RECHERCHES

SUR QUELQUES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU SECOND ORDRE

(DEUXIÈME MÉMOIRE),

PAR M. É. GOURSAT.

1. Dans le précédent Mémoire ([1]), j'ai énuméré tous les types d'équations du second ordre de la forme $s = f(x, y, z, p, q)$, pour lesquelles les équations différentielles de chacun des systèmes de caractéristiques admettent une combinaison intégrable renfermant les dérivées du second ordre, et j'ai montré qu'on pouvait obtenir sous forme explicite l'intégrale générale de la plupart de ces formes types. Je me propose de compléter ces résultats, en intégrant de même les types II, III, IV (p. 67), laissés de côté dans le précédent Travail.

2. L'équation

$$sz = \sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2} \tag{1}$$

admet les deux intégrales intermédiaires

$$rz + 1 + p^2 = Xz\sqrt{1+p^2}, \tag{2}$$

$$tz + 1 + q^2 = Yz\sqrt{1+q^2}; \tag{3}$$

l'équation (2), par exemple, peut être considérée comme une équation différentielle ordinaire du second ordre, renfermant une fonction arbitraire X de la variable indépendante x, et il suffit d'une transformation très simple pour la ramener à une équation linéaire. Posons, en effet, $u = z\sqrt{1+p^2}$; l'équation (2)

([1]) *Voir* page 31-78 de ce Volume.

peut s'écrire

$$2\frac{\partial u}{\partial x} = X\frac{\partial z^2}{\partial x};$$

il vient en différentiant

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X'\frac{\partial z^2}{\partial x} + X(2p^2 + 2zr),$$

ce qui peut encore s'écrire, en tenant compte de la relation (2),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{X'}{X}\frac{\partial u}{\partial x} + X[Xu - 1].$$

La fonction auxiliaire u doit donc satisfaire à l'équation linéaire du second ordre

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{X'}{X}\frac{\partial u}{\partial x} - X^2 u = -X;$$

inversement, connaissant u, on a, pour déterminer z, l'équation

$$u^2 = z^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial z^2}{\partial x}\right)^2 = z^2 + \frac{1}{X^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

d'où l'on tire

$$(5)\qquad z^2 = u^2 - \frac{1}{X^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

et tout se ramène en définitive à l'intégration de l'équation linéaire (4). Comme X désigne une fonction arbitraire, nous remplacerons, dans la suite des calculs, X par X'. En prenant d'abord l'équation sans second membre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{X''}{X'}\frac{\partial u}{\partial x} - X'^2 u = 0,$$

on a pour l'intégrale générale

$$u = \alpha e^X + \beta e^{-X},$$

α et β étant deux constantes arbitraires, et la méthode de la variation des constantes donne pour l'intégrale générale de l'équation complète

$$u = C_1 e^X - C_2 e^{-X} - \frac{e^X}{2}\int e^{-X}\,dx + \frac{e^{-X}}{2}\int e^X\,dx.$$

La formule (5) donne ensuite pour z, après quelques transformations faciles,

$$(6)\qquad z^2 = \left(2C_1 - \int e^{-X}\,dx\right)\left(\int e^X\,dx - 2C_2\right).$$

La formule (6) représente l'intégrale générale de l'équation (2), où l'on aurait remplacé X par X′. Il s'ensuit que toute intégrale de l'équation aux dérivées partielles (1) a une expression de cette forme, où C_1 et C_2 seraient des fonctions de la seule variable y. On pourrait obtenir la relation qui doit exister entre ces deux fonctions de y en substituant dans cette équation; mais, si l'on a égard à la symétrie de cette équation relativement aux deux variables x et y, on peut écrire immédiatement l'intégrale générale

$$z^2 = \left(\int e^{X}\,dx - \int e^{-Y}\,dy\right)\left(\int e^{Y}\,dy - \int e^{-X}\,dx\right), \tag{7}$$

X désignant une fonction arbitraire de x et Y une fonction arbitraire de y. La vérification est facile; on tire en effet de la formule précédente

$$2pz = e^{X}\left(\int e^{Y}\,dy - \int e^{-X}\,dx\right) - e^{-X}\left(\int e^{X}\,dx - \int e^{-Y}\,dy\right),$$

et, par suite,

$$2z\sqrt{1+p^2} = e^{X}\left(\int e^{Y}\,dy - \int e^{-X}\,dx\right) + e^{-X}\left(\int e^{X}\,dx - \int e^{-Y}\,dy\right).$$

On a de même

$$2qz = e^{Y}\left(\int e^{X}\,dx - \int e^{-Y}\,dy\right) - e^{-Y}\left(\int e^{Y}\,dy - \int e^{-X}\,dx\right),$$

$$2z\sqrt{1+q^2} = e^{Y}\left(\int e^{X}\,dx - \int e^{-Y}\,dy\right) + e^{-Y}\left(\int e^{Y}\,dy - \int e^{-X}\,dx\right),$$

et, en combinant ces formules, il vient

$$2p\sqrt{1+q^2} + 2q\sqrt{1+p^2} = e^{X+\quad} - e^{-X-Y}.$$

D'autre part, en différentiant par rapport à y la formule qui donne $2z\sqrt{1+p^2}$, on trouve

$$2q\sqrt{1+p^2} + \frac{2pzs}{\sqrt{1+p^2}} = e^{X+Y} - e^{-X-Y} = 2p\sqrt{1+q^2} + 2q\sqrt{1+p^2},$$

c'est-à-dire

$$sz = \sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}.$$

La formule (1) peut encore s'écrire, en remplaçant e^{X} par X et e^{Y} par Y,

$$z^2 = \left(\int X\,dx - \int \frac{dy}{Y}\right)\left(\int Y\,dy - \int \frac{dx}{X}\right), \tag{7 bis}$$

ou, en remplaçant Y par $-\frac{1}{Y}$,

$$(7\ ter) \qquad z^2 = -\left(\int X\,dx + \int Y\,dy\right)\left(\int \frac{dx}{X} + \int \frac{dy}{Y}\right).$$

Pour avoir l'intégrale générale sous forme explicite, il suffira de poser, dans la formule (7 *bis*), par exemple, α et β désignant deux variables auxiliaires, $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$ deux fonctions arbitraires,

$$X = \alpha, \qquad x = \alpha^2\varphi''(\alpha) + \alpha\varphi'(\alpha) - \varphi(\alpha),$$
$$Y = \beta, \qquad y = \beta^2\psi''(\beta) + \beta\psi'(\beta) - \psi(\beta),$$

ce qui donne

$$\int X\,dx = \int [\alpha^3\varphi'''(\alpha) + 3\alpha^2\varphi''(\alpha)]\,d\alpha = \alpha^3\varphi''(\alpha),$$
$$\int \frac{dx}{X} = \int [\alpha\varphi'''(\alpha) + 3\varphi''(\alpha)]\,d\alpha = \alpha\varphi''(\alpha) + 2\varphi'(\alpha),$$
$$\int Y\,dy = \beta^3\psi''(\beta), \qquad \int \frac{dy}{Y} = \beta\psi''(\beta) + 2\psi'(\beta),$$

et l'intégrale générale de l'équation (1) est alors représentée par l'ensemble des trois équations

$$(8) \qquad \begin{cases} x = \alpha^2\varphi''(\alpha) + \alpha\varphi'(\alpha) - \varphi(\alpha), \\ y = \beta^2\psi''(\beta) + \beta\psi'(\beta) - \psi(\beta), \\ z^2 = [\alpha^3\varphi''(\alpha) - \beta\psi''(\beta) - 2\psi'(\beta)]\,[\beta^3\psi''(\beta) - \alpha\varphi''(\alpha) - 2\varphi'(\alpha)]. \end{cases}$$

