


---

SUR LA MÉTHODE DE CREMONA

POUR DÉTERMINER LES

TENSIONS DANS LES SYSTÈMES ARTICULÉS,

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS,  
Chargé de Cours à l'Université de Toulouse.



Dans un Mémoire antérieur (<sup>1</sup>), j'ai démontré que les seuls *systèmes indéformables* dans lesquels on peut déterminer les tensions de proche en proche par un diagramme réciproque sont ceux qu'on obtient en partant d'un triangle et lui accolant d'autres triangles de façon que chaque nouveau triangle ait deux côtés libres et un côté confondu avec un des côtés libres des triangles précédemment placés.

Dans les Traités de Statistique graphique on se contente de *constater* l'existence du diagramme réciproque pour certains systèmes particulièrement simples sans *démontrer* l'existence effective de ce diagramme pour les systèmes les plus généraux construits d'après la loi énoncée plus haut.

Je crois donc utile de publier la démonstration générale suivante qui est très élémentaire et montre bien que les règles données partout pour la construction des diagrammes réciproques sont absolument nécessaires.

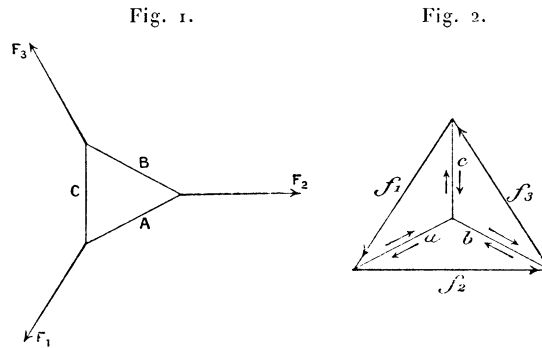
I. Considérons d'abord un triangle articulé en équilibre sous l'action de trois forces (*fig. 1 et 2*). On constate immédiatement que le polygone des forces relatif à chaque sommet est un triangle et que ceux-ci peuvent toujours se juxtaposer de façon à former un diagramme réciproque. En outre, ce diagramme satisfait aux conditions suivantes :

1<sup>o</sup> Le polygone  $f_1 f_2 f_3$  des forces extérieures est construit en prenant ces forces dans l'ordre où on les rencontre en suivant le contour du triangle ;

---

(<sup>1</sup>) DELASSUS, *Sur l'équilibre des systèmes articulés (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse; 1899)*. Je ferai remarquer, à cette occasion, que les systèmes considérés dans la troisième Partie de ce Mémoire sont supposés *indéformables*. L'omission de ce qualificatif provient de ce que ce sont les seuls systèmes que l'on a intérêt à considérer.

2° Une barre de pourtour comprise entre deux forces consécutives  $F$  a pour homologue dans le diagramme une ligne parallèle issue du sommet du polygone des forces qui est à l'intersection des deux  $f$  correspondants;



3° Trois barres formant un triangle (barres A, B, C) ont pour homologues dans le diagramme trois lignes concourantes (lignes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ).

Pour abréger, nous désignerons l'ensemble de ces trois conditions par  $\Gamma$ .

II. Remarquons d'abord que, pour les systèmes considérés, on peut toujours définir le pourtour, c'est-à-dire une ligne polygonale fermée ayant pour côtés des barres du système et pour sommets tous les nœuds, chacun d'eux n'étant traversé qu'une fois quand on parcourt ce polygone.

C'est vrai pour un triangle. Supposons qu'on lui ajoute un autre triangle, ce dernier sera accolé au premier par une barre du pourtour; supprimons cette barre, nous obtenons un nouveau polygone fermé composé de barres du nouveau système et ayant pour sommets tous ses nœuds; c'est donc le nouveau pourtour.

Supposons que la loi soit vraie pour un système  $\Sigma_n$  composé de  $n$  triangles, c'est-à-dire que  $\Sigma_n$  ait un pourtour, et que, pour obtenir un système  $\Sigma_{n+1}$  à  $n + 1$  triangles, il soit nécessaire d'ajouter un nouveau triangle en l'accolant à  $\Sigma_n$  par une barre de son pourtour. Supprimons cette barre de pourtour et remplaçons-la par les deux autres côtés du triangle ajouté, on voit immédiatement que le pourtour ainsi modifié de  $\Sigma_n$  sera le pourtour de  $\Sigma_{n+1}$ .

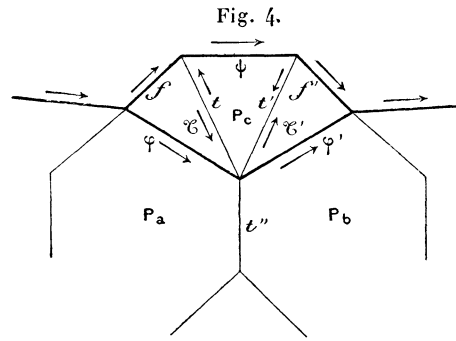
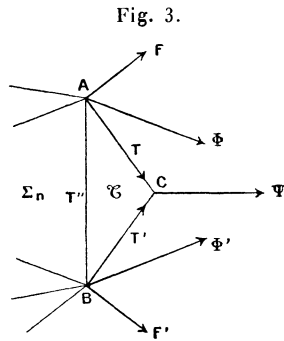
Ainsi la loi est générale : *Tout système  $\Sigma_n$  a un pourtour et tout système  $\Sigma_{n+1}$  se déduit d'un système  $\Sigma_n$  en lui accolant un triangle suivant une de ses barres de pourtour.*

III. Pour démontrer que tous les systèmes considérés ont effectivement un diagramme réciproque satisfaisant aux conditions  $\Gamma$ , il nous suffit, puisque la propriété a été démontrée pour  $\Sigma_1$ , de prouver que si elle est vraie pour  $\Sigma_n$  elle est vraie pour  $\Sigma_{n+1}$ .

