y = \lambda, \quad z = v\mu, \quad t = \nu,$$

on voit immédiatement que les courbes

$$v = \text{const.}$$

sont précisément les coniques tracées sur la surface.

Conclusion. — En résumé les surfaces que nous venons d'étudier peuvent être engendrées de la même manière par une droite qui s'appuie sur deux directrices rectilignes Δ et Δ' et reste tangente à une quadrique Q (qui peut dégénérer en

un cône ou une conique). La nature de la surface dépend de la position de Δ et Δ' par rapport à Q .

Si nous nous reportons à l'interprétation géométrique des racines de $R(\lambda)$ et $R_1(\mu)$ donnée au début, nous avons vu que par Δ (ou Δ') passent quatre plans (distincts ou non) qui coupent la surface suivant deux génératrices confondues. R et R_1 ne pouvant pas être des carrés parfaits les quatre plans remarquables passant par l'une des droites Δ ou Δ' ne pourront donc présenter que l'une des dispositions suivantes :

- 1° Quatre plans distincts (cas général);
- 2° Deux plans confondus et les deux autres distincts (premier cas de dégénérescence);
- 3° Trois plans confondus et le quatrième distinct de ceux-ci (second cas de dégénérescence).

Dans tout autre cas la surface se décompose. Ce sera le cas par exemple si Δ et Δ' sont tangentes à Q , ou si ces deux droites sont conjuguées par rapport à Q .

SURFACES POSSÉDANT UNE SEULE DIRECTRICE RECTILIGNE DOUBLE.

Nous avons vu qu'une surface réglée du quatrième ordre peut posséder une seule directrice double le long de laquelle les deux nappes sont tangentes. Ces surfaces peuvent être considérées comme des cas de dégénérescence de celles que nous venons d'étudier, si l'on suppose que les deux droites doubles Δ et Δ' se confondent.

En effet à chaque point de la directrice double correspond un plan tangent et inversement tout plan passant par cette droite est tangent aux deux nappes en un point. Il existe donc une surface du second degré tangente aux deux nappes le long de la droite double, c'est-à-dire que les génératrices rectilignes s'appuient sur deux droites infiniment voisines.

Nous nous contenterons d'indiquer comment on peut déterminer explicitement ces surfaces sans insister sur leurs propriétés qui sont évidemment analogues à celles des surfaces étudiées précédemment.

Toute surface du second degré tangente aux deux nappes le long de la droite double coupe la surface suivant quatre génératrices rectilignes. Soit

$$zx - ty = 0$$

l'équation d'une telle quadrique : la droite double ayant pour équations $x = 0$, $y = 0$.

L'équation de la surface aura alors évidemment la forme suivante

$$(zx - ty)^2 + 2(zx - ty)\varphi(x, y) + \psi(x, y) = 0,$$

φ et ψ étant respectivement du second et du quatrième degré.

L'équation précédente peut s'écrire

$$[zx - ty + \varphi(x, y)]^2 = R(x, y),$$

R étant un polynôme homogène du quatrième degré. Par une transformation homographique effectuée sur z et t l'équation prend la forme réduite

$$(zx - ty)^2 = R(x, y).$$

Pour pousser plus loin la réduction de l'équation il faut tenir compte de la forme de $R(x, y)$. Ce polynôme ne peut pas être un carré parfait : on pourra donc par une transformation homographique le ramener à l'une des formes

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2)(x^2 - k^2 y^2), \\ x^2(x^2 - y^2), \\ x^3 y. \end{aligned}$$

L'expression $(zx - ty)$ prend alors la forme

$$z(\alpha x + \beta y) - t(\gamma x + \delta y),$$

et finalement par une transformation homographique sur z et t , on la ramène à sa forme initiale.

L'équation réduite de la surface aura donc l'une des trois formes

$$\begin{aligned} (S_1) \quad & (zx - ty)^2 - (x^2 - y^2)(x^2 - k^2 y^2) = 0, \\ (S_2) \quad & (zx - ty)^2 - x^2(x^2 - y^2) = 0, \\ (S_3) \quad & (zx - ty)^2 - x^3 y = 0. \end{aligned}$$

Les trois surfaces ainsi définies correspondent à celles que nous venons d'étudier.