3. On arrive encore plus simplement au même résultat par une transformation de Bäcklund. Si l'on pose, en effet,

$$v = z(p - \sqrt{1+p^2}),$$

on a

$$\frac{\partial v}{\partial x} = p(p - \sqrt{1+p^2}) + z\left(1 - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) r = (p - \sqrt{1+p^2})\left(p - \frac{rz}{\sqrt{1+p^2}}\right),$$

et la relation (2) peut encore s'écrire

$$(9) \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + Xv + 1 = 0.$$

L'inconnue auxiliaire v satisfait donc à l'équation du second ordre

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{v}+\frac{1}{v}\right)=0$$

ou

$$(10)\qquad v\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

dont l'équation (9) est une intégrale intermédiaire du premier ordre. D'un autre côté, on tire de l'expression de v, en tenant compte de l'équation (1) elle-même,

$$\frac{\partial v}{\partial y}=q(p-\sqrt{1+p^2})+z\left(1-\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)s=\frac{v}{z}(q-\sqrt{1+q^2}),$$

et la liaison entre les équations (1) et (10) est fournie par les deux relations

$$v=z(p-\sqrt{1+p^2}),\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{v}{z}(q-\sqrt{1+q^2}),$$

que l'on peut mettre sous la forme équivalente

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &2pzv=v^2-z^2,\\ &2qz\frac{\partial \log v}{\partial y}=z^2\left(\frac{\partial \log v}{\partial y}\right)^2-1;\end{aligned}\right.$$

l'élimination de v conduit à l'équation (1) et celle de z à l'équation (10). L'intégration de l'équation (1) est donc ramenée à celle de l'équation du premier ordre (9), qui se fait immédiatement en remplaçant X par $\frac{X''}{X'}$. On trouve ainsi

$$v=\frac{Y-X}{X'},$$

X et Y étant toujours des fonctions arbitraires. En remplaçant v par cette expression dans les formules (11) et en posant

$$z^2=(X-Y)\Theta,$$

il vient

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x}=-\frac{1}{X'},\qquad \frac{\partial\Theta}{\partial y}=\frac{1}{Y'},$$

et l'on a, par conséquent,

$$z^2=(X-Y)\left(\int\frac{dy}{Y'}-\int\frac{dx}{X'}\right),$$

formule qui est équivalente aux précédentes.

4. On intègre de la même façon l'équation plus générale

$$(12) \qquad sz + \varphi(x, p)\psi(y, q) = 0,$$

où les fonctions $\varphi(x, p)$ et $\psi(y, q)$ vérifient respectivement les deux conditions

$$(13) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{p}{\varphi} + \mathrm{K}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial q} = \frac{q}{\psi} + \mathrm{K},$$

K étant une constante différente de zéro. Remarquons d'abord que l'on peut, sans diminuer la généralité, supposer que la fonction φ est indépendante de x et la fonction ψ indépendante de y. En effet, si l'on pose $\varphi = \lambda p$, la première des équations (13) devient

$$(14) \qquad \frac{dp}{p} + \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda^2 - \mathrm{K}\lambda - 1} = 0;$$

en laissant d'abord de côté les cas particuliers où $\mathrm{K} = \pm 2i$, désignons par α, β les deux racines de l'équation

$$(15) \qquad \alpha^2 + \mathrm{K}\alpha - 1 = 0,$$

l'équation (14) peut encore s'écrire

$$\frac{dp}{p} + \frac{1}{\beta - \alpha}\left(\frac{\beta\, d\lambda}{\lambda + \beta} - \frac{\alpha\, d\lambda}{\lambda + \alpha}\right) = 0,$$

et on en déduit, en intégrant,

$$p^{\beta-\alpha}(\lambda + \beta)^\beta = (\lambda + \alpha)^\alpha f(x),$$

ou encore, en remplaçant λ par $\frac{\varphi}{p}$,

$$(16) \qquad (\varphi + \beta p)^\beta = f(x)(\varphi + \alpha p)^\alpha.$$

La fonction $\varphi(x, p)$ est donc définie par une relation de la forme (16), où $f(x)$ peut être une fonction quelconque de x, et la fonction $\psi(y, q)$ est définie par une relation analogue

$$(17) \qquad (\psi + \beta q)^\beta = f_1(y)(\psi + \alpha q)^\alpha,$$

où $f_1(y)$ est une fonction quelconque de y. Si l'on prend maintenant pour nouvelles variables indépendantes

$$\int f(x)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}\, dx, \qquad \int f_1(y)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}\, dy,$$

l'équation proposée (12) prend la forme réduite

$$sz + \varphi(p)\psi(q) = 0, \tag{18}$$

les fonctions $\varphi(p)$ et $\psi(q)$ étant définies respectivement par les deux équations

$$(\varphi + \alpha p)^{\alpha} = (\varphi + \beta p)^{\beta}, \qquad (\psi + \alpha q)^{\alpha} = (\psi + \beta q)^{\beta}. \tag{19}$$

L'équation (18) admet les deux intégrales intermédiaires

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{r}{\varphi} + \frac{\varphi}{z} = \mathrm{X}, \\ &\frac{t}{\psi} + \frac{\psi}{z} = \mathrm{Y}, \end{aligned} \right. \tag{20}$$

dont chacune peut être traitée comme une équation différentielle ordinaire du second ordre et dont l'intégration se ramène encore à celle d'une équation linéaire. Nous développerons les calculs pour la première.

Remarquons d'abord que l'on a, en tenant compte de la relation $\frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{p}{\varphi} + \mathrm{K}$,

$$\frac{d}{dx} \log(p^2 - \varphi^2 + \mathrm{K}p\varphi) = \frac{\mathrm{K}}{\varphi};$$

on peut donc écrire, en prenant convenablement la limite inférieure de l'intégrale,

$$p^2 - \varphi^2 + \mathrm{K}p\varphi = e^{\mathrm{K}\int \frac{dp}{\varphi}}.$$

Cela étant, dans la première des équations (20), prenons une inconnue auxiliaire

$$u = \frac{\varphi z}{p^2 - \varphi^2 + \mathrm{K}p\varphi} = z\varphi\, e^{-\mathrm{K}\int \frac{dp}{\varphi}};$$

on en tire

$$\frac{du}{dx} = e^{-\mathrm{K}\int \frac{dp}{\varphi}} \left[p\varphi + zr\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \mathrm{K} \right) \right] = e^{-\mathrm{K}\int \frac{dp}{\varphi}} \left[p\varphi + \frac{p}{\varphi}(\mathrm{X}\varphi z - \varphi^2) \right],$$

ou enfin

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{X}pz\, e^{-\mathrm{K}\int \frac{dp}{\varphi}}.$$