Soit donc  $\Sigma_n$  et considérons  $\Sigma_{n+1}$  obtenu en lui accolant le triangle  $\mathfrak{C}$  suivant la barre de pourtour AB. Supposons qu'en outre des forces extérieures appliquées aux nœuds de  $\Sigma_n$  on applique une force  $\Psi$  au sommet libre C de  $\mathfrak{C}$  et soient T et T' les tensions sur les deux côtés libres de ce triangle, T et T' ont  $\Psi$  pour résultante.

On peut supprimer le triangle  $\mathfrak{C}$  et considérer  $\Sigma_n$  comme étant en équilibre en remplaçant simplement les forces extérieures F et F' qui agissent en A et en B par les résultantes  $\Phi$  et  $\Phi'$  que l'on obtient en les composant respectivement avec T et T'. On ne modifie pas les forces extérieures qui agissent sur les autres nœuds et les tensions de toutes les barres de  $\Sigma_n$  sont les mêmes que dans  $\Sigma_{n+1}$ .

Mais  $\Sigma_n$  a, par hypothèse, un diagramme réciproque satisfaisant aux conditions  $\Gamma$ . AB est une barre (fig. 3 et 4) de pourtour et  $\Phi$ ,  $\Phi'$  sont deux forces consé-



tives, de sorte que  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont deux côtés consécutifs du polygone des forces et que  $l''$  ligne homologue de AB dans le diagramme partira de l'intersection de  $\varphi$  et  $\varphi'$ . Les polygones des forces relatifs à A et B auront donc la disposition marquée sur la figure.

Dans le diagramme, décomposons  $\varphi$  suivant ses deux composantes  $f$ ,  $t$  prises dans cet ordre et de même  $\varphi'$  suivant  $t'$  et  $f'$ ; nous obtenons ainsi deux triangles  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{C}'$  et il est bien visible qu'en joignant les deux sommets libres on obtient un segment  $\psi$  équipollent à  $\Psi$  et constituant avec  $t$  et  $t'$  le polygone des forces  $P_c$  relatif au nœud C de  $\Sigma_{n+1}$ .

Considérons alors le diagramme ainsi modifié et dans lequel nous supprimerons les deux lignes  $\varphi$  et  $\varphi'$ ; je dis que c'est le diagramme de  $\Sigma_{n+1}$  et qu'il satisfait encore aux conditions  $\Gamma$  :

1° C'est bien un diagramme réciproque, car chaque tension n'est tracée qu'une fois. En effet, toutes les tensions autres que  $t$  et  $t'$  n'ont pas été retracées à nouveau et elles étaient tracées une seule fois dans le diagramme de  $\Sigma_n$ . Quant à  $t$  et  $t'$ , chacune d'elles n'a été tracée qu'une fois. Enfin, on trouve dans la figure les polygones des forces relatifs à tous les nœuds; ceux des nœuds autres que ABC étaient tracés dans le diagramme de  $\Sigma_n$  et l'on n'y a pas touché. Ceux de A et B sont  $P_A$

et  $P_B$  respectivement augmentés des triangles  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{C}'$  après suppression de  $\varphi$  et  $\varphi'$ . Quant à celui de C, c'est le triangle  $P_c$ ;

2° Le polygone des forces extérieures est bien construit en prenant les forces dans l'ordre où on les rencontre en suivant le pourtour. Le pourtour de  $\Sigma_{n+1}$  s'obtient en intercalant C entre A et B sans changer les autres sommets. Pour prendre les forces consécutives sur le pourtour de  $\Sigma_{n+1}$ , il faudra donc prendre les forces consécutives sur le pourtour de  $\Sigma_n$  et, entre celle appliquée en A et celle appliquée en B, intercaler celle appliquée en C. On voit que c'est ce qui est arrivé en remplaçant la portion  $\varphi, \varphi'$  par la portion  $f, \psi, f'$ ;

3° Une barre de pourtour comprise entre deux forces extérieures consécutives  $F_\alpha, F_\beta$ , a pour homologue dans le diagramme une ligne parallèle menée par l'intersection de  $f_\alpha, f_\beta$ .

C'est vrai pour toutes les barres de pourtour autres que AC et BC, car elles étaient de pourtour pour  $\Sigma_n$  et il n'y a qu'un seul sommet du polygone relatif à  $\Sigma_n$  qui a été supprimé : c'est celui qui était à l'intersection de  $\varphi$  et  $\varphi'$  et d'où partait la ligne homologue de AB. Or AB n'est plus barre de pourtour.

Quant à AC comprise en F et  $\Psi$ , on voit que son homologue  $t$  part du point de rencontre de  $f$  et  $\psi$ ; la même vérification se fait pour BC;

4° Trois barres formant un triangle ont pour homologues trois lignes concourantes. En effet, cela est vrai pour tous les triangles qui composaient  $\Sigma_n$ , puisque le diagramme de  $\Sigma_n$  satisfaisait aux conditions  $\Gamma$ . C'est encore vrai pour le triangle  $\mathfrak{C}$ , car on constate sur le diagramme que  $t, t', t''$  sont concourantes.

L'existence du diagramme réciproque est donc démontrée dans le cas général et en même temps nous obtenons les règles *nécessaires* qu'il faut suivre pour sa construction.

On démontre avec la plus grande facilité que ces règles sont *suffisantes* et l'on voit aisément dans quel ordre il faut suivre successivement les différentes branches pour faire la construction effective du diagramme réciproque d'après les règles  $\Gamma$  dans le cas des systèmes ramifiés.