La première n'a pas d'autre ligne singulière que la directrice double.

Les deux autres présentent une génératrice singulière, en chaque point de laquelle les plans tangents sont distincts pour S_2 et confondus pour S_3 .

SURFACES A CUBIQUE DOUBLE.

La détermination de ces surfaces a été reprise par M. Rohn ⁽¹⁾. Nous allons revenir rapidement sur cette détermination par une méthode différente pour signaler un cas particulier intéressant que M. Rohn ne paraît pas avoir remarqué.

(1) *Math. Annalen*, loc. cit.

Supposons les coordonnées d'un point de la cubique définies par les équations

$$x = u, \quad y = u^2, \quad z = u^3, \quad t = 1.$$

On obtient immédiatement les équations de trois quadriques contenant la cubique

$$X = y^2 - zx = 0,$$

$$Y = x^2 - ty = 0,$$

$$Z = xy - zt = 0.$$

Les deux premières représentent des cônes.

Cela posé, considérons deux génératrices rectilignes de la surface du quatrième ordre S.

Chacune d'elles détermine un faisceau de quadriques contenant la cubique et ces deux faisceaux ont une quadrique commune : celle qui contient les deux génératrices. On peut donc prendre leurs équations sous la forme

$$(18) \quad \alpha X + \beta Y + \gamma Z - \lambda(\alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z) = 0,$$

$$(19) \quad \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z - \mu(\alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z) = 0.$$

Chaque quadrique de l'un des faisceaux coupe la surface suivant une seule génératrice variable et par chaque génératrice passe une seule quadrique de chaque faisceau. La relation qui exprime que les deux quadriques précédentes se coupent suivant une génératrice de la surface est donc doublement linéaire en λ et μ

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0.$$

L'équation de la surface s'obtient en remplaçant dans cette équation λ et μ par leurs valeurs tirées des équations (18) et (19).

Elle prend alors la forme générale

$$f(X, Y, Z) = 0,$$

f étant homogène et du second degré.

Si l'on regarde X, Y, Z comme des coordonnées homogènes cette équation représente une conique C.

Proposons-nous d'abord de réduire cette équation à une forme plus simple sans changer la cubique double γ .

On sait ⁽¹⁾ qu'une cubique gauche admet un groupe projectif à trois paramètres. Une transformation quelconque de ce groupe ne change pas la dévelop-

(1) LIE, *Transformationsgruppen*, t. III, Chap. IX.

pable ayant la cubique pour arête de rebroussement et dont l'équation est

$$4XY - Z^2 = 0.$$

Cette équation représente en coordonnées homogènes une conique Γ . D'autre part les transformations du groupe n'altèrent pas le réseau des quadriques contenant la cubique γ , elles transforment donc d'une façon linéaire et homogène les expressions X , Y et Z . Le problème est donc ramené au suivant : Réduire à une forme canonique l'équation de la conique C , par une transformation homographique qui n'altère pas la conique Γ . La solution dépend évidemment de la discussion de l'intersection de ces deux coniques. Il peut donc se présenter cinq cas :

1° C et Γ sont quelconques, c'est-à-dire que les racines de l'équation en λ sont distinctes. On peut ramener l'équation C à la forme

$$X^2 + Y^2 + 2bXY - aZ^2 = 0;$$

2° C et Γ sont tangentes en un point.

L'équation réduite de C peut s'écrire

$$X^2 + 2XY - aZ^2 = 0;$$

3° C et Γ sont bitangentes

$$4XY - aZ^2 = 0;$$

4° C et Γ sont osculatrices

$$4XY + 2ZX - Z^2 = 0;$$

5° C et Γ sont surosculatrices

$$X^2 + 4XY - Z^2 = 0.$$

Dans ces équations les coefficients a et b ne peuvent pas se réduire; ce sont des invariants et de plus dans le premier cas on devra avoir

$$(b - 2a)^2 - 1 \neq 0 \quad \text{et} \quad b^2 - 1 \neq 0.$$

Conservons pour le moment l'équation

$$f(X, Y, Z) = 0.$$

Désignons par Π le plan des X , Y , Z .