Une nouvelle différentiation donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mathrm{X}} \frac{du}{dx} \right) &= e^{-\mathrm{K}\int \frac{dp}{\varphi}} \left[p^2 + rz\left(1 - \mathrm{K}\frac{p}{\varphi} \right) \right] = e^{-\mathrm{K}\int \frac{dp}{\varphi}} \left[p^2 + (\mathrm{X}\varphi z - \varphi^2)\left(1 - \mathrm{K}\frac{p}{\varphi} \right) \right] \\ &= \mathrm{X}\varphi z\, e^{-\mathrm{K}\int \frac{dp}{\varphi}} - \mathrm{K}\mathrm{X}pz\, e^{-\mathrm{K}\int \frac{dp}{\varphi}} + (p^2 - \varphi^2 + \mathrm{K}p\varphi)\, e^{-\mathrm{K}\int \frac{dp}{\varphi}}, \end{aligned}$$

équation qui, d'après la remarque faite tout à l'heure, peut s'écrire,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{X}\frac{du}{dx}\right) = Xu - K\frac{du}{dx} + 1,$$

ou, en développant,

$$(21)\qquad \frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{X'}{X} - KX\right)\frac{du}{dx} - X^2u = X.$$

Si l'on remplace dans cette équation X par X', l'intégrale générale est, comme on le vérifie aisément,

$$(22)\qquad u = C_1 e^{\alpha X} + C_2 e^{\beta X} + \frac{1}{\alpha - \beta}\left(e^{\alpha X}\int e^{-\alpha X}\,dx - e^{\beta X}\int e^{-\beta X}\,dx\right),$$

C_1 et C_2 étant les deux constantes arbitraires.

Connaissant u, on a pour déterminer z, p, φ le système des trois équations

$$u = \frac{\varphi z}{p^2 - \varphi^2 + Kp\varphi},\qquad \frac{u'}{X'} = \frac{pz}{p^2 - \varphi^2 + Kp\varphi},\qquad (\varphi + \alpha p)^\alpha = (\varphi + \beta p)^\beta;$$

en introduisant l'inconnue auxiliaire $\lambda = \frac{\varphi}{p}$, on tire de la dernière

$$p = (\lambda + \alpha)^{\frac{\alpha}{\beta - \alpha}}(\lambda + \beta)^{-\frac{\beta}{\beta - \alpha}},$$

et des deux premières

$$\lambda = \frac{X'u}{u'},$$

$$u = \frac{\lambda p z}{p^2(1 - \lambda^2 + K\lambda)} = \frac{-\lambda z}{p(\lambda + \alpha)(\lambda + \beta)}.$$

Remplaçons p par sa valeur; il vient

$$z = -\frac{u}{\lambda}(\lambda + \alpha)^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}}(\lambda + \beta)^{-\frac{\alpha}{\beta - \alpha}},$$

et il n'y a plus qu'à remplacer λ par $\frac{X'u}{u'}$, puis u et u' par leurs expressions pour avoir z,

$$z = -\frac{u'}{X'}\left(\frac{X'u + \alpha u'}{u'}\right)^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}}\left(\frac{X'u + \beta u'}{u'}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta - \alpha}},$$

$$= -\frac{1}{X'}(X'u + \alpha u')^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}}(X'u + \beta u')^{\frac{-\alpha}{\beta - \alpha}}.$$

De la valeur de u, on tire, en observant que $\alpha\beta = -1$,

$$X'u + \alpha u' = X'\alpha e^{\alpha X}\left(D_1 + \int e^{-\alpha X}\,dx\right),$$
$$X'u + \beta u' = X'\beta e^{\beta X}\left(D_2 + \int e^{-\beta X}\,dx\right),$$

en posant, pour abréger, $D_1 = C_1(\alpha - \beta)$, $D_2 = C_2(\beta - \alpha)$. En substituant dans la valeur de z, on arrive, après quelques transformations bien simples, à la formule suivante :

$$(23)\qquad \alpha^2 z^{1+\frac{1}{\alpha^2}} = -(-\alpha)^{1+\frac{1}{\alpha^2}}\left(D_2 + \int e^{\frac{X}{\alpha}}\,dx\right)\left(D_1 + \int e^{-\alpha X}\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha^2}},$$

qui donne l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{r}{\varphi} + \frac{\varphi}{z} = X'.$$

Toute intégrale de l'équation aux dérivées partielles (18) est donnée par une formule de cette espèce, en prenant pour D_1 et D_2 des fonctions de y assujetties à vérifier une relation convenable. Mais, en tenant compte de la forme symétrique de l'équation, on peut écrire immédiatement l'intégrale générale sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$(24)\qquad \alpha^2 z^{1+\frac{1}{\alpha^2}} = -(-\alpha)^{1+\frac{1}{\alpha^2}}\left(\int e^{\frac{X}{\alpha}}\,dx + \int e^{\frac{Y}{\alpha}}\,dy\right)\left(\int e^{-\alpha X}\,dx + \int e^{-\alpha Y}\,dy\right)^{\frac{1}{\alpha^2}},$$

$$(24\ bis)\qquad \alpha^2 z^{1+\frac{1}{\alpha^2}} = -(-\alpha)^{1+\frac{1}{\alpha^2}}\left(\int X\,dx + \int Y\,dy\right)\left(\int X^{-\alpha^2}\,dx + \int Y^{-\alpha^2}\,dy\right)^{\frac{1}{\alpha^2}},$$

$$(24\ ter)\qquad \alpha^2 z^{1+\frac{1}{\alpha^2}} = -(-\alpha)^{1+\frac{1}{\alpha^2}}(X + Y)\left(\int X'^{-\alpha^2}\,dx + \int Y'^{-\alpha^2}\,dy\right)^{\frac{1}{\alpha^2}}.$$

On peut aussi obtenir des formules débarrassées de tout signe de quadrature. Ainsi, en désignant par a un paramètre auxiliaire et par $\varphi(a)$ une fonction arbitraire de ce paramètre, posons, dans la formule (24 *ter*),

$$x = \alpha^2 a\varphi''(a) - \varphi'(a), \qquad X = a^{1-\frac{1}{\alpha^2}}\varphi''(a);$$

il vient

$$X' = \frac{dX}{dx} = \frac{a^{-\frac{1}{\alpha^2}}}{\alpha^2},$$

$$\int X'^{-\alpha^2}\,dx = (\alpha^2)^{\alpha^2}\int [(\alpha^2 - 1)a\varphi''(a) + \alpha^2 a^2\varphi'''(a)]\,da$$
$$= (\alpha^2)^{\alpha^2}\{\alpha^2[a^2\varphi''(a) - a\varphi'(a) + \varphi(a)] + \varphi(a) - a\varphi'(a)\},$$

et l'on opérera de même pour l'intégrale $\int Y'^{-\alpha^2}\,dy$.