A tout point de ce plan correspond une corde de la cubique définie par les équations

$$\frac{y^2 - zx}{X_0} = \frac{x^2 - ty}{Y_0} = \frac{xy - zt}{Z_0}.$$

où X_0, Y_0, Z_0 représentent les coordonnées du point considéré. Cherchons les valeurs du paramètre u correspondant aux points où cette corde rencontre la cubique. Remarquons pour cela que le cône qui contient la cubique et a pour sommet le point de paramètre u a pour équation

$$u^2Y - uZ + X = 0.$$

Dans le plan Π cette équation représente une tangente à Γ . En exprimant que ce cône contient la génératrice précédente il vient

$$u^2Y_0 - uZ_0 + X_0 = 0,$$

équation du second degré qui détermine les valeurs de u .

Si l'on représente les coordonnées des points de Γ par les formules

$$X = u^2, \quad Y = 1, \quad Z = 2u,$$

on voit que les valeurs de u données par l'équation précédente sont celles qui correspondent aux points de contact de Γ avec les deux tangentes issues du point $P(X_0, Y_0, Z_0)$.

On peut donner aux considérations précédentes une forme géométrique simple. La conique Γ peut être considérée comme la perspective de la cubique sur le plan $t = 0$ en prenant comme point de vue le sommet opposé du tétraèdre de référence et en changeant dans les équations x en X , y en $\frac{Z}{2}$ et z en Y .

Une corde de la cubique passant par deux points de paramètres u_0 et u_1 aura pour perspective la droite passant par les deux points correspondants de Γ ; si l'on considère la corde correspondant au point $P(X_0, Y_0, Z_0)$ du plan Π elle aura pour perspective la polaire du point P par rapport à Γ .

Si l'on assujettit le point P à décrire une courbe ayant pour équation

$$F(X, Y, Z) = 0,$$

on définit une surface réglée admettant la cubique comme ligne singulière et la polaire du point P par rapport à Γ enveloppe une courbe polaire réciproque de la précédente et qui n'est pas autre chose que le contour apparent de la surface, lorsque l'on prend sa perspective comme nous l'avons indiqué plus haut.

Dans le cas qui nous occupe la polaire réciproque de C est une conique C' . A toute propriété des coniques C et Γ correspondra une propriété de la surface. Par exemple s'il existe un polygone de p côtés inscrit dans Γ et circonscrit à C' , il sera la perspective d'un polygone de p côtés inscrit dans la cubique et tracé sur la surface; nous reviendrons dans un instant sur le cas où ce polygone est un triangle.

Nous ne nous occuperons par des singularités de la surface et nous allons établir une propriété qui appartient en général à cette surface.

Considérons un point $M(u_0)$ de la cubique. Par ce point passent deux génératrices; proposons-nous de former l'équation de leur plan.

Soit

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY = 0$$

l'équation de C et soient X_0, Y_0, Z_0 les coordonnées d'un point de cette courbe. La génératrice correspondante coupe la cubique en deux points dont les paramètres u_0 et u vérifient l'équation

$$Y_0 u^2 - Z_0 u + X_0 = 0.$$

On a donc

$$\frac{X_0}{uu_0} = \frac{Y_0}{1} = \frac{z_0}{u + u_0}.$$

D'où l'on tire

$$Au^2 u_0^2 + A' + A''(u + u_0)^2 + 2B(u + u_0) + 2B'uu_0(u + u_0) + 2B''uu_0 = 0.$$

Cette équation en u détermine les paramètres u_1 et u_2 des points où la cubique est rencontrée par les deux génératrices issues du point $M(u_0)$.