5. On arrive encore au même résultat par une transformation de Bäcklund. Soit v une inconnue auxiliaire

$$v = \frac{z}{p - \alpha\varphi};$$

on vérifie aisément, en tenant compte de l'équation (13) et de la valeur de α, que l'on a

$$\frac{d}{dp}\log(p - \alpha\varphi) = -\frac{\alpha}{\varphi};$$

on peut donc écrire

$$v = ze^{\alpha\int\frac{dp}{\varphi}},$$

en prenant convenablement la limite inférieure de l'intégrale, et, en différentiant, il vient

$$\frac{dv}{dx} = e^{\alpha\int\frac{dp}{\varphi}}\left(p + \frac{\alpha z}{\varphi}r\right),$$

ou

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{p}{z} + \alpha\frac{r}{\varphi};$$

on peut donc écrire

$$\frac{r}{\varphi} + \frac{\varphi}{z} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{d\log v}{dx} - \frac{p}{z}\right) + \frac{\varphi}{z} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{d\log v}{dx} - \frac{p - \alpha\varphi}{z}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{d\log v}{dx} - \frac{1}{v}\right).$$

La première des équations (20) devient alors

$$\frac{d\log v}{dx} - \frac{1}{v} = \alpha X,$$

et, par suite, l'inconnue auxiliaire v vérifie l'équation du second ordre

$$v\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{25}$$

qui ne diffère de l'équation (10) que par le changement de v en $-v$. D'autre part, on a

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{q(p - \alpha\varphi) - z\left[1 - \alpha\left(\frac{p}{\varphi} + K\right)\right]s}{(p - \alpha\varphi)^2},$$

et, en remplaçant s par $-\frac{\varphi\psi}{z}$, il vient

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{q - \alpha\psi}{p - \alpha\varphi},$$

et la liaison entre les deux équations (18) et (25) est exprimée par les deux relations

$$(26) \qquad p - \alpha\varphi = \frac{z}{v}, \qquad q - \alpha\psi = \frac{z}{v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

On peut résoudre ces deux équations par rapport à p et à q. De la formule

$$(\varphi + \alpha p)^{\alpha} = (\varphi + \beta p)^{\beta},$$

où $\alpha\beta = -1$, on tire, en effet,

$$\varphi + \alpha p = \left(\frac{\alpha\varphi - p}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha^2}} = (-\alpha)^{\frac{1}{\alpha^2}}(p - \alpha\varphi)^{-\frac{1}{\alpha^2}} = (-\alpha)^{\frac{1}{\alpha^2}}\left(\frac{z}{v}\right)^{-\frac{1}{\alpha^2}}$$

et, par suite,

$$(27) \qquad (1 + \alpha^2)p = \frac{z}{v} - (-\alpha)^{1+\frac{1}{\alpha^2}}\left(\frac{z}{v}\right)^{-\frac{1}{\alpha^2}},$$

et l'on a, de même,

$$(28) \qquad (1 + \alpha^2)q = \frac{z}{v}\frac{\partial v}{\partial y} - (-\alpha)^{1+\frac{1}{\alpha^2}}\left(\frac{z}{v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{-\frac{1}{\alpha^2}};$$

les équations (26) peuvent alors être remplacées par les équations (27) et (28). Si l'on remplace, dans ces dernières, v par sa valeur $\frac{X+Y}{X'}$, qui a déjà été obtenue, et qu'on pose $z^{1+\frac{1}{\alpha^2}} = (X+Y)^{\frac{1}{\alpha^2}}\theta$, il vient

$$\alpha^2\frac{\partial\theta}{\partial y} = -(-\alpha)^{1+\frac{1}{\alpha^2}}(X')^{-\frac{1}{\alpha^2}},$$

$$\alpha^2\frac{\partial\theta}{\partial y} = -(-\alpha)^{1+\frac{1}{\alpha^2}}(Y')^{-\frac{1}{\alpha^2}};$$

on a donc finalement

$$\alpha^2 z^{1+\frac{1}{\alpha^2}} = -(-\alpha)^{1+\frac{1}{\alpha^2}}(X+Y)^{\frac{1}{\alpha^2}}\left(\int X'^{-\frac{1}{\alpha^2}}dx + \int Y'^{-\frac{1}{\alpha^2}}dy\right),$$

formule qui est évidemment équivalente à la formule (24 *ter*) trouvée plus haut.

6. Dans le cas particulier où $K = \pm 2i$, les méthodes précédentes exigent quelques modifications de détail; nous indiquerons rapidement la marche à suivre en employant une transformation de Bäcklund. Remarquons d'abord qu'on peut se borner au cas où $K = 2i$; car si l'on change φ en $-\varphi$, ψ en $-\psi$, l'équation aux dérivées partielles ne change pas, tandis que K se change en $-K$. D'autre part, on peut écrire l'équation proposée

$$sz = (i\varphi)(i\psi),$$

et les équations de condition (13)

$$\frac{d(i\varphi)}{dp} = -\frac{p}{i\varphi} - 2, \qquad \frac{d(i\psi)}{dq} = -\frac{q}{i\psi} - 2;$$

si, en modifiant un peu les notations, on remplace $i\varphi$ et $i\psi$ par φ et ψ respectivement, on est ramené à intégrer l'équation

$$sz = \varphi\psi, \tag{29}$$

φ et ψ étant assujetties à vérifier les équations

$$\frac{d\varphi}{dp} = -\frac{p}{\varphi} - 2, \qquad \frac{d\psi}{dq} = -\frac{q}{\psi} - 2. \tag{30}$$

On démontre, comme plus haut (n° 4), que l'on peut supposer φ indépendant de x, et ψ indépendant de y, les deux fonctions $\varphi(p)$ et $\psi(q)$ étant définies par les deux équations

$$\varphi + p = e^{\frac{\varphi}{\varphi+p}}, \qquad \psi + q = e^{\frac{\psi}{\psi+q}}; \tag{31}$$

les intégrales intermédiaires de l'équation (29) sont alors

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{r}{\varphi} - \frac{\varphi}{z} = \mathrm{X}, \\ &\frac{t}{\psi} - \frac{\psi}{z} = \mathrm{Y}. \end{aligned} \right. \tag{32}$$

Cela étant, prenons l'inconnue auxiliaire $v = \dfrac{z}{p+\varphi}$; on a

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{p(p+\varphi) - zr\left(1 - \dfrac{p}{\varphi} - 2\right)}{(p+\varphi)^2} = \frac{z}{p+\varphi}\left(\frac{r}{\varphi} + \frac{p}{z}\right),$$

ou

$$\frac{\partial \log v}{\partial x} = \frac{r}{\varphi} + \frac{p}{z},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial \log v}{\partial x} - \frac{1}{v} = \frac{r}{\varphi} - \frac{\varphi}{z} = \mathrm{X},$$

ce qui conduit encore à l'équation

$$v\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{33}$$

dont l'intégrale générale est, comme on l'a vu, $v = \dfrac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{\mathrm{X}'}$.

D'autre part, on a

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{q(p+\varphi) - z\left(1 - \frac{p}{\varphi} - 2\right)s}{(p+\varphi)^2} = \frac{q+\psi}{p+\varphi},$$

et la liaison entre les deux équations (29) et (33) résulte des deux relations

$$(34) \qquad p + \varphi = \frac{z}{v}, \qquad q + \psi = z\frac{\partial \log v}{\partial y}.$$

En tenant compte des formules (31), qui déterminent φ et ψ, on peut remplacer ces relations par les suivantes :

$$(35) \qquad \begin{cases} p = \dfrac{z}{v}\left(1 - \log\dfrac{z}{v}\right), \\ q = z\dfrac{\partial \log v}{\partial y}\left[1 - \log\left(z\dfrac{\partial \log v}{\partial y}\right)\right], \end{cases}$$

ou, en remplaçant v par sa valeur,

$$(36) \qquad \begin{cases} p = \dfrac{z\mathrm{X}'}{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}\left(1 - \log\dfrac{z\mathrm{X}'}{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}\right), \\ q = \dfrac{z\mathrm{Y}'}{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}\left(1 - \log\dfrac{z\mathrm{Y}'}{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}\right). \end{cases}$$

En posant, dans ces dernières, $z = (\mathrm{X}+\mathrm{Y})\theta$ et prenant ensuite $\log\theta$ pour inconnue, on obtient facilement l'intégrale générale

$$(37) \qquad z = (\mathrm{X}+\mathrm{Y})e^{-\frac{\int \mathrm{X}'\log\mathrm{X}'\,dx + \int \mathrm{Y}'\log\mathrm{Y}'\,dy}{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}}.$$

Pour faire disparaître les quadratures, il suffira de poser, en désignant par α et β deux paramètres variables, par $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$ deux fonctions arbitraires de ces paramètres,

$$x = \alpha\varphi''(\alpha) + \varphi'(\alpha), \qquad \mathrm{X} = \alpha^2\varphi''(\alpha),$$
$$y = \beta\psi''(\beta) + \psi'(\beta), \qquad \mathrm{Y} = \beta^2\psi''(\beta),$$

ce qui donne

$$\mathrm{X}' = \frac{d\mathrm{X}}{dx} = \alpha,$$

$$\int \mathrm{X}'\log\mathrm{X}'\,dx = \int \alpha\log\alpha[\alpha\varphi'''(\alpha) + 2\varphi''(\alpha)]\,d\alpha = \alpha^2\log\alpha\,\varphi''(\alpha) - \alpha\varphi'(\alpha) + \varphi(\alpha),$$

et l'on a, de même,

$$\int \mathrm{Y}'\log\mathrm{Y}'\,dy = \beta^2\log\beta\,\psi''(\beta) - \beta\psi'(\beta) + \psi(\beta).$$

7. L'équation

$$(38) \qquad s \sin z = \sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}$$

admet les deux intégrales intermédiaires

$$(39) \qquad \frac{r}{\sqrt{1+p^2}} + \sqrt{1+p^2}\cot z = \mathrm{X},$$

$$(40) \qquad \frac{t}{\sqrt{1+q^2}} + \sqrt{1+q^2}\cot z = \mathrm{Y},$$

dont l'intégration offre une application intéressante de la théorie des systèmes linéaires, identiques à leur adjoint.

Pour intégrer l'équation (39), par exemple, posons

$$\alpha = \sin z\sqrt{1+p^2}, \qquad \beta = ip\sin z, \qquad \gamma = \cos z;$$

on déduit de cette équation

$$(41) \qquad \frac{d\alpha}{dx} = -i\mathrm{X}\beta, \qquad \frac{d\beta}{dx} = i\mathrm{X}\alpha - i\gamma, \qquad \frac{d\gamma}{dx} = i\beta,$$

c'est-à-dire un système de la forme (¹)

$$\frac{d\alpha}{dx} = r\beta - q\gamma, \qquad \frac{d\beta}{dx} = p\gamma - r\alpha, \qquad \frac{d\gamma}{dx} = q\alpha - p\beta,$$

où $p = -i$, $q = 0$, $r = -i\mathrm{X}$. On a, de plus, la relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Conformément à la méthode générale, nous poserons

$$(42) \qquad \alpha = \frac{1-\lambda\mu}{\lambda-\mu}, \qquad \beta = i\frac{1+\lambda\mu}{\lambda-\mu}, \qquad \gamma = \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu},$$

λ et μ étant deux inconnues auxiliaires qui doivent satisfaire à l'équation de Riccati

$$(43) \qquad \frac{d\sigma}{dx} = -\mathrm{X}\sigma + \frac{1}{2}(\sigma^2 - 1),$$

dont l'intégration se ramène encore à celle de l'équation linéaire

$$(44) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} - \mathrm{X}\frac{du}{dx} - \frac{u}{4} = 0,$$

en posant $\sigma = \dfrac{u}{2u'}$, u' étant la dérivée $\dfrac{du}{dx}$.

(¹) *Voir* DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, Chap. II.

Soient u_1, u_2 deux intégrales distinctes de cette équation; on a, pour λ et μ, des expressions de la forme

$$\lambda = \frac{u_1 + C_1 u_2}{2(u'_1 + C_1 u'_2)}, \qquad \mu = \frac{u_1 + C_2 u_2}{2(u'_1 + C_2 u'_2)},$$

C_1 et C_2 étant des constantes, et la formule qui donne l'intégrale générale de l'équation (39) peut s'écrire

$$(45) \qquad \gamma = \cos z = \frac{2\dfrac{u_1}{u_2}\dfrac{u'_1}{u'_2} + (C_1 + C_2)\left(\dfrac{u_1}{u_2} + \dfrac{u'_1}{u'_2}\right) + 2C_1C_2}{(C_1 - C_2)\left(\dfrac{u'_1}{u'_2} - \dfrac{u_1}{u_2}\right)}.$$

En observant la symétrie de l'équation aux dérivées partielles (38) par rapport aux variables x et y, on peut en déduire immédiatement l'intégrale générale de cette équation,

$$(46) \qquad \cos z = \frac{2\dfrac{u_1}{u_2}\dfrac{u'_1}{u'_2} + \left(\dfrac{v_1}{v_2} + \dfrac{v'_1}{v'_2}\right)\left(\dfrac{u_1}{u_2} + \dfrac{u'_1}{u'_2}\right) + 2\dfrac{v_1}{v_2}\dfrac{v'_1}{v'_2}}{\left(\dfrac{v'_1}{v'_2} - \dfrac{v_1}{v_2}\right)\left(\dfrac{u'_1}{u'_2} - \dfrac{u_1}{u_2}\right)},$$

v_1 et v_2 étant deux fonctions de la seule variable y qui vérifient une même équation linéaire

$$(47) \qquad \frac{d^2 v}{dy^2} - Y\frac{dv}{dy} - \frac{v}{4} = 0,$$

où Y est une fonction arbitraire de y, et v'_1, v'_2 leurs dérivées.