Multiplions le premier membre par $(u - u_0)$, on obtient une équation du troisième degré en u admettant pour racines u_0, u_1, u_2 . Si l'on y remplace u^3, u^2, u , respectivement par $\frac{z}{t}, \frac{y}{t}, \frac{x}{t}$, l'équation linéaire ainsi obtenue est celle du plan cherché

$$(P) \quad \begin{cases} u_0^3(Ay + B'x + A''t) + u_0^2[(A'' + 2B'')x - Az + Bt] \\ - u_0[(A'' + 2B'')y + B'z - A't] - (A'x + By + A''z) = 0. \end{cases}$$

On voit que ce plan enveloppe *en général* une développable du quatrième degré.

Supposons, pour simplifier,

$$B = 0, \quad B' = 0,$$

ce qui est toujours permis, sauf dans le cas où C et Γ sont oscultrices.

L'équation du plan P devient

$$-u_0^3(Ay + A''t) + u_0^2[Az - (A'' + 2B'')x] - u_0[A't - (A'' + 2B'')y] + A'x + A''z = 0.$$

Supposons d'abord

$$A''(A'' + 2B'') + AA' \neq 0.$$

L'équation précédente représente le plan polaire du point

$$x' = -u_0, \quad y' = u_0^2, \quad z' = -u_0^3, \quad t' = 1.$$

par rapport à la quadrique

$$(Q). \quad F(x, y, z, t) = Ay^2z + A''z^2t - (A'' + 2B'')xy + A'tx = 0.$$

Le plan P enveloppe une développable qui est la polaire de γ par rapport à Q.

Il est aisé d'en conclure que la surface réglée S est sa propre polaire réciproque par rapport à Q.

Considérons en effet une génératrice rectiligne D qui rencontre la cubique aux deux points $M_0(u_0)$ et $M_1(u_1)$. Par cette génératrice passent deux plans tels que P. L'équation du premier est déjà écrite, celle du second s'obtiendrait en remplaçant u_0 par u_1 . Ces deux plans ont pour pôles par rapport à Q deux points M'_0 et M'_1 de la cubique et correspondant aux deux valeurs $(-u_0)$ et $(-u_1)$ du paramètre. La droite D a donc pour conjuguée la corde $M'_0M'_1$. Or u_0 et u_1 sont racines d'une équation de la forme

$$Y_0u^2 - Z_0u + X_0 = 0,$$

(X_0, Y_0, Z_0) étant les coordonnées d'un point de C; $(-u_0)$ et $(-u_1)$ sont donc racines de l'équation

$$Y_0u^2 + Z_0u + X_0 = 0,$$

mais dans notre hypothèse l'équation de C

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2B''XY = 0$$

ne change pas quand on change Z en $-Z$, donc le point $(X_0, Y_0, -Z_0)$ appartient à C et la corde correspondante $M'_0M'_1$ est une génératrice de la surface S. Cette surface est donc sa propre polaire relativement à Q.

Le résultat précédent est une conséquence de ce fait qu'il existe une transformation homographique qui n'altère pas C et Γ . Si ces deux coniques sont osculatrices une telle transformation n'existe pas; il n'y a donc pas lieu d'étudier ce cas, dans lequel la surface ne possède pas la propriété établie ci-dessus. D'une manière générale, s'il existe une transformation projective de l'espace qui n'altère pas la surface S il existe une transformation du plan Π qui n'altère pas les coniques C et Γ et réciproquement.

Pour plus de précision examinons les équations réduites. Dans le premier cas

$$X^2 + Y^2 + 2bXY - aZ^2 = 0$$

[pour que les racines de l'équation en λ soient distinctes on sait que l'on doit avoir $(b - 2a)^2 - 1 \neq 0$].

Il existe alors trois transformations répondant à la question

$$\begin{aligned} X &= X_1, & Y &= Y_1, & Z &= -Z_1, \\ X &= Y_1, & Y &= X_1, & Z &= Z_1, \\ X &= Y_1, & Y &= X_1, & Z &= -Z_1. \end{aligned}$$

La troisième est le produit des deux autres.

Elles correspondent dans l'espace aux transformations

$$\begin{aligned} x &= -x_1, & y &= y_1, & z &= -z_1, & t &= t_1, \\ x &= y_1, & y &= x_1, & z &= t_1, & t &= z_1, \\ x &= -y_1, & y &= x_1, & z &= -t_1, & t &= z_1. \end{aligned}$$

Dans le deuxième et le cinquième cas il n'existe qu'une de ces transformations : la première. Dans le quatrième cas il n'en existe aucune.