On peut aussi obtenir, pour représenter l'intégrale générale, des formules renfermant explicitement les deux fonctions arbitraires, sans aucun signe de quadrature. Soit, en effet,

$$X_1 = \frac{u_1}{u_3}, \qquad X_2 = \frac{u'_1}{u'_2}, \qquad Y_1 = \frac{v_1}{v_2}, \qquad Y_2 = \frac{v'_1}{v'_2};$$

des équations (44) et (47) on déduit immédiatement que l'on a

$$(48) \qquad 4\frac{dX_1}{dx}\frac{dX_2}{dx} + (X_1 - X_2)^2 = 0,$$

$$(49) \qquad 4\frac{dY_1}{dy}\frac{dY_2}{dy} + (Y_1 - Y_2)^2 = 0.$$

La formule (46) peut donc s'écrire

$$(46\ bis) \qquad \cos z = \frac{2X_1X_2 + (X_1 + X_2)(Y_1 + Y_2) + 2Y_1Y_2}{(Y_1 - Y_2)(X_1 - X_2)},$$

X_1 et X_2 étant deux fonctions de x assujetties à vérifier la relation (48), et Y_1, Y_2 deux fonctions de y vérifiant la relation toute pareille (49). Il suffira donc, pour obtenir des formules explicites, d'intégrer l'équation de Monge

$$4\,dx\,dy + (x-y)^2\,dz^2 = 0,$$

ce qui revient, d'après la méthode générale, à intégrer l'équation aux dérivées partielles $pq(x-y)^2 + 1 = 0$; la méthode de Lagrange donne sans difficulté une intégrale complète

$$z = a(x+y) + b + \sqrt{a^2(x-y)^2+1} - \log\left[\frac{1+\sqrt{a^2(x-y)^2+1}}{x-y}\right].$$

Le lecteur en déduira aisément, s'il le désire, les formules définitives.

Remarque. — Des formules (42) on tire inversement

$$\mu = \operatorname{tang}\frac{z}{2}\left(p - \sqrt{1+p^2}\right),$$

et, puisque μ vérifie l'équation (43), il s'ensuit qu'en prenant pour inconnue auxiliaire $u = \operatorname{tang}\frac{z}{2}\left(p-\sqrt{1+p^2}\right)$, on sera conduit à une équation du second ordre admettant l'intégrale intermédiaire

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}(u^2-1) = \mathrm{X}u;$$

cette équation rentre donc dans une catégorie que nous avons étudiée déjà (*loc. cit.*, n° 16). En appliquant la méthode indiquée, on retrouvera sans peine les résultats précédents.

8. L'étude que nous venons de faire conduit à une remarque intéressante. Chacune des intégrales intermédiaires qui ont été rencontrées, considérée comme une équation différentielle ordinaire du second ordre, peut être intégrée par des quadratures ou se ramène à une équation de Riccati. Cette propriété appartient aussi aux intégrales intermédiaires des deux équations aux dérivées partielles intégrées dans le Mémoire précédent, comme nous allons le montrer rapidement.

L'équation

$$(50)\qquad (x+y)s = \varphi(p)\psi(q),$$

où l'on a

$$\varphi(p) = 1 + e^{p-\varphi(p)}, \qquad \psi(q) = 1 + e^{q-\psi(q)},$$

admet les deux intégrales intermédiaires

$$\frac{r}{\varphi} - \frac{\varphi}{x+y} = \mathrm{X}, \qquad \frac{t}{\psi} - \frac{\psi}{x+y} = \mathrm{Y}.$$

Considérons, par exemple, l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{r}{\varphi} - \frac{\varphi}{x+y} = \mathrm{X}, \tag{51}$$

où l'on regarde y comme un paramètre. Cette équation ne contenant pas z, il est clair qu'en prenant p pour inconnue, on est conduit à une équation du premier ordre. Pour avoir un résultat plus simple, posons

$$u = \frac{x+y}{1-\varphi(p)};$$

il vient, en ayant égard à la relation $\frac{d\varphi}{dp} = 1 - \frac{1}{\varphi}$,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1-\varphi} - \frac{x+y}{1-\varphi}\,\frac{r}{\varphi},$$

et l'équation (51) devient

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{X}u = 1. \tag{52}$$

L'intégration de l'équation linéaire (52) donnera p, et l'on aura ensuite z par une nouvelle quadrature.

La même méthode donne sans peine l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles (50). Remplaçons, en effet, la fonction arbitraire X par $\frac{\mathrm{X}''}{\mathrm{X}'}$ dans l'équation (52); on en tire $u = \frac{\mathrm{X}+\mathrm{C}}{\mathrm{X}'}$, puis

$$\varphi(p) = 1 - \frac{(x+y)\,\mathrm{X}'}{\mathrm{X}+\mathrm{C}},$$

$$p = 1 - \mathrm{X}'\frac{x+y}{\mathrm{X}+\mathrm{C}} + \log\left(\frac{x+y}{\mathrm{X}+\mathrm{C}}\right) + \log(-\mathrm{X}'),$$

et, enfin,

$$z = (x+y)\log\left(\frac{x+y}{\mathrm{X}+\mathrm{C}}\right) + \int \log(-\mathrm{X}')\,dx + \mathrm{C}_1.$$

Pour que cette valeur de z vérifie l'équation (50), C et C_1 doivent être des fonctions de y, satisfaisant à une certaine relation; en tenant compte de la symétrie, il est évident qu'on doit prendre

$$C = Y, \qquad C_1 = \int \log(-Y')\, dy,$$

Y étant la seconde fonction arbitraire.

9. Prenons enfin l'équation

$$(53) \qquad s = e^z \sqrt{xp^2 + p}$$

qui admet les deux intégrales intermédiaires

$$(54) \qquad r = p^2 + 2X\sqrt{p^2 x + p},$$

$$(55) \qquad t = \frac{q^2}{2} + x\frac{e^{2z}}{2} + Y;$$

nous examinerons successivement chacune de ces deux équations. Il est évident qu'on peut ramener l'équation (54) à une équation du premier ordre, en prenant p pour inconnue; on a vu dans le premier Mémoire (n° 15) qu'en posant $p = \frac{1}{\lambda^2 - x}$, on est conduit, pour déterminer λ, à une équation de Riccati,

$$(56) \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial x} = X(\lambda^2 - x).$$

L'intégration de cette équation donnera p, et il résulte du calcul fait au numéro cité que l'on pourra en déduire z sans aucune quadrature. Soit, en effet, $\lambda = f(x, C)$ l'intégrale générale de l'équation (56), C désignant la constante d'intégration; il suffit de vérifier que la valeur de z déduite de la relation

$$(57) \qquad e^z = \frac{-2\dfrac{\partial\lambda}{\partial C}}{\lambda^2 - x}$$

est une intégrale particulière de l'équation (54), ou que l'on a

$$e^z p = \frac{-2\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial C\,\partial x}(\lambda^2 - x) + 2\dfrac{\partial\lambda}{\partial C}\left(2\lambda\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} - 1\right)}{(\lambda^2 - x)^2},$$

en remplaçant e^z par l'expression (57) et p par $\frac{1}{\lambda^2 - x}$. L'égalité à vérifier

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial C}(\lambda^2 - x) = 2\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial C}$$

est une conséquence immédiate de l'équation (56).

L'équation différentielle du second ordre (55)

$$t - \frac{q^2}{2} - x\frac{e^{2z}}{2} = \mathrm{Y},$$

où l'on regarde maintenant x comme une constante, peut à son tour s'écrire

(58)
$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v^2}{2} = \mathrm{Y},$$

en posant $v = q - \sqrt{x}e^z$. On aura donc v par l'intégration de l'équation de Riccati (58); connaissant v, on aura ensuite z par l'intégration de l'équation linéaire

(59)
$$\frac{\partial \theta}{\partial y} + v\theta = -\sqrt{x},$$

obtenue en posant $e^{-z} = \theta$.

On peut encore obtenir un résultat plus précis. Si l'on pose $v = -\dfrac{2\dfrac{\partial \mu}{\partial y}}{\mu}$, on est ramené à l'équation linéaire

(60)
$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} + \frac{\mathrm{Y}}{2}\mu = 0;$$

cette équation étant supposée intégrée, l'équation (59) devient

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{2\theta}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} = -\sqrt{x},$$

et l'on en tire

$$\theta = -\mu^2\sqrt{x}\int\frac{dy}{\mu^2}.$$

Or, μ étant une intégrale de l'équation linéaire (60), il en est de même du produit $\mu\displaystyle\int\frac{dy}{\mu^2}$, de sorte que e^{-z} est de la forme $\sqrt{x}\,\mathrm{U}$, U étant le produit de deux intégrales particulières de l'équation linéaire (60). Il est facile de le vérifier; si l'on pose, en effet, $e^{-z} = \sqrt{x}\,\mathrm{U}$ dans l'équation (55), elle devient

(61)
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\right)^2 - \mathrm{U}\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2} = \frac{1}{2} + \mathrm{YU}^2,$$

et l'on en déduit, en différentiant et divisant par U, l'équation linéaire du troisième ordre

(62)
$$\frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial y^3} + 2\mathrm{Y}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + \mathrm{Y}'\mathrm{U} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

(63)
$$\mathrm{U} = \mathrm{C}_1\mu_1^2 + \mathrm{C}_2\mu_2^2 + \mathrm{C}_3\mu_1\mu_2,$$

μ_1, μ_2 désignant deux intégrales particulières distinctes de l'équation (60). Cette intégrale dépend de trois constantes arbitraires, tandis que l'intégrale générale de l'équation (61) ne doit dépendre que de deux constantes. Pour savoir à quelle condition on doit assujettir les constantes C_1, C_2, C_3 qui figurent dans la formule (63) pour avoir une intégrale de l'équation (61), désignons par y_0 une valeur particulière de y pour laquelle Y soit holomorphe, et par μ_1, μ_2, les deux intégrales particulières, holomorphes pour $y = y_0$, déterminées par les conditions initiales

$$(\mu_1)_0 = 0, \qquad (\mu'_1)_0 = 1, \qquad (\mu_2)_0 = 1, \qquad (\mu'_2) = 0.$$

On aura ensuite

$$(\mu''_1)_0 = 0, \qquad (\mu''_2)_0 = -\frac{Y_0}{2},$$

et les valeurs initiales de U, U', U'' seront les suivantes

$$(U)_0 = C_2, \qquad (U')_0 = C_3, \qquad (U'')_0 = 2C_1 - C_2 Y_0;$$

en écrivant que ces valeurs initiales satisfont à la relation (61), on obtient la condition $C_3^2 - 4C_1C_2 = 1$ que doivent vérifier les constantes C_1, C_2, C_3. On voit donc, en résumé, que l'on obtient *sans aucune quadrature* l'intégrale générale de l'équation (55) dès qu'on a intégré l'équation linéaire (60).

10. On pourrait aussi se servir de l'intégrale intermédiaire (55) pour obtenir l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles (53). Le calcul qui vient d'être fait montre, en effet, qu'en posant $v = q - \sqrt{x}e^z$, on est conduit à l'équation bien connue

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{64}$$

et la liaison entre les deux équations est obtenue par les formules

$$p = -\frac{\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{e^z}{2\sqrt{x}}\right)^2}{2\sqrt{x}e^z\dfrac{\partial v}{\partial x}}, \qquad q = \sqrt{x}e^z + v, \tag{65}$$

qui deviennent, en posant $e^{-z} = \theta$,

$$\left\{\begin{aligned} &2\sqrt{x}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \left(\theta\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2,\\ &\frac{\partial \theta}{\partial y} + v\theta = -\sqrt{x}. \end{aligned}\right. \tag{66}$$

Remplaçons, dans la dernière de ces équations (66), v par l'intégrale générale de l'équation (64)

$$v = \frac{Y''}{Y'} - \frac{2Y'}{X+Y};$$

on en tire

$$\theta = \frac{(X+Y)^2}{Y'}\left(\frac{\sqrt{x}}{X+Y} + X_1\right),$$

X_1 désignant une nouvelle fonction de x. En substituant cette valeur de θ dans la première des équations (66), on trouve que X et X_1 doivent être liées par la relation

$$(67)\qquad \left(2X_1X' + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 = 4\sqrt{x}X'X'_1.$$

Cette équation de Monge devient, en remplaçant x par x^2, X par y, X_1 par z,

$$(2z\,dy + dx)^2 = 4x\,dy\,dz,$$

et l'emploi de la méthode classique conduit à chercher une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$p^2x + q - 2pz = 0.$$

En appliquant la méthode de Lagrange, on trouve l'intégrale complète

$$z = \frac{b}{(y+a)^2} - \frac{x}{y+a},$$

et l'on en déduirait aisément les expressions générales de x, X, X_1 en fonction d'un paramètre variable.

11. Dans ce Mémoire et dans le précédent, j'ai fait l'étude complète des cas où une équation de la forme $s = f(x, y, z, p, q)$ admet deux intégrales intermédiaires distinctes du second ordre; mais ce n'est là qu'un premier pas vers la solution de ce problème plus général : *Trouver tous les cas où une équation de cette forme admet, pour chacun des systèmes de caractéristiques, une intégrale intermédiaire, dont l'ordre peut être quelconque.* Je vais indiquer en terminant quelques résultats intéressants, quoique très incomplets, sur cette question générale.

Nous poserons, pour plus de symétrie,

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial x},\qquad p_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\qquad \ldots,\qquad p_n = \frac{\partial^n z}{\partial x^n},\qquad \ldots,$$

$$q_1 = \frac{\partial z}{\partial y},\qquad q_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\qquad \ldots,\qquad q_n = \frac{\partial^n z}{\partial y^n},\qquad \ldots,$$

de sorte que l'équation proposée s'écrira

$$s = f(x, y, z, p_1, q_1). \tag{68}$$

On peut, au moyen de cette relation et de celles qu'on en déduit par des différentiations successives, exprimer toute fonction de z et de ses dérivées partielles au moyen de x, y, z et des dérivées p_i et q_i seulement; nous désignerons par $\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x, y, z, p_1, q_1)$ par rapport à x après qu'on n'a laissé dans son expression que les dérivées $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}, q_1$. Ainsi l'on a

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}p_1 + \frac{\partial f}{\partial p_1}p_2 + \frac{\partial f}{\partial q_1}f,$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}p_1 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial q_1}fp_1 + \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial z}p_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}p_1^2 \\ & + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial p_1}p_1 p_2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial p_1}p_2 + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\,\partial q_1}p_2 + \frac{\partial f}{\partial z}p_2 + \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}p_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}p_2^2 \\ & + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial q_1}f + \frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2}f^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)^2 f + \frac{\partial f}{\partial p_1}p_3;\end{aligned}$$

d'une façon générale $\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)$ est une fonction entière de $p_2, p_3, \ldots, p_{n+1}$, et ne contient qu'un terme en p_{n+1}, qui est $\frac{\partial f}{\partial p_1}p_{n+1}$.