Considérons enfin le troisième cas : C et Γ sont bitangentes, il existe alors une infinité de transformations dépendant d'un paramètre arbitraire ⁽¹⁾

$$X_1 = \alpha^2 X, \quad Y_1 = Y, \quad Z_1 = \alpha Z,$$

qui correspondent dans l'espace aux transformations définies par les équations

$$x_1 = \alpha x, \quad y_1 = \alpha^2 y, \quad z_1 = \alpha^3 z, \quad t_1 = t.$$

On peut y joindre la transformation

$$x_1 = y, \quad y_1 = x, \quad z_1 = t, \quad t_1 = z.$$

Dans tous les cas les transformations qui n'altèrent pas la surface S n'altèrent pas non plus la quadrique Q, comme on le voit aisément sur les équations.

Cas particulier. — Revenons au cas que nous avons écarté et dans lequel on a

$$A''(A'' + 2B'') + AA' = 0.$$

On voit que le plan P passe par une droite fixe. (On s'assure aisément qu'il n'en sera jamais ainsi quand C et Γ sont osculatrices et ici encore nous pouvons laisser ce cas de côté.)

L'interprétation de l'équation précédente est facile. Elle exprime qu'il existe un triangle inscrit dans C et circonscrit à Γ , et par conséquent il existe une infinité de triangles inscrits dans Γ et circonscrits à C' polaire réciproque de C par rapport à Γ .

Le plan P coupe donc la surface suivant un triangle dont les côtés rencontrent

⁽¹⁾ ROHN, *loc. cit.*

une directrice fixe qui appartient à la surface. Il faut pour qu'il en puisse être ainsi que l'équation en λ des deux coniques C et Γ ait au moins deux racines distinctes; c'est-à-dire que C et Γ ne soient ni osculatrices, ni surosculatrices.

L'équation de la surface peut alors prendre l'une des formes suivantes :

Premier cas :

$$X^2 + Y^2 + 2bXY - aZ^2 = 0,$$

où l'on a

$$a(2b - a) - 1 = 0, \quad b^2 - 1 \neq 0;$$

Deuxième cas :

$$X^2 + 2XY - 2Z^2 = 0;$$

Troisième cas :

$$XY - Z^2 = 0.$$

La surface ainsi déterminée peut être engendrée par les côtés d'un triangle dont les sommets décrivent la cubique et dont le plan tourne autour d'une droite fixe; cette surface possède donc une directrice rectiligne.

Si l'on soumet à une transformation par polaires réciproques une surface réglée du quatrième ordre à cubique double, on obtient en général une surface de même nature. Les surfaces particulières dont nous venons de parler donnent naissance à des surfaces d'espèce différente : ce sont des surfaces possédant une directrice rectiligne triple, par chaque point de laquelle passent trois génératrices formant un trièdre qui est à la fois inscrit et circonscrit à la surface. Les faces de ce trièdre enveloppent une développable du quatrième ordre.

Nous nous contenterons de mentionner ces surfaces qui constituent un type des surfaces à droite triple signalées par M. Rohn (1).

Si en particulier on transforme la surface ayant pour équation

$$XY - Z^2 = 0,$$

on obtient une surface à droite triple admettant comme la précédente un groupe projectif à un paramètre.

SURFACES POSSÉDANT UNE CONIQUE DOUBLE ET UNE DROITE DOUBLE.

M. Rohn (2) a déterminé deux de ces surfaces, mais nous allons montrer que cette nomenclature est incomplète. M. Rohn définit une génératrice de la surface en établissant entre les points de la droite double et ceux de la conique double une correspondance qui se traduit par une relation doublement quadratique entre deux variables; il peut toutefois arriver que cette relation soit linéaire par rapport

(1) *Math. Annalen*, t. XXIV. — *Flächen vierter Ordnung mit dreifachem Punkte.*

(2) *Math. Annalen*, t. XXIV, p. 306.