Cela posé, supposons que l'équation (68) admette une intégrale intermédiaire de la forme

$$\varphi(x, y, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \mathrm{X}, \tag{69}$$

X étant une fonction arbitraire de x; la fonction φ doit satisfaire aux deux équations linéaires

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}q_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}f + \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\left(\frac{df}{dx}\right) + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right) = 0, \\ & \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} = 0, \end{aligned}\right. \tag{70}$$

et ce système, abstraction faite de la solution évidente $\varphi = x$, n'admet qu'une intégrale distincte si, comme nous le supposons, l'équation proposée (68) n'admet aucune intégrale intermédiaire d'ordre inférieur à n, pour ce système de caractéristiques. Nous savons aussi que l'on peut supposer la fonction φ de la forme $\mathrm{A}p_n + \mathrm{B}$ (voir *loc. cit.*, p. 35), A et B ne dépendant pas de p_n. En substituant cette expression de φ dans la première des équations (70), et égalant à zéro le coefficient de p_n, il vient

$$\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}q_1+\frac{\partial A}{\partial p_1}f+\ldots+\frac{\partial A}{\partial p_{n-1}}\left(\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\right)+A\frac{\partial f}{\partial p_1}=0,$$

ce qui peut s'écrire, en posant $\log A = u$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q_1+\frac{\partial u}{\partial p_1}f+\ldots+\frac{\partial u}{\partial p_{n-1}}\left(\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\right)+\frac{\partial f}{\partial p_1}=0.$$

Soit p_m la dérivée de l'ordre le plus élevé qui figure dans u $(2 \leqq m \leqq n-1)$; l'équation précédente est, en n'écrivant pas les termes identiquement nuls,

$$(71)\qquad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q_1+\frac{\partial u}{\partial p_1}f+\ldots+\frac{\partial u}{\partial p_m}\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)+\frac{\partial f}{\partial p_1}=0;$$

différentions de nouveau cette équation par rapport à p_m, et posons $\log\frac{\partial u}{\partial p_m}=v$, il vient

$$(72)\qquad \frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q_1+\frac{\partial v}{\partial p_1}f+\ldots+\frac{\partial v}{\partial p_m}\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)+\frac{\partial f}{\partial p_1}=0,$$

et, en retranchant les équations (71) et (72) membre à membre,

$$\frac{\partial(v-u)}{\partial y}+\frac{\partial(v-u)}{\partial z}q_1+\frac{\partial(v-u)}{\partial p_1}f+\ldots+\frac{\partial(v-u)}{\partial p_m}\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)=0.$$

L'équation précédente, en y remplaçant $v-u$ par φ, est identique à celle qui déterminerait les intégrales intermédiaires d'ordre m; dans l'hypothèse où nous nous plaçons, cette équation n'admet pas d'autre intégrale qu'une fonction de la seule variable x. On doit donc avoir $v-u=f(x)$, ou encore $\log\frac{\partial u}{\partial p_m}-u=\log(-X)$; on en tire

$$e^{-u}\frac{\partial u}{\partial p_m}=-X,$$

et, par suite,

$$e^{-u}=X[p_m+\psi(x,y,z,p_1,\ldots,p_{m-1})].$$

Comme on peut toujours multiplier A par une fonction arbitraire de la seule variable x, on voit qu'on peut supposer A de la forme

$$A=\frac{1}{p_m+\psi(x,y,z,p_1,\ldots,p_{m-1})},$$

et la relation (71) devient

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial z}q_1+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial p_{m-1}}\left(\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}}\right)+\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)=\frac{\partial f}{\partial p_1}(p_m+\psi),$$

condition qui exprime que les deux équations

$$s = f(x, y, z, p_1, q_1), \qquad p_m + \psi = 0$$

forment un système en involution. Si nous faisons une hypothèse de plus, en supposant que l'équation proposée $s = f$ ne forme un système en involution avec aucune équation d'ordre inférieur à n, nous voyons que le coefficient A ne doit renfermer que x, y, z, p_1, et, en posant $A = \frac{1}{\lambda}$, on doit avoir

$$(73) \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial z} q_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial p_1} f - \lambda \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0.$$

En reprenant les mêmes raisonnements pour la seconde famille de caractéristiques, on démontrera de la même façon que l'équation

$$(74) \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial z} p_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial q_1} f - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$$

doit admettre une intégrale indépendante de p_1. Ces équations (73) et (74) sont identiques aux équations (E'), (E'_1) du premier Mémoire (p. 36-37). Toutes les conclusions déduites uniquement de ces deux équations subsistent donc ici, et, par conséquent, l'équation proposée peut être ramenée à l'une des formes suivantes :

$$s = H(x, y, z)\,\varphi(x, p)\,\psi(y, q), \qquad \text{où} \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} \neq 0, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2} \neq 0,$$

$$s = q\,\varphi(x, y, z, p), \qquad \text{où} \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} \neq 0,$$

$$s = \varphi(x, y, z, p),$$

$$s = H(x, y, z)pq.$$

Remarque. — Il peut se faire que les équations différentielles d'un des systèmes de caractéristiques de l'équation $s = f(x, y, z, p, q)$ n'admettent aucune combinaison intégrable d'ordre inférieur à n, et que cependant il existe une équation isolée d'ordre inférieur à n, formant avec $s = f$ un système en involution. En voici un exemple emprunté aux équations de M. Moutard. Soit

$$s + ap + bq + cz = 0$$

une équation linéaire intégrable par la méthode de Laplace, et soit

$$A_0 p_n + A_1 p_{n-1} + \ldots + A_n z = X,$$

une intégrale intermédiaire d'ordre n, A_0, A_1, …, A_n étant des fonctions de x

et de y; en posant $z = e^v$ puis $\frac{\partial v}{\partial x} = u$, on est conduit à une nouvelle équation en u, qui admet une intégrale intermédiaire d'ordre n. On peut écrire, en effet, l'intégrale intermédiaire précédente

$$e^v\left(A_0 \frac{\partial^n v}{\partial x^n} + \ldots\right) = X;$$

on en tire

$$e^v\left(A_0 \frac{\partial^{n+1} v}{\partial x^{n+1}} + \ldots\right) = X',$$

en n'écrivant que les dérivées de l'ordre le plus élevé; et, en divisant membre à membre, il vient

$$\frac{A_0 \frac{\partial^{n+1} v}{\partial x^{n+1}} + \ldots}{A_0 \frac{\partial^n v}{\partial x^n} + \ldots} = \frac{A_0 \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + \ldots}{A_0 \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + \ldots} = \frac{X'}{X} = \mathcal{X}.$$

Cette dernière équation forme, avec l'équation du second ordre en u, un système en involution, quelle que soit la fonction arbitraire $\mathcal{X}$. Cette dernière est, en général, d'ordre n, mais, pour $\mathcal{X} = \infty$, elle se réduit à une équation d'ordre $n - 1$.