à l'une des variables et cette hypothèse conduit à deux types de surfaces que M. Rohn n'a pas signalés.

Prenons pour plan de la conique double γ le plan $t = 0$, et pour droite double Δ

$$x = 0, \quad z = 0.$$

La conique double γ doit rencontrer la droite double et nous pouvons prendre son équation sous la forme

$$xy - z^2 = 0.$$

Une quadrique contenant la droite Δ et la conique γ a pour équation

$$a(xy - z^2) + b.tx + c.tz = 0.$$

Posons

$$\begin{aligned} xy - z^2 &= X, \\ tx &= Y, \\ tz &= Z. \end{aligned}$$

En raisonnant comme pour les surfaces à cubique double nous verrons que l'équation de la surface du quatrième ordre S aura la forme générale

$$f(X, Y, Z) = 0,$$

f étant homogène et du second degré. Nous regarderons encore cette équation comme représentant une conique C dans un plan Π . Toutefois il est important de remarquer que cette équation ne doit pas être vérifiée quand on y fait $Y = 0$, $Z = 0$, sinon la surface se décomposerait en une surface du troisième ordre et en un plan $t = 0$.

Pour réduire l'équation, nous remarquerons tout d'abord que la transformation projective la plus générale qui n'altère pas la droite Δ et la conique γ est définie par les équations

$$\begin{aligned} x &= x_1, \\ y &= \alpha^2 x_1 + 2\alpha\beta z_1 + \beta^2 y_1 + \gamma t_1, \\ z &= \alpha x_1 + \beta z_1, \\ t &= \delta t_1, \end{aligned}$$

comme on l'établit facilement. La transformation dépend de quatre paramètres arbitraires et se traduit par une transformation linéaire et homogène sur X , Y et Z :

$$T \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \beta^2 X_1 + \gamma Y_1, \\ Y &= \delta Y_1, \\ Z &= \alpha \delta Y_1 + \beta \delta Z_1. \end{aligned} \right.$$

Nous sommes donc ramenés à réduire l'équation de la conique C par une transformation du groupe T.

Toutes les transformations T laissent invariables les deux points ayant pour coordonnées

$$A \begin{cases} X = 0, \\ Y = 0, \end{cases} \quad B \begin{cases} Y = 0, \\ Z = 0, \end{cases}$$

et que nous désignerons par A et B. La solution du problème dépend donc, en définitive, de la position des deux points A et B par rapport à la conique C.

Il y a quatre cas possibles :

1° La droite AB coupe C en deux points distincts autres que A et B.

On peut prendre pour équation réduite

$$S_1 \quad X^2 + Z^2 + 2bXZ - Y^2 = 0.$$

2° La droite AB est tangente à C en un point autre que A ou B.

L'équation réduite peut se ramener à la forme

$$S_2 \quad (X + Z)^2 - 2YZ = 0.$$

Cette forme n'est d'ailleurs pas unique.

On pourrait prendre, par exemple,

$$\sqrt{X} + \sqrt{Z} + \sqrt{Y} = 0.$$

3° La droite AB coupe C au point A et en un autre point distinct de A ou B.

On peut prendre comme équation réduite

$$S_3 \quad X^2 + 2ZY - Y^2 = 0.$$

4° Enfin la droite AB peut être tangente en A à C; on pourra alors prendre l'équation

$$S_4 \quad 2YZ - X^2 = 0.$$

Ces quatre cas sont évidemment les seuls, car la conique C ne peut pas passer par le point B.

Les deux premiers cas donnent les surfaces étudiées par M. Rohn.

Les deux autres cas conduisent à des surfaces bien différentes et dans lesquelles il ne passe qu'une seule génératrice rectiligne par chaque point de la droite double, comme nous allons le faire voir.

Représentons les coordonnées d'un point de la conique γ par les formules

$$x = 1, \quad y = u^2, \quad z = u, \quad t = 0,$$

et celles d'un point de la droite double par les équations

$$x = 0, \quad y = \lambda, \quad z = 0, \quad t = 1.$$

Soient, d'autre part, X, Y, Z les coordonnées d'un point P de la conique C dont nous écrivons l'équation sous la forme

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY = 0.$$

La génératrice correspondant au point P est définie par les équations

$$\frac{xy - z^2}{X} = \frac{tx}{Y} = \frac{tz}{Z}.$$

Si l'on cherche les points où elle rencontre la conique γ et la droite Δ , on voit qu'ils correspondent aux valeurs des paramètres définies par les équations

$$\frac{X}{\lambda} = Y = \frac{Z}{u}.$$

En remplaçant X, Y, Z par λ , 1 , u dans l'équation de la conique C, il vient

$$A\lambda^2 + A' + A''u^2 + 2Bu + 2B'\lambda u + 2B''\lambda = 0,$$

équation doublement quadratique en λ et u . Mais si $A'' = 0$, cette équation est linéaire par rapport à u , et, par suite, à chaque valeur de λ correspond une seule valeur de u ; autrement dit, par chaque point de la droite double passe une seule génératrice rectiligne de la surface : c'est le cas pour les surfaces S_3 et S_4 .

Considérons les surfaces S_1 et S_2 . Par chaque point $M(\lambda)$ de la droite double passent deux génératrices. On obtient aisément l'équation de leur plan P. Si dans l'équation doublement quadratique on remplace u^2 et u par $\frac{y}{x}$ et $\frac{z}{x}$ on obtient l'équation de la trace de ce plan sur le plan $t = 0$:

$$(A\lambda^2 + A' + 2B''\lambda)x + 2(B + B'\lambda)z + A''y = 0.$$

L'équation du plan cherché est donc

$$(A\lambda^2 + A' + 2B''\lambda)x + 2(B + B'\lambda)z + A''(y - \lambda t) = 0.$$

Ce plan enveloppe un cône de second ordre.

Prenons l'équation réduite de la surface S_1 . L'équation du plan P s'écrit alors

$$\lambda^2 x + (2bz - t)\lambda + (y - x) = 0.$$

On reconnaît l'équation du plan polaire du point :

$$x = 1, \quad y = \lambda^2, \quad z = \lambda, \quad t = 0,$$

par rapport à la quadrique

$$Q \quad 2xy - x^2 + 2bz^2 - 2zt = 0.$$

Le plan P enveloppe donc un cône du second ordre Γ polaire de la conique γ par rapport à Q. Les génératrices de ce cône sont bitangentes à la surface.

On peut conclure de là que la surface est sa propre polaire par rapport à Q. En effet, une génératrice qui joint le point $M(\lambda)$ de la droite double au point $N(u)$ de la conique double est définie par les équations

$$\begin{aligned} \lambda^2 x + (2bz - t)\lambda + (y - x) &= 0, \\ z - ux &= 0. \end{aligned}$$

La conjuguée passe par les pôles de ces deux plans qui sont respectivement un point N_1 de la conique double pour le premier et un point M_1 de la droite double pour le second.

Ces deux points ont pour coordonnées

$$\begin{array}{llll} N_1 & x = 1, & y = \lambda^2, & z = \lambda, & t = 0, \\ M_1 & x = 0, & y = u, & z = 0, & t = 1. \end{array}$$

Si l'on remarque maintenant que l'équation doublement quadratique en λ et u a, dans le cas qui nous occupe, une forme symétrique, on voit que la droite $M_1 N_1$ appartient à la surface, car elle se déduit de MN en permutant λ et u . Donc la surface S_1 coïncide avec sa polaire réciproque par rapport à Q.

La surface S_2 ne possède pas cette propriété; sa polaire est simplement une surface de même genre.

Quant aux surfaces S_3 et S_4 , si on les transforme par polaires réciproques, on obtient des surfaces possédant une droite singulière telle que chaque plan passant par cette droite coupe la surface suivant une seule génératrice rectiligne. On obtient donc deux nouveaux types de surfaces à droite triple: ces surfaces possèdent un cône de tangentes doubles et ce cône est du second ordre.

Ces surfaces doivent être rapprochées de celles que nous avons déduites des surfaces à cubique double; elles ne possèdent qu'une directrice rectiligne.

